LØSNING TIL
Vejledende eksempler på eksamensopgaver og eksamensopgaver i matematik 2010 STX-B-niveau
(Gul bog)

1.001: Da man kender hældningskoefficienten, -2, for den rette linje og et punkt, P(3,0), den går igennem, kan en ligning for linjen bestemmes ved:

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

$$y - 0 = -2 \cdot (x - 3) \quad \Leftrightarrow \quad y = -2x + 6$$

Der spørges efter en forskrift og ikke en ligning, så svaret er $\underline{\underline{f(x) = -2x + 6}}$

1.002: $f(x) = a \cdot x + b$

a er hældningskoefficienten for grafen (der er en ret linje) og b er skæringen med y-aksen.

Blå graf (f_1):
Funktionen er voksende, så hældningskoefficienten er positiv: $\underline{\underline{a > 0}}$
Grafen skærer y-aksen på den negative del (under x-aksen), så $\underline{\underline{b < 0}}$

Rød graf (f_2):
Funktionen er aftagende, så hældningskoefficienten er negativ: $\underline{\underline{a < 0}}$
Grafen skærer y-aksen på den positive del (over x-aksen), så $\underline{\underline{b > 0}}$

Grøn graf (f_3):
Funktionen er konstant: $\underline{\underline{a = 0}}$
Grafen skærer y-aksen på den positive del (over x-aksen), så $\underline{\underline{b > 0}}$

1.003: $f(x) = 10 \cdot x + 200$

f(x) er den samlede vægt af dåse og kugler, mens x er antallet af kugler i dåsen.
Når x = 0, dvs. når der ingen kugler er i dåsen, får man funktionsværdien 200 ($f(0) = 200$), dvs. at tallet 200 fortæller, at <u>dåsen vejer 200 (enheden er ikke oplyst).</u>
Hældningen er 10, dvs. at hver gang x vokser med 1 (dvs. når der lægges 1 kugle mere i dåsen), så vokser funktionsværdien med 10. Dette fortæller, at <u>hver kugle vejer 10 (igen er enheden ukendt).</u>

1.004: $f(x) = 10 \cdot x + 200$

x angiver antallet af kugler i en dåse.
f(x) angiver den samlede vægt af dåse og kugler.

Dåsens vægt svarer til den samlede vægt, når der ikke er nogen kugler, dvs. x = 0.
Da f(0) = 200, har man altså, at <u>dåsen vejer 200</u> (der er ikke oplyst en enhed)

Når x øges med 1, øges f(x) med 10 (svarende til hældningen).
Derfor <u>vejer en kugle 10</u>

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>1.005</u>: Udtrykket reduceres ved i første led at benytte den første kvadratsætning og i andet led gange ind i parentesen:

$$3(p+q)^2-6p(q-p)=3\cdot\left(p^2+q^2+2pq\right)-6pq+6p^2=$$

$$3p^2+3q^2+6pq-6pq+6p^2=9p^2+3q^2=\underline{\underline{3\left(3p^2+q^2\right)}}$$

<u>1.006:</u> Man kan genkende andengradspolynomiet som kvadratet på (x-3), og hermed har man fundet både løsning og faktorisering. Men hvis man ikke genkender polynomiet, kan man løse ligningen med diskriminantmetoden:

$$x^2-6x+9=0$$

$$d=(-6)^2-4\cdot1\cdot9=36-36=0$$

Dvs. der er én løsning:

$$x=\frac{-(-6)}{2\cdot1}=\frac{6}{2}=\underline{\underline{3}}$$

Denne løsning fungerer som dobbeltrod i det tilsvarende andengradspolynomium, så man har:

$$x^2-6x+9=\underline{\underline{(x-3)^2}}$$

<u>1.007:</u> a) $\frac{1}{2}$ indsættes i ligningen for at se, om det giver et sandt udsagn:

$$8\left(\frac{1}{2}\right)^3+2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow$$

$$8\cdot\frac{1}{8}+2\cdot\frac{1}{4}-1=0\Leftrightarrow$$

$$1+\frac{1}{2}-1=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}=0$$

Da dette er et falsk udsagn, er $\frac{1}{2}$ <u>ikke</u> løsning til ligningen.

<u>1.008:</u> a) $p(x)=x^3+kx^2-3x+6$

-2 er rod i polynomiet, når *p(-2) = 0*.

Man får altså ligningen:

$$0=(-2)^3+k\cdot(-2)^2-3\cdot(-2)+6\quad\Leftrightarrow$$

$$0=-8+4k+6+6\quad\Leftrightarrow$$

$$4k=-4\quad\Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{k=-1}}$$

1.009: a) $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10-0}{2-(-3)} = \frac{10}{5} = 2$

Indsættes i $y = ax + b$ for at finde *b*-værdien: $0 = 2 \cdot (-3) + b \Leftrightarrow b = 6$

Hermed er forskriften $\underline{\underline{f(x) = 2x + 6}}$ (eller $y = 2x + 6$)

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow$$
$$2x + 6 = 3 \Leftrightarrow$$
$$2x = -3 \Leftrightarrow$$
$$\underline{\underline{x = -\frac{3}{2}}}$$

1.010: a) $f(x) = x^2 - x - 2$

Der er lagt op til, at man først skal finde rødderne og derefter faktorisere, men det kan gøres hurtigere i omvendt rækkefølge, hvis man kan finde to tal, hvis sum er -1, og hvis produkt er -2. Det gælder for -2 og 1, så man har:

$$f(x) = x^2 - x - 2 = \underline{\underline{(x-2)\cdot(x+1)}}$$

Og så kan rødderne aflæses med brug af nulreglen:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)\cdot(x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x-2 = 0 \vee x+1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 2 \vee x = -1}}$$

Og nu den anden metode:

Først findes rødderne ved hjælp af diskrimanten:

$d = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$ dvs. 2 rødder:

$$r_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1+3}{2} = \underline{\underline{2}}$$

$$r_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1-3}{2} = \underline{\underline{-1}}$$

Den generelle faktorisering af et polynomium er: $f(x) = a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2)$.

Dvs. man har: $f(x) = 1 \cdot (x-2) \cdot (x - (-1)) = \underline{\underline{(x-2)\cdot(x+1)}}$

1.011: $f(x) = -2x^2 + 6x + 1$

Først beregnes diskriminanten, og derefter sættes ind i toppunktsformlen:

$$d = 6^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 = 36 + 8 = 44$$

$$T\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-d}{4a}\right) = T\left(\frac{-6}{2\cdot(-2)}; \frac{-44}{4\cdot(-2)}\right) = \underline{\underline{T\left(\frac{3}{2}; \frac{11}{2}\right)}}$$

1.012: $f(x) = 4x^2 + 3x - 2$

c-værdien angiver skæringen med 2. aksen, så man har altså, at parablen skærer 2. aksen i (0,-2).

a-værdien 4 fortæller, at parablens ben vender opad, samt at de er stejlere end benene på $g(x) = x^2$.

Da a-værdien og b-værdien (+3) har samme fortegn, vil parablens toppunkt ligge til venstre for 2.aksen (jævnfør toppunktsformlen).

<u>1.013:</u> a) Polynomiet med grafen F:

Benene vender opad, så $\underline{\underline{a > 0}}$

Der er 2 skæringer med x-aksen, så $\underline{\underline{d > 0}}$

Polynomiet med grafen G:
Benene vender opad, så $\underline{\underline{a > 0}}$

Der er ingen skæringer med x-aksen, så $\underline{\underline{d < 0}}$

Polynomiet med grafen H:
Benene vender nedad, så $\underline{\underline{a < 0}}$

Der er 2 skæringer med x-aksen, så $\underline{\underline{d > 0}}$

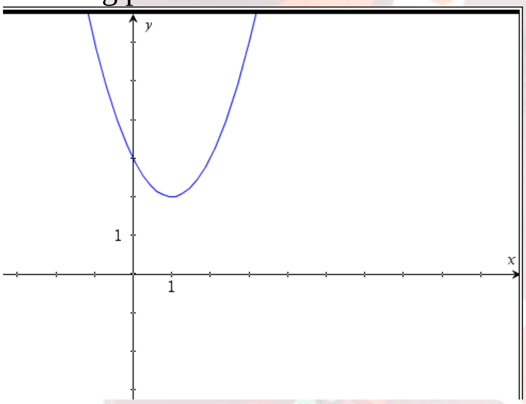
<u>1.014:</u> $f(x) = a \cdot x^2 - 2x + 3$, hvor a er positiv.

Parablen skal skære y-aksen i 3, <u>dvs. grafen skal gå gennem punktet (0,3).</u>

Førstekoordinaten for parablens toppunkt er $\frac{-b}{2a}$. b er negativ, mens a er positiv, så brøken bliver et positivt tal, og dermed ligger <u>parablens toppunkt til højre for y-aksen.</u>

$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-2)^2 - 4 \cdot a \cdot 3 = 4 - 12a$, og da a er positiv, kan diskriminanten både blive negativ, nul eller positiv. Man kan altså <u>ikke sige noget om toppunktets placering i forhold til x-aksen.</u>

En mulig parabel er så:



<u>1.015:</u> Den generelle forskrift for et 2. gradspolynomium er: $p(x) = ax^2 + bx + c$.

Oplysningerne om, at rødderne er 5 og 9, samt at punktet (7,4) ligger på grafen, skal bruges til at bestemme en forskrift.

Da rødderne er 5 og 9 har man ifølge faktoriseringsreglen, at:

$p(x) = a(x-5)(x-9)$

Da punktet (7,4) ligger på grafen, har man:

$4 = a(7-5)(7-9) \quad \Leftrightarrow \quad 4 = a \cdot 2 \cdot (-2) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a = -1}$

Dermed er forskriften: $\underline{\underline{p(x) = -(x-5)(x-9)}}$

Det kan evt. også skrives om til formen $p(x) = ax^2 + bx + c$:

$p(x) = -(x^2 - 9x - 5x + 45) = \underline{\underline{-x^2 + 14x - 45}}$

1.016: Lad h være højden af kassen.

Rumfanget V af en kasse er produktet af længden, bredde og højden, og da længden og bredden er ens og betegnet med x, får man altså:

$$V = l \cdot b \cdot h$$

$$125 = x \cdot x \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad 125 = x^2 \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{125}{x^2}$$

Kassens overflade består af 6 rektangler (hvoraf top og bund er kvadrater). De fire sider er lige store, og det samme kan siges om top og bund. Derfor bliver overfladearealet A:

$$A = 4 \cdot x \cdot h + 2 \cdot x \cdot x = 4xh + 2x^2$$

Arealet skulle udtrykkes som funktion af sidelængden x, dvs. ikke både ved h og x.

Derfor udnyttes, at man fra overvejelserne omkring rumfanget har $h = \frac{125}{x^2}$, hvilket indsættes i udtrykket for overfladearealet:

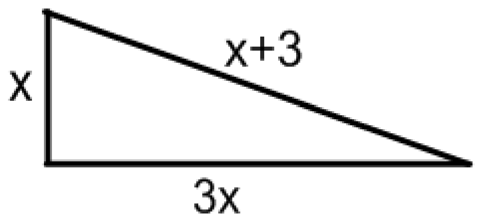
$$A(x) = 4x \cdot \frac{125}{x^2} + 2x^2 = \underline{\underline{\frac{500}{x} + 2x^2}}$$

1.017: Længden af den korteste katete betegnes med x.

Da den længste katete er 3 gange så lang som den korteste, har den længden 3x.

Da hypotenusen er 3 enheder længere end den korteste katete har den længden x+3.

Man har altså følgende retvinklede trekant:



Da trekanten er retvinklet, kan man benytte Pythagoras' læresætning:

$$(3+x)^2 = x^2 + (3x)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$9 + x^2 + 6x = x^2 + 9x^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$9x^2 - 6x - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 - \frac{2}{3}x - 1 = 0$$

Dette er en andengradsligning, der kan løses ved diskriminantmetoden:

$d = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = \frac{4}{9} + 4 = \frac{4}{9} + \frac{36}{9} = \frac{40}{9} > 0$, dvs. der er to løsninger til ligningen.

$$x = \frac{-\left(-\frac{2}{3}\right) \pm \sqrt{\frac{40}{9}}}{2 \cdot 1} = \frac{\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{9}}}{2} = \frac{\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{40}}{3}}{2} = \frac{2}{3 \cdot 2} \pm \frac{\sqrt{40}}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{40}}{3 \cdot \sqrt{4}} = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{10}}{3}$$

Da kvadratroden af 10 er større end 1, vil den ene løsning blive negativ, hvilket ikke er muligt for længden af en side, så længden af den korteste katete er:

$$\underline{\underline{x = \frac{1 + \sqrt{10}}{3}}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

1.018: Kvadratet på *d* skrives med matematisk notation: d^2

Hvis to størrelser er 'omvendt proportionale', giver produktet af dem en konstant, dvs:

$N \cdot d^2 = k$, hvor *k* er en konstant.

Da *N* skal udtrykkes ved *d* har man altså: $\underline{\underline{N = \frac{k}{d^2}}}$

1.019: Fordoblingskonstanten er den faste størrelse, der skal lægges til en vilkårlig x-værdi, for at den tilsvarende y-værdi fordobles.

Sammenhængen mellem fordoblingskonstanten X_2 og fremskrivningsfaktoren/grundtallet a er:

$a = \frac{\ln(2)}{\ln(X_2)}$ eller $a = \frac{\log(2)}{\log(X_2)}$

Opgaven kan gribes an på flere måder:

1) Grafen for funktionen C ses at vokse svagest, dvs. man skal her lægge et større tal til en vilkårlig x-værdi (dvs. gå længere ud af x-aksen) end for de to andre grafer, for at den tilsvarende y-værdi fordobles. Dermed har $\underline{\underline{\textit{funktion}\quad C}}$ den største fordoblingskonstant.
2) Samme konklusion kan opnås ved at tage udgangspunkt i a-værdien. Grafen for funktion C ses at have den mindst vækstrate og dermed mindste grundtal, og dermed må nævneren på højresiden i udtrykket $a = \frac{\ln(2)}{\ln(X_2)}$ være større end nævneren i de tilsvarende udtryk for de to andre grafer. Da den naturlige logaritmefunktion er en voksende funktion, må dermed fordoblingskonstanten for funktion C også være den største.
3) Alle tre grafer går gennem punktet (0;0,5). Fordoblingskonstanterne for de enkelte funktioner er altså de x-værdier, der giver funktionsværdien 1 (en fordobling af 0,5). Disse x-værdier bestemmes grafisk ved at tegne en vandret linje med ligningen y = 1, og x-værdierne for skæringspunkterne giver så fordoblingskonstanterne. Grafen for C skæres i den største x-værdi og har dermed den største fordoblingskonstant.

1.020: $y = 10000 \cdot 1{,}12^x$

y er antallet af individer i populationen.
x er tiden målt i måneder.

Fra start (når x = 0) er y = 10000, dvs. der er $\underline{\underline{10000 \text{ individer fra start}}}$

Fremskrivningsfaktoren *a* er 1,12, og da *a* = *(1+r)*, er vækstraten *r* = *0,12* = *12%*.

Dvs. at $\underline{\underline{\textit{populationen}\quad \textit{vokser}\quad \textit{med}\quad 12\%\quad \textit{om}\quad \textit{måneden}}}$

1.021: Den blå graf (f_1) er grafen for en voksende funktion, så her er $a_1 > 1$.

Den grønne graf (f_2) er grafen for en aftagende funktion, så her er $0 < a_2 < 1$.

Den røde graf (f_3) er grafen for en voksende funktion, så her er $a_3 > 1$.

Desuden ses væksten at være kraftigere for f_1 end for f_3, så $a_1 > a_3$.

Man har altså:

$\underline{\underline{a_1 > a_3 > 1 > a_2 > 0}}$

1.022: f er en eksponentielt voksende funktion. $f(2)=1 \quad f(4)=9$

Grafen går altså gennem punkterne (2,1) og (4,9).

Koordinaterne for de to punkter indsættes i forskriften for en eksponentiel udvikling:

$$\left.\begin{matrix} 1 = b\cdot a^2 \\ 9 = b\cdot a^4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{9}{1} = \frac{b\cdot a^4}{b\cdot a^2} = a^2 \quad \Leftrightarrow a^2 = 9$$

Da a er positiv, når man arbejder med eksponentielle udviklinger, har man altså: $a = 3$.

Dette indsættes i den øverste ligning:

$$1 = b\cdot 3^2 \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{1}{9}$$

Altså er forskriften for f: $\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{9}\cdot 3^x}}$

1.023: Fordoblingskonstanten er 5. Dvs. at hver gang man lægger 5 til en x-værdi, så vil den tilsvarende y-værdi fordobles. Man kender funktionsværdi i x = 3. Den er 4,5. Man bemærker, at der spørges om funktionsværdien i x = 8, der netop er fremkommet ved at lægge 5 til x-værdien 3. Dermed må der være sket en fordobling af y-værdien fra 4,5 til 9. Dette opskrives:

$$f(8) = f(3+5) = f(3+X_2) = 2\cdot f(3) = 2\cdot 4{,}5 = \underline{\underline{9}}$$

1.024: Det er oplyst, at f er en eksponentiel udvikling med halveringskonstanten 10.

Det er desuden oplyst, at f(12) = 30.

Halveringskonstanten er det tal der lagt til x-værdien halverer y-værdien. Afstanden mellem x-værdierne 2 og 12 er netop 10, dvs. y-værdien er halveret, når x-værdien er øget fra 2 til 12. Altså er:

$\underline{\underline{f(2) = 60}}$

1.025: P(6,40) og Q(3,20).

Man bemærker, at der fra punktet Q til punktet P er sket en fordobling af y-værdien fra 20 til 40. Dermed må det være fordoblingskonstanten, der er lagt til x-værdien for Q for at få x-værdien for P.

Man har altså: $3 + X_2 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad X_2 = 6 - 3 = \underline{\underline{3}}$

1.026: $D(T) = 15{,}71\cdot 0{,}8913^T$

D er holdbarheden målt i døgn og T er fryserens temperatur målt i °C.

Forskriften fortæller, at holdbarheden er en eksponentielt aftagende funktion af temperaturen.

Når temperaturen er 0°C er holdbarheden 15,71døgn, og vækstraten er r = a-1 = 0,8913-1 = -0,1087 = -10,87%, dvs. at for hver grad temperaturen øges, falder holdbarheden med 10,87%.

1.027: a) $f(x) = 7\ln x - 2x^2$

For at bestemme tangentens ligning skal hældningen og skæringspunktets 2.koordinat findes.

Den afledede funktion findes ved at differentiere ledvist:

$$f'(x) = 7\cdot\frac{1}{x} - 2\cdot 2x = \frac{7}{x} - 4x$$

Skæringspunktets andenkoordinat: $f(1) = 7\ln 1 - 2\cdot 1^2 = 0 - 2 = -2$

Tangentens hældning: $f'(1) = \frac{7}{1} - 4\cdot 1 = 7 - 4 = 3$

Hermed bliver tangentens ligning: $y - (-2) = 3\cdot(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = 3x - 5}}$

1.028: $f(x) = x^3 + e^x$

Den afledede funktion bestemmes ved at differentiere ledvist:

$f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} + e^x = \underline{\underline{3x^2 + e^x}}$

1.029: $f(x) = e^x + 3x$

Først bestemmes den afledede funktion ved at differentiere ledvist:

$f'(x) = e^x + 3$

Derefter bestemmes differentialkvotienten i 0:

$f'(0) = e^0 + 3 = 1 + 3 = \underline{\underline{4}}$

1.030: $f(x) = \dfrac{3}{x} + x^5$

Den afledede funktion bestemmes ved ledvis differentiation:

$f'(x) = 3 \cdot \dfrac{-1}{x^2} + 5 \cdot x^{5-1} = \underline{\underline{\dfrac{-3}{x^2} + 5x^4}}$

1.031: $f(x) = \sqrt{x} + 3x$

Først bestemmes den afledede funktion ved at differentiere ledvist:

$f'(x) = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} + 3$

Derefter bestemmes differentialkvotienten i 9:

$f'(9) = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{9}} + 3 = \dfrac{1}{2 \cdot 3} + 3 = \dfrac{1}{6} + 3 = \dfrac{1}{6} + \dfrac{18}{6} = \underline{\underline{\dfrac{19}{6}}}$

1.032: $f(x) = 4\sqrt{x} - 1 \quad P(4, f(4))$

For at kunne bestemme en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P, skal man kende tangentens hældning samt 2. koordinaten til røringspunktet P.

Først bestemmes hældningen ved at finde den afledede funktion og efterfølgende differentialkvotienten i 4 (som netop angiver tangenthældningen):

$f'(x) = 4 \cdot \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} - 0 = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

$f'(4) = \dfrac{2}{\sqrt{4}} = \dfrac{2}{2} = 1$ ← Tangenthældningen.

Røringspunktets andenkoordinat bestemmes:

$f(4) = 4\sqrt{4} - 1 = 4 \cdot 2 - 1 = 7$

Da man nu kender både hældning og et punkt på tangenten, kan en ligning for denne bestemmes:

$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$

$y - 7 = 1 \cdot (x - 4) \quad \Leftrightarrow \quad y = x - 4 + 7 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = x + 3}}$

<u>*1.033:*</u> $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x$

a) For at bestemme monotoniforholdene findes først den afledede funktions nulpunkter:

$f'(x) = x^2 - 4x - 5$

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - 4x - 5$

$d = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$$

Fortegnet for den afledede funktion skal findes i de intervaller, der afgrænses af de fundne nulpunkter:

$f'(-2) = (-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 5 = 4 + 8 - 5 = 7 > 0$

$f'(0) = -5 < 0$

$f'(10) = 10^2 - 4 \cdot 10 - 5 = 100 - 40 - 5 = 55 > 0$

Hermed bliver fortegnsskemaet for den afledede funktion:

x		-1		5	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

Man har altså:

$\underline{\underline{f(x) \text{ er voksende i intervallerne }]-\infty;-1] \text{ og } [5;\infty[}}$

$\underline{\underline{f(x) \text{ er aftagende i intervallet } [-1;5]}}$

<u>*1.034:*</u> a) $f'(x) = x^2 - 12x$

For at bestemme funktionens monotoniintervaller findes først den afledede funktions nulpunkter:

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - 12x \quad \Leftrightarrow \quad x(x-12) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = 12$

Fortegnet for den afledede funktion skal findes i de intervaller, der afgrænses af de fundne nulpunkter:

$f'(-1) = (-1)^2 - 12 \cdot (-1) = 1 + 12 = 13 > 0$

$f'(1) = 1^2 - 12 \cdot 1 = -11 < 0$

$f'(20) = 20^2 - 12 \cdot 20 = 400 - 240 = 160 > 0$

Hermed bliver fortegnsskemaet for den afledede funktion:

x		0		12	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

Man har altså:

$\underline{\underline{f(x) \text{ er voksende i intervallerne }]-\infty;0] \text{ og } [12;\infty[}}$

$\underline{\underline{f(x) \text{ er aftagende i intervallet } [0;12]}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk   Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>*1.035:*</u> $Dm(f) =]2;10[$

x	2		3		5		8		10
$f'(x)$	i.d	-	0	+	0	+	0	-	i.d
$f(x)$	i.d	↘		↗		↗		↘	i.d

$f(x)$ *er aftagende i intervallerne* $]2;3]$ *og* $[8;10[$

$f(x)$ *er voksende i intervallet* $[3;8]$

Der er lokalt minimum for $x = 3$.

Der er vandret vendetangent i x = 5.

Der er lokalt maksimum i x = 8.

Det er desuden oplyst, at f(3) = -3 og f(8) = 8, dvs. grafen skal gå gennem punkterne (3,-3) og (8,8)

En graf skal altså opfylde ovenstående punkter.

<u>*1.036:*</u> Det er væsentligt at bemærke, at det er grafen for den afledede funktion *f'* og IKKE grafen for funktionen *f* , der er afbildet.

Man kan aflæse nulpunkterne for den afledede funktion til:

$x = -3 \vee x = -1 \vee x = 4$

Disse tre nulpunkter inddeler x-aksen i fire intervaller, og i disse intervaller kan man se bestemme fortegnet for den afledede funktion ved at se, om grafen ligger over eller under x-aksen i det pågældende interval. Dette bruges til at lave fortegnsskemaet:

x		-3		-1		4	
f'(x)	-	0	+	0	-	0	+
f(x)	↘		↗		↘		↗

Man har altså:

<u>f er aftagende i]-∞;-3] og i [-1;4]</u>

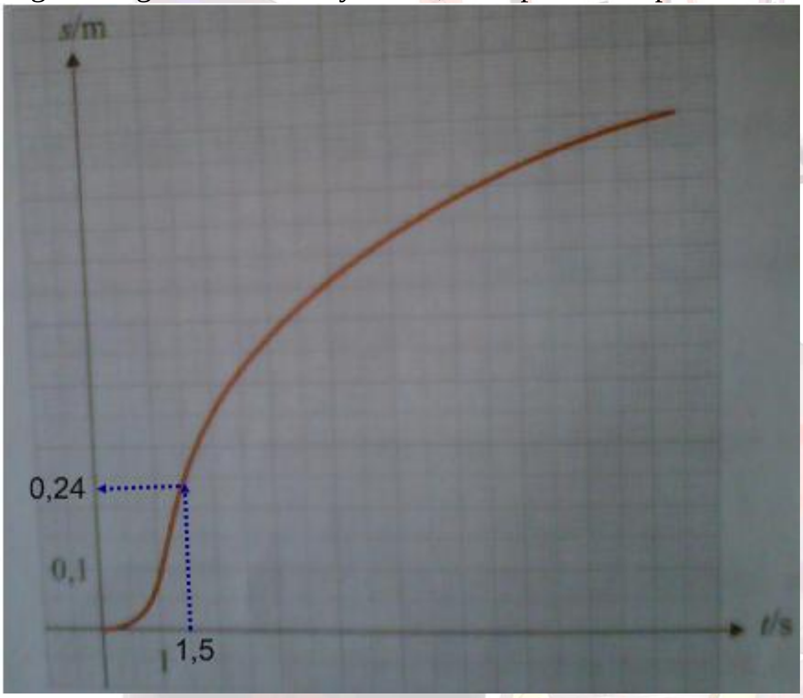
<u>f er voksende i [-3;-1] og i [4;∞[</u>

<u>f har lokalt minimum i x = -3 og i x = 4.</u>

<u>f har lokalt maksimum i x = -1</u>

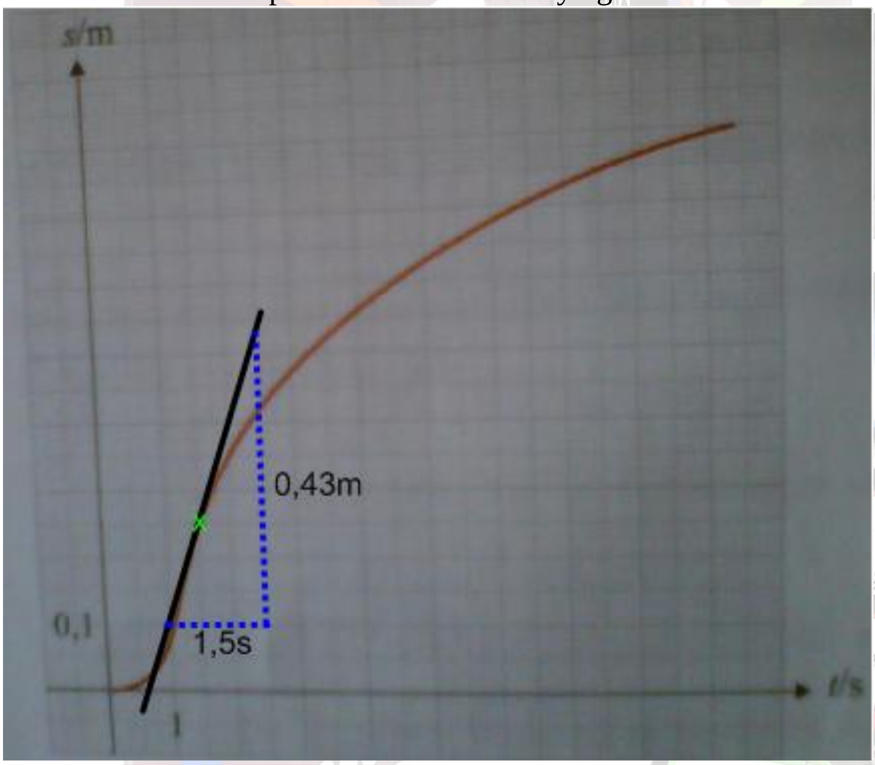
Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

1.037: Partiklens position til tidspunktet t = 1,5 (1,5 sekunder) bestemmes ved at gå op fra x-aksen ved 1,5 til grafen og vandret ud til y-aksen, hvor partiklens position kan aflæses:



Dvs. at positionen er y = 0,24m

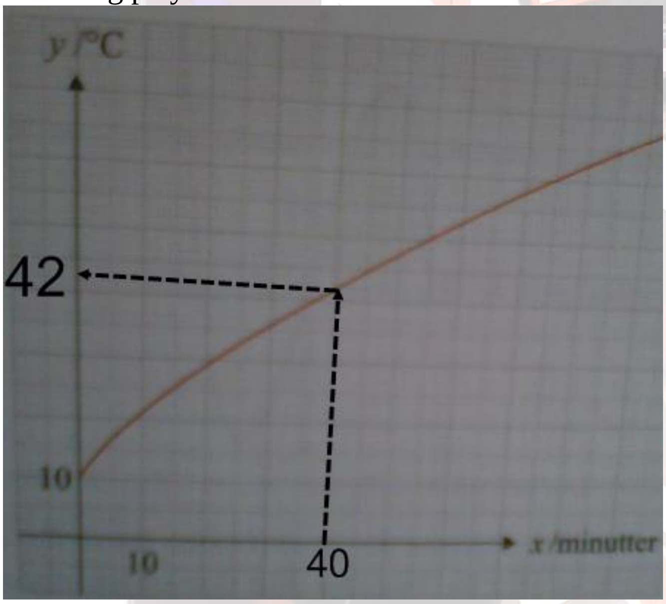
Partiklens hastighed det pågældende tidspunkt svarer til hældningen for den tangent til grafen, der rører grafen til tidspunktet t = 1,5s.
Derfor tegnes efter bedste evne en tangent, der rører det pågældende sted, og hældningen kan bestemmes ved at se på forholdet mellem Δy og Δx:



Tangenthældningen: $a_{tangent} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,43m}{1,5s} \approx 0,3\frac{m}{s}$

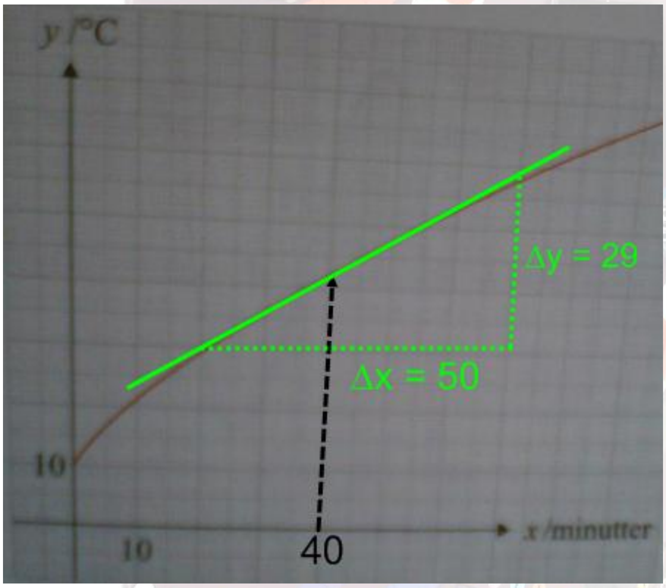
Dvs. at partiklens hastighed er y'=0,3m/s

1.038: Temperaturen i stegens indre er angivet op ad y-aksen, mens tiden er angivet ud ad x-aksen.
Så temperaturen efter 40 minutter aflæses ved fra 40 på x-aksen at gå op til grafen og vandret ud til aflæsning på y-aksen:



Dvs. efter 40 minutter er temperaturen i stegens indre på 42°C

Hastigheden det pågældende sted bestemmes ved at finde hældningen for tangenten i punktet med førstekoordinaten 40:



Hermed er:

$$y' = \frac{29°C}{50\,\text{min}} = \underline{\underline{0,58\frac{°C}{\text{min}}}}$$

1.039: $s(t) = 5 \cdot t^{\frac{1}{2}}$

s angiver strækningen målt i meter, mens t er tiden målt i sekunder.
Først bestemmes den afledede funktion og derefter differentialkvotienten i t = 16:

$$s'(t) = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot t^{\frac{1}{2}-1} = \frac{5}{2} \cdot t^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$s'(16) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{5}{8}}}$$

Dette vil sige, at efter 16 sekunder bevæger partiklen sig med hastigheden $\underline{\underline{\frac{5}{8}\frac{m}{s}}}$

1.040: Det er oplyst, at:

$f(t) = 20 + 150 \cdot \ln(8t+1)$
$f'(3) = 48$
, hvor f er temperaturen målt i °C og t er tiden i minutter.

Den oplyste differentialkvotient fortæller os, at 3 minutter efter at ovnen er tændt, øges temperaturen i den med 48 °C pr. minut.

1.041: N(t) angiver antal indbyggere i en by målt i tusinder, og t angiver tiden i år efter 1950.
Det er oplyst, at N'(40) = 0,027.
Dette fortæller, at i 1990 voksede antallet af indbyggere i byen med 27 personer om året.

1.042: De bestemte integraler beregnes ved hjælp af stamfunktionerne:

$$\int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = \frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{1}{4} \cdot 0^4 = \frac{1}{4} \cdot 16 = \underline{\underline{4}}$$

$$\int_0^2 x^{-\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{1}x^{\frac{1}{2}}\right]_0^2 = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot 0^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2\sqrt{2}}}$$

1.043: De bestemte integraler beregnes ved hjælp af stamfunktionerne:

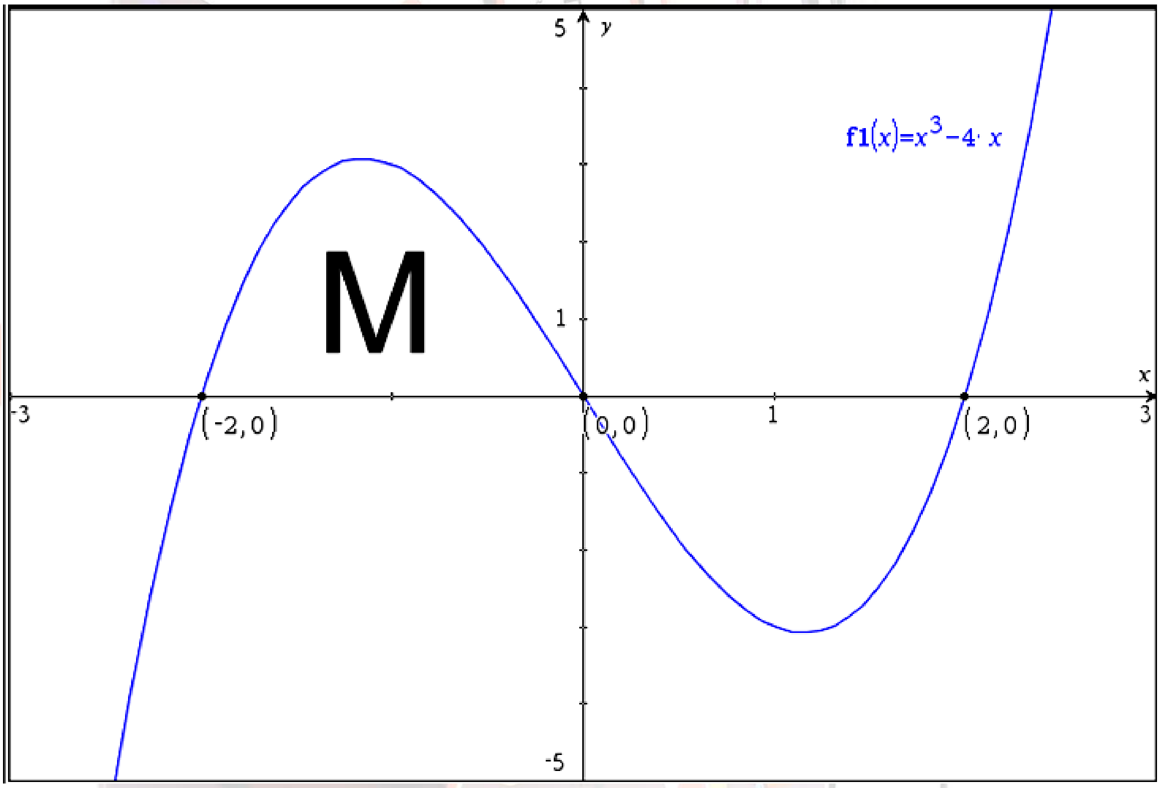
$$\int_0^1 e^x dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = \underline{\underline{e-1}}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \left[\ln|x|\right]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2) - 0 = \underline{\underline{\ln(2)}}$$

1.044: a) $\int_0^2 \left(4x - x^2\right) dx = \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \left(2 \cdot 2^2 - \frac{1}{3} \cdot 2^3\right) - (0-0) = 8 - \frac{8}{3} = \frac{24}{3} - \frac{8}{3} = \underline{\underline{\frac{16}{3}}}$

En geometrisk fortolkning af bestemte integraler har altid noget med arealer at gøre. Man kan dog ikke umiddelbart se, om det udregnede tal direkte svarer til et areal, da det afhænger af, hvordan grafen ligger i forhold til x-aksen i det pågældende område. Så det skal først undersøges.
Det ses, at grafen for $f(x) = -x^2 + 4x = x \cdot (-x+4)$ er en parabel med benene nedad, der skærer *x*-aksen i punkterne (0,0) og (4,0). Så grafen for *f* ligger over x-aksen i det pågældende område, og dermed er tallet $\frac{16}{3}$ arealet af det område, der afgrænses af x-aksen, grafen for *f* og linjerne med ligningerne x = 0 og x = 2.

<u>*1.045:*</u> $f(x) = x^3 - 4x$

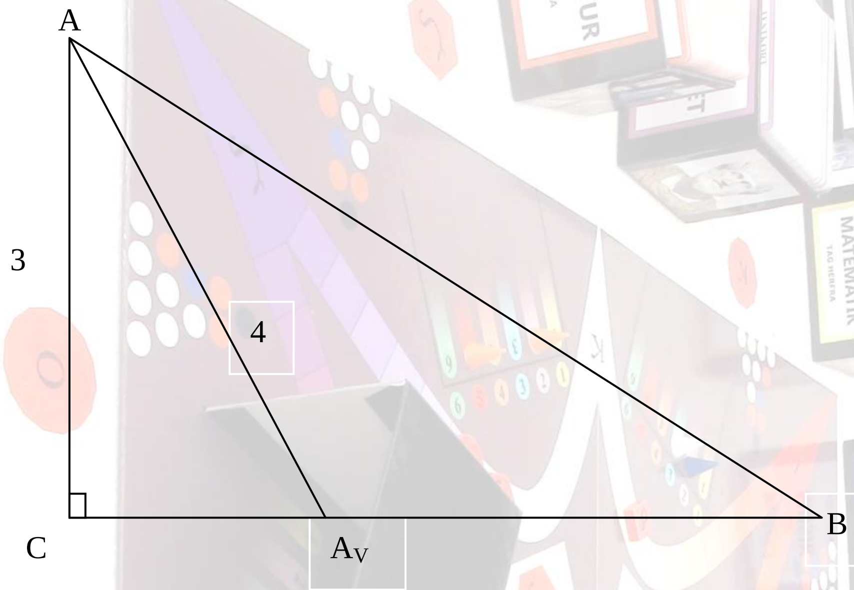


Da punktmængden ligger over x-aksen, kan dens areal bestemmes ved hjælp af det bestemte integral:

$$A = \int_{-2}^{0} f(x)dx = \int_{-2}^{0} \left(x^3 - 4x\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{-2}^{0} = 0 - 0 - \frac{1}{4}\cdot(-2)^4 + 2\cdot(-2)^2 = -4 + 8 = \underline{\underline{4}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>2.001:</u> Vinkel A er halveret af den tegnede vinkelhalveringslinje.



Den halve vinkel A kan bestemmes ved at se på den retvinklede ΔAA_VC. Her kendes den hosliggende katete og hypotenusen. Så man har:

$$\cos\left(\frac{1}{2}A\right)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{2}A=\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\Leftrightarrow A=2\cdot 41{,}4096^0 \;=\underline{\underline{82{,}8192^0}}$$

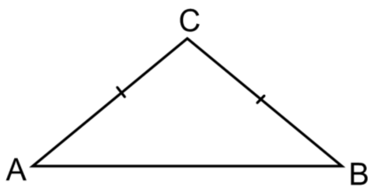
Så er: $B=90^0-A=90^0-82{,}8192^0 \;=\underline{\underline{7{,}1808^0}}$

Ud fra vinkel A kan de 2 resterende sider også bestemmes:

$$\tan A=\frac{|BC|}{|AC|}\Leftrightarrow|BC|=\tan 82{,}8192^0\cdot 3=\underline{\underline{23{,}8118}}$$

$$\cos A=\frac{|AC|}{|AB|}\Leftrightarrow|AB|=\frac{3}{\cos 82{,}8192^0}=\underline{\underline{24}}$$

<u>2.002:</u> Først tegnes en skitse af trekanten:



Da siderne AC og BC er lige lange, og da siden AB er 2 enheder længere end BC, har man:

$|AC|=|BC|$ *eller* $b=a$ $\qquad$ $|AB|=|BC|+2$ *eller* $c=a+2$

Hvis vinkel C skal være ret, skal Pythagoras' sætning gælde:

$$c^2=a^2+b^2$$

$$(a+2)^2=a^2+a^2\quad\Leftrightarrow\quad a^2+4+4a=2a^2\quad\Leftrightarrow\quad a^2-4a-4=0$$

Denne andengradsligning løses på TI n'spire ved:

$solve(a^2-4a-4=0,a)$, der giver $a=-0{,}828427124746\ or\ a=4{,}8284271247$

Da det skal være en sidelængde, skal a være positiv, så: $\underline{\underline{a=4{,}8284271247}}$

2.003: a) Lad A_l være projektionen af A på linien l, dvs. det punkt på l, der ligger til venstre for F og er røringspunktet mellem den stiplede linie og l. Lad B_l være det tilsvarende punkt til højre for F. Da skibene sejler parallelt med kystlinien, vil vinklerne v og u svare til henholdsvis:

$v = \angle AFA_l \quad og \quad u = \angle BFB_l$.

Trekanterne AFA_l og BFB_l er retvinklede, så man har:

$$\sin\angle AFA_l = \frac{|AA_l|}{|AF|} \Leftrightarrow |AF| = \frac{1200m}{\sin 40^0} = 1866{,}86859m = \underline{\underline{1867m}}$$

$$\sin\angle BFB_l = \frac{|BB_l|}{|BF|} \Leftrightarrow |BF| = \frac{1000m}{\sin 48^0} = 1345{,}6327m = \underline{\underline{1346m}}$$

b) Afstanden mellem skibene bestemmes ved at regne på trekant ABF, hvor man allerede kender to af siderne. Vinklen $\angle AFB$ kan hurtigt findes:

$\angle AFB = 180^0 - \angle AFA_l - \angle BFB_l = 180^0 - 40^0 - 48^0 = \underline{92^0}$

Så kan man benytte en cosinusrelation:

$$|AB|^2 = |AF|^2 + |BF|^2 - 2\cdot|AF|\cdot|BF|\cdot\cos\angle AFB \quad \Leftrightarrow$$

$$|AB| = \sqrt{(1867m)^2 + (1346m)^2 - 2\cdot 1867m\cdot 1346m\cdot\cos 92^0} = 2339{,}07443m = \underline{\underline{2339m}}$$

c) Det er punkterne A_l og B_l, der afgør, hvornår de 2 skibe passerer hinanden, nemlig når afstanden mellem punkterne er 0. Denne afstand kan beregnes ved at kigge på de 2 retvinklede trekanter AFA_l og BFB_l. Først ses på tidspunktet 12.00:

$$|A_lB_l| = |A_lF| + |FB_l| = \frac{|AA_l|}{\tan v} + \frac{|BB_l|}{\tan u} = \frac{1200m}{\tan 40^0} + \frac{1000m}{\tan 48^0} = 2330{,}508m$$

Samme udregning foretages for tiden 12.00:30:

$$|A_lB_l|_{Nyt\ tidspunkt} = |A_lF| + |FB_l| = \frac{|AA_l|}{\tan v} + \frac{|BB_l|}{\tan u} = \frac{1200m}{\tan 42^0} + \frac{1000m}{\tan 51^0} = 2142{,}519m$$

Dvs. at på et ½ minut er afstanden parallelt med kystlinien mindsket med $2330{,}508m - 2142{,}519m = 187{,}989m$

Da afstanden til at begynde med er 2330,508m, vil det altså tage:

$t = \dfrac{2330{,}508m}{187{,}989m}\cdot ½minut = 6{,}1985minutter$ før skibene passerer hinanden. Det vil altså ske til tidspunktet $\underline{\underline{12.06:12}}$.

2.004: ΔACD er retvinklet, og da man allerede kender vinklen α ved A, har man kun brug for én side i trekanten for at kunne bestemme længden af linjestykket CD, der i forhold til α ligger som den modstående katete (Man ville kunne sige det samme om ΔBCD).

Længden af stykket AC kan bestemmes ved at benytte sinusrelationerne på ΔABC, når man først har bestemt vinklerne i denne trekant:

$$\angle ABC = 180° - \beta = 180° - 37{,}6° = 142{,}4°$$

$$\angle ACB = 180° - \alpha - \angle ABC = 180° - 27{,}2° - 142{,}4° = 10{,}4°$$

Så er:

$$\frac{|AC|}{\sin(\angle ABC)} = \frac{|AB|}{\sin(\angle ACB)} \Leftrightarrow |AC| = 50km \cdot \frac{\sin(142{,}4°)}{\sin(10{,}4°)} = 168{,}99735567km$$

Dette bruges i den retvinklede ΔACD:

$$\sin(\alpha) = \frac{|CD|}{|AC|} \Leftrightarrow |CD| = |AC| \cdot \sin(\alpha) = 168{,}997km \cdot \sin(27{,}2°) = 77{,}2483409549km = \underline{\underline{77km}}$$

2.005: Lad jordens centrum være betegnet med O.

Afstanden fra jordens centrum og ud til AWACS-flyet er: $|OF| = 6371km + 9km = 6380km$

a) ΔAFO er retvinklet, da liniestykket AF er en del af tangenten til cirklen i punktet A, og tangenten er vinkelret på radien.

Dermed er:

$$\cos\angle AOF = \frac{r}{|OF|} \Leftrightarrow \angle AOF = \cos^{-1}\left(\frac{6371km}{6380km}\right) = 3{,}04368435689^0$$

Så kan den store vinkel inde fra centrum bestemmes:

$$\angle AOB = 2 \cdot \angle AOF = 6{,}08736871379^0$$

Nu ses på ΔABO. En cosinusrelation giver:

$$|AB|^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos\angle AOB \Leftrightarrow$$

$$|AB|^2 = 2 \cdot r^2 \cdot (1 - \cos\angle AOB)$$

$$|AB| = \sqrt{2 \cdot (6371km)^2 \cdot (1 - \cos 6{,}087^0)} = 676{,}566203389km = \underline{\underline{676{,}6km}}$$

Cirkelbuen AB bestemmes ud fra omkredsen af en cirkel og den del af cirklen, som vinklen spænder over:

$$\overset{\frown}{AB} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{6{,}087^0}{360^0} = 676{,}884517588km = \underline{\underline{676{,}9km}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

3.001: Man skal finde løsningen til det lineære ligningssystem:

$$3x+4y=10$$
$$4x-3y=5$$

Dette gøres ved lige store koefficienters metode, så den øverste ligning ganges igennem med 4 og den nederste med 3, og man får:

$$\left.\begin{array}{r}12x+16y=40\\12x-9y=15\end{array}\right\}\Rightarrow(12x+16y)-(12x-9y)=40-15\quad\Leftrightarrow$$

$$16y+9y=25\quad\Leftrightarrow\quad 25y=25\quad\Leftrightarrow\quad \underline{y=1}$$

Den fundne y-værdi indsættes i den øverste ligning i det oprindelige system for at finde x:

$$3x+4\cdot 1=10\quad\Leftrightarrow\quad 3x=6\quad\Leftrightarrow\quad \underline{x=2}$$

Altså er løsningen til ligningssystemet: $\underline{\underline{x=2\quad og\quad y=1}}$

3.002:

a) Lad x være vægten målt i kg, og lad y være højden målt i meter. Så er:

$$\underline{\underline{BMI(x,y)=\frac{x}{y^2}}}$$

b) $BMI(70;1{,}80)=\dfrac{70}{1{,}80^2}=21{,}6$

Da dette tal ligger mellem 18,5 og 24,9, ligger personen altså i $\underline{\underline{normalvægtområdet}}$

c) For en kvinde med y = 1,65 har man:

$$BMI(x)=\frac{x}{1{,}65^2}=\underline{\underline{\frac{x}{2{,}7225}}}\qquad\text{(eller } BMI(x)=0{,}3673\cdot x\text{)}$$

Først findes den nedre grænse for vægten. Her er BMI = 18,5:

$$18{,}5=\frac{x}{2{,}7225}\Leftrightarrow x=18{,}5\cdot 2{,}7225=50{,}37$$

Så findes den øvre grænse for vægten. Her er BMI = 24,9:

$$24{,}9=\frac{x}{2{,}7225}\Leftrightarrow x=24{,}9\cdot 2{,}7225=67{,}79$$

Dvs. at denne kvinde for at ligge i normalområdet skal veje mellem $\underline{\underline{50{,}4kg\ \&\ 67{,}8kg}}$.

<u>*3.003:*</u> $y = 31{,}5 \cdot 0{,}887^t$

a) Ligningen kan enten løses ved 'solve' eller ved udregningen:

$$19 = 31{,}5 \cdot 0{,}887^t \Leftrightarrow$$

$$\frac{19}{31{,}5} = 0{,}887^t \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\frac{19}{31{,}5}\right) = t \cdot \ln 0{,}887 \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{19}{31{,}5}\right)}{\ln 0{,}887} = 4{,}2160563 = \underline{\underline{4{,}22}}$$

b) Først findes det tidspunkt, hvor vitaminindholdet er 15:

$$t = \frac{\ln\left(\frac{15}{31{,}5}\right)}{\ln 0{,}887} = 6{,}187436$$

Dette indsættes i det andet udtryk for at finde nitratindholdet:

$$z = 20{,}3 + 61{,}4 \cdot 0{,}884^{6{,}187436} = 48{,}9315699 = \underline{\underline{48{,}9}}$$

<u>*3.004:*</u> $f(t) = 100 \cdot e^{-0{,}2 \cdot t}$

a) Halveringskonstanten kan bestemmes på mange måder:

1. måde: $T_{½} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{k} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-0{,}2} = 3{,}4657359 = \underline{\underline{3{,}5}}$

2. måde: Indtastning på TI n'spire:

$f(t):=100\cdot e^{-0.2\cdot t}$	*Udført*
solve$(f(t)=0.5\cdot f(0),t)$	$t=3.4657359028$

Dvs. halveringskonstanten er $\underline{\underline{3{,}5}}$

3. måde: Først bestemmes a-værdien:

$$a = e^{-0{,}2} = 0{,}81873075$$

Så bestemmes halveringskonstanten:

$$T_{½} = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(a)} = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(0{,}81873075)} = 3{,}4657359 = \underline{\underline{3{,}5}}$$

3.005: Ifølge opgaveteksten har man altså en eksponentiel udvikling med vækstraten r = -2,45%.

a) $f(x) = 7g \cdot (1-0{,}0245)^x = 7g \cdot 0{,}9755^x$

$f(2) = 7g \cdot 0{,}9755^2 = 6{,}6612g = 6{,}66g$

Der er altså $\underline{\underline{6{,}66g}}$ tilbage efter 2 år.

b) Det matematiske udtryk er fundet allerede i spørgsmål a), men det kan forsimples yderligere, hvis det angives, at *f(x)* angiver massen af stoffet målt i gram efter tiden x målt i år. Så er udtrykket:

$\underline{\underline{f(x) = 7 \cdot 0{,}9755^x}}$

c) Hvis der skal være 1 gram af stoffet tilbage, skal man løse ligningen $1 = 7 \cdot 0{,}9755^x$.

Dette kan gøres på lommeregneren med "solve": $solve(1 = 7 \cdot 0{,}9755^x, x)$, der giver x = 78,4479.

Ligningen kan også løses ved at isolere x ved hjælp af (den naturlige) logaritmefunktion:

$$1 = 7 \cdot 0{,}9755^x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{7} = 0{,}9755^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln\left(\frac{1}{7}\right)}{\ln 0{,}9755} = 78{,}4479$$

Dvs. der skal gå $\underline{\underline{78\tfrac{1}{2}\ \text{år}}}$, før der er under 1 gram af stoffet tilbage.

3.006: a) Når der er en fast vækstrate, er der tale om eksponentiel vækst, og man kan derfor snakke om en fordoblingstid. Da vækstraten er $r = 2\% = 0{,}02$, er fremskrivningsfaktoren $a = 1 + r = 1 + 0{,}02 = 1{,}02$

Fordoblingstiden kan så bestemmes:

$T = \dfrac{\ln(2)}{\ln(a)} = \dfrac{\ln(2)}{\ln(1{,}02)} = 35{,}0027887811$ Dvs. at fordoblingstiden ville have været 35 år

b) Hvis vækstraten fortsætter med at være 1% fra år 2004, og der er 6 milliarder mennesker i 2004, vil antallet af mennesker målt i milliarder som funktion af tiden målt i år efter 2004 være:

$f(t) = 6 \cdot 1{,}01^t$

Og hermed vil antallet af mennesker i år 2050, der svarer til *t = 46*, være:

$f(46) = 6 \cdot 1{,}01^{46} = 9{,}482753$

Dvs. at der i 2050 i følge modellen vil være 9,5 milliarder mennesker i verden.

c) Hvis tiden måles i antal år efter 1960 og vækstraten angivet i procent kaldes r, har man følgende to punkter: 1960: $(t_1, r_1) = (0, 2)$ 2004: $(t_2, r_2) = (44, 1)$

Ud fra disse to punkter kan man bestemme hældningen for den lineære sammenhæng:

$$a = \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1} = \frac{1-2}{44-0} = -\frac{1}{44}$$

Da begyndelsesværdien er 2 (svarende til år 1960) er ligningen: $r = -\dfrac{1}{44} \cdot t + 2$

Hvis vækstraten skal nå ned på 0,1%, har man:

$$0{,}1 = -\frac{1}{44} \cdot t + 2 \quad \Leftrightarrow \quad -1{,}9 = -\frac{1}{44} \cdot t \quad \Leftrightarrow \quad t = 1{,}9 \cdot 44 = 83{,}6$$

Dvs. at vækstraten vil være nået ned på 0,1% i år 2044 (1960 + 84 = 2044)

3.007: Lad trekantens højde være h, dens grundlinie g og dens areal T.
Lad cirklens radius være r og dens areal A.

a) Man har så: $T = ½ \cdot h \cdot g \quad og \quad A = \pi \cdot r^2$

Hvis de skal have lige store arealer, har man altså: $\underline{\underline{½ \cdot h \cdot g = \pi \cdot r^2}}$

b) Radius kan så isoleres ($r > 0$) : $½ \cdot h \cdot g = \pi \cdot r^2 \Leftrightarrow r^2 = \frac{h \cdot g}{2 \cdot \pi} \Leftrightarrow \underline{\underline{r = \sqrt{\frac{h \cdot g}{2 \cdot \pi}}}}$

3.008: Rumfanget af en kegle er $V_{kegle} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

a) Lad alle længder være målt i enheden dm. Så har man:

$$1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \Leftrightarrow \underline{\underline{h = \frac{3}{\pi \cdot r^2}}}$$

b) Overfladearealet af cylinderens krumme overflade er produktet mellem omkredsen af cirkelfladen og højden af cylinderen, og bunden er arealet af en cirkel. Så man har:

$$O(r) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + \pi \cdot r^2 = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{3}{\pi \cdot r^2} + \pi \cdot r^2 = \underline{\underline{\frac{6}{r} + \pi \cdot r^2}}$$

3.009: *P(2,0) Q(8,0) R(0,4)*

Forskriften for det 2. gradspolynomium, hvis graf går gennem de 3 punkter, bestemmes:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Punktet R giver:

$$4 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \quad \Leftrightarrow \quad c = 4$$

Punkterne P og Q giver så:

$$0 = a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 64a + 8b = -4$$

$$0 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 4a + 2b = -4 \quad \Leftrightarrow \quad 16a + 8b = -16$$

Her er den sidste ligning ganget igennem med 4, så de 2 ligninger kan trækkes fra hinanden:

$$64a + 8b - (16a + 8b) = -4 - (-16) \quad \Leftrightarrow$$

$$48a = 12 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{4}$$

Denne værdi indsættes for at finde b:

$$4 \cdot \frac{1}{4} + 2b = -4 \quad \Leftrightarrow \quad 2b = -5 \quad \Leftrightarrow \quad b = -\frac{5}{2}$$

Hermed er:

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + 4}}$$

3.010: Der anvendes følgende betegnelser: b for bredde, h for højde og l for længde.

a) I følge opgavens oplysninger gælder så:

$$l = 2 \cdot b \qquad h = 0,4 \cdot b$$

Kassens overflade består af 6 sideflader, der parvis er lige store, og overfladearealet bliver så:

$$O(b) = 2 \cdot (l \cdot b + h \cdot b + l \cdot h) = 2 \cdot (2b \cdot b + 0,4b \cdot b + 2b \cdot 0,4b) = 2 \cdot 3,2 \cdot b^2 = \underline{\underline{6,4b^2}}$$

3.011: $\log E = 2{,}4m - 1{,}2$ $\quad m$ er Richtertallet $\quad E$ er energimængde

a) Richtertallet 6,5:

$$\log E = 2{,}4 \cdot 6{,}5 - 1{,}2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\log E = 14{,}4 \quad \Leftrightarrow$$

$$E = 10^{14{,}4} = 2{,}512 \cdot 10^{14}$$

Dvs. at der frigives $\underline{\underline{2{,}5 \cdot 10^{14}\,J}}$ ved et jordskælv med størrelsen 6,5 på Richterskalaen.

Energimængde $8{,}0 \cdot 10^{13}\,J$

$$\log\left(8{,}0 \cdot 10^{13}\right) = 2{,}4m - 1{,}2 \quad \Leftrightarrow$$

$$m = \frac{\log\left(8{,}0 \cdot 10^{13}\right) + 1{,}2}{2{,}4} = 6{,}29295$$

Dvs. at det pågældende jordskælv har værdien $\underline{\underline{6{,}3}}$ på Richterskalaen.

b) $y = 1{,}4 \cdot 10^5 \cdot 0{,}1288^m$ $\quad y$ gen. årlige antal med mindst Richtertallet m.

$m = 4{,}5$.

$$y = 1{,}4 \cdot 10^5 \cdot 0{,}1288^{4{,}5} = 13{,}82768$$

Dvs. at der i gennemsnit er $\underline{\underline{knap\,14}}$ jordskælv med Richtertallet mindst 4,5 om året.

$y = 10$:

$$10 = 1{,}4 \cdot 10^5 \cdot 0{,}1288^m \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{10}{1{,}4 \cdot 10^5} = 0{,}1288^m \quad \Leftrightarrow$$

$$m = \frac{\ln 0{,}0000714285714}{\ln 0{,}1288} = 4{,}6581$$

Dvs. at Richtertallet på de 10 årlige jordskælv er mindst $\underline{\underline{4{,}7}}$

c) En sammenhæng mellem E og y findes ved at isolere m i den første ligning og indsætte den i den anden:

$$\log E = 2{,}4m - 1{,}2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\log E + 1{,}2}{2{,}4} = m$$

Indsættes:

$$y = 1{,}4 \cdot 10^5 \cdot 0{,}1288^m = 1{,}4 \cdot 10^5 \cdot 0{,}1288^{\frac{\log E + 1{,}2}{2{,}4}} = 1{,}4 \cdot 10^5 \cdot \sqrt[2{,}4]{0{,}1288}^{\,\log E + 1{,}2} =$$

$$1{,}4 \cdot 10^5 \cdot \sqrt[2{,}4]{0{,}1288}^{\,1{,}2} \cdot \sqrt[2{,}4]{0{,}1288}^{\,\log E} = \underline{\underline{50244 \cdot 0{,}4257^{\log E}}}$$

3.012: $f(t) = 1{,}00 - 0{,}60 \cdot 0{,}9^t \quad ; \quad t \geq 0$

Da *f*(*t*) er effektiviteten, og da det fremgår af teksten (og funktionsudtrykket hvis man kigger nærmere på det), at effektiviteten øges med tiden, begynder effektiviteten under de 0,95, og man skal altså løse ligningen *f(t)*=0,95. Dette kan gøres med 'solve' på grafregneren:

$solve(0{,}95 = 1{,}00 - 0{,}60 \cdot 0{,}9^x, x)$ der giver x = 23,58

Udøveren skal altså være beskæftiget med arbejdet i *godt* 23½ *uge*, før effektiviteten er 0,95.

3.013: Væksthastigheden er givet ved $\frac{dQ}{dt} = -3 + 5 \cdot 1{,}02^t$, hvor *t* er antal år efter 1984.

a) Først bestemmes væksthastigheden i år 1984 (svarende til t = 0):

$$\frac{dQ}{dt} = -3 + 5 \cdot 1{,}02^0 = -3 + 5 \cdot 1 = -3 + 5 = 2$$

Hvis væksthastigheden skal være 3 gange så stor, skal den være 6, dvs. man får:

$$6 = -3 + 5 \cdot 1{,}02^t \quad \Leftrightarrow \quad 9 = 5 \cdot 1{,}02^t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9}{5} = 1{,}02^t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{\ln\left(\frac{9}{5}\right)}{\ln(1{,}02)} = 29{,}6822566$$

Dvs. at i år 2014 vil væksthastigheden i følge modellen være 3 gange så stor som i år 1984.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>*4.001:*</u> a) På boksplottet aflæses mindste og største observation (som der ikke spørges om) ved endepunkterne angivet med lodrette streger.
Nedre kvartil aflæses ved den lodrette streg, der udgør boksens venstre side, øvre kvartil ved stregen, der udgør boksens højre side, og medianen aflæses ved stregen, der ligger inden i boksen:

$X_{\min} = 00$

$Nedre\ kvartil = \underline{\underline{6}}$

$Median = \underline{\underline{8}}$

$Øvre\ Kvartil = \underline{\underline{9}}$

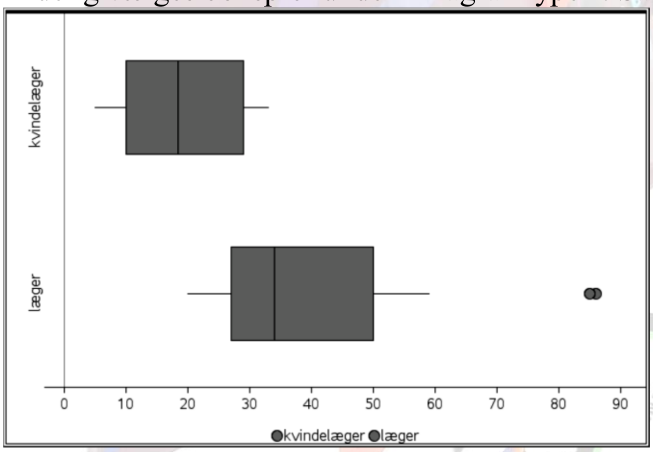
$X_{\max} = 13$

<u>*4.002:*</u> a) På TI n'spire under 'Lister og regneark' indtastes de 15 observationer blandt læger i liste A og de 10 observationer blandt kvinder i liste B. Listerne navngives 'Læger' og 'Kvindelæger'
Der er kun én variabel i spil (nemlig antal indgreb), så der vælges:
'Statistik'→'Statistiske beregninger'→'Statistik med én variabel'.
Så vælges 2 lister (fordi der er to sæt observationer).
Som den første liste vælges liste A, og som den anden liste vælges liste B.

	A læger	B kvinde...	C	D	E	F	G	H	I
◆				=OneVar(	=OneVar(				
1	27	19	Titel	Statistik ...	Statistik ...				
2	50	7	x̄	41.3333...	19.1				
3	33	14	Σx	620.	191.				
4	25	25	Σx²	31572.	4571.				
5	86	5	sx := sn-...	20.6074...	10.1264...				
6	25	33	σx := σn...	19.9086...	9.60676...				
7	85	29	n	15.	10.				
8	31	18	MinX	20.	5.				
9	37	31	Q₁X	27.	10.				
10	44	10	MedianX...	34.	18.5				
11	20		Q₃X	50.	29.				
12	36		MaxX	86.	33.				
13	59		SSX := Σ...	5945.33...	922.9				
14	34								
15	28								

E15

Ud fra dette kan man aflæses største og mindste observation samt kvartilsættet, der kan bruges til at tegne et boksplot.
Hvis lommeregneren skal tegne et boksplot, skal man åbne en ny side med 'diagrammer og statistik' og der tilføjes en variabel på x-aksen. Derefter højreklikkes på x-aksen, så man kan tilføje endnu en x-variabel.
Endelig vælges boksplot under 'Diagramtyper'. Så man får:



Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

På TI-89:

Tallene indtastes i stat/list editoren, og der laves 1-variabel statistik på dem hver for sig. Dette giver:

Læger generelt:

$X_{\min} = 20$

$\textit{Nedre kvartil} = 27$

$\textit{Median} = 34$

$\textit{Øvre Kvartil} = 50$

$X_{\max} = 86$

Kvindelige læger:

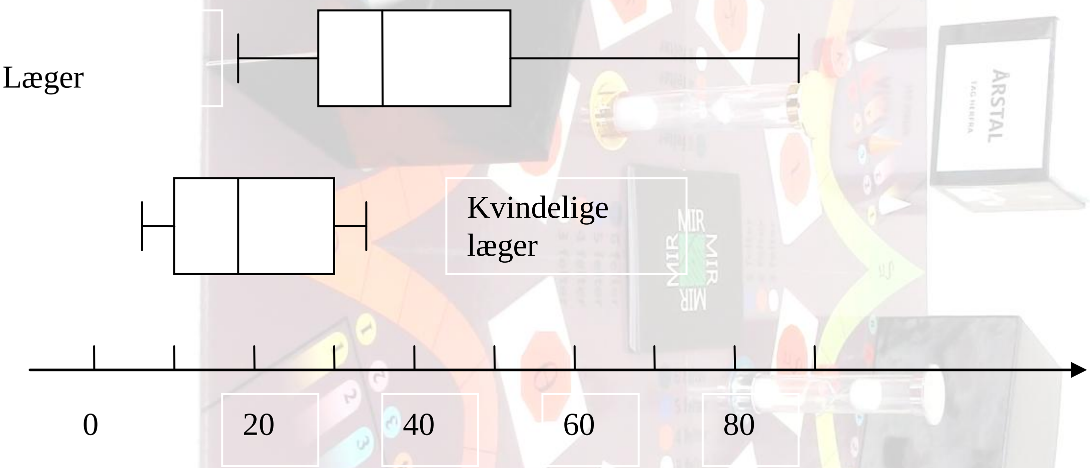
$X_{\min} = 5$

$\textit{Nedre kvartil} = 10$

$\textit{Median} = 18{,}5$

$\textit{Øvre Kvartil} = 29$

$X_{\max} = 33$



b) Ved at se på boksplottene ses det for det første, at de mandlige læger er langt mere tilbøjelige til at foretage indgrebet (Den største observation blandt kvinderne ligger under medianen blandt lægerne, så der må være en betydelig andel af de 15 læger, der er mænd, og de er tydeligvis mere tilbøjelige til at foretage indgrebet).

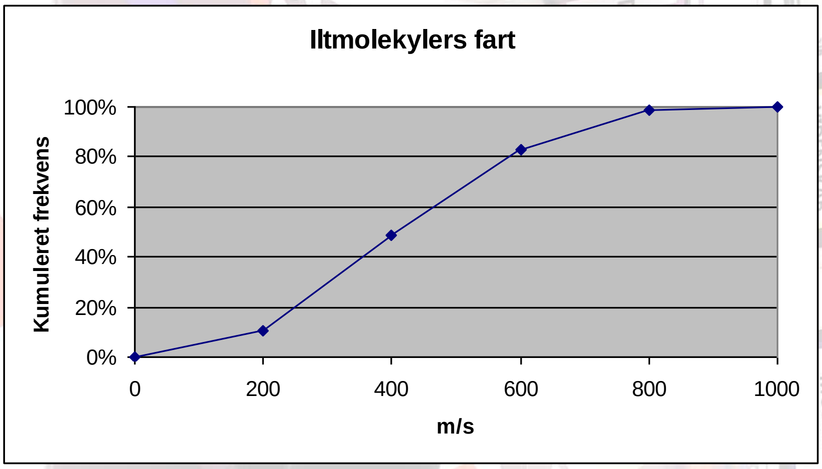
Og så er der åbenbart ikke så mange kvindelige læger blandt de 15, for 50% af de kvindelige læger ligger under den laveste af lægerne generelt.

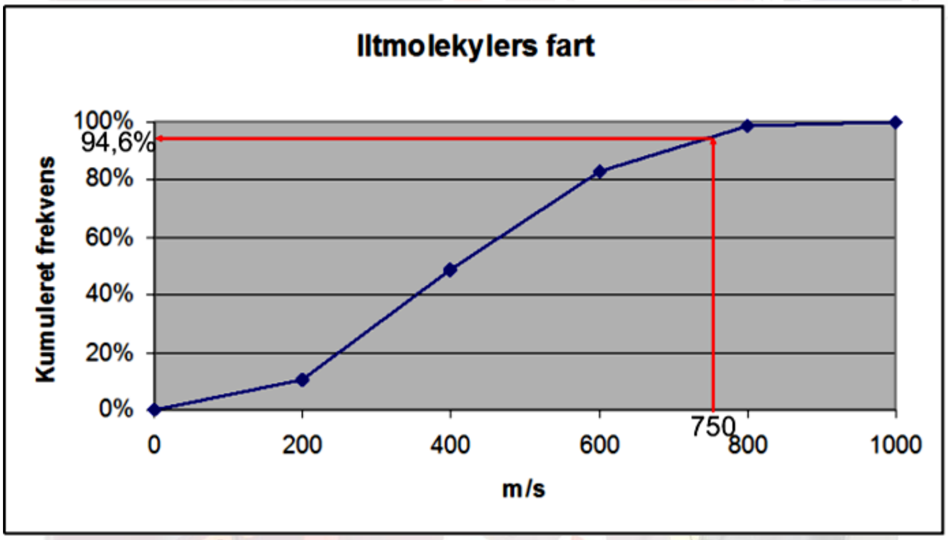
Der er desuden nogle få (måske én) ret ekstrem mandlig læge. Blandt kvinderne ses der ikke de store afvigelser mellem de enkelte læger.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

4.003: a) Den kumulerede frekvens udregnes og bruges til at tegne sumkurven:

Fart i m/s	0-200	200-400	400-600	600-800	800-1000
Kumuleret frekvens	10,5	48,5	83	98,5	100





Man går lodret op fra 1. aksen ved 750 m/s og vandret ud fra skæringen med sumkurven. Her aflæses, at det er 94,6%, der har hastigheder under 750 m/s. Dvs. at det er 5,4%, der har hastigheder over 750m/s.

_4.004:_ a) Nulhypotesen er, at dødeligheden inden for 30 dage er den samme på OUH og de øvrige hjertecentre.

Med andre ord skal det undersøges, om dødeligheden inden for 30 dage er uafhængig af, om hjerteklapoperationen foretages på OUH eller på de øvrige hjertecentre, og dermed er det et χ^2-uafhængighedstest, der skal foretages.

TI n'spire:

Først gemmes tallene i en matrice:

$$a := \begin{bmatrix} 11 & 206 \\ 32 & 1374 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 11 & 206 \\ 32 & 1374 \end{bmatrix}$$

Derefter vælges under 'menu' (lommeregner) eller værktøjerne (computer): 'Statistik'→'Statistiske tests'→'χ^2-uafhængighedstest'.

Da matricen er gemt som 'a', vælges denne som observerede matrix, og man får:

χ²2way *a: stat.results*

"Titel"	"χ²−uafhængighedstest"
"χ²"	5.68631589325
"PVal"	0.017097712715
"df"	1.
"ExpMatrix"	"[...]"
"CompMatrix"	"[...]"

Lommeregneren har angivet, at der er 1 frihedsgrad (df), og den giver χ^2-testværdien 5,69.

Endelig giver den sandsynlighedsværdien 1,7%, og da testet blev udført med et 5%-signifikansniveau, må nulhypotesen forkastes, dvs. <u>dødeligheden inden for 30 dage efter en hjerteklapoperation er IKKE ens ved OUH og de øvrige hjertecentre.</u>

Alternativt kan man klare det hele direkte ved:

χ²2way $\begin{bmatrix} 11 & 206 \\ 32 & 1374 \end{bmatrix}$ *:stat.results*

"Titel"	"χ²−uafhængighedstest"
"χ²"	5.68631589325
"PVal"	0.017097712715
"df"	1.
"ExpMatrix"	"[...]"
"CompMatrix"	"[...]"

Første del af udtrykket er skrevet "chi22way"

<u>TI-89:</u> Først skal der skabes en matrix. Dette gøres ved:

[11,32;206,1374]→a (bemærk hvor der er anvendt komma og semikolon inden i []).

Under Flashapplikationerne (FlashAPPS) vælges 'Stat/List-editoren'.

Med F6 vælges 'Tests' og 'Chi2 2-way' og som matrix vælges 'a'.

Lommeregneren giver så:

Chi-2 = 5,6863

P value = 0,0170977

Df = 1

Dermed kan man konkludere det samme som vist ovenfor.

<u>Delvist i hånden:</u>

Først skal man bestemme de værdier, der svarer til nulhypotesen.

Man udregner summen af rækkerne og søjlerne:

	Død inden for 30 dage	Overlevet	I alt opereret
OUH	11	206	217
Øvrige	32	1374	1406
I alt	43	1580	**1623**


Da i alt 43 ud af 1623 er døde inden for 30 dage, og da 217 er opereret på OUH og 1406 på øvrige har man:

$$OUH_{død} = \frac{43}{1623} \cdot 217 = 5,74922982132$$

$$OUH_{overlevet} = \frac{1580}{1623} \cdot 217 = 211,250770179$$

$$Øvrige_{død} = \frac{43}{1623} \cdot 1406 = 37,2507701787$$

$$Øvrige_{overlevet} = \frac{1580}{1623} \cdot 1406 = 1368,74922982$$

Dvs. den forventede tabel er:

FORVENTET	Død inden for 30 dage	Overlevet	I alt opereret
OUH	6	211	217
Øvrige	37	1369	1406
I alt	43	1580	**1623**

Så kan teststørrelsen χ^2 beregnes:

$$\sum \frac{(obs - forv)^2}{forv} =$$

$$\frac{(11-5,74923)^2}{5,74923} + \frac{(32-37,25077)^2}{37,25077} + \frac{(206-211,25077)^2}{211,25077} + \frac{(1374-1368,74923)^2}{1368,74923} =$$

5,6863158932529

For at se, om nulhypotesen skal forkastes, indtastes på TI n'spire:

χ^2Cdf(0,5.68631589,1)	0.982902287253
1−0.98290228725345	0.017097712747

Dette viser altså, at der kun er 1,7% chance for, at nulhypotesen er rigtig, dvs. den skal forkastes.

b) Da p = 0,017 = 1,7%, ville konklusionen være, at man ikke kan forkaste hypotesen om, at dødeligheden ved operationen er ens ved OUH og de øvrige hjertecentre.

Hvis man benytter signifikansniveauet 5%, vil man ifølge a) konkludere, at dødeligheden er større på OUH ved hjerteklapoperationer end på de øvrige hjertecentre.

Konklusionen er dog ikke nødvendigvis korrekt, for hvis man forestiller sig, at OUH er eksperter i operationen og derfor får de mest komplicerede af hjerteklapoperationerne, vil "sværhedsgraden" være en skjult variabel, der giver en systematisk fejl.
"Sværhedsgraden" vil nemlig både korrelere med den uafhængige variabel (De sværeste operationer ender på OUH) og på den afhængige variabel (jo højere sværhedsgrad, jo større dødelighed).

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

4.005: Der er spurgt 500 i alt, og man nu udregne:

$$Kvinder_{for} = \frac{sum_{for}}{Antal\ personer} \cdot Antal\ kvinder = \frac{266}{500} \cdot 264 = 140,448$$

$$Kvinder_{imod} = \frac{sum_{imod}}{Antal\ personer} \cdot Antal\ kvinder = \frac{149}{500} \cdot 264 = 78,672$$

$$Kvinder_{ved\ ikke} = \frac{sum_{ved\ ikke}}{Antal\ personer} \cdot Antal\ kvinder = \frac{85}{500} \cdot 264 = 44,88$$

$$Mænd_{for} = \frac{sum_{for}}{Antal\ personer} \cdot Antal\ mænd = \frac{266}{500} \cdot 236 = 125,552$$

$$Mænd_{imod} = \frac{sum_{imod}}{Antal\ personer} \cdot Antal\ mænd = \frac{149}{500} \cdot 236 = 70,328$$

$$Mænd_{ved\ ikke} = \frac{sum_{ved\ ikke}}{Antal\ personer} \cdot Antal\ mænd = \frac{85}{500} \cdot 236 = 40,12$$

Dvs. at tabellen bliver:

FORVENTET	For	Imod	Ved ikke	Sum
Kvinder	140	79	45	264
Mænd	126	70	40	236
Sum	266	149	85	500

Så kan χ^2-teststørrelsen beregnes:

$$\chi^2 = \sum \frac{(obs - forv)^2}{forv} = \frac{(151-140,448)^2}{140,448} + \frac{(79-78,672)^2}{78,672} + \frac{(34-44,88)^2}{44,88} +$$

$$\frac{(115-125,552)^2}{125,552} + \frac{(70-70,328)^2}{70,328} + \frac{(51-40,12)^2}{40,12} = \underline{\underline{7,2706052302}}$$

p-værdien bestemmes nu ved indtastningen (antallet af frihedsgrader er to, da man ud fra kendskabet til to "passende" observationer kan beregne resten):

χ²Cdf(0,7.2706052302,2)	0.973624048582
1−0.97362404858158	0.026375951418

Dvs. at $\underline{\underline{p = 0,026 = 2,6\%}}$

Hvis man arbejder med et signifikansniveau på 5% (hvilket er det normale), vil man altså forkaste hypotesen om, at de to køn har samme indstilling.

Man kunne også have fundet svarene på de to spørgsmål ved på TI n'spire at indtaste:

$$\text{χ²2way} \begin{bmatrix} 151 & 79 & 34 \\ 115 & 70 & 51 \end{bmatrix} : stat.results \qquad \begin{bmatrix} \text{"Titel"} & \text{"χ²−uafhængighedstest"} \\ \text{"χ²"} & 7.2706052302 \\ \text{"PVal"} & 0.026375951418 \\ \text{"df"} & 2. \\ \text{"ExpMatrix"} & \text{"[...]"} \\ \text{"CompMatrix"} & \text{"[...]"} \end{bmatrix}$$

$$stat.ExpMatrix \qquad \begin{bmatrix} 140.448 & 78.672 & 44.88 \\ 125.552 & 70.328 & 40.12 \end{bmatrix}$$

På TI-89 kan man udregne det hele ved:
[151,79,34;115,70,51]→a (bemærk hvor der er anvendt komma og semikolon inden i []).
Under Flashapplikationerne (FlashAPPS) vælges 'Stat/List-editoren'.
Med F6 vælges 'Tests' og 'Chi2 2-way' og som matrix vælges 'a'.
Lommeregneren giver så:
Chi-2 = 7,2706052302
P value = 0,026375951418
Df = 2

4.006: a) Det er χ^2-uafhængighedstest, så på TI n'spire indtastes:

$\chi^2 2\text{way}\begin{bmatrix} 8 & 17 \\ 75 & 48 \end{bmatrix}$: *stat.results*

"Titel"	"χ^2–uafhængighedstest"
"χ^2"	7.08240168177
"PVal"	0.007784460808
"df"	1.
"ExpMatrix"	"[...]"
"CompMatrix"	"[...]"

stat.ExpMatrix $\begin{bmatrix} 14.0202702703 & 10.9797297297 \\ 68.9797297297 & 54.0202702703 \end{bmatrix}$

Den opstillede tabel bliver altså:

FORVENTET	Gruppe A	Gruppe B	I alt
Død	14	11	25
Overlevende	69	54	123
I alt	83	65	148

b) Med et signifikansniveau på 5% og p-værdi på 0,778%, kan man altså forkaste nulhypotesen og konkludere, at medicineringen ser ud til at have (positiv) betydning for patienternes overlevelseschancer.

På TI-89 kan man bestemme p-værdien ved:
[8,17;75,48]→a (bemærk hvor der er anvendt komma og semikolon inden i []).
Under Flashapplikationerne (FlashAPPS) vælges 'Stat/List-editoren'.
Med F6 vælges 'Tests' og 'Chi2 2-way' og som matrix vælges 'a'.
Lommeregneren giver så:
Chi-2 = 7,08240168177
P value = 0,007784460808
Df = 1

4.007: a) Nulhypotesen er, at de to operationstyper giver samme problemer med forstoppelse, og man kan så beregne de forventede værdier ved:

$$Ja_{hjerte} = \frac{Ja_{total}}{Antal\ patienter} \cdot Total_{hjerte} = \frac{24}{111} \cdot 60 = \underline{\underline{12,972972973}}$$

$$Nej_{hjerte} = \frac{Nej_{total}}{Antal\ patienter} \cdot Total_{hjerte} = \frac{87}{111} \cdot 60 = \underline{\underline{47,027027027}}$$

$$Ja_{lunge} = \frac{Ja_{total}}{Antal\ patienter} \cdot Total_{lunge} = \frac{24}{111} \cdot 51 = \underline{\underline{11,027027027}}$$

$$Nej_{lunge} = \frac{Nej_{total}}{Antal\ patienter} \cdot Total_{lunge} = \frac{87}{111} \cdot 51 = \underline{\underline{39,972972973}}$$

b) Så kan χ^2-teststørrelsen beregnes:

$$\chi^2 = \sum \left(\frac{(obs - forv)^2}{forv} \right)$$

$$= \frac{(9-12,97)^2}{12,97} + \frac{(51-47,03)^2}{47,03} + \frac{(15-11,03)^2}{11,03} + \frac{(36-39,97)^2}{39,97} = \underline{\underline{3,3735}}$$

Der er 1 frihedsgrad i undersøgelsen, da man kun behøver at kende ét af tallene for at udregne de andre, og så kan p-værdien bestemmes på TI n'spire ved:

χ²Cdf(0,3.3735,1)	0.933747136481
1−0.93374713648094	0.066252863519

Dvs. at $\underline{\underline{p = 6,6\%}}$

Da man normalt arbejder med et 5% signifikansniveau, kan man ikke forkaste nulhypotesen, dvs. <u>der er ikke signifikant forskel på omfanget af forstoppelse ved de to operationer.</u>

Det kunne også have været beregnet på TI n'spire ved:

$\chi^2 2way \begin{bmatrix} 9 & 51 \\ 15 & 36 \end{bmatrix} : stat.results$

"Titel"	"χ²−uafhængighedstest"
"χ²"	3.37868914807
"PVal"	0.066044563449
"df"	1.
"ExpMatrix"	"[...]"
"CompMatrix"	"[...]"

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

4.008: a) Der er 179 adspurgte, og man kan så beregne:

$$Hunkøn_{ryger} = \frac{Sum_{ryger}}{Antal\ elever} \cdot Hunkøn_{sum} = \frac{36}{179} \cdot 78 = 15,687150838$$

$$Hunkøn_{Ikke-ryger} = \frac{Sum_{Ikke-ryger}}{Antal\ elever} \cdot Hunkøn_{sum} = \frac{143}{179} \cdot 78 = 62,312849162$$

$$Hankøn_{ryger} = \frac{Sum_{ryger}}{Antal\ elever} \cdot Hankøn_{sum} = \frac{36}{179} \cdot 101 = 20,312849162$$

$$Hankøn_{Ikke-ryger} = \frac{Sum_{Ikke-ryger}}{Antal\ elever} \cdot Hankøn_{sum} = \frac{143}{179} \cdot 101 = 80,687150838$$

Man har altså:

Forventet	Ryger	Ikke-ryger	Sum
Hunkøn	15,687	62,313	78
Hankøn	20,313	80,687	101
Sum	36	143	179

b) På TI n'spire kan man finde både χ^2-teststørrelsen og p-værdien (og man kunne også have fået tabellen ovenfor) ved:

$$\chi^2 2way \begin{bmatrix} 21 & 57 \\ 15 & 86 \end{bmatrix} : stat.results \qquad \begin{bmatrix} \text{"Titel"} & \text{"}\chi^2\text{–uafhængighedstest"} \\ \text{"}\chi^2\text{"} & 3.99171522182 \\ \text{"PVal"} & 0.045724495373 \\ \text{"df"} & 1. \\ \text{"ExpMatrix"} & \text{"[...]"} \\ \text{"CompMatrix"} & \text{"[...]"} \end{bmatrix}$$

$$stat.ExpMatrix \qquad \begin{bmatrix} 15.687150838 & 62.312849162 \\ 20.312849162 & 80.687150838 \end{bmatrix}$$

Man har altså:

$$\chi^2 = 3,9917 \qquad p = 4,57\%$$

a) Man har fået en χ^2-teststørrelse på 6,34, og da der er én frihedsgrad i undersøgelsen, da man kun behøver at kende én værdi for at beregne resten, kan man finde p-værdien på TI n'spire ved:

$$\chi^2 Cdf(0,6.34,1) \qquad 0.988195511879$$

$$1-0.98819551187917 \qquad 0.011804488121$$

Dvs. p = 1,2%, og dermed kan man med signifikansniveauet 5% forkaste nulhypotesen. Dermed giver undersøgelsen IKKE belæg for at hævde, at rygevaner er uafhængige af køn.

4.009: a) Det er et χ^2-uafhængighedstest, og det foretages på TI n'spire ved:

$$\chi^2 2\text{way}\begin{bmatrix}18 & 43 & 10\\ 48 & 175 & 41\end{bmatrix}:stat.results \quad \begin{bmatrix}\text{"Titel"} & \text{"}\chi^2\text{–uafhængighedstest"}\\ \text{"}\chi^2\text{"} & 1.8187191938\\ \text{"PVal"} & 0.402782084641\\ \text{"df"} & 2.\\ \text{"ExpMatrix"} & \text{"[...]"}\\ \text{"CompMatrix"} & \text{"[...]"}\end{bmatrix}$$

Da p = 40%, vil man ikke forkaste nulhypotesen med et signifikansniveau på 5%. Man vil altså ikke kunne sige, at drikkevanerne ikke er uafhængige af køn. Men egentlig spørges der jo om noget andet. Der spørges om, hvorvidt der er belæg for at antage, at drikkevaner er uafhængige af køn, men den type spørgsmål kan slet ikke besvares.

b) Den nye tabel bliver:

	Drikker	Drikker ikke	Sum
Pige	61	10	71
Dreng	223	41	264
Sum	284	51	335

Dette undersøges på TI n'spire ved:

$$\chi^2 2\text{way}\begin{bmatrix}61 & 10\\ 223 & 41\end{bmatrix}:stat.results \quad \begin{bmatrix}\text{"Titel"} & \text{"}\chi^2\text{–uafhængighedstest"}\\ \text{"}\chi^2\text{"} & 0.090621781811\\ \text{"PVal"} & 0.76338817209\\ \text{"df"} & 1.\\ \text{"ExpMatrix"} & \text{"[...]"}\\ \text{"CompMatrix"} & \text{"[...]"}\end{bmatrix}$$

Man får p=76%, og dermed kommer man frem til samme konklusion som i spørgsmål a), som egentlig er, at man ikke kan besvare spørgsmålet.
Og egentlig må man slet ikke ændre kategorierne uden at lave en ny undersøgelse.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

4.010: Dette er et χ^2-GOF-test, da man har en række observationer, der skal sammenlignes med en forventning.

Først udregnes det forventede antal legetøjsbolde af de forskellige slags ud fra den angivne procentdel og antallet af bolde (200):

$10\% \cdot 200 = 0{,}1 \cdot 200 = 20$

$85\% \cdot 200 = 0{,}85 \cdot 200 = 170$

$5\% \cdot 200 = 0{,}05 \cdot 200 = 10$

Mindre end 20 cm	Mellem 20cm og 22cm	Over 22cm
20	170	10

Det laves så et GOF-test på TI n'spire ved:

Under'Lister og regneark' indtastes den observerede tabel (28,160,12) i liste A. I liste B indtastes den forventede tabel (ovenstående). Der vælges 'Statistik'→'Statistiske tests'→'χ^2-Goodness of Fit test'.

Som observeret tabel vælges liste A, og som forventet tabel vælges liste B.

Antallet af frihedsgrader er 2, da der er tre observationer, og da man kan udregne den sidste af de tre observationer, når man kender de to første:

	A	B	C	D	E
◆				=χ²GOF(a	
1	28	20	Titel	χ²−Good...	
2	160	170	χ²	4.18823...	
3	12	10	PVal	0.12317...	
4			df	2.	
5			CompLis...	{3.2,0.58...	

P-værdien er 12,3%, dvs. med et signifikansniveau på 5% vil man ikke forkaste hypotesen om, at legetøjsboldene stammer fra den omtalte storproducent. <u>Dvs. forsendelsen kan godt stamme fra storproducenten.</u>

På TI-89 vælges FlashAPPS 'Stat/list-editor' og de observerede observationer lægges i liste 1 og de forventede i liste 2. Så vælges f6 (tests) og chi-2 GOF med obs: list 1 og forv: list2 og df: 2.

Det giver det samme resultat som med TI-n'spire.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

4.011: a) De forventede hyppigheder, når der er 236 blomster beregnes:

$$h_{rød} = 0,25 \cdot 236 = \underline{\underline{59}}$$

$$h_{lyserød} = 0,50 \cdot 236 = \underline{\underline{118}}$$

$$h_{hvide} = 0,25 \cdot 236 = \underline{\underline{59}}$$

b) Man kan nu beregne χ^2-teststørrelsen på TI n'spire ved:

$$\frac{(66-59)^2}{59}+\frac{(115-118)^2}{118}+\frac{(55-59)^2}{59} \quad 1.17796610169$$

Dvs. at $\underline{\underline{\chi^2 = 1,178}}$

Der er to frihedsgrader, så man kan udregne p-værdien ved:

χ²Cdf(0,1.17796610169,2)	0.445108705823
1−0.44510870582261	0.554891294177

Dvs. p-værdien er 55,5% og med et signifikansniveau på 5% kan man ikke forkaste nulhypotesen, dvs. der er ikke belæg for at forkaste arvelighedslovene.

Man kunne også have beregnet de søgte størrelser ved et GOF-test:

	A	B	C	D
◆				=χ²GOF(a
1	66	59	Titel	χ²−Good...
2	115	118	χ²	1.17796...
3	55	59	PVal	0.55489...
4			df	2.
5			CompLis...	{0.83050...

4.012: Nulhypotesen er, at klagebehandlingstiden den pågældende måned fulgte firmaets 'erfaring'. Dvs. man kan få en forventet række ved at gange procentdelen med det samlede antal klager (120):

Antal minutter	0-5	5-10	10-15	Over 15	I alt
Observeret	37	53	25	5	120
Forventet	36	48	24	12	120

Der er tre frihedsgrader, da der er fire observationer (så den sidste kan udregnes med kendskab til de tre første).

Det laves så et GOF-test på TI n'spire ved:

Under'Lister og regneark' indtastes den observerede række i liste A. I liste B indtastes den forventede række. Der vælges 'Statistik'→'Statistiske tests'→'χ^2-Goodness of Fit test'.

Som observeret tabel vælges liste A, og som forventet tabel vælges liste B.

	A	B	C	D
◆				=χ²GOF(a
1	37	36	Titel	χ²−Good...
2	53	48	χ²	4.67361...
3	25	24	PVal	0.19731...
4	5	12	df	3.
5			CompLis...	{0.02777...

Da p-værdien er 19,7%, kan man med signifikansniveauet 5% ikke forkaste nulhypotesen, dvs. der er ikke belæg for at hævde, at klagebehandlingstiden har ændret sig.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>*4.013:*</u> a) <u>Populationen er den del af danskerne, der stemmer.</u>
<u>Stikprøven er de 968 respondenter i meningsmålingen.</u>

Procenterne omregnes til forventede og observerede stemmetal ved at multiplicere procentdelen med 968.

Parti	S	Rad	Kons	SF	DF	V	EL	Lib.All	Kr. Dem
Observeret antal stemmer	255	52	93	164	137	232	20	11	5
Forventet antal stemmer	247	49	101	126	134	255	21	27	9

b) Der laves χ^2-GOF test på tabellen. Der er 8 frihedsgrader. Det er lidt betænkeligt, at der kun er observeret 5 stemmer hos Kr. Dem, da testet så er lige på grænsen til, at det kan bruges:
Det laves så et GOF-test på TI n'spire ved:
Under'Lister og regneark' indtastes den observerede række i liste A. I liste B indtastes den forventede række. Der vælges 'Statistik'→'Statistiske tests'→'χ^2-Goodness of Fit test'.
Som observeret tabel vælges liste A, og som forventet tabel vælges liste B.

	A	B	C	D	E
◆					=χ²GOF(a
1	255	247	Titel	Titel	χ²−Good…
2	52	49	χ²	χ²	25.9853…
3	93	101	PVal	PVal	0.00105…
4	164	126	df	df	8.
5	137	134	CompLis…	CompLis…	{0.25910…
6	232	255			
7	20	21			
8	11	27			
9	5	9			

Dvs. $\underline{\underline{\chi^2 = 25{,}985}}$ $p = 0{,}1\%$

Med et signifikansniveau på 5% må nulhypotesen altså forkastes, dvs. <u>stemmefordelingen ser ud til at have ændret sig.</u>

c) Når tabellens værdier slås sammen (hvilket inden for statistisk er en strengt ulovlig fremgangsmåde, når det ikke er sket, før man har set resultaterne) får man:

Parti	SF	Ikke-SF
Observeret antal stemmer	164	804
Forventet antal stemmer	126	842

Der er nu kun 1 frihedsgrad, men ellers testes det på samme måde:

	A	B	C	D
◆				=χ²GOF(a[],b[],1): Co
1	164	126	Titel	χ²−Goodness of Fit t…
2	804	842	χ²	13.1752818309
3			PVal	2.8366606332E-4
4			df	1.
5			CompLis…	{11.460317460317,1…

Da p-værdien ikke kan være større end 1, kan man se, at man skal have det hele med, så man kan se, at $p = 2{,}83666 \cdot 10^{-4} = 0{,}0284\%$

Som nævnt har man foretaget en ulovlig sammentælling, men hvis man bare skal konkludere på tallene, <u>er SF's fremgang signifikant med et signifikansniveau på 5%.</u>

5.001: a) På TI-89 benyttes stat/list-editoren, og værdierne fra tabellen indskrives som henholdsvis list1 og list2, hvorefter der laves lineær regression med list2 som funktion af list1:

Det giver: $\underline{\underline{g(t) = 0{,}830 \cdot t + 226{,}8}}$

b) Først isoleres t i udtrykket med Fahrenheit-temperaturen:

$$F = 1{,}8 \cdot t + 32 \Leftrightarrow$$
$$F - 32 = 1{,}8 \cdot t \Leftrightarrow$$
$$\frac{F-32}{1{,}8} = t$$

Dette indsættes i udtrykket for trykket: $g(F) = 0{,}830 \cdot \frac{F-32}{1{,}8} + 226{,}8 = \underline{\underline{0{,}461 \cdot F + 212{,}0}}$

5.002: a) Det er oplyst, at der er tale om en lineær sammenhæng, så man gør følgende:
På TI n'spire åbnes "Lister og regneark", og værdierne for temperaturen t skrives ind i liste A og trykket P i liste B. Der vælges 'menu'→'statistik'→ 'statistiske beregninger'→'Lineær regression (mx+b)'.
X-listen sættes til a[] og y-listen til b[].
TI n'spire giver: "RegEqn" "$m \cdot x + b$"
"m" 0.82992657771887
"b" 226.75316841426
Dermed er forskriften for P som funktion af t: $\underline{\underline{P(t) = 0{,}830 \cdot t + 226{,}8}}$

Konstantleddet fortæller, at når temperaturen er 0°C er trykket 226,8Pa
Koefficienten fortæller, at når temperaturen stiger med 1°C vokser trykket med 0,830Pa.

5.003: a) På TI-89: Der benyttes stat/list-editoren, og værdierne fra tabellen indskrives som henholdsvis list1 og list2, hvorefter der laves potensregression (powerregression) med list2 som funktion af list1:
På TI n'spire: Værdierne skrives ind i "Lister og regneark", og der vælges 'menu'→'statistik'→'statistiske beregninger'→'Potensregression'.
X-listen sættes til a[] og y-listen til b[]. Resultatet gemmes som f1(x).
Det giver: $\underline{\underline{f(x) = 17{,}1 \cdot x^{1{,}962}}}$

b) Metode 1:

Da den er en potensfunktion er sammenhængen mellem vækstraterne for x og y: $(1+r_y) = (1+r_x)^a$

Da brudstyrken (dvs. y-værdien) skal fordobles, er $r_y = 100\% = 1$, så man har:

$$(1+1) = (1+r_x)^{1{,}962} \Leftrightarrow 2 = (1+r_x)^{1{,}962} \Leftrightarrow (1+r_x) = \sqrt[1{,}962]{2} = 1{,}424 \Leftrightarrow$$
$$r_x = 0{,}424 = 42{,}4\%$$

Dvs. at diameteren skal være $\underline{\underline{1{,}424 \textit{ gange}}}$ så stor.

Metode 2:
Da brudstyrken (dvs. funktionsværdien) skal fordobles, fås de 2 ligninger:

$$\left.\begin{array}{r} f(x_1) = 17{,}1 \cdot x_1^{1{,}962} \\ 2 \cdot f(x_1) = 17{,}1 \cdot x_2^{1{,}962} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2 \cdot f(x_1)}{f(x_1)} = \frac{17{,}1 \cdot x_2^{1{,}962}}{17{,}1 \cdot x_1^{1{,}962}} \Leftrightarrow 2 = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1{,}962} \Leftrightarrow \frac{x_2}{x_1} = \sqrt[1{,}962]{2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{x_2}{x_1} = 1{,}424$$

Dvs. at diameteren skal være $\underline{\underline{1{,}424 \textit{ gange}}}$ så stor.

5.004: a) På TI-89:

Der er mere end to punkter til rådighed, så der skal bruges regression. Derfor benyttes stats/list-editoren, og tabellens værdier indtastes, så alderen lægges i List1 og længden i List2, og det er opgivet, at $f(x) = b \cdot x^a$, så der benyttes Powerregression med List2 som funktion af List1.

På TI n'spire:

Værdierne skrives ind i "Lister og regneark", og der vælges 'menu'→'statistik'→'statistiske beregninger'→'Potensregression'.

X-listen sættes til a[] og y-listen til b[]. Resultatet gemmes som f1(x).

Dette giver:

$a = 0{,}1178$

$b = 1{,}8367$

$$\underline{\underline{f(x) = 1{,}8367 \cdot x^{0{,}1178}}}$$

b) Længden af en søko, der er 8 år gammel:

$f(8) = 1{,}8367 \cdot 8^{0{,}1178} = 2{,}34652$

Dvs. at længden (ifølge modellen) er $\underline{\underline{2{,}35m}}$ (hvor det ses, at tabellen ved 7år afviger lidt fra modellen).

Alderen af en søko, der er 2,25 meter lang:

Dette bestemmes med lommeregnerens 'solve'

$solve(2{,}25 = 1{,}8367 \cdot x^{0{,}1178}, x)$, der giver x=5,600598

Dvs. at søkoen er $\underline{\underline{5{,}6\,år}}$

<u>5.005:</u> *a)* Tabellens værdier indtastes på en tabel i lommeregneren, og der laves eksponentiel regression med holdbarheden D som funktion af temperaturen T.

Resultatet gemmes som f1(x):

Det giver: $\underline{\underline{D(T) = 15{,}7 \cdot 0{,}891^T}}$

b) Holdbarheden ved temperaturen -18°C bestemmes ved direkte indsættelse i forskriften:

$D(-18) = 15{,}7 \cdot 0{,}891^{-18} = 124{,}7305$

Dvs. at ved -18^{0}C er holdbarheden $\underline{\underline{125\ dage}}$

Det kunne også være udregnet på lommeregneren ved f1(-18).

Hvis holdbarheden er 180 døgn har man:

$$180 = 15{,}7 \cdot 0{,}891^T \Leftrightarrow$$

$$\frac{180}{15{,}7} = 0{,}891^T \Leftrightarrow$$

$$T = \frac{\ln\left(\frac{180}{15{,}7}\right)}{\ln 0{,}891} = -21{,}18681$$

Dvs at temperaturen er $\underline{\underline{-21{,}2^0 C}}$

Dette kunne også være fundet på lommeregneren ved: solve(180=f1(x),x).

c) Halveringskonstanten kan beregnes, da man kender grundtallet/fremskrivningsfaktoren.

$$T_{½} = \frac{\ln ½}{\ln a} = \frac{\ln ½}{\ln 0{,}891} = 6{,}0221291 = \underline{\underline{6{,}0}}$$

Det kunne også være beregnet på lommeregneren ved: $solve(f1(x) = \frac{1}{2} \cdot f(0), x)$

Når temperaturen øges med 2 grader celsius har man:

$$D(T+2) = 15{,}7 \cdot 0{,}891^{T+2} = 15{,}7 \cdot 0{,}891^T \cdot 0{,}891^2 = D(T) \cdot 0{,}891^2 = D(T) \cdot 0{,}794375$$

Man har altså: $(1+r) = 0{,}794 \Leftrightarrow r = 0{,}794 - 1 = -0{,}206 = \underline{\underline{-20{,}6\%}}$

Man kunne også have taget udgangspunkt i en bestemt temperatur, udregnet holdbarheden for denne og derefter udregnet holdbarheden for en temperatur 2 grader højere, hvorefter det procentvise fald kunne bestemmes. MEN hvis man bruger denne metode, SKAL man nævne, at udgangspunktet ikke har nogen betydning, fordi det er en eksponentiel udvikling (der er den eneste type funktion, hvor y-værdien ændres med en fast procentdel, når der lægges en fast størrelse til x-værdien).

<u>5.006:</u> $I = I_0 \cdot e^{-0{,}0393x}$

Dette er en eksponentielt aftagende funktion, hvor halveringskonstanten er:

$$X_{½} = \frac{\ln 2}{0{,}0393} = 17{,}63733$$

Da x svarer til blyvæggens tykkelse målt i mm, svarer dette til, at gammastrålingens intensitet halveres for hver $\underline{\underline{17{,}6mm}}$ blyvæg.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>6.001:</u> $f(x)=-\ln(x)+e^x$ $P(2, f(2))$

For at kunne bestemme en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P, skal man kende tangentens hældning samt 2. koordinaten til røringspunktet P.

Først bestemmes hældningen ved at finde den afledede funktion og efterfølgende differentialkvotienten i 2 (som netop angiver tangenthældningen):

$$f'(x)=-\frac{1}{x}+e^x$$

$$f'(2)=-\frac{1}{2}+e^2\approx 6,889056 \quad \leftarrow \text{Tangenthældningen.}$$

Røringspunktets andenkoordinat bestemmes:

$$f(2)=-\ln(2)+e^2\approx 6,695909$$

Da man nu kender både hældning og et punkt på tangenten, kan en ligning for denne bestemmes:

$$y-y_0=a\cdot(x-x_0)$$

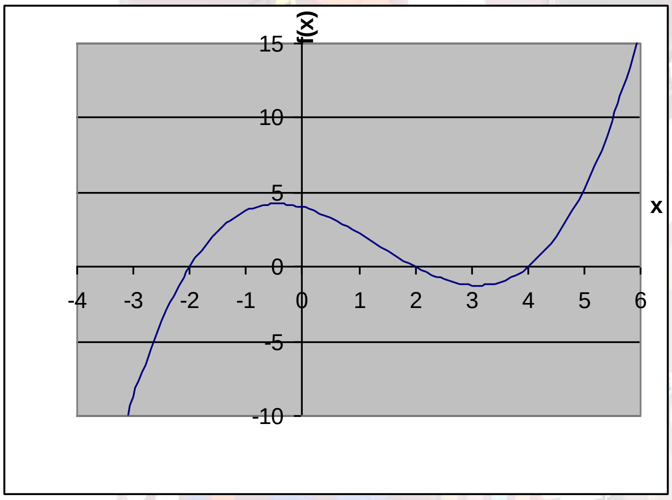
$$y-6,695909=6,889056\cdot(x-2) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y=6,889056x-7,082203}}$$

Dette kunne også være bestemt på TI n-spire ved indtastningerne:

tangentLine$(-\ln(x)+e^x,x,2)$	$\frac{(2\cdot e^2-1)\cdot x}{2}-\ln(2)-e^2+1$	← Eksakt
tangentLine$(-\ln(x)+e^x,x,2)$	$6.88905609893\cdot x-7.08220327949$	← Afrundet

<u>6.002:</u> $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2-x+4$

a) Grafen tegnes i et almindeligt koordinatsystem:



Grafens skæringspunkter med førsteaksen kan enten aflæses på grafen og kontrolleres ved indsættelse eller findes ved hjælp af lommeregnerens "solve":

<u>Metode 1:</u> Skæringspunkterne aflæses til (-2,0) , (2,0) og (4,0). De kontrolleres:

$$f(-2)=\frac{1}{4}(-2)^3-(-2)^2-(-2)+4=-2-4+2+4=0$$

$$f(2)=\frac{1}{4}\cdot 2^3-2^2-2+4=2-4-2+4=0$$

$$f(4)=\frac{1}{4}\cdot 4^3-4^2-4+4=16-16-4+4=0$$

Så de aflæste punkter ER altså skæringspunkterne med førsteaksen.

Metode 2: På TI n'spire indtastes $solve(\frac{1}{4}x^3-x^2-x+4=0,x)$, der giver

$$x=-2 \quad eller \quad x=2 \quad eller \quad x=4$$

Da funktionen er et tredjegradspolynomium, kan der højst være 3 skæringer med x-aksen, og grafregneren har altså fundet alle 3, der er $\underline{\underline{(-2,0),\ (2,0)\ og\ (4,0)}}$

b) Den mindste førstekoordinat er altså -2. Tangenten, der rører grafen for f i dette punkt, bestemmes på TI n'spire ved indtastningen:

$$\text{tangentLine}\left(\frac{1}{4}\cdot x^3-x^2-x+4,x,-2\right) \qquad 6\cdot x+12$$

Dvs. at ligningen er $\underline{\underline{y=6x+12}}$

6.003: $f(x)=x^2+\frac{2}{x} \quad ; \quad x>0$

For at kunne bestemme et minimum, skal der arbejdes med den afledede funktion, så først differentieres funktionen (ledvist):

$$f'(x)=2x+2\cdot\frac{-1}{x^2}=2x-\frac{2}{x^2}$$

Eventuelle nulpunkter for den afledede funktion bestemmes:

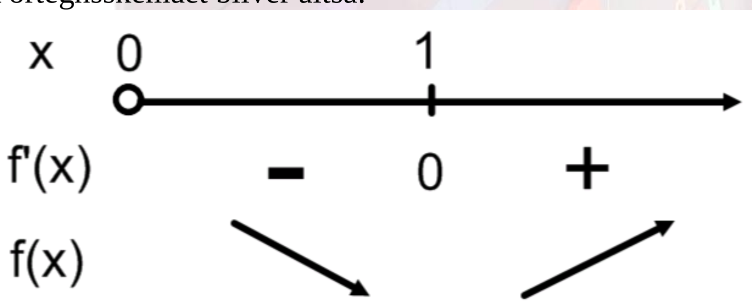
$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-\frac{2}{x^2}=0 \Leftrightarrow 2x=\frac{2}{x^2} \Leftrightarrow x^2\cdot x=\frac{2}{2} \Leftrightarrow x^3=1 \Leftrightarrow x=1$$

For at afgøre, om det er et minimum, man har dette sted, bestemmes fortegnet for den afledede funktion på hver side af stedet:

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\frac{1}{2}-\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1-8=-7<0$$

$$f'(2)=2\cdot 2-\frac{2}{2^2}=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}>0$$

Fortegnsskemaet bliver altså:



Man ser altså, at x = 1 er et globalt minimumssted, og minimum for funktionen bestemmes ved at indsætte i funktionsforskriften:

$$f_{\min}=f(1)=1^2+\frac{2}{1}=1+2=\underline{\underline{3}}$$

6.004: $O(x) = \frac{13}{3}\pi \cdot x^2 + \frac{40}{x}$

a) $O(2) = \frac{13}{3}\pi \cdot 2^2 + \frac{40}{2} = \frac{52\pi}{3} + 20 \approx 74{,}4543$

Dvs. at en radius på 2dm vil give en overflade på $\underline{\underline{74{,}5 dm^2}}$

For at finde den radius, der giver den mindste overflade, ses på den afledede funktion:

$O'(x) = \frac{26\pi}{3}x - \frac{40}{x^2}$

$O'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\frac{26\pi}{3}x - \frac{40}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\frac{26\pi}{3}x = \frac{40}{x^2} \quad \Leftrightarrow$

$x^3 = \frac{120}{26\pi} \quad \Leftrightarrow$

$x = \sqrt[3]{\frac{60}{13\pi}} \approx 1{,}1368$

$O'(1) = -12{,}8 < 0$

$O'(2) = 44{,}5 > 0$

Hermed bliver fortegnsskemaet:

x	0		1,1368	
$O'(x)$	i.d	-	0	+
$O(x)$	i.d	↘		↗

Det ses altså, at der er globalt minimum i x = 1,1368, dvs. beholderen har den mindste overflade for $\underline{\underline{radiusen\ 1{,}14\, dm}}$

Opgaven kunne også være løst grafisk ved at tegne grafen i et passende vindue og finde minimum.

6.005: $O(x) = x^3 - 30x^2 + 500x + 30$

a) Først opstilles et udtryk for fortjenesten F, der er salgsindtægter S fratrukket omkostninger (Definitionsmængden er alle ikke-negative tal):

$$F(x) = S(x) - O(x) = 308 \cdot x - \left(x^3 - 30x^2 + 500x + 30\right) = -x^3 + 30x^2 - 192x - 30$$

For at finde et maksimum for fortjenesten arbejdes med den afledede funktion:

$$F'(x) = -3x^2 + 60x - 192$$

$$F'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$0 = -3x^2 + 60x - 192 \quad \Leftrightarrow$$

$$0 = x^2 - 20x + 64$$

$$d = (-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 64 = 400 - 256 = 144$$

$$x = \frac{-(-20) \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{20 \pm 12}{2} = \begin{cases} 16 \\ 4 \end{cases}$$

$$F'(1) = -135 < 0$$

$$F'(10) = 108 > 0$$

$$F'(20) = -192 < 0$$

Der kan mindst produceres 0 tons, og fortjenesten findes så få de relevante x-værdier:

$$F(0) = -30$$

$$F(4) = -382$$

$$F(16) = 482$$

Ud fra disse informationer kan et fortegnsskema tegnes:

x	0		4		16	
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$	-30	↘	-108	↗	482	↘

Der kunne ud fra analysen af den afledede funktion have været størst fortjeneste for x = 0 eller x = 16, men x = 0 ville have været lidt underligt, da det svarer til ingen produktion og dermed intet salg, og det ses også i ovenstående skema, at den produktion, der giver den største fortjeneste, er $\underline{\underline{16\ tons}}$

<u>*6.006:*</u> $f(t) = 97{,}5 \cdot t \cdot e^{-0{,}39t} \quad ; \quad t \geq 0$

For at finde det tidspunkt, hvor iltunderskudet er størst, ses på den afledede funktion, hvor det bemærkes, at der både skal bruges regneregel for differentiation af produkt af funktioner og sammensat funktion:

$$f'(t) = 97{,}5 \cdot \left(1 \cdot e^{-0{,}39t} + t \cdot (-0{,}39) \cdot e^{-0{,}39t}\right) = 97{,}5 \cdot e^{-0{,}39t} \cdot (1 - 0{,}39t)$$

For at finde nulpunkter for den afledede funktion bruges nulreglen, og da en eksponentialfunktion kun giver positive værdier, har man altså:

$$f'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$1 - 0{,}39t = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{1}{0{,}39} = 2{,}564103$$

For at eftervise at dette svarer til et lokalt (og globalt) maksimum findes konkrete værdier:

$$f'(1) = 40{,}3 > 0$$

$$f'(3) = -5{,}1 < 0$$

Man har altså fortegnsskemaet:

x	0		2,56	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

Iltunderskudet er altså størst efter <u>2,6 *døgn*</u>

<u>*6.007:*</u> a) $s(t) = 5 \cdot t^{\frac{1}{2}}$

Hastighedsfunktionen er den afledede af stedfunktionen:

$$v(t) = s'(t) = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot t^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{2\sqrt{t}}$$

Hvis hastigheden skal være 2 m/s, skal:

$$2 = \frac{5}{2\sqrt{t}} \quad \Leftrightarrow \quad 4\sqrt{t} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{t} = \frac{5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad t = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{25}{16} = 1{,}5625$$

Dvs. at partiklen har hastigheden 2 m/s efter <u>1,56*s*</u>

<u>*6.008:*</u> $f(t) = 20 + 150 \cdot \ln(8 \cdot t + 1)$

t angiver tiden målt i antal minutter efter at ovnen er tændt.
f(t) angiver ovnens temperatur målt i °C.

Fra start (t = 0) er: $f(0) = 20 + 150 \cdot \ln(8 \cdot 0 + 1) = 20 + 150 \cdot \ln(1) = 20 + 150 \cdot 0 = 20$

<u>Dvs. at ovnens temperatur fra start er 20°C.</u>

Da den naturlige logaritme er en voksende funktion, vil temperaturen stige hele tiden. Differentialkvotienterne til forskellige tidspunkter vil fortælle, hvor hurtigt temperaturen stiger på de pågældende tidspunkter:

Differentialkvotienterne bestemmes på TI n'spire ved først at definere funktionen og derefter bestemme de to søgte differentialkvotienter f'(2) og f'(20):

$f(t):=20+150\cdot \ln(8\cdot t+1)$	*Udført*
$\frac{d}{dt}(f(t))\|t=2$	70.5882352941
$\frac{d}{dt}(f(t))\|t=20$	7.45341614907

Det ses altså, at 2 minutter efter, at ovnen er tændt, vokser temperaturen med 70,6°C pr. minut, mens temperaturen 20 minutter efter, at ovnen er tændt, vokser med 7,5°C pr. minut.

Dette kunne tyde på, at temperaturstigningen vil blive mindre og mindre, jo længere tid ovnen er tændt (Det kunne bekræftes ved en grundigere funktionsanalyse, men det lægges der ikke op til her).

<u>*6.009:*</u> $f(x) = \frac{3}{4} \cdot x^4 + x^3 - 3 \cdot x^2 + 3$

a) For at bestemme de lokale ekstrema bestemmes først ekstremumsstederne ved at finde de steder, hvor den afledede funktion giver 0, hvorefter funktionsværdierne bestemmes disse steder:

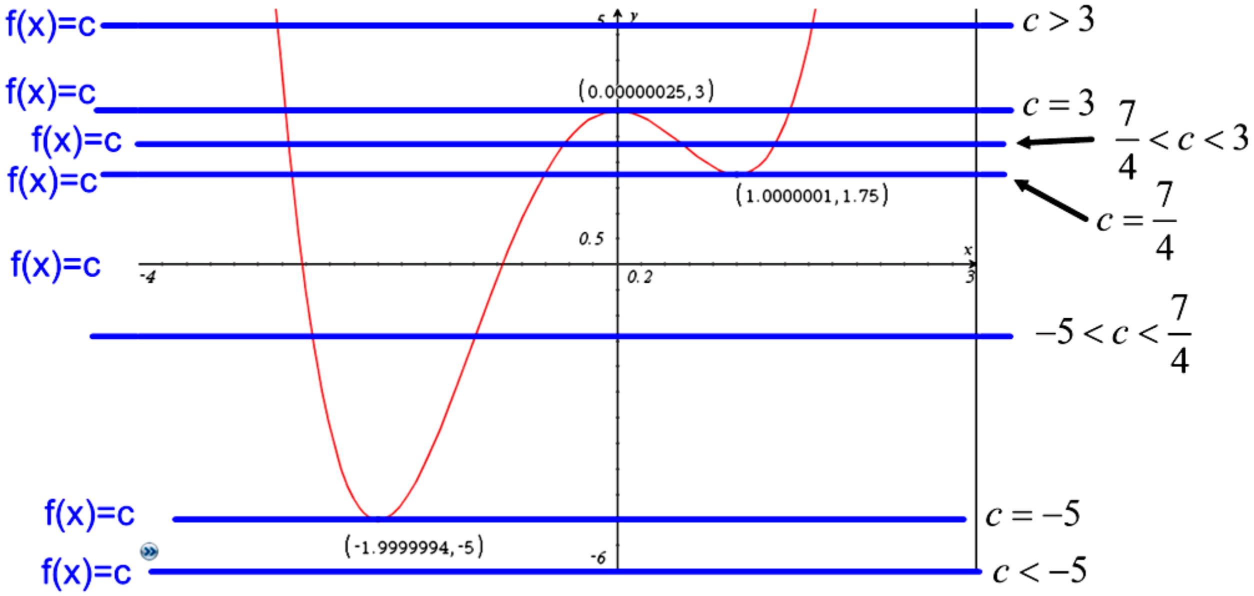
$f(x):=\frac{3}{4}\cdot x^4+x^3-3\cdot x^2+3$	*Udført*
$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(f(x))=0,x\right)$	$x=-2$ or $x=0$ or $x=1$
$f(-2)$	-5
$f(0)$	3
$f(1)$	$\frac{7}{4}$
$\frac{d}{dx}(f(x))\|x=-3$	-36
$\frac{d}{dx}(f(x))\|x=-1$	6
$\frac{d}{dx}(f(x))\|x=0.5$	-1.875
$\frac{d}{dx}(f(x))\|x=2$	24

De sidste fire udregninger er brugt til at finde fortegnene for den afledede funktion i de intervaller, der opdeles af stederne, og hermed kan man tegne et fortegnsskema for den afledede funktion.

x		-2		0		1	
f'(x)	-	0	+	0	-	0	+
f(x)	↘	-5	↗	3	↘	$\frac{7}{4}$	↗

Dvs. der er lokalt maksimum 3, og der er lokalt minimum $\frac{7}{4}$ og globalt minimum -5

b) Løsningerne til ligningen $f(x)=c$ svarer til skæringerne mellem de vandrette linjer og grafen som angivet nedenfor:



Så man har: For $c<-5$ er der ingen løsninger.

For $c=-5$ er der én løsning.

For $-5<c<\frac{7}{4}$ og for $c>3$ er der to løsninger.

For $c=\frac{7}{4}$ og for $c=3$ er der tre løsninger.

For $\frac{7}{4}<c<3$ er der fire løsninger.

<u>6.010:</u> $f(x)=80-2x$

a) Da punktet P ligger på grafen for f, har det koordinatsættet $P(x\,,\,80-2x)$.
Førstekoordinaten til P angiver bredden af rektanglet, mens andenkoordinaten angiver højden af rektanglet. Dvs. arealet bliver:

$$A_{rektangel}(x)=b\cdot h=x\cdot(80-2x)=\underline{\underline{-2x^2+80x}}$$

b) Grafen for arealet af rektanglet er en parabel med benene nedad, så det størst mulige areal svarer til toppunktets andenkoordinat. Da toppunktsformlen lyder $T=\left(\frac{-b}{2a};\frac{-d}{4a}\right)$, har man altså:

$$A_{\max}=\frac{-d}{4a}=\frac{-(b^2-4ac)}{4a}=\frac{-(80^2-4\cdot(-2)\cdot 0)}{4\cdot(-2)}=\frac{-6400}{-8}=\underline{\underline{800}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

7.001: $f(x)=3x^2-21x+30 \quad P(2,42)$

Der integreres ledvist, og samtlige stamfunktioner er altså på formen:

$$F(x)=x^3-\frac{21}{2}x^2+30x+k$$

Da grafen for stamfunktionen skal gå gennem P, indsættes P's koordinater i funktionsudtrykket for stamfunktionerne, så man kan bestemme den søge værdi af konstanten k:

$$42=2^3-\frac{21}{2}\cdot 2^2+30\cdot 2+k \quad\Leftrightarrow\quad 42=8-42+60+k \quad\Leftrightarrow\quad k=16$$

Dvs. at den søgte stamfunktion er:

$$\underline{\underline{F(x)=x^3-\frac{21}{2}x^2+30x+16}}$$

7.002: a) $f(x)=x^4-13x^2+36$

Den punktmængde, der ligger i 1. og 2. kvadrant og afgrænses af grafen for f og førsteaksen, begynder ved $x=-2$ og slutter ved $x=2$ ifølge de opgivne skæringspunkter. Så man har:

$$A=\int_{-2}^{2} f(x)dx$$

Dette udregnes på TI n'spire ved indtastningen:

$$\int_{-2}^{2}\left(x^4-13\cdot x^2+36\right)dx \qquad \frac{1312}{15}$$

Eller på TI-89 med:

$\int(x^4-13x^2+36,x,-2,2)$, der giver $\frac{1312}{15}$.

Dvs. at arealet af punktmængden er $\underline{\underline{\frac{1312}{15}}}$.

<u>*7.003:*</u> $f(x) = x^3 - 9x$

a) Først skal det identificeres, hvordan punktmængden ligger, så skæringerne med x-aksen bestemmes:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$x^3 - 9x = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$x \cdot \left(x^2 - 9\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$x \cdot (x+3) \cdot (x-3) \quad \Leftrightarrow$$
$$x = -3 \vee x = 0 \vee x = 3$$

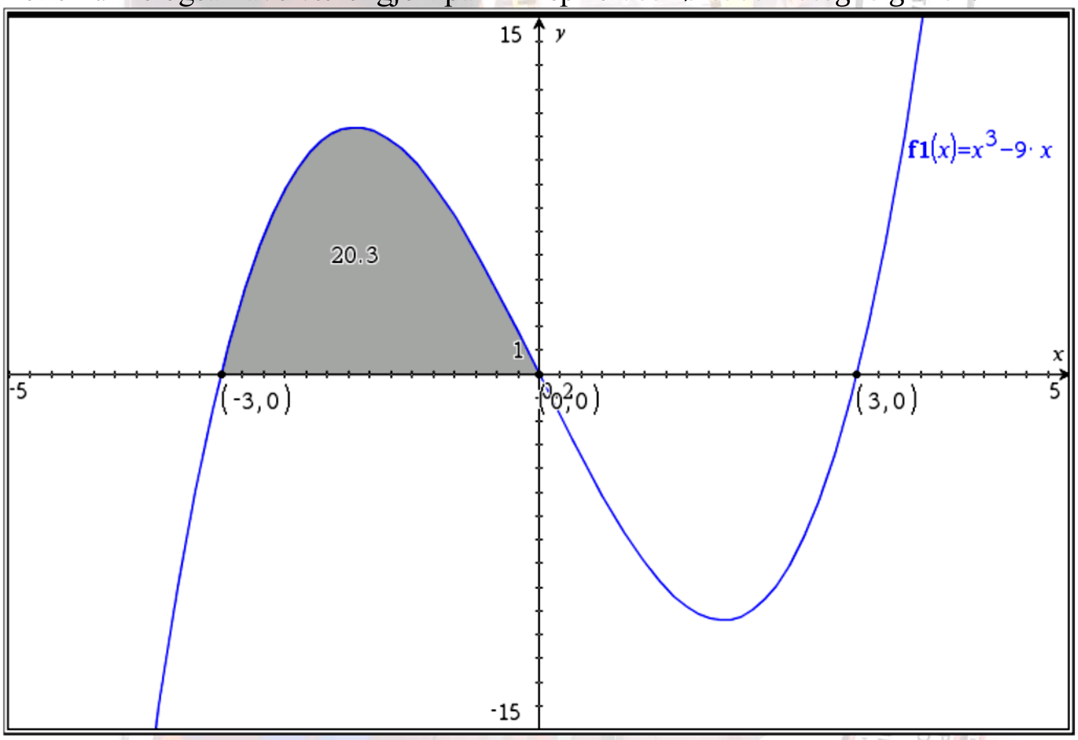
Da det er et tredjegradspolynomium med en positiv koefficient i tredjegradsleddet, der skærer x-aksen 3 steder, vil grafen ligge under x-aksen indtil x=-3, ligge over x-aksen mellem x=-3 og x=0, ligge under x-aksen mellem x=0 og x=3, hvorefter den vil ligge over x-aksen resten af vejen.

Dette kan også illustreres med en skitse på grafregneren, hvilket vil være nemmere end en forklaring, men da skal der lige argumenteres for, at alle vendinger af grafen er med, hvilket kan gøres ved at henvise til, at tredjegradspolynomier netop har én vendetangent og at den er med på skitsen.

Så kan arealet af punktmængden bestemmes:

$$A = \int_{-3}^{0} \left(x^3 - 9x\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right]_{-3}^{0} = 0 - 0 - \left(\frac{1}{4}\cdot(-3)^4 - \frac{9}{2}\cdot(-3)^2\right) = -\frac{81}{4} + \frac{81}{2} = \underline{\underline{\frac{81}{4}}}$$

Dette kunne også have været gjort på TI n'spire ved først at indtegne grafen:



Det søgte område i 2. kvadrant identificeres, og nulpunkterne for funktionen bestemmes grafisk ved 'Undersøg grafer' → 'Nulpunkt' og grænserne valgt på hver side af det søgte nulpunkt.

Da grænserne hermed ses at være -3 (nedre grænse) og 0 (øvre grænse), kan man bestemme arealet ved at vælge 'Undersøg grafer' → 'Integral' og på tasterne sætte grænserne til -3 og 0.

Hermed bestemmes arealet med én decimal til 20,3.

7.004: a) $y = 9 - x^2$ $\qquad y = x + 3$

Inden, der kan tegnes en skitse, bestemmes evt. skæringspunkter mellem graferne for de 2 ligninger:

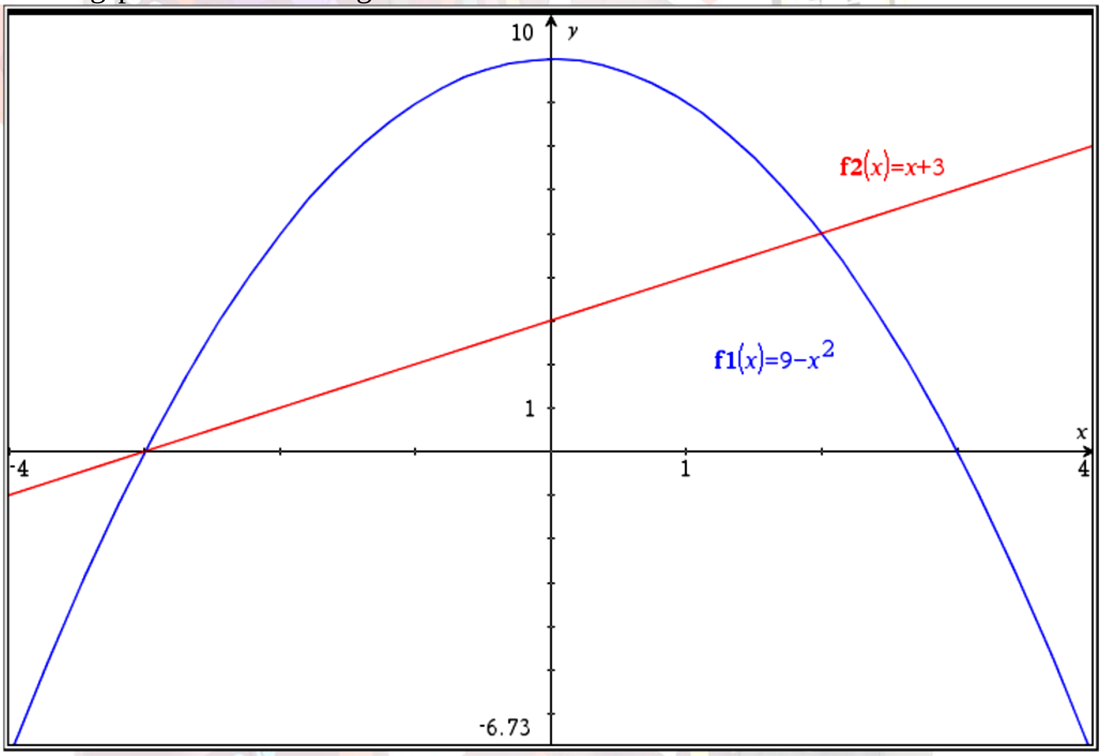
$$9 - x^2 = x + 3 \quad \Leftrightarrow$$

$$0 = x^2 + x - 6 \quad \Leftrightarrow$$

$$0 = (x+3)\cdot(x-2) \quad \Leftrightarrow$$

$$x = -3 \quad \vee \quad x = 2$$

Skæringspunkterne kunne også være fundet ved diskriminantmetoden.



Parablen vender benene nedad, så mellem de 2 skæringspunkter må den ligge øverst:
En skitse skal så vise skæringspunkterne samt at parablen ligger øverst mellem disse.

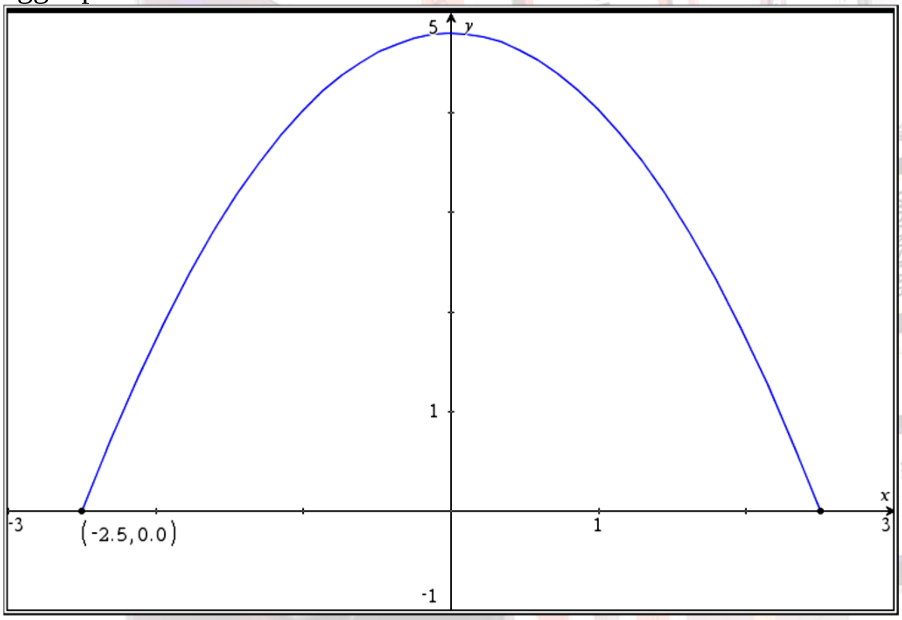
Punktmængden areal er så:

$$A = \int_{-3}^{2} \left(9 - x^2 - (x+3)\right)dx = \int_{-3}^{2} \left(-x^2 - x + 6\right)dx =$$

$$\left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x\right]_{-3}^{2} = \left(-\frac{1}{3}\cdot 2^3 - \frac{1}{2}\cdot 2^2 + 6\cdot 2\right) - \left(-\frac{1}{3}\cdot(-3)^3 - \frac{1}{2}\cdot(-3)^2 + 6\cdot(-3)\right) =$$

$$-\frac{8}{3} - 2 + 12 - 9 + \frac{9}{2} + 18 = 19 + \frac{9}{2} - \frac{8}{3} = \frac{114}{6} + \frac{27}{6} - \frac{16}{6} = \underline{\underline{\frac{125}{6}}}$$

7.005: a) Gavlen indtegnes i et koordinatsystem, så dens højeste punkt ligger på *y*-aksen og fodpunkterne ligger på *x*-aksen.



Lad forskriften være $f(x) = ax^2 + bx + c$

Med det pågældende valg af koordinatsystem bliver skæringen med *y*-aksen og dermed *c*-værdien:

$c = 4{,}8$

Toppunktets førstekoordinat er $-\frac{b}{2a}$, og da den er 0, har man:

$b = 0$

Et af fodpunkterne har koordinatsættet (2,5 ; 0), hvilket bruges til at bestemme *a*-værdien:

$0 = a \cdot 2{,}5^2 + 4{,}8 \quad \Leftrightarrow \quad -4{,}8 = 6{,}25a \quad \Leftrightarrow \quad a = -0{,}768$

$\underline{\underline{f(x) = -0{,}768x^2 + 4{,}8}}$

b) Koordinatsættene til skæringspunkterne med x-aksen kendes, så arealet kan bestemmes:

$$A = \int_{-2,5}^{2,5} \left(-0{,}768x^2 + 4{,}8\right)dx = \left[\frac{-0{,}768}{3}x^3 + 4{,}8x\right]_{-2,5}^{2,5} =$$

$$\left(\frac{-0{,}768}{3} \cdot 2{,}5^3 + 4{,}8 \cdot 2{,}5\right) - \left(\frac{-0{,}768}{3} \cdot (-2{,}5)^3 + 4{,}8 \cdot (-2{,}5)\right) = \underline{\underline{16}}$$

7.006: a) Da punktmængderne begge ligger over x-aksen, svarer de bestemte integraler med relevante øvre og nedre grænser til arealerne af de to punktmængder. Man har dermed:

$$\int_{-3}^{-2} f(x)dx = A_{M_1} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

$$\int_{-3}^{2} f(x)dx = \int_{-3}^{-2} f(x)dx + \int_{-2}^{2} f(x)dx = A_{M_1} + A_{M_2} = \frac{3}{4} + 32 = \frac{3}{4} + \frac{128}{4} = \underline{\underline{\frac{131}{4}}}$$

MAJ 2007: Delprøven uden hjælpemidler

8.001: $\dfrac{xy+x^2}{xy}$

Brøken kan forkortes med x, dvs. alle led i både tæller og nævner skal divideres med x:

$$\frac{xy+x^2}{xy}=\frac{\frac{xy}{x}+\frac{x^2}{x}}{\frac{xy}{x}}=\frac{y+x}{y}=\frac{y}{y}+\frac{x}{y}=\underline{\underline{1+\frac{x}{y}}}$$

Man kunne også have reduceret udtrykket ved først at faktorisere tælleren, da hvert led indeholder x:

$$\frac{xy+x^2}{xy}=\frac{x(y+x)}{xy}=\underline{\underline{\frac{y+x}{y}}}$$ (Det er i orden at angive dette som facit)

8.002: $f(x)=x^3+2x+8$

Først findes den afledede funktion ved at differentiere ledvist:

$$f'(x)=3x^2+2+0=3x^2+2$$

Så bestemmes differentialkvotienten i 1:

$$f'(1)=3\cdot 1^2+2=3\cdot 1+2=\underline{\underline{5}}$$

For at kunne bestemme en ligning for tangenten til grafen i et punkt skal man kende punktets koordinater og tangenthældningen. Hældningen er fundet ovenfor, og punktets 2. koordinat bestemmes ved at indsætte 1. koordinaten i funktionsudtrykket:

$$f(1)=1^3+2\cdot 1+8=1+2+8=11$$

Så bliver tangentens ligning:

$$y-y_0=a\cdot(x-x_0)$$

$$y-11=5\cdot(x-1)\quad\Leftrightarrow\quad\underline{\underline{y=5x+6}}$$

8.003: $f(x)=b\cdot a^x$ Grafen går gennem punkterne (2,20) og (4,80).

Punkternes værdier indsættes i funktionsforskriften, så der dannes to ligninger med to ubekendte:

$$\left.\begin{aligned}80&=b\cdot a^4\\20&=b\cdot a^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{80}{20}=\frac{b\cdot a^4}{b\cdot a^2}\quad\Rightarrow\quad 4=a^{4-2}\quad\Leftrightarrow\quad a=\sqrt{4}=\underline{\underline{2}}$$

Det er i sidste skridt benyttet, at a-værdien er positiv, da det er en eksponentiel udvikling.

a-værdien indsættes i den nederste af de oprindelige ligninger for at finde b-værdien:

$$20=b\cdot 2^2\quad\Leftrightarrow\quad b=\frac{20}{4}=\underline{\underline{5}}$$

<u>8.004:</u> $|AB| = 10 \quad |AC| = 6 \quad |AB'| = 15 \quad \angle ACB = \angle AC'B' = 90°$

Da trekant ABC er retvinklet med den rette vinkel C, giver Pythagoras:

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2 \iff |BC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2$$

$$|BC| = \sqrt{|AB|^2 - |AC|^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = \underline{\underline{8}}$$

Da de to trekanter er ensvinklede, er forholdene mellem de ensliggende sider ens, dvs.:

$$\frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|AB'|}{|AB|} \iff |B'C'| = \frac{|AB'|}{|AB|} \cdot |BC|$$

$$|B'C'| = \frac{15}{10} \cdot 8 = \frac{3}{2} \cdot 8 = 3 \cdot 4 = \underline{\underline{12}}$$

<u>8.005:</u> Det bestemte integral bestemmes ved hjælp af stamfunktionen til integranden (der integreres ledvist):

$$\int_0^1 \left(2x^3 + e^x\right) dx = \left[\frac{2}{4} x^4 + e^x\right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot 1^4 + e^1 - \left(\frac{1}{2} \cdot 0^4 + e^0\right) = \frac{1}{2} + e - 0 - 1 = \underline{\underline{e - \frac{1}{2}}}$$

Maj 2007: Delprøven med hjælpemidler

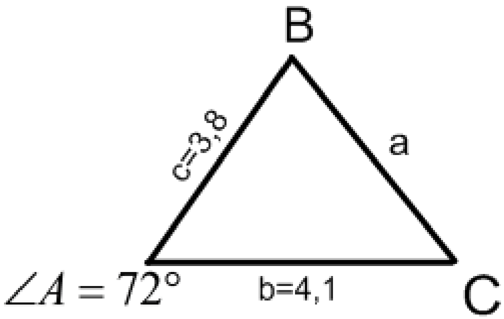
8.006: $f(x) = 87880 \cdot x + 69550$

x er antal år efter 1987.

f(x) er det samlede antal biler, der er sendt til ophugning i løbet af x år siden 1987.

Funktionen fortæller os, at der hvert år efter 1987 er blevet sendt 87880 biler til ophugning, og at der i 1987 blev sendt 69550 biler til ophugning.

8.007: a) Ud fra de opgivne størrelser tegnes en model af trekant ABC:

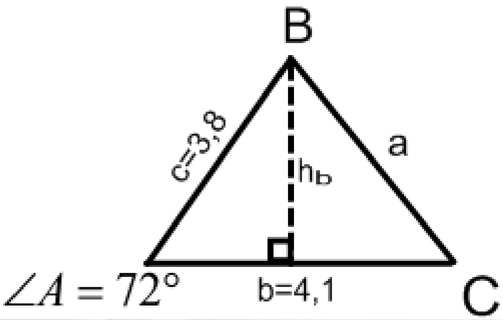


Da man kender en vinkel og de to hosliggende sider, kan længden af den sidste side bestemmes ved en cosinusrelation:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$$

$$a = \sqrt{4{,}1^2 + 3{,}8^2 - 2 \cdot 4{,}1 \cdot 3{,}8 \cdot \cos(72°)} = 4{,}64984198 = \underline{\underline{4{,}6}}$$

a) Højden på siden b tegnes ind på figuren:



Fodpunktet for højden på b danner sammen med A og B en retvinklet trekant, hvor man kender en spids vinkel (A) og hypotenusen (c) og skal finde den modstående katete (h_b).

Dermed har man:

$$\sin(A) = \frac{h_b}{c} \quad \Leftrightarrow \quad h_b = c \cdot \sin(A) = 3{,}8 \cdot \sin(72°) = 3{,}614015 = \underline{\underline{3{,}6}}$$

<u>*8.008:*</u> $W(L) = b \cdot L^a$ W er vægten aborrerne målt i gram. L er længden målt i cm.

a) Der er oplyst to sæt af sammenhørende L- og W-værdier: (7,1;5,5) og (14,3;58,4)
Disse to punkter indsættes i forskriften, så man får to ligninger med to ubekendte, der løses med 'solve':

$5{,}5 = b \cdot 7{,}1^a$

$58{,}4 = b \cdot 14{,}3^a$

$\text{solve}\left(5.5=b\cdot(7.1)^a \text{ and } 58.4=b\cdot(14.3)^a,a,b\right)$ $\quad a=3.37430267196 \text{ and } b=0.007378351975$

Dvs. at forskriften er:

$\underline{\underline{W(L) = 0{,}007378 \cdot L^{3{,}3743}}}$

b) Hvis vægten er 100g, har man altså W(L) = 100.
Denne ligning løses med 'solve':

$\text{solve}\left(100=0.007378\cdot l^{3.3743},l\right)$ $\quad l=16.7713668405$

Dvs. at en aborre på 100g ifølge modellen vil være <u>16,8cm</u> lang.

<u>*8.009:*</u> a) Det er oplyst, at DHN som funktion af tiden x kan beskrives ved en eksponentiel udvikling *f*, så forskriften bestemmes ved på TI n'spire under "Lister og regneark" at indtaste tabellens værdier, hvor det bemærkes, at x-værdierne dog skal omregnes til 0, 1, 2, 3 og 4, da det er antal år EFTER 2002. Årstallene efter 2002 indtastes i søjle A og DHN i søjle B
I menuerne vælges 'Statistik'→'Statistiske beregninger'→'Eksponentiel regression':
x-liste: a[]
y-liste: b[]
gem reg: f1
Dette giver forskriften: $\underline{\underline{f(x) = 6{,}532 \cdot 1{,}1126^x}}$

b) Ifølge modellen kan DHN for 2007 udregnes som f(5).
Da forskriften er gemt på lommeregneren under f1, indtastes:

$f1(5)$ $\quad 11.1378752253$

Dvs. at DHN ifølge modellen i 2007 vil være <u>11,138 milliarder kr.</u>

Fordoblingskonstanten kan enten bestemmes ved formlen:

$$X_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}1126)} = 6{,}496248$$

Dvs. at <u>fordoblingskonstanten er 6,5 år</u>

Eller den kan bestemmes ved indtastningen:

$\text{solve}\left(f1(x)=2\cdot f1(0),x\right)$ $\quad x=6.49421704041$

8.010: $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 50$

For at kunne bestemme arealet af punktmængden M skal man kende de to nulpunkter for funktionen, der skal bruges som nedre og øvre grænse i det bestemte integral.

Nulpunkterne bestemmes:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^3 - 12x^2 + 45x - 50$$

Dette løses på TI n'spire ved " $solve(0 = x^3 - 12x^2 + 45x - 50, x)$ ", der giver $x = 2 \vee x = 5$

Dvs. arealet punktmængden M bliver:

$$A_M = \int_2^5 f(x)dx = \int_2^5 \left(x^3 - 12x^2 + 45x - 50\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 4x^3 + \frac{45}{2}x^2 - 50x\right]_2^5 =$$

$$\frac{1}{4}\cdot 5^4 - 4\cdot 5^3 + \frac{45}{2}\cdot 5^2 - 50\cdot 5 - \left(\frac{1}{4}\cdot 2^4 - 4\cdot 2^3 + \frac{45}{2}\cdot 2^2 - 50\cdot 2\right) =$$

$$\frac{625}{4} - 500 + \frac{1125}{2} - 250 - 4 + 32 - 90 + 100 = \frac{625}{4} + \frac{2250}{4} - \frac{2848}{4} = \underline{\underline{\frac{27}{4}}}$$

Bestemmelsen af nulpunkterne kunne også have været udregnet på TI n'spire på følgende måde, hvor man først definerer funktionen:

$f(x) := x^3 - 12\cdot x^2 + 45\cdot x - 50$	*Udført*
$\text{solve}(f(x)=0,x)$	$x=2$ or $x=5$
$\int_2^5 f(x)\,dx$	$\frac{27}{4}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk   Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

8.011: Man arbejder med følgende funktionsudtryk:

$$O(x)=0,04\cdot x^3-0,5\cdot x+2,35\cdot x+7,5 \quad ; \quad 1\leq x\leq 15$$

$$p(x)=8-0,4\cdot x \quad ; \quad 1\leq x\leq 15$$

$$F(x)=p(x)\cdot x-O(x) \quad ; \quad 1\leq x\leq 15$$

a) På n'spire defineres funktionerne, og udtrykket for F(x) beregnes:

$o(x):=0.04\cdot x^3-0.5\cdot x^2+2.35\cdot x+7.5$	*Udført*
$p(x):=8-0.4\cdot x$	*Udført*
$f(x):=p(x)\cdot x-o(x)$	*Udført*
$f(x)$	$-0.04\cdot x^3+0.1\cdot x^2+5.65\cdot x-7.5$

Dvs. man har:

$$\underline{\underline{F(x)=-0,04\cdot x^3+0,1\cdot x^2+5,65\cdot x-7,5}}$$

b) Det undersøges, hvor den afledede af f giver 0:

$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(f(x))=0,x\right)$	$x=-6.07881378444$ or $x=7.74548045111$
$\frac{d^2}{dx^2}(f(x))\vert x=7.7454804511095$	-1.65891530827

Kun det ene sted ligger i definitionsmængden, og dette sted har man undersøgt fortegnet for den anden afledede af *f*. Fortegnet er negativt, så det pågældende sted, er der et maksimum, og da der ikke er andre ekstremumssteder i definitionsmængden, er dette stedet, der giver den største fortjeneste.

Da *x* måles i tusinder, vil den største fortjeneste altså ligge ved produktionen af 7745 varer

8.012: $T=21+59\cdot e^{-1,66\cdot t}$, hvor *T* er væskens temperatur i ˚C og *t* er tiden målt i timer.

a) $t=1$: $T=21+59\cdot e^{-1,66\cdot 1}=21+59\cdot e^{-1,66}=32,218199826$

Dvs. at væskens temperatur er $\underline{\underline{32,2°C}}$

For at finde ud af betydningen af tallet 21 indtastes udtrykket som t(x), og man kigger i tabellen:

x	t(x)
1	32,22
2	23,13
3	21,41
4	21,08
5	21,015
6	21,0028
7	21,00053

Det ses altså, at som tiden går, vil temperaturen nærme sig 21˚C, der altså må være omgivelsernes temperatur.

b) For at finde tidspunktet, hvor temperaturen er 30˚C bruges 'solve':

$\text{solve}(t(x)=30,x)$	$x=1.13271859432$

Dvs. der går $\underline{\underline{1,13\,timer}}$ før temperaturen er nede på 30˚C.

<u>8.013:</u> $f(x)=\ln(x)-3x \ , \quad x>0$

a) Der skal redegøres for, at funktionen har et maksimum, dvs. en bestemt funktionsværdi, der er det største tal i værdimængden. Ordet 'maksimum' fører os direkte til begrebet 'afledet funktion'. Så først bestemmes den afledede funktion og derefter evt. nulpunkter for denne:

$$f'(x)=\frac{1}{x}-3$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}-3=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}=3 \Leftrightarrow 1=3\cdot x \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

For at undersøge, om der er maksimum, minimum eller vandret vendetangent dette sted bestemmes fortegnet for den anden afledede dette sted:

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}$$

$$f''\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=-9<0$$

Da den afledede er negativ dette sted, er der tale om et lokalt maksimumssted.
<u>Da dette er det eneste ekstremumssted, må det også være et globalt maksimumssted</u>, dvs. det er nu vist, at f har et maksimum.
Selve værdien bestemmes ved at indsætte x-værdien i funktionsforskriften:

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\ln\left(\frac{1}{3}\right)-3\cdot\frac{1}{3}=\underline{\underline{-\ln(3)-1}}\approx-2{,}0986122886681$$

<u>8.014:</u> $2\cdot\pi\cdot r\cdot h+4\cdot\pi\cdot r^2=4 \quad ; \quad V=\pi\cdot r^2\cdot h-\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$

a) Man bestemmer V som funktion af r ved at først at isolere h i den første ligning og derefter indsætte det fremkomne udtryk på h's plads i den anden ligning:

$$2\cdot\pi\cdot r\cdot h+4\cdot\pi\cdot r^2=4 \Leftrightarrow$$

$$2\cdot\pi\cdot r\cdot h=4-4\cdot\pi\cdot r^2 \Leftrightarrow$$

$$h=\frac{4-4\cdot\pi\cdot r^2}{2\cdot\pi\cdot r}=\frac{2}{\pi\cdot r}-2\cdot r$$

Indsat i den anden ligning:

$$V=\pi\cdot r^2\cdot\left(\frac{2}{\pi\cdot r}-2\cdot r\right)-\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3=2\cdot r-2\cdot\pi\cdot r^3-\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3=\underline{\underline{2\cdot r-\frac{10}{3}\cdot\pi\cdot r^3}}$$

<u>8.015:</u>

- Stikprøven er på 770 patienter, men det oplyses ikke, hvor mange af disse der falder ind under kategorien "enlige pga. skilsmisse eller dødsfald". Dermed bliver det ikke muligt at vurdere, om de 40% kunne være en statistisk usikkerhed. Så spørgsmålet er: Hvor mange patienter faldt ind under kategorien "enlige pga. skilsmisse eller dødsfald"?
- Er resultatet dækkende for kræftpatienter generelt (som avisen formulerer det), eller gælder det kun for tarmkræftpatienter? Det kunne jo være, at enlige ikke laver så sund mad, fordi de spiser alene, og kosten kunne have større betydning for tarmkræft end for kræft generelt.
- Er der korrigeret for alder? De mennesker, der er blevet enlige pga. dødsfald har nok generelt en højere alder end gennemsnittet, og dermed kunne overdødeligheden simpelthen skyldes, at de var ældre.

- Hvordan er der undersøgt for socialt netværk, der er fremlagt som en del af undersøgelsens formål, men som ikke nævnes under resultatet? Det fremgår ikke af resultatet, om man faktisk har undersøgt, om en nær vennekreds har betydning, dvs. om det ikke nødvendigvis er en partner, der skal til.

August 2007: Delprøven uden hjælpemidler

8.016: $f\left(x\right)=2x^2-8x+6$

Grafen for f er en parabel, og for at bestemme koordinatsættet til toppunktet udregnes først diskriminanten:

$$d=b^2-4ac=\left(-8\right)^2-4\cdot 2\cdot 6=64-48=16$$

Toppunktet er så:

$$T=\left(\frac{-b}{2a};\frac{-d}{4a}\right)=\left(\frac{-\left(-8\right)}{2\cdot 2};\frac{-16}{4\cdot 2}\right)=\underline{\underline{\left(2;-2\right)}}$$

8.017: $f(x)=b\cdot x^a \quad f(2)=4 \quad f(4)=64$

Man har altså, at når x = 2, er y = 4, og når x = 4, er y = 64. Disse værdier indsættes i forskriften:

$$\left.\begin{matrix}4=b\cdot 2^a\\ 64=b\cdot 4^a\end{matrix}\right\}\Rightarrow \frac{64}{4}=\frac{b\cdot 4^a}{b\cdot 2^a} \quad\Leftrightarrow\quad 16=\frac{4^a}{2^a} \quad\Leftrightarrow\quad 16=\left(\frac{4}{2}\right)^a \quad\Leftrightarrow\quad 16=2^a \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{a=4}}$$

a-værdien indsættes i den øverste ligning for at finde b-værdien:

$$4=b\cdot 2^4 \quad\Leftrightarrow\quad 4=b\cdot 16 \quad\Leftrightarrow\quad b=\frac{4}{16}=\underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

8.018: Udtrykket reduceres ved først at benytte to kvadratsætninger:

$$\left(S-T\right)\left(S+T\right)-\left(S+T\right)^2+2ST=$$

$$S^2-T^2-\left(S^2+T^2+2ST\right)+2ST=$$

$$S^2-T^2-S^2-T^2-2ST+2ST=\underline{\underline{-2T^2}}$$

8.019: $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x$

For at kunne bestemme monotoniforholdene skal man først have bestemt den afledede funktion:

$$f'(x) = -3x^2 - 6x + 9$$

For at finde de steder, hvor der kan være ekstremum, bestemmes nulpunkterne for den afledede funktion:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = -3x^2 - 6x + 9 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 + 2x - 3$$

I sidste skridt er ligningen forkortet med -3.
Man kan løse denne andengradsligning med diskriminantmetoden, eller man kan gøre følgende:
Da koefficienten *a* i denne andengradsligning er 1, kan man "gætte" faktoriseringen ved at finde to tal, hvis produkt er -3, og hvis sum er 2. Dette gælder for tallene 3 og -1. Så er:

$$0 = x^2 + 2x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = (x+3)\cdot(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad x = -3 \ \vee \ x = 1$$

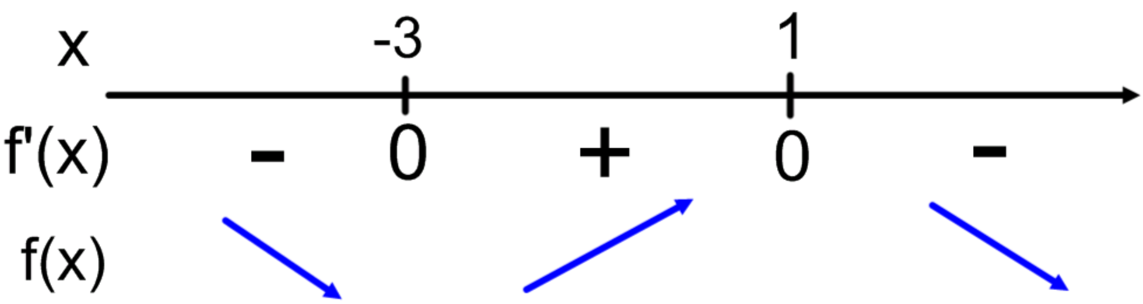
De to steder opdeler *x*-aksen i tre intervaller, hvor fortegnet for den afledede funktion skal bestemmes. Så man vælger et tal til venstre for -3 (her vælges -5), et tal mellem -3 og 1 (her vælges 0) og et tal til højre for 1 (her vælges 2):

$$f'(-5) = -3\cdot(-5)^2 - 6\cdot(-5) + 9 = -75 + 30 + 9 = -36 < 0$$

$$f'(0) = -3\cdot 0^2 - 6\cdot 0 + 9 = 9 > 0$$

$$f'(2) = -3\cdot 2^2 - 6\cdot 2 + 9 = -12 - 12 + 9 = -15 < 0$$

Hermed bliver fortegnsskemaet:



Dvs. at:

<u>*f* er aftagende i intervallerne]-∞,-3] og [1,∞[, og *f* er voksende i [-3,1]</u>

8.020: Ligningen løses ved at anvende nulreglen:

$$(x+1)(x-1)(x^2+1) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x+1) = 0 \ \vee \ (x-1) = 0 \ \vee \ (x^2+1) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{x = -1 \ \vee \ x = 1}}$$

Sidste skridt følger af, at $x^2 + 1$ aldrig kan blive 0, da x^2 aldrig kan blive negativ.

August 2007: Delprøven med hjælpemidler

8.021: $f(x) = x + \frac{1}{x}$; $x > 0$; $F(1) = 3,5$

Der integreres ledvist, og samtlige stamfunktioner er altså på formen:

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \ln|x| + k = \frac{1}{2}x^2 + \ln(x) + k$ (numerisktegnet kan fjernes, da x > 0)

Den stamfunktion, der opfylder F(1)=3,5 bestemmes ved indsættelse i ovenstående forskrift:

$3,5 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \ln(1) + k \quad \Leftrightarrow \quad 3,5 = \frac{1}{2} + 0 + k \quad \Leftrightarrow \quad k = 3$

Dvs. at den søgte stamfunktion er:

$$\underline{\underline{F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \ln(x) + 3}}$$

8.022: a) Længden af pigernes løberute er: $l_{piger} = |AB| + |BC| + |CA| = |AB| + 1,6km + |CA|$

Vinkel B i trekant ABC bestemmes ud fra vinkelsummen i en trekant:

$\angle B = 180° - 38,1° - 13,5° = 128,4°$

De to manglende sidelængder kan så bestemmes ved sinusrelationer:

$$\frac{|AB|}{\sin C} = \frac{|BC|}{\sin A} \quad \Leftrightarrow \quad |AB| = \frac{|BC|}{\sin A} \cdot \sin C$$

$$|AB| = \frac{1,6km}{\sin 13,5°} \cdot \sin 38,1° = 4,2290726km$$

$$\frac{|AC|}{\sin B} = \frac{|BC|}{\sin A} \quad \Leftrightarrow \quad |AC| = \frac{|BC|}{\sin A} \cdot \sin B$$

$$|AC| = \frac{1,6km}{\sin 13,5°} \cdot \sin 128,4° = 5,371319km$$

Altså bliver:

$l_{piger} = 4,2km + 1,6km + 5,4km = \underline{\underline{11,2km}}$

b) For at finde længden af drengenes rute, bruges en cosinusrelation på trekant ADE:

$$|AD|^2 = |AE|^2 + |DE|^2 - 2 \cdot |AE| \cdot |DE| \cdot \cos E$$

$$|AD| = \sqrt{(1,5km)^2 + (4,0km)^2 - 2 \cdot 1,5km \cdot 4,0km \cdot \cos 130,2°}$$

$$|AD| = 5,0985775km$$

Længden af drengenes rute er altså: $l_{drenge} = 4,0km + 1,5km + 5,1km = 10,6km$

Dvs. at pigerne løber <u>0,6km længere end drengene</u> (hvis der regnes med alle decimaler: 602m)

8.023: $f(x) = 5x - e^x$, $-4 \le x \le 8$

Først findes den afledede funktion, der bruges til at finde maksimumsstedet.

$f'(x) = 5 - e^x$

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$e^x = 5 \Leftrightarrow$

$x = \ln 5 \approx 1,61$

Det ses, at det fundne nulpunkt for den afledede funktion ligger i definitionsmængden.
Fortegnene for den afledede funktion på hver side af nulpunktet bestemmes:

$f'(1) = 2,3 > 0$

$f'(2) = -2,4 < 0$

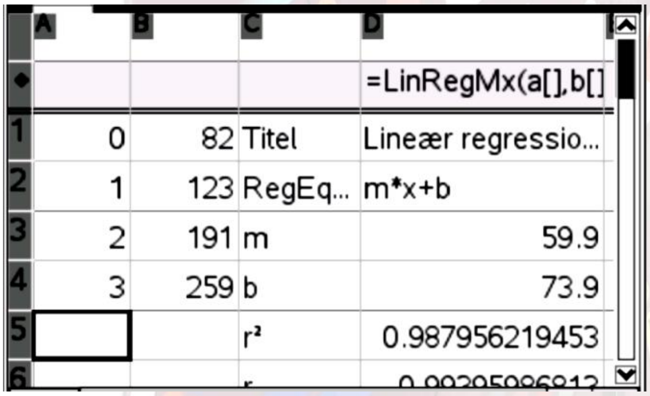
Da den afledede funktion er positiv til venstre for nulpunktet og negativ til højre for nulpunktet, svarer nulpunktet til et globalt maksimumssted. Førstekoordinaten indsættes for at bestemme den globale maksimumsværdi (funktionens maksimum):

$f(\ln 5) = 5 \cdot \ln 5 - e^{\ln 5} = 5 \cdot \ln 5 - 5 = \underline{\underline{5 \cdot (\ln 5 - 1)}} \approx 3,047190$

8.024: Det er oplyst, at man skal antage, at sammenhængen mellem N (antallet af fangede laks i Skjern Å i den angivne periode (15/4 - 15/9)) og t (antal år efter 2002) kan beskrives ved en lineær model.
Da man skal regne med antal år EFTER 2002, skal man benytte følgende tabel:

Antal år efter 2002	0	1	2	3
Antal fangede laks i Skjern Å	82	123	191	259

a) Tabellens værdier indtastes på TI n'spire under 'Lister og regneark' med antal år i kolonne A og antal fangede laks i kolonne B.
Der laves lineær regression ved under værktøjerne at vælge:
'Statistik'--> 'Statistiske beregninger'-->'3:Lineær regression (mx+b)'
Der vælges: X-liste: a[] ; Y-liste: b[] ; Gem regEqn: f1 (udtrykkes gemmes som funktionen f1)
Man får:



	A	B	C	D
◆				=LinRegMx(a[],b[]
1	0	82	Titel	Lineær regressio...
2	1	123	RegEq...	m*x+b
3	2	191	m	59.9
4	3	259	b	73.9
5			r²	0.987956219453
6			r	0.99395986813

Forskriften er altså:

$\underline{\underline{N(t) = 59,9 \cdot t + 73,9}}$

Da forskriften er gemt under f1, kan man bestemme N(12) på n'spire ved:

$f1(12)$	792.7

Dvs. at $\underline{\underline{N(12) = 792,7}}$

Da t =12 svarer til år 2002 + 12 = 2014, fortæller dette tal, at man ifølge modellen <u>i år 2014 i perioden 15. april til 15. september kan forvente at fange 793 laks i Skjern Å.</u>

8.025: a) Informationerne omskrives først til ligninger:

z er ligefrem proportional med y med proportionalitetsfaktoren 3: $z = 3 \cdot y$

x og y er omvendt proportionale: $x \cdot y = k$ (hvor k er en konstant)

y er 10, når x er ½: $½ \cdot 10 = k \quad \Leftrightarrow \quad k = 5$

Hermed har man to udtryk: $z = 3 \cdot y$ og $x \cdot y = 5$.

Så isoleres y i det andet udtryk og indsættes derefter i det første:

$y = \frac{5}{x}$ indsættes: $z = 3 \cdot \frac{5}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{z = \frac{15}{x}}}$

8.026: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 - x + 4$.

Først bestemmes skæringspunktet A. Det gøres ved hjælp af grafregneren:

$solve\left(0 = \frac{1}{4}x^3 - x^2 - x + 4, x\right)$, der returnerer $x = -2 \quad \vee \quad x = 2 \quad \vee \quad x = 4$

Dvs. at $A(-2,0)$.

Tangentens hældning bestemmes ved hjælp af den afledte funktion:

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x - 1$$

$$f'(-2) = \frac{3}{4} \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$$

Så tangentens ligning er: $y - 0 = 6(x - (-2)) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = 6x + 12}}$

8.027: a) Med en årlig vækstrate på 0,54%, bliver fremskrivningsfaktoren:

$$a = (1 + r) = (1 + 0{,}0213) = 1{,}0213$$

På 10 år får man: $a^{10} = 1{,}0213^{10} = 1{,}2346200316$.

Dette svarer til vækstraten $0{,}2346200316 \approx 23{,}46\%$

Dvs. at indbyggertallet i Florida i perioden 1990-2000 i alt voksede med $\underline{\underline{23{,}46\%}}$

Da det er en fast vækstrate, kan man anvende kapitalfremskrivningsformlen til at udregne indbyggertallet i 2007.

Da det er 7 år efter år 2000, er n = 7, og man har så:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$$

$$K_7 = 15{,}98 \cdot 1{,}0213^7 = 18{,}520388745$$

Dvs. at indbyggertallet i Florida i 2007 vil være <u>18,52 millioner.</u>

b) Kapitalfremskrivningsformlen anvendt på indbyggertallene i de to byer giver:

$K_{NY} = 18{,}98 \cdot 1{,}0054^x \qquad K_{Florida} = 15{,}98 \cdot 1{,}0213^x$, hvor x er antal år efter 2000.

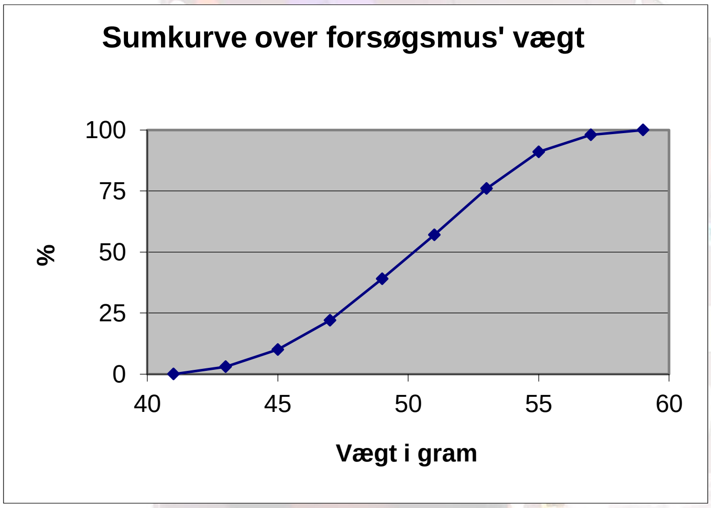
Der skal være lige mange indbyggere, så ligningen $K_{NY} = K_{Florida}$ løses med N'spire:

$\text{solve}\left(18.98 \cdot (1.0054)^x = 15.98 \cdot (1.0213)^x, x\right) \qquad x = 10.9648499845$

Dvs. de to stater vil have lige mange indbyggere i <u>år 2011</u>

8.028: For at lave en sumkurve skal man først have fundet den kumulerede frekvens, der så afbildes som funktion af vægten:

Vægt (gram)	41-43	43-45	45-47	47-49	49-51	51-53	53-55	55-57	57-59
Procent	3	7	12	17	18	19	15	7	2
Kumuleret frekvens	3	10	22	39	57	76	91	98	100



Kvartilsættet aflæses som vægten ved de tre skæringer mellem grafen og de vandrette linier ved 25% (nedre kvartil), 50% (median) og 75% (øvre kvartil).

Der aflæses:

$n.k. = 47,3 gram$

$median = 50,2 gram$

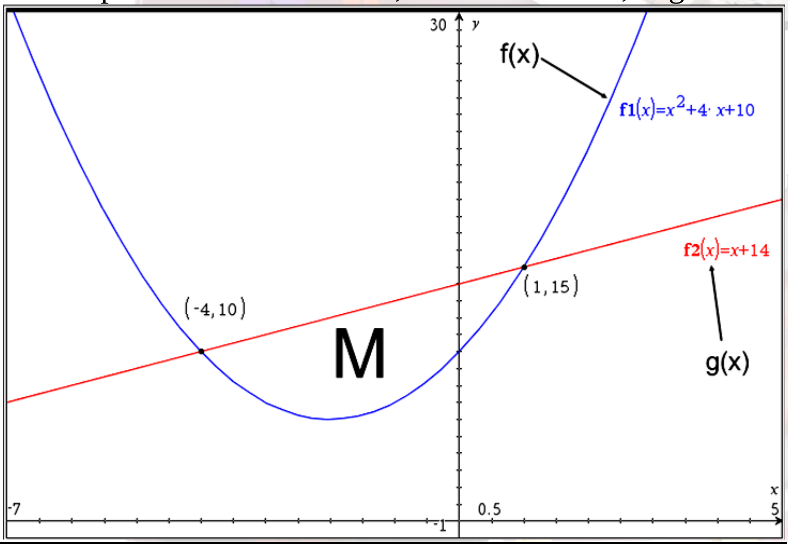
$ø.k. = 52,9 gram$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

8.029: $f(x) = x^2 + 4x + 10 \qquad g(x) = x + 14$

Først skal man finde ud af, hvad det er for en punktmængde, graferne for de to funktioner afgrænser. Dette gøres ved at indtaste funktionsforskrifterne under 'grafer' på TI n'spire.

Her ses det, at det er grafen for g, der danner den øvre afgrænsning af punktmængden, og med 'Undersøg grafer' → 'Skæringspunkt' bestemmes koordinaterne til de to skæringspunkter ved at vælge grænserne på hver side af det sted, hvor man kan se, at graferne skærer hinanden (dette gøres to gange):



Da g ligger øverst får man med de fundne grænser:

$$A_M = \int_{-4}^{1} \left(g(x) - f(x)\right) dx = \int_{-4}^{1} \left(x + 14 - x^2 - 4x - 10\right) dx = \int_{-4}^{1} \left(-x^2 - 3x + 4\right) dx =$$

$$\left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x \right]_{-4}^{1} = \left(-\frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{3}{2}\cdot 1^2 + 4\cdot 1 \right) - \left(-\frac{1}{3}\cdot(-4)^3 - \frac{3}{2}\cdot(-4)^2 + 4\cdot(-4) \right) =$$

$$-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4 - \frac{64}{3} + 24 + 16 = -\frac{65}{3} - \frac{3}{2} + 44 = \frac{-130 - 9 + 264}{6} = \underline{\underline{\frac{125}{6}}}$$

Det bestemte integral kunne også have været bestemt på TI n'spire ved:

$f(x):=x^2+4\cdot x+10$	*Udført*
$g(x):=x+14$	*Udført*
$\int_{-4}^{1} (g(x)-f(x))\,dx$	$\frac{125}{6}$

8.030: a) Arealet af den retvinklede trekant er $T = \frac{1}{2}\cdot h \cdot g = \frac{1}{2}\cdot x \cdot x = \frac{x^2}{2}$

Hermed bliver rumfanget af prismet: $V = T \cdot h = \frac{x^2}{2}\cdot h$

Da rumfanget skal være 100, har man altså: $100 = \frac{x^2}{2}\cdot h \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{200}{x^2}$

Overfladen består af 5 flader (2 trekanter og 3 rektangler). Man har alle sidelængder bortset fra hypotenusen i den retvinklede trekant, der er: $\sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}\cdot x$. Man har altså:

$A = 2\cdot T + 2\cdot A_{rektangel\,1} + A_{rektangel\,2} =$

$$2\cdot\frac{x^2}{2} + 2\cdot x\cdot h + h\cdot\sqrt{2}\cdot x = x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{200}{x^2} + \frac{200}{x^2}\cdot\sqrt{2}\cdot x = \underline{\underline{x^2 + \frac{200\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)}{x}}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

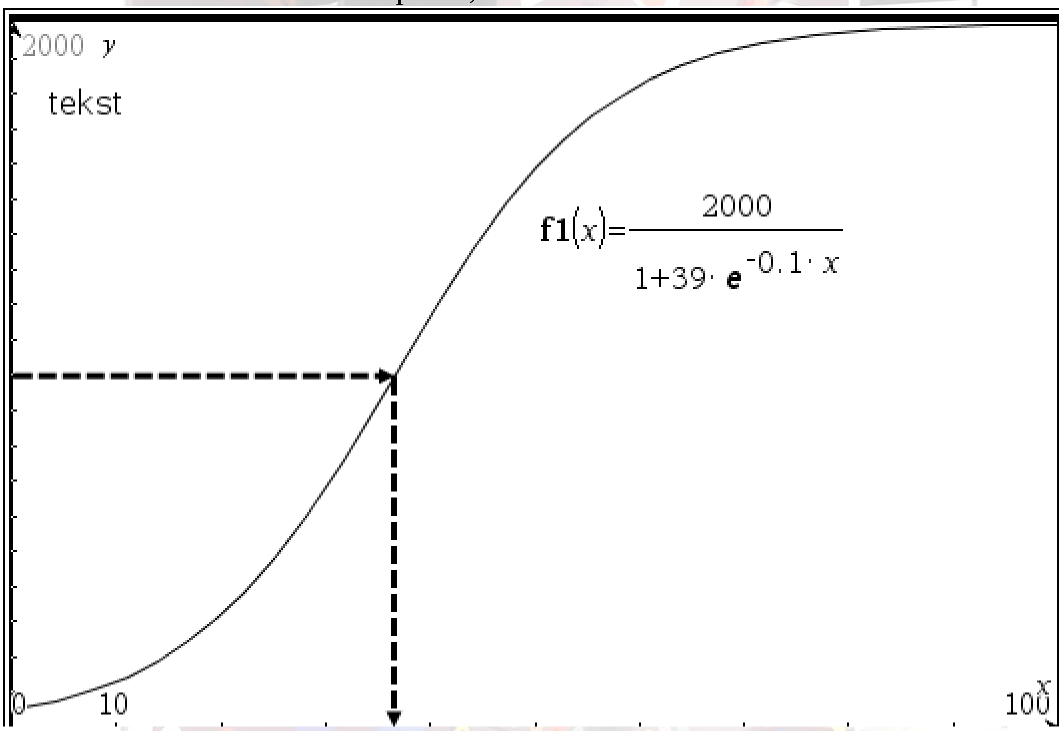
<u>8.031:</u> a) $N(t)=\dfrac{2000}{1+39\cdot e^{-0,1\cdot t}}$ t er tiden målt i døgn. N er antallet af individer i populationen.

Antallet af individer samt væksthastigheden til t=0 bestemmes på TI n'spire ved først at definere funktionen og derefter udregne N(0) og N'(0):

$n(t):=\dfrac{2000}{1+39\cdot e^{-0.1\cdot t}}$	*Udført*
$n(0)$	50.
$\dfrac{d}{dt}(n(t))\|t=0$	4.875

Dvs. at <u>antallet af individer til tiden 0 er 50.</u>
<u>Populationen vokser med 5 individer pr. døgn til tiden 0</u>

b) En skitse af grafen for N i intervallet [0;100] ses nedenfor, hvor der desuden er angivet en grafisk metode til at bestemme det tidspunkt, hvor antallet af individer er 1000.



Det ser altså ud til at være efter 36 døgn.

Det præcise tidspunkt ifølge modellen bestemmes på TI n'spire ved at løse ligningen N(t)=1000:

$$\text{solve}(n(t)=1000,t) \qquad t=36.6356164613$$

<u>Antallet af individer vil altså være 1000 efter 36,6 døgn.</u>

<u>8.032:</u> $\Delta ABC: \quad |AB| = x \quad , \quad |BC| = \frac{x}{3} \quad , \quad |AC| = \frac{3x}{4}$

a) Da man kender alle tre sider udtrykt ved *x*, kan man anvende en cosinusrelation:

$$\cos A = \frac{|AC|^2 + |AB|^2 - |BC|^2}{2 \cdot |AC| \cdot |AB|}$$

$$A = \cos^{-1}\left(\frac{\left(\frac{3x}{4}\right)^2 + x^2 - \left(\frac{x}{3}\right)^2}{2 \cdot \frac{3x}{4} \cdot x}\right) =$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{\frac{9x^2}{16} + x^2 - \frac{x^2}{9}}{\frac{3x^2}{2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\frac{9}{16} + 1 - \frac{1}{9}}{\frac{3}{2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{209}{216}\right) = \underline{\underline{14,6264748646°}}$$

Da man nu kender en vinkel og de to hosliggende sider, kan arealet beregnes ved ½-appelsin-formlen, så man har:

$$T = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin A$$

$$13 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{3x}{4} \cdot \sin(14,6264748646°) \Leftrightarrow \quad 13 = x^2 \cdot \frac{3}{8} \cdot \sin(14,6264748646°) \Leftrightarrow$$

$$x = \sqrt{\frac{13 \cdot 8}{3 \cdot \sin(14,6264748646°)}} = \underline{\underline{11,7168582357}}$$

December 2007: Delprøven uden hjælpemidler

8.033: $x^3 - 5x^2 + 3x + 6 = 0$

Det undersøges, om 2 er løsning til ligningen, ved at indsætte 2 på x's plads og se, om der fremkommer et sandt udsagn:

$2^3 - 5\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 6 = 0 \Leftrightarrow 8 - 20 + 6 + 6 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

Da dette er et sandt udsagn, er 2 løsning til ligningen.

8.034: $f(x) = 2x + e^{3x}$

Først bestemmes den afledede funktion ved at differentiere ledvist:

$f'(x) = 2 + 3\cdot e^{3x}$

Så kan differentialkvotienten i 0 bestemmes:

$f'(0) = 2 + 3\cdot e^{3\cdot 0} = 2 + 3\cdot 1 = 2 + 3 = \underline{\underline{5}}$

8.035: Ligningssystemet kan løses med lige store koefficienters metode ved først at gange den øverste ligning igennem med -2:

$$\left.\begin{matrix} -x + 3y = 6 \\ 2x + y = -5 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 2x - 6y = -12 \\ 2x + y = -5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (2x + y) - (2x - 6y) = -5 - (-12) \Leftrightarrow 7y = 7 \Leftrightarrow \underline{y = 1}$$

Denne værdi indsættes i den nederste ligning for at finde x-værdien:

$2x + 1 = -5 \Leftrightarrow 2x = -6 \Leftrightarrow \underline{x = -3}$

Dvs. at løsningen til ligningssystemet er (x,y)=(-3,1)

Ligningssystemet kunne også være løst ved substitutionsmetoden, hvor y isoleres i den nederste ligning og udtrykket indsættes i den øverste:

$$\left.\begin{matrix} -x + 3y = 6 \\ 2x + y = -5 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} -x + 3y = 6 \\ y = -2x - 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -x + 3\cdot(-2x - 5) = 6 \Leftrightarrow$$

$$-x - 6x - 15 = 6 \Leftrightarrow -7x = 21 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -3}}$$

Værdien indsættes i udtrykket, hvor y-værdien er isoleret:

$y = -2\cdot(-3) - 5 = 6 - 5 = \underline{\underline{1}}$

8.036: Udtrykket reduceres ved at anvende en kvadratsætning på første led:

$(x + y)^2 - 2xy = x^2 + y^2 + 2xy - 2xy = \underline{\underline{x^2 + y^2}}$

Her skal *r* isoleres i formlen:

$$l\cdot r^2 + p = q \Leftrightarrow l\cdot r^2 = q - p \Leftrightarrow r^2 = \frac{q - p}{l} \Leftrightarrow \underline{\underline{r = \pm\sqrt{\frac{q - p}{l}}}}$$

8.037: Funktionerne er alle eksponentielle udviklinger på formen $f(x) = b\cdot a^x$, der er voksende, når a>1.
Derfor er g og k voksende, da de har henholdsvis a=1,27 og a=4,2

En vækstrate *r* på 20%, svarer til fremskrivningsfaktoren $a = 1 + r = 1 + 0,20 = 1,20$

f(0) angiver begyndelsesværdien *b*, dvs. *b = 10.*

Altså har man: $\underline{\underline{f(x) = 10\cdot 1,20^x}}$

December 2007: Delprøven med hjælpemidler

<u>*8.038:*</u> $P=0,087\cdot d+1,113$, hvor *d* er dybden målt i meter og *P* er trykket målt i bar.

a) Når dybden er 9,0m, er *d* = 9, hvilket kan indsættes i ligningen for at bestemme *P*:

$$P=0,087\cdot 9+1,113=1,896$$

Dvs. trykket i dybden 9,0m er <u>1,896 bar</u>

Når trykket er 2,0 bar har man:

$$2,0=0,087\cdot d+1,113 \Leftrightarrow 2,0-1,113=0,087\cdot d \Leftrightarrow d=\frac{2,0-1,113}{0,087}=10,195402298851$$

Dvs. at trykket er 2,0 bar i <u>dybden 10,2m.</u>

b) Det er en lineær sammenhæng, så hældningen 0,087 fortæller, at <u>trykket stiger med 0,087 bar for hver meter, man bevæger sig ned i væskesøjlen.</u>

Begyndelsesværdien 1,113 fortæller, at <u>trykket ved væskeoverfladen er 1,113 bar</u>

<u>*8.039:*</u> $P(3,100)\ \ og\ \ T_{½}=47$

a) Når halveringskonstanten er 47, ved man med udgangspunkt i *P*, at hvis man lægger 47 til *x*-værdien (dvs. x = 3 + 47 = 50), så vil *y*-værdien halveres (dvs. $y=\frac{1}{2}\cdot 100=50$).

Grafen går altså også gennem punktet $Q(50,50)$.

Det er en eksponentiel udvikling, så konstanterne kan bestemmes ved:

$$a=\sqrt[x_2-x_1]{\frac{y_2}{y_1}}=\sqrt[50-3]{\frac{50}{100}}=\sqrt[47]{\frac{1}{2}}=0,9853604039943$$

Dette indsættes for at bestemme b-værdien:

$$b=\frac{y_2}{a^{x_2}}=\frac{50}{0,9853604039943^{50}}=104,52367732838$$

Så forskriften er:

$$\underline{\underline{f(x)=104,52367732838\cdot 0,9853604039943^x}}$$

<u>*8.040:*</u> a) Forskriften er $M=b\cdot x^a$, så der skal laves potensregression.
På TI-nspire åbnes et regneark "Lister og regneark".
Tabellens værdier indskrives i regnearket med fosforkoncentrationen *x* i kolonne A og tætheden af fiskebiomasse *M* i kolonne B.
Der laves potensregression med tætheden af fiskebiomasse som funktion af fosforkoncentrationen ved at taste: 'menu'-->'statistik'--> 'stat-beregning'-->'potensregression'.
x-liste: a[]
y-liste:b[]
Gem RegEqn i f1 (hvorefter jeg i mine udregninger henviser til funktionen som f1).
Ved at skrives f1(x) på lommeregneren får man så, at:

$$M=31,6181\cdot x^{0,5000043}$$

Dermed er <u>a = 0,5000</u> og <u>b = 31,62</u>

b) For at finde ud af med hvor mange procent M vokser, når x vokser med 50%, kan man bruge formlen:

$$\left(1+r_M\right)=\left(1+r_x\right)^a$$

$$1+r_M=\left(1+0,50\right)^{0,500} \quad\Leftrightarrow\quad r_M=1,5^{0,500}-1=0,224745=\underline{\underline{22,5\%}}$$

Dvs. at fiskebiomassen M vokser med 22,5%, når fosforkoncentrationen vokser med 50%.

Man kunne også have fundet resultatet ved at se på, hvor mange gange større M blev, når x voksede med 50% (svarende til fremskrivningsfaktoren 1,5):

$$\frac{M_2}{M_1}=\frac{b\cdot\left(1,5\cdot x_1\right)^a}{b\cdot x_1^a}=\frac{1,5^a\cdot x_1^a}{x_1^a}=1,5^a=1,5^{0,500}=1,224745$$

Dette viser, at fiskebiomassen M vokser med 22,5%, når fosforkoncentrationen vokser med 50%.

<u>8.041:</u> $f(x)=3x^3-24x^2+48x \quad P(4,60)$

Der integreres ledvist, og samtlige stamfunktioner er altså på formen:

$$F(x)=\frac{3}{4}x^4-\frac{24}{3}x^3+\frac{48}{2}x^2+k$$

Da grafen for stamfunktionen skal gå gennem P, indsættes P's koordinater i funktionsudtrykket for stamfunktionerne, så man kan bestemme den søge værdi af konstanten k:

$$60=\frac{3}{4}\cdot 4^4-8\cdot 4^3+24\cdot 4^2+k \quad\Leftrightarrow\quad 60=192-512+384+k \quad\Leftrightarrow\quad k=-4$$

Dvs. at den søgte stamfunktion er:

$$\underline{\underline{F(x)=\frac{3}{4}x^4-8x^3+24x^2-4}}$$

<u>*8.042:*</u> Først bestemmes antallet N af elever i klasse A.

$$N = 1+2+1+5+2+3+3+2+2 = 21$$

Dette er et ulige antal, så medianen er det midterste tal, dvs. det 11. tal i rækken, hvis elevernes antal rigtige stilles ordnet op på en række:

3, 6, 6, 10, 12, 12, 12, ,12, 12, 13, 13, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 17, 17, 20, 20

Det 11. tal i denne række er 13, så medianen er 13.

Medianen har nu delt rækken i en øvre og en nedre halvdel:

Nedre halvdel: 3, 6, 6, 10, 12, 12, 12, ,12, 12, 13

Øvre halvdel: 15, 15, 15, 16, 16, 16, 17, 17, 20, 20

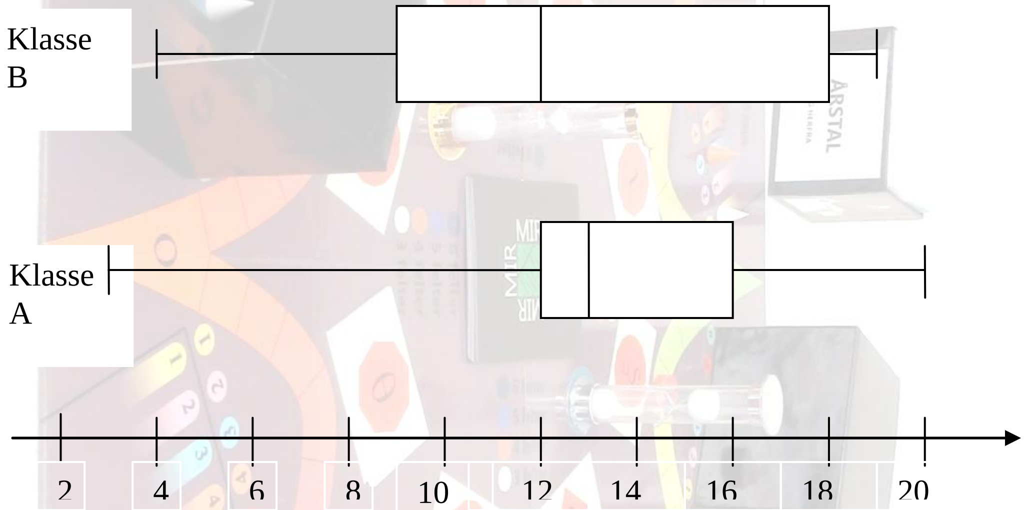
Da antallet i disse to rækker er 10 (et lige tal), så findes kvartilerne som gennemsnittet mellem de to midterste observationer (nr. 5 og nr. 6):

$$n.k. = \frac{1}{2}\cdot(12+12) = 12$$

$$ø.k. = \frac{1}{2}\cdot(16+16) = 16$$

Den mindste observation er 3 og den største 20.

Hermed kan de to boxplot tegnes:



Hvis man lader antallet af rigtige i multiple choice testen være et mål for elevernes dygtighed, kan man sige:

I klasse A er den midterste halvdel af klassen omtrent lige dygtige. Der er ikke så stor spredning, som i klasse B, der både har flere meget dygtige og flere mindre dygtige end klasse A. De 50% mindst dygtige i klasse B ligger i samme område som de 25% mindst dygtige i klasse A.

Klasse A har både den/de dygtigste og mindst dygtige af eleverne, og disse skiller sig mere ud fra resten af klassen, da som sagt den midterste halvdel ligger med lille spredning.

<u>8.043:</u> $ax^2 + 2x + c = 0\ ;\ a \neq 0$

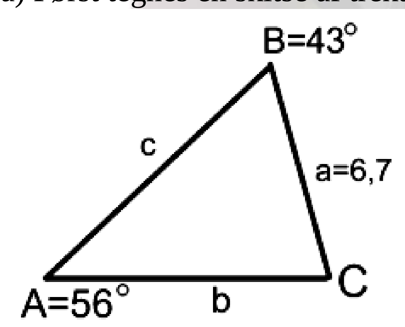
En andengradsligning har netop én løsning, når diskriminanten er 0. Derfor gælder:

$$d = 2^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$$
$$4 - 4 \cdot a \cdot c = 0$$
$$4 = 4 \cdot a \cdot c$$
$$1 = a \cdot c$$
$$\underline{\underline{c = \frac{1}{a}}}$$

Hermed er sammenhængen mellem *a* og *c* fundet, og det er udnyttet, at *a* ikke er nul, så man er sikker på at kunne dividere med den.

<u>8.044:</u> $\Delta ABC \quad a = 6{,}7 \quad \angle A = 56° \quad \angle B = 43°$

a) Først tegnes en skitse af trekanten:



Da man kun kender én sidelængde, kan man ikke bruge cosinusrelationerne.

Hvis sinusrelationerne skal bruges til at bestemme siden *c*, skal man også kende vinkel C, så den bestemmes først ud fra vinkelsummen i en trekant:

$\angle C = 180° - \angle A - \angle B = 180° - 56° - 43° = 81°$

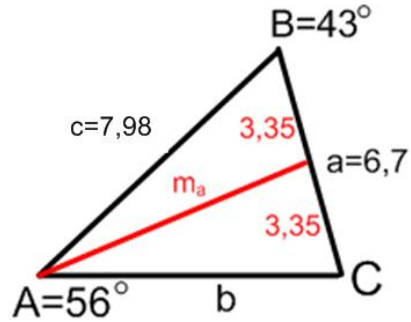
Så kan sidelængden *c* bestemmes:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin C = \frac{6{,}7}{\sin(56°)} \cdot \sin(81°) = \underline{\underline{7{,}98216160649}}$$

Nu kender man en vinkel (B) og de to tilhørende sider og kan altså bestemme trekantens areal:

$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot 6{,}7 \cdot 7{,}98216160649 \cdot \sin(43°) = \underline{\underline{18{,}2368}}$$

b) Medianen m_a deler siden *a* i to lige store stykker:



I trekanten med hjørnerne A, B og medianens fodpunkt kender man en vinkel (B) og de to hosliggende siders længde, og dermed kan den sidste sidelængde findes ved en cosinusrelation:

$$m_a = \sqrt{7{,}98216160649^2 + 3{,}35^2 - 2 \cdot 7{,}98216160649 \cdot 3{,}35 \cdot \cos(43°)} = \underline{\underline{5{,}98533665542}}$$

<u>8.045:</u> $f(x) = -x^3 + 4x^2 + 3x - 3$.

a) Den afledede funktion bestemmes og benyttes til at lave fortegnsskema. Dette gøres ved at indtaste funktionen som Y1 på grafregneren og som Y2 bestemmes den afledede funktion ved at skrive: $d\left(y1(x), x\right)$.

Ved i 'home' at skrive "y2(x)" får man, at:

$f'(x) = -3x^2 + 8x + 3$.

$solve\left(y2(x) = 0, x\right)$ giver, at $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{3} \quad \vee \quad x = 3$

Og ved at indtaste værdier i henholdsvis y2 og y1 fås:

$f'(-1) = -8 < 0$

$f'(0) = 3 > 0$

$f'(4) = -13 < 0$

$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{95}{27}$

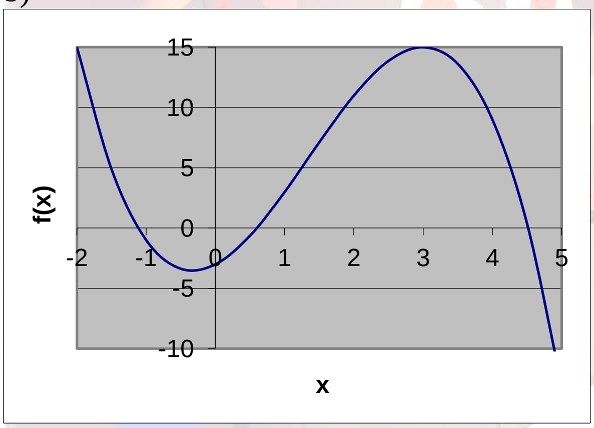
$f(3) = 15$

Så man har:

x		-1/3		3	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	$\frac{-95}{27}$	↗	15	↘

$$\underline{\underline{f \text{ har lokalt minimum } -\frac{95}{27} \text{ og lokalt maksimum } 15}}$$

b)



Hvis ligningen $f(x) = a$ skal have netop 3 løsninger, skal den vandrette ligning $y = a$ skære grafen netop 3 steder. Dette er tilfældet, når:

$$\underline{\underline{-\frac{95}{27} < a < 15}}$$

(Når a antager de to ekstremumsværdier, har ligningen $f(x) = a$ 2 løsninger, og når man kommer uden for området, har ligningen 1 løsning.)

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>*8.046:*</u> $f(x) = -x^2 + 9$

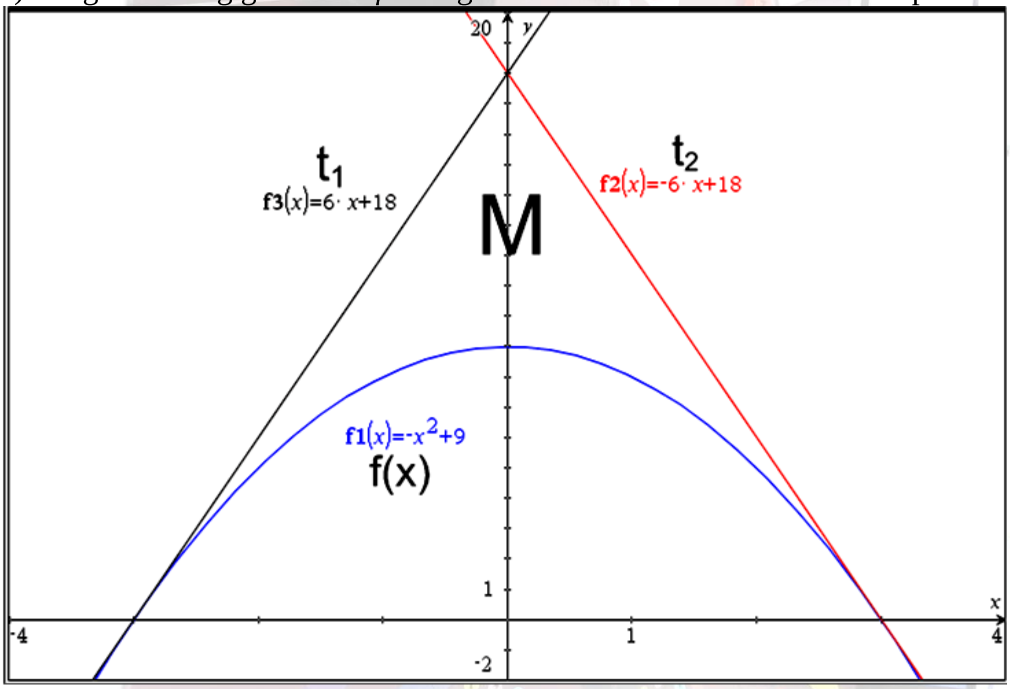
a) Da man skal bestemme ligninger for tangenterne til grafen for *f* i hvert af grafens skæringspunkter med x-aksen, skal man først bestemme disse skæringspunkter, hvorefter man kan bestemme tangentligningerne de pågældende steder. Dette gøres på TI n'spire ved:

$f(x):=-x^2+9$	*Udført*
solve$(f(x)=0,x)$	$x=-3$ or $x=3$
tangentLine$(f(x),x,-3)$	$6\cdot x+18$
tangentLine$(f(x),x,3)$	$18-6\cdot x$

Lommeregnerresultaterne viser altså, at grafen skærer x-aksen i x=-3 og x=3, og at ligningerne for de to tangenter, der rører disse steder er:

$\underline{\underline{t_1: \quad y = 6x + 18}}$ $\underline{\underline{t_2: \quad y = -6x + 18}}$

b) Tangenterne og grafen for *f* indtegnes for at identificere den omtalte punktmængde:



Det ses at punktmængden ligger under tangenterne og over grafen for *f*. Arealet kan altså bestemmes som forskellen mellem arealet af den trekant, der dannes af de to tangenter og x-aksen, og så arealet af den del af parablen, der ligger over x-aksen.

Da begge tangenter skærer y-aksen i 18, har trekanten højden 18, og da røringsstederne er -3 og 3, har grundlinjen længden 6.

Dermed er:

$$A_M = T - A_{parabel} = \frac{1}{2}\cdot h\cdot g - \int_{-3}^{3} f(x)dx = \frac{1}{2}\cdot 18\cdot 6 - \int_{-3}^{3}\left(-x^2+9\right)dx = 54 - \left[-\frac{1}{3}x^3 + 9x\right]_{-3}^{3} =$$

$$54 - \left(-\frac{1}{3}\cdot 3^3 + 9\cdot 3\right) + \left(-\frac{1}{3}\cdot(-3)^3 + 9\cdot(-3)\right) = 54 + 9 - 27 + 9 - 27 = \underline{\underline{18}}$$

8.047: : a) Der laves en model, hvor fosforkoncentrationen (målt i µg fosfor pr. liter) kaldes *f* og angives som en eksponentielt aftagende funktion af tiden *x* målt i antal år efter 1998. Så kan en forskrift bestemmes ud fra de 2 punkter (0,230) og (7,64):

$$a = \sqrt[x_2-x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = \sqrt[7-0]{\frac{64}{230}} = \left(\frac{64}{230}\right)^{\frac{1}{7}} = 0{,}8329827728$$

b-værdien kan direkte aflæses fra første punkt, eller det findes ved indsættelse:

$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}} = \frac{230}{0{,}83298^0} = 230$$

Så har man modellen: $f(x) = 230 \cdot 0{,}8330^x$

Prognosen for 2010 er: $f(12) = 230 \cdot 0{,}8330^{12} = 25{,}666$, dvs. $\underline{\underline{26\ \mu g\ \ fosfor\ \ pr.L}}$

b) En lineær model:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{230-64}{0-7} = -23{,}71 \qquad b = 230$$

Dvs. den lineære forskrift er $f(x) = -23{,}71x + 230$

Prognosen for 2010 bliver så: $f(12) = -23{,}71 \cdot 12 + 230 = -54{,}6$

Koncentrationen kan ikke være negativ, så den lineære model holder i hvert fald ikke til 2010.

Maj 2008: Delprøven uden hjælpemidler

8.048: $(x+h)^2 - h(h+2x) \quad h=2 \quad x=3$

Værdien af udtrykket bestemmes ved indsættelse:

$(3+2)^2 - 2\cdot(2+2\cdot 3) = 5^2 - 2\cdot(2+6) = 25 - 2\cdot 8 = 25 - 16 = \underline{\underline{9}}$

Udtrykket reduceres ved at anvende en kvadratsætning på første led og gange ind i parentesen i andet led: $(x+h)^2 - h(h+2x) = x^2 + h^2 + 2xh - h^2 - 2xh = \underline{\underline{x^2}}$

8.049: Da det er en eksponentielt voksende funktion, er forskriften på formen $f(x) = b\cdot a^x$.

Da $f(3) = 200$ og $f(5) = 800$, går grafen gennem punkterne (3,200) og (5,800). Punkternes koordinater indsættes i forskriften for at bestemme denne:

$$\left.\begin{matrix} 200 = b\cdot a^3 \\ 800 = b\cdot a^5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{800}{200} = \frac{b\cdot a^5}{b\cdot a^3} \quad \Leftrightarrow \quad 4 = \frac{a^5}{a^3} \quad \Leftrightarrow \quad 4 = a^{5-3} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2$$

Det er i sidste skridt udnyttes, at a-værdien for eksponentielle udviklinger er positiv (da -2 ellers også havde været en mulighed).

Værdien indsættes i den øverste ligning for at bestemme b-værdien:

$$200 = b\cdot 2^3 \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{200}{8} = 25$$

Dvs. at forskriften er: $\underline{\underline{f(x) = 25\cdot 2^x}}$

8.050: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

$f'(x) = 3x^{3-1} - 3\cdot 2x^{2-1} + 0 = \underline{\underline{3x^2 - 6x}}$

For at bestemme monotoniforhold bestemmes først nulpunkter for den afledede funktion.

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \qquad (\mathit{faktorisering})$

$3x\cdot(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\mathit{nulreglen})$

$x = 0 \quad \vee \quad x = 2$

De relevante værdier til fortegnsskemaet for *f'* bestemmes:

$f'(-1) = 3\cdot(-1)^2 - 6\cdot(-1) = 3 + 6 = 9 > 0$

$f'(1) = 3\cdot 1^2 - 6\cdot 1 = 3 - 6 = -3 < 0$

$f'(3) = 3\cdot 3^2 - 6\cdot 3 = 27 - 18 = 9 > 0$

Dette giver fortegnsskemaet:

x		0		2	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	↗		↘		↗

Man har altså:

$\underline{\underline{f \quad er \quad voksende \quad i \quad]-\infty;0] \; og \; i \; [2;\infty[}}$

$\underline{\underline{f \; er \; aftagende \; i \; [0;2]}}$

<u>*8.051:*</u> Da de to trekanter er ensvinklede, er forholdene mellem ensliggende sider ens, dvs.:

$$\frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|} \Leftrightarrow |BC| = \frac{|AC|}{|DF|} \cdot |EF|$$

$$|BC| = \frac{16}{24} \cdot 18 = \frac{2}{3} \cdot 18 = 2 \cdot 6 = \underline{\underline{12}}$$

<u>*8.052:*</u> Punktmængden M_1 er placeret over x-aksen, og derfor svarer dens areal til det bestemte integral $\int_{-5}^{-2} f(x)dx$. Da arealet af M_1 ifølge opgaveteksten er 12, har man altså $\int_{-5}^{-2} f(x)dx = \underline{\underline{12}}$

Alle punktmængderne M_1, M_2 og M_3 ligger over x-aksen, og deres arealer svarer derfor til de bestemte integraler med de nedre og øvre grænser, der passer til de enkelte punktmængder:

$$\int_{-5}^{4} f(x)dx = \int_{-5}^{-2} f(x)dx + \int_{-2}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{4} f(x)dx = A_{M_1} + A_{M_2} + A_{M_3} = 12 + 7 + 12 = \underline{\underline{31}}$$

Maj 2008: Delprøven med hjælpemidler

8.053: a) Trekant *CDH* er retvinklet, og når $\angle D$ skal findes, kender man den modstående katete og hypotenusen, så det er sinusfunktionen, der skal bruges:

$$\sin \angle D = \frac{5}{6}$$

$$\angle D = \sin^{-1}\left(\frac{5}{6}\right) = \underline{\underline{56{,}4427^0}}$$

b) I firkant *ABCD* tegnes linjestykket BD, så man kan regne på den retvinklede trekant *ABD*, hvor Pythagoras kan bruges:

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 \quad \Leftrightarrow \quad |BD| = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{25+49} = \underline{\underline{\sqrt{74}}} \approx 8{,}602$$

$\angle D$ er firkant *ABCD* er lige så stor som $\angle D$ i trekant *CDH*, da trekant *CDH* fremkommer inde i firkant *ABCD*, når man nedfælder den vinkelrette fra *C* på linjestykket *AD* og kalder det *H*.

Linjestykket *AC* kan så bestemmes ved cosinusrelationen:

$$|AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2 - 2\cdot|AD|\cdot|CD|\cdot\cos\angle D \quad \Leftrightarrow$$

$$|AC| = \sqrt{7^2 + 6^2 - 2\cdot 7\cdot 6\cdot \cos 56{,}4427^0} = \underline{\underline{6{,}2103}}$$

8.054: : a) Det angives, at tabellens data skal indskrives i en lineær model, hvor længden L (i cm) er angivet som funktion af alderen t (i år).
Der skal altså laves lineær regression. På TI n'spire vælges "lister og regneark".
Tabelværdierne for alderen indtastes i kolonne A.
Tabelværdierne for længden indtastes i kolonne B.
Under værktøjer vælges "Statistik", "Statistiske beregninger" og "Lineær regression mx+b".
For at få længden som funktion af alderen vælges:
x list : a[]
y list : b[]
Gem regEqn i: f1(x)
N'spire giver værdierne for *m* og *b*, men n'spires *m* svarer til vores *a*, så man har:

$$\underline{\underline{a = 37{,}5 \quad b = 273{,}6}}$$

b) *b*-værdien angiver fødselslængden af spækhuggere (da alderen er 0 år), dvs. ifølge modellen er spækhuggere 2,74m i længden fra fødslen.
a-værdien angiver, hvor meget spækhuggerne vokser (i længden) pr. år – ifølge modellen altså 37,5cm pr. år.

Alderen for en 700cm lang spækhugger findes ved at bruge, at modellen ligger som f1(x):
Solve(f1(x)=700,x) giver x = 11,382.
Dvs. at en 700cm lang spækhugger er $\underline{\underline{11{,}4 år}}$

8.055: Der er 15 år mellem 2005 og 2020. I dette tidsrum skal bevillingerne stige fra 20 mia. kr. til 60 mia. kr. ved at stige med en fast årlig procentdel.

a) Da der er tale om en fast procentdel, kan man anvende kapitalfremskrivningsformlen:

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

$$60 = 20\cdot(1+r)^{15} \Leftrightarrow (1+r)^{15} = \frac{60}{20} \Leftrightarrow 1+r = \sqrt[15]{\frac{60}{20}} \Leftrightarrow r = \sqrt[15]{3} - 1 = 0{,}0759896247253 \approx \underline{\underline{7{,}6\%}}$$

8.056: $f(x) = 8 - x^2 \quad g(x) = x^2$

Det er oplyst på figuren, at de to grafer skærer hinanden stederne x = -2 og x = 2. Desuden ses det, at grafen for f ligger øverst i det pågældende interval. Dermed bliver arealet af området M:

$$A_M = \int_{-2}^{2} \left(f(x) - g(x) \right) dx = \int_{-2}^{2} \left(8 - x^2 - x^2 \right) dx = \int_{-2}^{2} \left(8 - 2x^2 \right) dx =$$

$$\left[8x - \frac{2}{3}x^3 \right]_{-2}^{2} = 8\cdot 2 - \frac{2}{3}\cdot 2^3 - \left(8\cdot(-2) - \frac{2}{3}\cdot(-2)^3 \right) = 16 - \frac{16}{3} + 16 - \frac{16}{3} = \underline{\underline{\frac{64}{3}}}$$

8.057: Havvindmøllens energiproduktion betegnes med *E*. Vindens hastighed betegnes med *v*.

Da havvindmøllens energiproduktion er **ligefrem proportional** med vindens hastighed **opløftet i tredje potens**, har man:

$\underline{\underline{E(v) = k\cdot v^3}}$, hvor *k* er proportionalitetsfaktoren.

8.058: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

Den afledede funktion bruges til at finde tangenthældninger, og da disse skal være 11, får man:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 = 11 \quad \Leftrightarrow$$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\textit{faktorisering})$$

$$(x-3)\cdot(x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\textit{nulreglen})$$

$$\underline{\underline{x = 3 \quad \vee \quad x = -1}}$$

(Ligningen kunne også være løst med 'solve')

8.059: $w = 9670\cdot d^{-1{,}49} \quad ; \quad h = 970\cdot d^{-0{,}443}$

w er vægten af tørstof målt i gram. *d* er antallet af planter pr. m^2. *h* er højden af planten målt i cm.

a) Når *d* = 4 har man: $w = 9670\cdot 4^{-0{,}149} = \underline{\underline{1225{,}6235211962}}$ (dvs. vægten af tørstof er 1225,6 gram)

b) For at bestemme vægten af tørstoffet i en plante, der er 100 cm høj, skal man først bestemme *d*, når *h* er 100. Dette giver følgende ligning, der løses med 'solve':

$100 = 970\cdot d^{-0{,}443}$

$\text{solve}\left(100 = 970\cdot d^{-0.443}, d\right) \quad d = 168.840137871$

Med denne værdi for *d*, kan vægten af tørstoffet bestemmes:

$w = 9670\cdot 168{,}840137871^{-0{,}149} = 4{,}6396763218505$

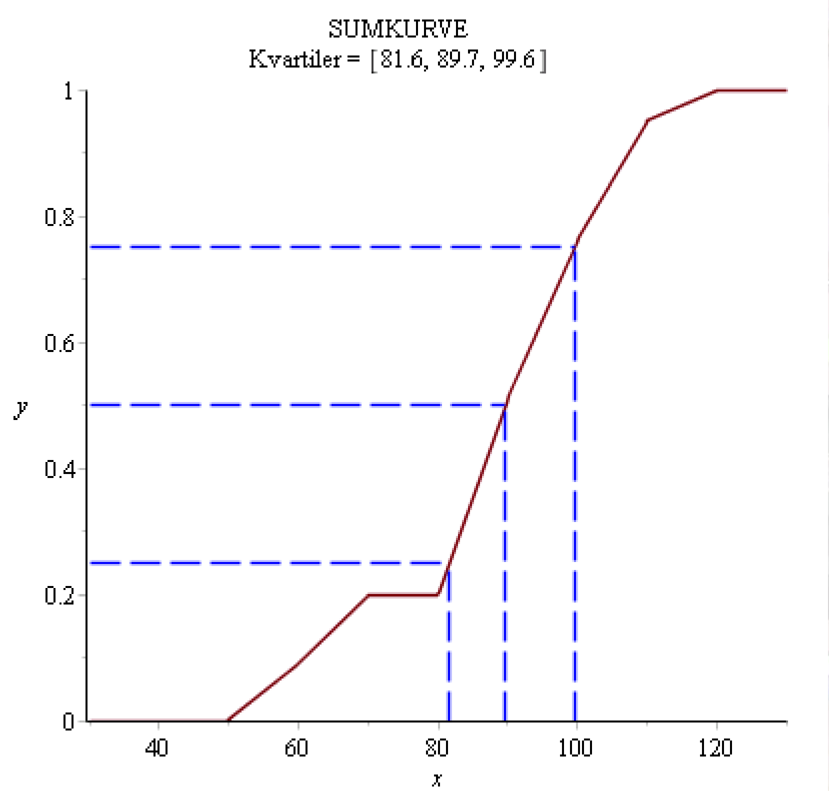
Dvs. at i en plante, der er 100*cm* høj, er vægten af tørstof 4,6*g*

8.060: Sumkurven indtegnes i Maple. Det første interval ændres til 40-50, da det ikke har betydning for hverken sumkurven eller resultaterne:

$with(Gym):$

$$M := \begin{bmatrix} 40..50 & 0 \\ 50..60 & 9 \\ 60..70 & 11 \\ 70..80 & 0 \\ 80..90 & 31 \\ 90..100 & 25 \\ 100..110 & 19 \\ 110..120 & 5 \end{bmatrix}:$$

$plotSumkurve(M)$



Så kvartilsættet er <u>(81,6 ; 89,7 ; 99,6)</u>

b)

8.061: $f(x) = x + \frac{16}{x} \quad ; \quad x > 0.$

Først bestemmes den afledede funktion (der differentieres ledvist).

$$f'(x) = 1 + 16 \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) = \underline{\underline{1 - \frac{16}{x^2}}}$$

For at gøre rede for, at funktionen har et minimum, laves et fortegnsskema:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{16}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 4$$

Kun den positive værdi tilhører definitionsmængden.

Fortegnet for den afledede funktion i de dannede intervaller bestemmes.

$$f'(1) = 1 - \frac{16}{1^2} = -15 < 0$$

$$f'(16) = 1 - \frac{16}{16^2} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} > 0$$

Man har altså:

x	0		4	
$f'(x)$	i.d	-	0	+
$f(x)$	i.d	$\searrow$		$\nearrow$

Da funktionen er aftagende i $]-\infty;4]$ og voksende i $[4;\infty[$, $\underline{\underline{\textit{har den et minimum}}}$.

8.062: $f(x) = -5x^2 + b \cdot x + c$

a) Rødderne er de *x*-værdier, hvor funktionsværdien er 0 (svarende til at grafen skærer *x*-aksen).
Når man indsætter rødderne på *x*'s plads, får man altså:

$$f(3) = 0 \Leftrightarrow 0 = -5 \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \Leftrightarrow 0 = -45 + 3b + c$$

$$f(7) = 0 \Leftrightarrow 0 = -5 \cdot 7^2 + b \cdot 7 + c \Leftrightarrow 0 = -245 + 7b + c$$

Man kan løse disse to ligninger på n'spire ved:

```
solve(0=-45+3·b+c and 0=-245+7·b+c,b,c)
                                   b=50 and c=-105
```

Dvs. $\underline{\underline{b = 50 \text{ og } c = -105}}$

Man kunne også have fundet *b* og *c* ved først at trække den øverste ligning fra den nederste for at fjerne *c*:

$$(-245 + 7b + c) - (-45 + 3b + c) = 0 - 0 \Leftrightarrow -200 - 4b = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{b = 50}}$$

Dette indsættes i den øverste ligning for at bestemme *c*:

$$0 = -45 + 3 \cdot 50 + c \Leftrightarrow c = 45 - 150 = \underline{\underline{-105}}$$

8.063: Omkredsen består af de to parallelle linjestykker samt de to halvcirkler (svarende til én hel cirkel).
Da linjestykkerne har længden *x* og halvcirklerne radius *r*, får man:

$$\underline{\underline{O = 2 \cdot x + 2 \cdot \pi \cdot r}}$$

Hvis omkredsen skal være 800*m* (man antager så, at enhederne for *x* og *r* er meter), har man:

$$800 = 2 \cdot x + 2 \cdot \pi \cdot r \Leftrightarrow 400 = x + \pi \cdot r \Leftrightarrow \pi \cdot r = 400 - x \Leftrightarrow r = \frac{400 - x}{\pi}$$

Arealet af rektanglet bliver så:

$$A = l \cdot b = x \cdot 2r = x \cdot 2 \cdot \frac{400 - x}{\pi} = \underline{\underline{\frac{800x - 2x^2}{\pi}}}$$

August 2008: Delprøven uden hjælpemidler

<u>*8.064:*</u> Udtrykket reduceres ved at udnytte en kvadratsætning i første led og gange ind i parentesen i andet led:

$$(a+2b)^2 - a(a+4b) = a^2 + 4b^2 + 4ab - a^2 - 4ab = \underline{\underline{4b^2}}$$

<u>*8.065:*</u> $f(x) = b \cdot x^a \qquad f(2) = 2 \quad f(4) = 16$

De to kendte punkter indsættes i funktionsudtrykket:

$$\left.\begin{array}{r} 2 = b \cdot 2^a \\ 16 = b \cdot 4^a \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{16}{2} = \frac{b \cdot 4^a}{b \cdot 2^a} \quad \Rightarrow \quad 8 = \left(\frac{4}{2}\right)^a \quad \Rightarrow \quad 8 = 2^a \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a = 3}}$$

Denne værdi indsættes sammen med det ene punkt for at finde *b*-værdien:

$$2 = b \cdot 2^3 \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{2}{8} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

<u>*8.066:*</u> $f(x) = x^4 + 5x \qquad (1, f(1))$

For at kunne bestemme en ligning for tangenten til grafen for *f* i punktet *(1,f(1))*, skal man kende tangentens hældning samt 2. koordinaten til røringspunktet.

Først bestemmes hældningen ved at finde den afledede funktion og efterfølgende differentialkvotienten i 1 (som netop angiver tangenthældningen):

$$f'(x) = 4x^3 + 5$$

$$f'(1) = 4 \cdot 1^3 + 5 = 4 + 5 = 9$$ ← Tangenthældningen.

Røringspunktets andenkoordinat bestemmes:

$$f(1) = 1^4 + 5 \cdot 1 = 1 + 5 = 6$$

Da man nu kender både hældning og et punkt på tangenten, kan en ligning for denne bestemmes:

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

$$y - 6 = 9 \cdot (x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad y = 9x - 9 + 6 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = 9x - 3}}$$

_8.067:_ Det lineære ligningssystem kan løses på flere måder.

Metode 1: Lige store koefficienter.

Den nederste ligning ganges igennem med 4 for at få lige store koefficienter foran x:

$$\left.\begin{matrix} 4x+5y=13 \\ x-y=1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 4x+5y=13 \\ 4x-4y=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (4x+5y)-(4x-4y)=13-4 \quad \Leftrightarrow \quad 9y=9 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{y=1}$$

Denne værdi indsættes i den nederste ligning for at finde x-værdien:

$$x-1=1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x=2}$$

Altså er løsningen til ligningssystemet: $\underline{\underline{(x,y)=(2,1)}}$

Metode 2: Lige store koefficienter (med modsat fortegn).

Den nederste ligning ganges igennem med 5 for at få numerisk lige store koefficienter foran y, men med forskellige fortegn, således at y-leddene forsvinder ved addition i stedet for ved subtraktion:

$$\left.\begin{matrix} 4x+5y=13 \\ x-y=1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 4x+5y=13 \\ 5x-5y=5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (4x+5y)+(5x-5y)=13+5 \quad \Leftrightarrow \quad 9x=18 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x=2}$$

Denne værdi indsættes i den nederste ligning for at finde y-værdien:

$$2-y=1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{y=1}$$

Altså er løsningen til ligningssystemet: $\underline{\underline{(x,y)=(2,1)}}$

Metode 3: Substitutionsmetoden:

y isoleres i den nederste ligning og indsættes i den øverste:

$$\left.\begin{matrix} 4x+5y=13 \\ x-y=1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 4x+5y=13 \\ y=x-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4x+5(x-1)=13 \Leftrightarrow 4x+5x-5=13 \Leftrightarrow 9x=18 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x=2}$$

Denne værdi indsættes i den nederste ligning for at finde y-værdien:

$$y=2-1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{y=1}$$

Altså er løsningen til ligningssystemet: $\underline{\underline{(x,y)=(2,1)}}$

_8.068:_ Da grafen A ligner grafen for et fjerdegradspolynomium, og grafen B ligner grafen for et tredjegradspolynomium, kunne man formode, at grafen A svarede til f(x), mens grafen B svarede til f'(x), fordi et polynomium går én grad ned, når man differentierer det. Denne overvejelse er dog ikke noget bevis, for det er ikke angivet nogen steder, at der skulle være tale om sådanne polynomier.

Man kan imidlertid også se, at de tre steder, hvor funktionen, der passer til grafen A, har lokalt minimum eller lokalt maksimum, der har funktionen, der passer til grafen B, nulpunkter. Dette passer med, at grafen A svarer til f(x) og grafen B til f'(x), fordi den afledede funktion netop giver nul, hvor en funktion har lokalt ekstremum.
Og da man modsat ser, at funktionen svarende til grafen A IKKE har nulpunkter de to steder, hvor funktionen svarende til grafen B har ekstremum, så kan der IKKE gælde, at grafen B svarer til f(x) og grafen A til f'(x).

Det er hermed vist, at grafen A svarer til f(x) og grafen B svarer til f'(x).

August 2008: Delprøven med hjælpemidler

8.069: a) For at bestemme værdien af de to konstanter bruges TI-89's Stats/List-editor.
Tabellens værdier lægges ind, så antallet af år efter 1999 (dvs. 0, 1, 2, 3, …) lægges som List1, og solenergien målt i MW som List2, hvorefter der laves eksponentiel regression (ExpReg) med List2 som funktion af List1. Resultatet lægges ind som Y1. Det giver: $y1 = 7,2604646 \cdot 1,470204^x$

Så man har:

$\underline{\underline{P_0 = 7,3MW \; og \; a = 1,470}}$

b) Mængden af udvundet solenergi i 2008 (x = 9):
Grafregneren giver: y1(9)=233,004011
Dvs. at modellen forudsiger, at der i år 2008 vil blive udvundet $\underline{\underline{233MW}}$

For at finde ud af, hvornår udvindingen overstiger 400MW, indtastes:
Solve(y1(x)=400,x), der giver x = 10,402
Da den udvundne energi er angivet som en effekt (og ikke som den årlige mængde), vil de 400MW overstiges i $\underline{\underline{år\ 2009}}$ (1999 + 10)

8.070: a) Det er en lineær funktion, så hældningen og skæringen med andenaksen kan bestemmes ved:

$$a = \frac{791-155}{10-3} = 90,85714$$

$$b = 155 - 90,85714 \cdot 3 = -117,571$$

Hermed er forskriften:

$\underline{\underline{L = 91 \cdot s - 118}}$

Hvis længden er 500 mm har man:

$$500 = 91 \cdot s - 118 \quad \Leftrightarrow \quad s = \frac{500+118}{91} = 6,8$$

Dvs. at geddens øresten ifølge modellen er $\underline{\underline{6,8mm}}$

8.071: Jeg kalder punktet ved den angivne rette vinkel for C.

Først regnes på $\triangle ACP$:

$\angle P = 90° - w = 90° - 32° = 58°$

Da trekanten er retvinklet har man:

$$\tan \angle P = \frac{|AC|}{|CP|} \quad \Leftrightarrow \quad |AC| = 200m \cdot \tan 58° = 320,0669m$$

Så regnes på $\triangle BCP$:

$\angle P = 90° - v = 90° - 24° = 66°$

Da trekanten er retvinklet har man:

$$\tan \angle P = \frac{|BC|}{|CP|} \quad \Leftrightarrow \quad |BC| = 200m \cdot \tan 66° = 449,20735m$$

Og hermed er:

$$|AB| = |BC| - |AC| = 449,2074m - 320,0669m = 129,1404m = \underline{\underline{129m}}$$

<u>*8.072:*</u> $f(t)=297\cdot 1,0679^t, \quad 0\le t\le 20$

a) $T_2=\dfrac{\ln 2}{\ln a}=\dfrac{\ln 2}{\ln 1,0679}=10,551132$

Dvs. at fordoblingstiden er $\underline{\underline{10,6\,år}}$.

b) Tallene fortæller, at der i 1980 var 297 retspsykiatriske patienter under opsyn, og at antallet af patienter vokser med 6,79% om året.

<u>*8.073:*</u> Elev A har generelt de længste samtaler.

Elev A har kun ¼ af sine samtaler til at vare under 110s, mens ¼ af samtalerne er over 350s. Den midterste halvdel af elev A's samtaler ligger altså mellem 110s og 350s med en median på 220s.
Elev B har mindre end ¼ af sine samtaler til at vare over 110s, og halvdelen af elev B's samtaler er på 90s eller mindre.

Det er også elev B, der har haft den korteste samtale på ca. 10s, mens elev A ikke har nogen samtaler under 50s.
Elev B kan dog godt i enkelte tilfælde føre "lange" samtaler, da elev B har haft den længste samtale på 390s, hvor elev A kun har været oppe på 370s.

Så elev B har generelt de korteste samtaler og samtidig de mest ekstreme.

<u>*8.074:*</u> $H(t)=18+69\cdot e^{-0,0491\cdot t}$ *t* angiver tiden målt i minutter og *H(t)* er teens temperatur i °C.

a) Funktionsforskriften skal bruges til at besvare alle spørgsmålene, og derfor defineres den først på TI n'spire:

$h(t):=18+69\cdot e^{-0.0491\cdot t}$ Udført

Teens temperatur efter 20 minutter svarer til H(20), der bestemmes ved:

$h(20)$ 43.8447246475

Dvs. at <u>temperaturen efter 20 minutter er 43,8 °C</u>

Tiden, der skal gå, før temperaturen er 60°C, bestemmes ved at løse ligningen h(t)=60:

$\text{solve}(h(t)=60,t)$ $t=10.1107308822$

Dvs. at <u>der går 10,1 minutter, før teens temperatur er faldet til 60°C</u>

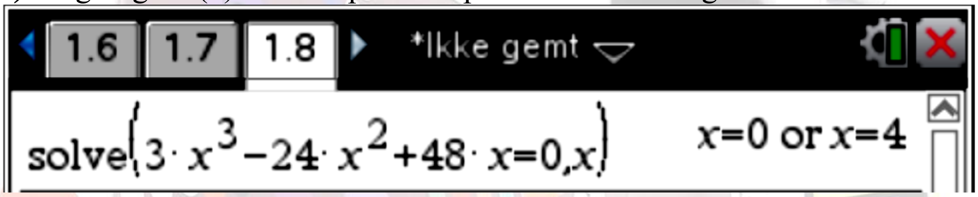
b) Hastigheden hvormed teens temperatur aftager efter 2 minutter svarer til h'(2):

$\frac{d}{dt}(h(t))|t=2$ -3.07102155529

Dvs. at <u>teens temperatur efter 2 minutter aftager med 3,1 °C pr. minut</u>

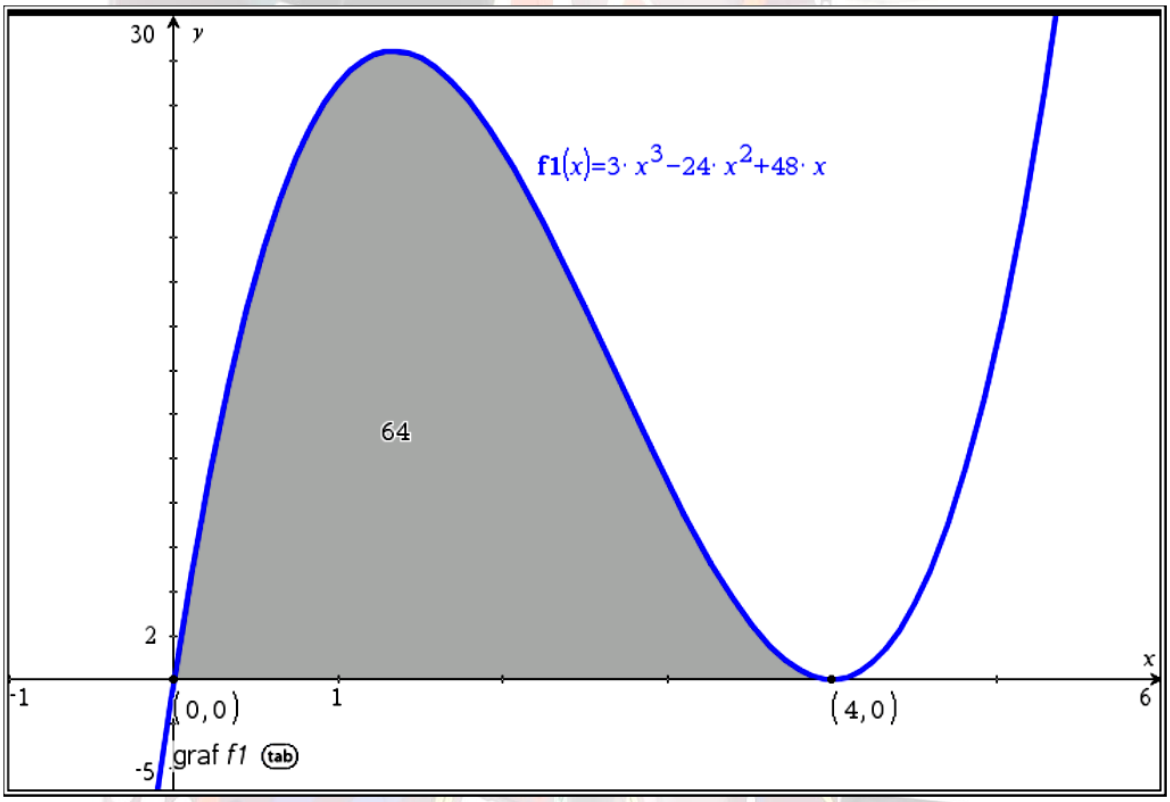
8.075: $f(x) = 3x^3 - 24x^2 + 48x$. Det antages, at der er trykfejl i opgaven, og at først led skal være et TREDJEGRADS-led i stedet for et andengradsled. Det ville nemlig ikke give mening at skrive en funktion med to andengradsled.

a) Ligningen f(x)=0 løses på TI n'spire ved indtastningen:



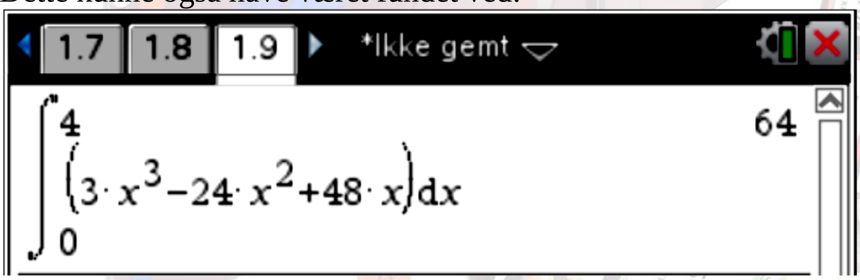
Dvs. $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 0 \vee x = 4}}$

b) Grafen indtegnes på TI n'spire, og ved hjælp af 'Undersøg grafer' → 'Nulpunkter' bestemmes de nulpunkter, der blev fundet ovenfor (dvs. dette er et grafisk alternativ til "solve"). Punktmængden M identificeres, og ved hjælp af 'Undersøg grafer' → 'Integral' og nedre grænse 0 og øvre grænse 4 bestemmes arealet:



Dvs. $\underline{\underline{A_M = 64}}$

Dette kunne også have været fundet ved:



8.076: $f(x)=\frac{1}{x}+2x \quad ; \quad x>0 \quad ; \quad P(1,7)$

Der integreres ledvist, og samtlige stamfunktioner er altså på formen:

$F(x)=\ln|x|+x^2+k=\ln(x)+x^2+k$ (numerisktegnet kan fjernes, da x > 0)

Da grafen for stamfunktionen skal gå gennem P, indsættes P's koordinater i funktionsudtrykket for stamfunktionerne, så man kan bestemme den søge værdi af konstanten k:

$7=\ln(1)+1^2+k \quad \Leftrightarrow \quad 7=0+1+k \quad \Leftrightarrow \quad k=6$

Dvs. at den søgte stamfunktion er:

$\underline{\underline{F(x)=\ln(x)+x^2+6}}$

8.077: Den øverste vandrette side har længden $a-3$.

Det lodrette stykke længst til venstre har længden $b-4$.

Da omkredsen er 100, har man altså:

$100=3+4+(a-3)+b+a+(b-4) \quad \Leftrightarrow$

$100=2a+2b \quad \Leftrightarrow$

$b=50-a$

Arealet af området kan opdeles i to rektangler:

$A=4\cdot(a-3)+a\cdot(b-4)=-12+a\cdot b=-12+a\cdot(50-a)=\underline{\underline{-a^2+50a-12}}$

Udtrykket viser også, at der er grænser for mulige *a*-værdier. De kan bestemmes ved at sætte arealet til 0, og man får så: $0{,}241<a<49{,}76$

8.078: $O(x)=0{,}0024x^2+10^6 \quad a(x)=-0{,}008x+1300$

a) $F(x)=x\cdot a(x)-O(x)=x\cdot(-0{,}008x+1300)-(0{,}0024x^2+10^6)=\underline{\underline{-0{,}0104x^2+1300x-10^6}}$

Der laves funktionsundersøgelse:

$F'(x)=-0{,}0208x+1300$

$F'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}0208x=1300 \quad \Leftrightarrow \quad x=62500$

$F'(0)=1300>0$

$F'(100000)=-780<0$

Det ses altså, at fortjenesten vokser i intervallet $[0,62500]$, mens den aftager i $[62500;\infty[$.

Dermed er der lokalt maksimumssted i *x* = 62500, så for at virksomheden skal tjene mest muligt, skal der produceres $\underline{\underline{62500\ enheder}}$

December 2008: Delprøven uden hjælpemidler

8.079: $f(x) = x + 200 \qquad g(x) = -3x + 600$

Graferne for de to funktioner er rette linjer. Skæringspunktet svarer til det punkt, der ligger på begge grafer, dvs. et sted (x-værdi), hvor funktionerne har samme funktionsværdi (y-værdi).
Da funktionsværdierne skal være ens, har man altså:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$

$$x + 200 = -3x + 600 \Leftrightarrow 4x = 400 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 100}}$$

8.080: $f(x) = x^2 + 5x \qquad P(4, f(4))$

Den afledede funktion bestemmes ved at differentiere ledvist:

$$f'(x) = 2 \cdot x^{2-1} + 5 = \underline{\underline{2x + 5}}$$

For at bestemme en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P, skal man kende hældningen og røringspunktets koordinater.

Hældningen bestemmes:

$$f'(4) = 2 \cdot 4 + 5 = 8 + 5 = 13$$

Røringspunktets 2. koordinat bestemmes:

$$f(4) = 4^2 + 5 \cdot 4 = 16 + 20 = 36$$

Da man nu kender både hældning og et punkt på tangenten, kan en ligning for denne bestemmes:

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

$$y - 36 = 13 \cdot (x - 4) \quad \Leftrightarrow \quad y = 13x - 52 + 36 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = 13x - 16}}$$

8.081: $2x(x + y) - (x + y)^2 \qquad \dfrac{3m \cdot p}{m \cdot p + m \cdot h}$

Det første udtryk reduceres ved i første led at gange ind i parentesen og i andet led at udnytte den første kvadratsætning:

$$2x(x + y) - (x + y)^2 = 2x^2 + 2xy - \left(x^2 + y^2 + 2xy\right) = 2x^2 + 2xy - x^2 - y^2 - 2xy = \underline{\underline{x^2 - y^2}}$$

I det andet udtryk bemærkes det, at størrelsen m indgår i alle led i både tæller og nævner. Derfor kan brøken forkortes med m:

$$\frac{3 \cdot m \cdot p}{m \cdot p + m \cdot h} = \underline{\underline{\frac{3 \cdot p}{p + h}}}$$

8.082: Da de to trekanter er ensvinklede, er forholdene mellem ensliggende sider konstant, så man har:

$$\frac{|CD|}{|CA|}=\frac{|DE|}{|AB|} \Leftrightarrow |CD|=\frac{|DE|}{|AB|}\cdot|CA|$$

$$|CD|=\frac{6}{18}\cdot 21=\frac{1}{3}\cdot 21=\underline{\underline{7}}$$

For at kunne bestemme længden af BE, bestemmes først længden af BC:

$$\frac{|BC|}{|CE|}=\frac{|AB|}{|DE|} \Leftrightarrow |BC|=\frac{|AB|}{|DE|}\cdot|CE|$$

$$|BC|=\frac{18}{6}\cdot 5=3\cdot 5=15$$

Og så er:

$$|BE|=|BC|-|CE|=15-5=\underline{\underline{10}}$$

8.083: Det stykke, der bøjes opad, kaldes x, så man har:

$$|AD|=|BC|=x$$

Da den samlede bredde er 20cm, får man dermed (når der regnes i cm):

$$|CB|+|AB|+|AD|=20 \;\Leftrightarrow\; |AB|=20-|AD|-|BC|=20-x-x=20-2x$$

Arealet af rektanglet udtrykt ved x bliver så:

$$A_{tværsnit}=|AD|\cdot|AB|=x\cdot(20-2x)=-2x^2+20x$$

Grafen for den funktion er en parabel med benene nedad, så den x-værdi, der giver det største areal, er toppunktets førstekoordinat. Dermed er:

$$x_{\max}=\frac{-b}{2a}=\frac{-20}{2\cdot(-2)}=\frac{-20}{-4}=5$$

Dermed skal man vælge:

$$|AB|=20cm-2\cdot x_{\max}=20cm-2\cdot 5cm=\underline{\underline{10cm}}$$

$$|BC|=x_{\max}=\underline{\underline{5cm}}$$

December 2008: Delprøven med hjælpemidler

8.084: $f(x) = -7x^2 + 28x + 25$

Toppunktsformlen skal anvendes, og derfor bestemmes først diskriminanten:

$d = b^2 - 4ac = 28^2 - 4\cdot(-7)\cdot 25 = 784 + 700 = 1484$

$$T\left(\frac{-b}{2a};\frac{-d}{4a}\right) = \left(\frac{-28}{2\cdot(-7)};\frac{-1484}{4\cdot(-7)}\right) = \left(\frac{-28}{-14};\frac{-1484}{-28}\right) = \underline{\underline{(2,53)}}$$

8.085: a) Tabelværdierne indtastes på TI n'spire under "Lister og regneark", hvor det bemærkes, at det er antal år EFTER 1994, dvs. årstallene indtastes som 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Årstallene indtastes i liste A og BNP i liste B.
Da forskriften er $P(t) = P_0 \cdot a^t$, hvor hvor t er år efter 1994 og P er BNP i milliarder kr., er der tale om en eksponentiel udvikling, Under værktøjerne vælges derfor "Statistik"-->"Statistiske beregninger"-->"Eksponentiel regression".
Der vælges:

Og n'spire giver:

A	B	C	D
			=ExpReg(a[],b[],1):
0	1090	Titel	Eksponentiel regre...
1	1124	RegEqn	a*b^x
2	1156	a	1092.34
3	1193	b	1.02826
4	1219	r²	0.997478
5	1250	r	0.998738
6	1294	Resid	{-2.337040569941,...
		ResidTra...	{-0.0021417786710...

Det er *a* der svarer til vores P_0 og *b* svarer til vores *a*, så man har:

$\underline{\underline{P_0 = 1092 \;\; og \;\; a = 1{,}02826}}$

b) Da funktionen er gemt som *f1* og år 2006 svarer til $t = 12$, indtastes på TI n'spire:

$f1(12)$	1526.09

Dvs. Danmarks bruttonationalprodukt i 2006 ifølge modellen skulle være 1526 milliarder kr.
Det faktiske bruttonationalprodukt var 1638 milliarder kr., dvs. det var

$\frac{1638-1526}{1526} = 0{,}073394 = \underline{\underline{7{,}3\%}}$ større end modellens resultat.

<u>8.086:</u> $\Delta ABC: \quad a = 10 \quad b = 15 \quad c = 21$

a) Da man kender alle sidelængderne, kan enhver vinkel bestemmes ved hjælp af en passende cosinusrelation:

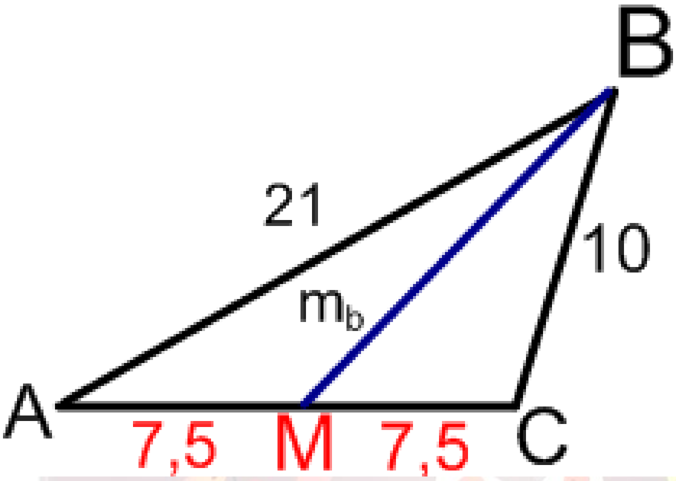
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

$$A = \cos^{-1}\left(\frac{15^2 + 21^2 - 10^2}{2 \cdot 15 \cdot 21}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{566}{630}\right) = \underline{\underline{26,0497983877°}}$$

Nu kender man en vinkel (A) og længderne af de to hosliggende sider, og arealet af trekanten kan så bestemmes med ½-appelsinformlen:

$$T = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 21 \cdot \sin(26,0497983877°) = \underline{\underline{69,1664658632}}$$

b) Medianens fodpunkt kaldes M, og da medianen pr. definition halverer den side, den rammer, har man:



Man kan ikke bruge sinusrelationerne til at finde længden af medianen, da man i trekant ABM ikke kender et par bestående af en vinkel og dens modstående side.
Men da man kender en vinkel (A) og de to hosliggende siders længder, kan man bruge en cosinusrelation til at bestemme længden af medianen (den sidste side):

$$|BM|^2 = |AM|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |AM| \cdot |AB| \cdot \cos(A)$$

$$m_b = |BM| = \sqrt{7,5^2 + 21^2 - 2 \cdot 7,5 \cdot 21 \cdot \cos(26,0497983877°)} = \underline{\underline{14,6372811683}}$$

<u>8.087:</u> $f(t) = 2 \cdot e^{-0,007534 \cdot t}$, hvor t er tiden målt i år, og f er massen af Ni-63 klumpen målt i gram.

Halveringstiden kan bestemmes på flere forskellige måder:

<u>1. metode:</u> Forskriften er på formen $f(t) = b \cdot e^{-k \cdot t}$, hvor halveringstiden kan beregnes ved:

$$T_{½} = \frac{\ln(2)}{k} = \frac{\ln(2)}{0,007534} = 92,0025458667$$

Dvs. halveringstiden er $\underline{\underline{92\,år}}$

<u>2. metode:</u> Man kan omskrive udtrykket til formen $f(t) = b \cdot a^t$ ved:

$$f(t) = 2 \cdot e^{-0,007534 \cdot t} = 2 \cdot \left(e^{-0,007534}\right)^t = 2 \cdot 0,992494309439^t$$

Dermed bliver halveringstiden: $T_{½} = \dfrac{\log(0,5)}{\log(0,992494309439)} = 92,0025458667$

<u>3. metode:</u> Man kan også udnytte, at halveringstiden er den værdi, der skal lægges til t-værdien, for at funktionsværdien halveres. Dette udregnes på n'spire ved:

$f(t):=2\cdot \mathbf{e}^{-0.007534\cdot t}$ *Udført*

$\text{solve}(f(t+x)=0.5\cdot f(t),x)$ $x=92.0025458667$

Man kan bestemme, hvor mange år der skal gå, før massen af klumpen er 0,5g, på flere måder:

<u>1. metode:</u> Klumpen vejer 2g fra start, så den er halveret to gange, når den er blevet til 0,5g.
Dvs. der skal gå $t = 2 \cdot T_{½} = 2 \cdot 92 år = \underline{\underline{184 år}}$

<u>2. metode:</u> Det kan udregnes på n'spire:

$f(t):=2\cdot \mathbf{e}^{-0.007534\cdot t}$ *Udført*

$\text{solve}(f(t)=0.5,t)$ $t=184.005091733$

<u>8.088:</u> $T = 45 \cdot M^{0,25}$; $0,1 \leq M \leq 5$

T er fugleungers alder (målt i døgn) og M deres vægt (målt i kg), når de er flyvefærdige.

a) Alderen svarende til vægten 0,1kg beregnes:
$T = 45 \cdot 0,1^{0,25} = 25,3053596336$
Dvs. <u>fugleungen er 25 døgn gammel</u>

Når alderen er 27 døgn, har man:

$$27 = 45 \cdot M^{0,25} \Leftrightarrow \frac{27}{45} = M^{0,25} \Leftrightarrow M = \left(\frac{27}{45}\right)^4 = 0,1296$$

Dvs. at <u>fugleungen vejer 0,13kg</u>

I n'spire kunne det sidste have været udregnet ved:

$\text{solve}(27=45\cdot m^{0.25},m)$ $m=0.1296$

8.089: $f(x)=3\cdot x-x^3\ \ ;\ \ x>0$

a) Den afledede funktion bestemmes ved at differentiere ledvist:

$f'(x)=\underline{\underline{3-3x^2}}$

Når man skal vise, at f har et maksimum, kan man gøre det ved at få lavet et fortegnsskema for den afledede funktion. Så først bestemmes nulpunkter for den afledede funktion:

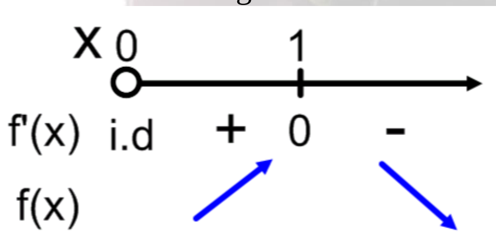
$f'(x)=0\ \Leftrightarrow\ 0=3-3\cdot x^2\ \Leftrightarrow\ 3x^2=3\ \Leftrightarrow\ x^2=1\ \Leftrightarrow\ x=1$

Den sidste biimplikation følger af, at det fra start er bestemt, at x skal være positiv.
Man skal så kende fortegnet for den afledede funktion i intervallerne]0,1[og]1,∞[.
Der vælges to "vilkårlige" tal i intervallerne (0,5 og 2):

$f'(0,5)=3-3\cdot 0,5^2=3-3\cdot 0,25=2,25>0$

$f'(2)=3-3\cdot 2^2=3-12=-9<0$

Dvs. man har fortegnsskemaet:



f er derfor voksende i]0;1] og aftagende i [1,∞[.
<u>Dermed er der globalt maksimum i 1, og funktionen har dermed et maksimum</u>

I stedet for fortegnsskemaet kunne man også have vist, at det var et maksimumssted, ved at kigge på fortegnet for den anden afledede:

$f''(x)=-6x$

$f''(1)=-6\cdot 1=-6<0$

Da den anden afledede er negativ i 1, er det et lokalt maksimumssted.

8.090: Det er en lineær forskrift, så hældningen -9959 fortæller, at <u>antal sengedage for børn under 16 år på danske hospitaler siden 1978 er faldet med 9959 dage om året.</u>

Begyndelsesværdien 650584 fortæller, at <u>i 1978 stod børn under 16 år på danske hospitaler for 650584 sengedage.</u>

8.091: Kassen uden låg skal kunne rumme 125 dm^3. Bredden er x og længden er $2x$.
Kassens rumfang er: $V=l\cdot b\cdot h$
Da rumfanget skal være 125 (der regnes med alle længder i dm^3), har man:

$$125=2x\cdot x\cdot h\ \Leftrightarrow\ \underline{\underline{h=\frac{125}{2x^2}}}$$

Da kassen er uden låg, har den fire sider og en bund, så overfladearealet bliver:

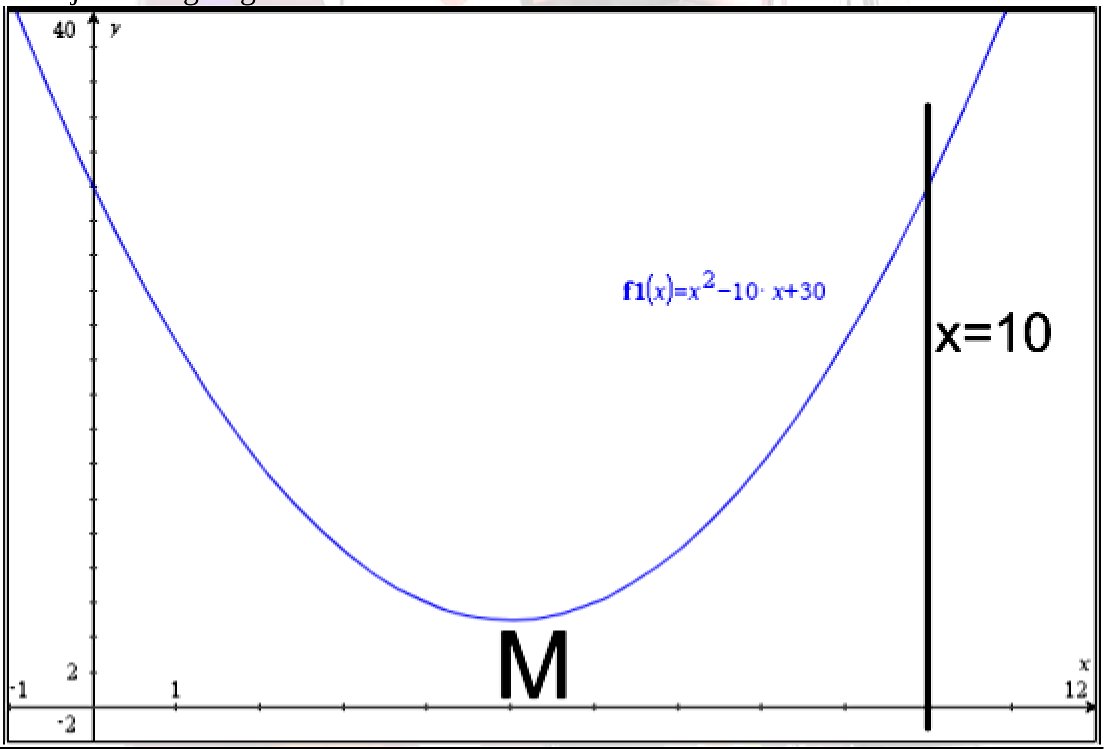
$$A=2\cdot A_{side1}+2\cdot A_{side2}+A_{bund}=$$

$$2\cdot l\cdot h+2\cdot b\cdot h+l\cdot b=2\cdot 2x\cdot\frac{125}{2x^2}+2\cdot x\cdot\frac{125}{2x^2}+2x\cdot x=\underline{\underline{\frac{375}{x}+2x^2}}$$

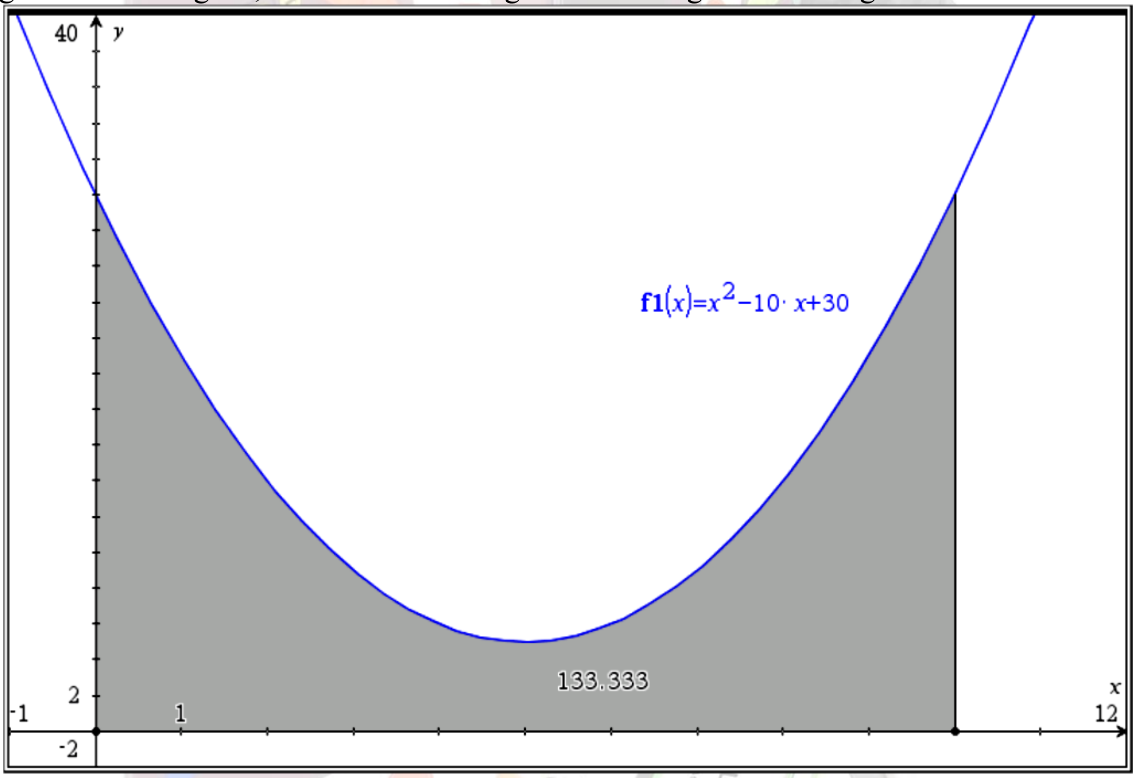
Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

8.092: $f(x) = x^2 - 10x + 30$

Først skal punktmængden M identificeres, så grafen tegnes på TI n'spire under grafer, og der lægges en linje med ligningen x = 10 ind:



Arealet kunne godt være bestemt ved $A_M = \int_0^{10} f(x)dx$, hvor udregningen kunne foretages på lommeregner eller i hånden. Men når man har grafen til rådighed, kan man også bruge 'Undersøg grafer' → 'Integral', hvorefter man vælger den nedre grænse til 0 og den øvre til 10:



Dvs. at $\underline{\underline{A_M = 133,333}}$

<u>8.093:</u> $y = 2,4657 \cdot \ln(x) - 6,2434$

a) Ved et dyk på 300m er x = 300, så man har:

$$y = 2,4657 \cdot \ln(300) - 6,2434 = 7,82041644776$$

Da tiden måles i minutter, har man, at et dyk på 300m <u>varer 7,8 minutter.</u>

b) Dykkedybden som funktion af varigheden bestemmes ved at isolere x i ligningen:

$$y = 2,4657 \cdot \ln(x) - 6,2434 \Leftrightarrow$$

$$y + 6,2434 = 2,4657 \cdot \ln(x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{y + 6,2434}{2,4657} = \ln(x) \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{x = e^{\frac{y+6,2434}{2,4657}}}}$$

Når varigheden er 8 minutter, får man dykkedybden:

$$x = e^{\frac{8+6,2434}{2,4657}} = e^{5,77661516} = 322,665169944$$

Dvs. at <u>dykkedybden så er 323m</u>

Det sidste kunne også have været beregnet på n'spire ved:

$y:=2.4657 \cdot \ln(x)-6.2434$	$2.4657 \cdot \ln(x)-6.2434$
solve$(y=8,x)$	$x=322.665169944$

Det næst sidste kunne også have været bestemt på n'spire ved:

solve$(y=2.4657 \cdot \ln(x)-6.2434,x)$

$$x=(1.00008111616)^{5000.\cdot y+31217.}$$

<u>8.094:</u> Populationen er i princippet alle mennesker (den kunne afgrænses til Danmarks befolkning) og stikprøven er så de mennesker, der kommer ind på hjemmesiden og efterfølgende vælger at deltage i undersøgelsen.

Denne udvælgelse af stikprøven er biased, da det for det første kun er de mennesker, der besøger siden, der har mulighed for at deltage, og disse er nok ikke repræsentative for befolkningen (tager 75% af danskerne kosttilskud?), og da det for det andet efterfølgende kun er nogle af disse – sandsynligvis de mest interesserede i kosttilskud - der deltager i undersøgelsen. Der opstår dermed den systematiske fejl, at de deltagende overvejende er interesseret i kosttilskud og dermed også kan forventes at tro på virkningen af sådanne. Den skjulte variabel er hermed en forudindtaget holdning til kosttilskud.

Så er der en væsentlig forskel på at "mene" og at "mærke" en positiv virkning på helbredet. Deltagerne har svaret på det første, mens firmaet hævder det sidste.

Maj 2009: Delprøven uden hjælpemidler

<u>8.095:</u> $f(x) = 2x^3 + 4x^2$

Den afledede funktion bestemmes ved ledvis differentiation:

$f'(x) = 2 \cdot 3x^{3-1} + 4 \cdot 2x^{2-1} = \underline{\underline{6x^2 + 8x}}$

<u>8.096</u>: Det er en lineær funktion, så forskriften er $f(x) = a \cdot x + b$

<u>Metode 1 (uden formel):</u>

Koordinaterne for punkterne $P(3,1)$ og $Q(7,9)$ indsættes i forskriften for at bestemme konstanterne:

$$\left.\begin{aligned} 9 &= a \cdot 7 + b \\ 1 &= a \cdot 3 + b \end{aligned}\right\} \Rightarrow 9 - 1 = (7a + b) - (3a - b) \quad \Leftrightarrow \quad 8 = 4a \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a = 2}$$

Denne værdi indsættes i den nederste ligning for at finde b:

$1 = 2 \cdot 3 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 1 - 6 = \underline{-5}$

Dvs. at forskriften er:

$\underline{\underline{f(x) = 2x - 5}}$

<u>Metode 2 (med formler):</u>

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9-1}{7-3} = \frac{8}{4} = 2$$

$b = y_1 - a \cdot x_1 = 1 - 2 \cdot 3 = -5$

Dvs. at forskriften er:

$\underline{\underline{f(x) = 2x - 5}}$

<u>8.097:</u> $f(x) = 6x^2$ P(1,10)

Ved integration bestemmes den form samtlige stamfunktioner er på:

$$F(x) = \frac{6}{3}x^3 + k = 2x^3 + k$$

For at finde netop den stamfunktion, hvis graf går gennem P, indsættes punktets koordinater i forskriften, så k-værdien kan bestemmes:

$10 = 2 \cdot 1^3 + k \quad \Leftrightarrow \quad k = 8$

Dermed er forskriften for den søgte stamfunktion:

$\underline{\underline{F(x) = 2x^3 + 8}}$

8.098: Da trekanterne er ensvinklede, har de tre forhold mellem ensliggende sider samme værdi (skalafaktoren), dvs:

$$\frac{|DF|}{|AC|} = \frac{|ED|}{|BA|} = \frac{|FE|}{|CB|} = k$$

Første del af dette udtryk benyttes:

$$\frac{|DF|}{|AC|} = \frac{|ED|}{|BA|} \quad \Leftrightarrow \quad |DF| = \frac{|ED|}{|BA|} \cdot |AC|$$

$$|DF| = \frac{27}{18} \cdot 14 = \frac{9 \cdot 3}{9 \cdot 2} \cdot 14 = \frac{3}{2} \cdot 14 = \frac{3 \cdot 14}{2} = 3 \cdot 7 = \underline{\underline{21}}$$

8.099: Først ses på parablen P:

Da benene vender opad, er $\underline{\underline{a > 0}}$

Da grafen skærer 2. aksen på den positive del af denne, er $\underline{\underline{c > 0}}$

Da grafen ikke har nogen skæringer med 1. aksen (og polynomiet dermed ikke har nogen rødder), er $\underline{\underline{d < 0}}$

Så ses på parablen Q:

Da benene vender nedad, er $\underline{\underline{a < 0}}$

Da grafen skærer 2. aksen på den negative del af denne, er $\underline{\underline{c < 0}}$

Da grafen har to skæringer med 1. aksen (og polynomiet dermed 2 rødder), er $\underline{\underline{d > 0}}$

Maj 2009: Delprøven med hjælpemidler

8.100: $f(x) = b \cdot x^a \quad f(2) = 12 \quad f(4) = 96$

Funktionsudtrykket kendes, og to punkter er opgivet, så man kan opstille to ligninger med to ubekendte, der kan løses på TI n'spire ved indtastninger:

$\text{solve}(12 = b \cdot 2^a \text{ and } 96 = b \cdot 4^a, a, b) \qquad a=3 \text{ and } b=\frac{3}{2}$

Dvs. at a = 3 og b = 1,5

8.101: a) Da antallet af diabetikere vokser med en fast procentdel om året, er der tale om en eksponentiel udvikling.
Lad t være antal år efter 1996, dvs. år 1996 svarer til t=0, og hermed er begyndelsesværdien 113570.
Da vækstraten er r = 7,1% , er fremskrivningsfaktoren $a = 1 + r = 1{,}071$, dvs. forskriften for modellen er: $D(t) = 113570 \cdot 1{,}071^t$, hvor D er antallet af diabetikere i Danmark.

b) Da man har fremskrivningsfaktoren, kan fordoblingstiden beregnes:

$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}071)} = 10{,}1052$, dvs. at antallet af diabetikere i Danmark i følge modellen fordobles for hver 10 år

8.102: a) $W(t) = a \cdot t + b$, hvor t er tiden målt i år efter 1981 og W er verdensrekorden målt i sekunder.
Det er en lineær model, så tabellens værdier indtastes på TI n'spire med årstallene efter 1981 (dvs. 0, 3, 4, 7, 17, 18, 21, 22 og 26) i liste A og tiden W i liste B.
Under værktøjer vælges 'Statistik', 'Statistiske beregninger' og 'lineær regression (mx+b)'.
x-liste: a[] ; y-liste: b[] ; GemReg: f1 ; Dette giver:

	A	B	C	D
◆				=LinRegMx(a[],b[],1
1	0	7698	Titel	Lineær regression...
2	3	7685	RegEqn	m*x+b
3	4	7632	m	-8.18776
4	7	7610	b	7688.57
5	17	7565	r²	0.951627
6	18	7542	r	-0.975514
7	21	7538	Resid	{9.4271145771,20...
8	22	7495		
9	26	7466		

n'spire bruger m i stedet for a, så man har: $a = -8{,}18776 \qquad b = 7688{,}6$

b) a er hældningskoefficienten, og det fortæller altså, at
for hvert år skæres der i følge modellen godt 8 sekunder af verdensrekorden.

Hvis verdensrekorden skal være under 7200 sekunder, skal man løse ligningen $W(t) < 7200$:

$\text{solve}(f1(x) < 7200, x) \qquad x > 59.6711$

Dvs. 60 år efter 1981, altså i år 2041 forventes verdensrekorden for mænd at komme under 2 timer.

<u>8.103:</u> $|AB| = 5 \quad |AC| = 7 \quad \angle A = 114°$

a) Da man kender en vinkel og de to hosliggende sider, kan den modsatte side ($|BC|$) bestemmes ved at anvende en cosinusrelation:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2\cdot|AB|\cdot|AC|\cdot\cos A$$

$$|BC| = \sqrt{5^2 + 7^2 - 2\cdot 5\cdot 7\cdot\cos(114°)} = 10{,}1228239645 = \underline{\underline{10{,}1}}$$

Vinkel B kan bestemmes ved både cosinus- og sinusrelationer. Det er hurtigst med sinusrelationerne, men så skal man være opmærksom på, at man skal vurdere, om B er spids eller stump, da det jo er en vinkel, der er den ukendte. Cosinusrelationen giver ikke problemer med dette, da den altid entydigt giver vinklen, når man arbejder med trekanter.

<u>Metode 1: Sinusrelationer.</u>

$$\frac{\sin B}{|AC|} = \frac{\sin A}{|BC|} \quad \Leftrightarrow \quad \sin B = \frac{\sin A}{|BC|}\cdot|AC| \quad \Leftarrow \quad B = \sin^{-1}\left(\frac{\sin A}{|BC|}\cdot|AC|\right)$$

$$B = \sin^{-1}\left(\frac{\sin 114°}{10{,}122824}\cdot 7\right) = 39{,}17733866° = 39{,}2°$$

Da vinkel A er stump, kan B ikke også være stump, så den fundne vinkel er den rigtige: $\underline{\underline{\angle B = 39{,}2°}}$

<u>Metode 2: Cosinusrelationer.</u>

$$\cos B = \frac{|AB|^2 + |BC|^2 - |AC|^2}{2\cdot|AB|\cdot|BC|}$$

$$B = \cos^{-1}\left(\frac{5^2 + 10{,}122824^2 - 7^2}{2\cdot 5\cdot 10{,}122824}\right) = 39{,}1773386604° = \underline{\underline{39{,}2°}}$$

b) Man kan finde de to søgte størrelser i vilkårlig rækkefølge.

<u>Metode 1: Først areal, så højde:</u>
Da man kender en vinkel og de to hosliggende sider, kan arealet af trekanten bestemmes med ½-appelsin-formlen:

$$T = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|AC|\cdot\sin A = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 7\cdot\sin(114°) = 15{,}9870455 = \underline{\underline{16{,}0}}$$

Arealet af en trekant kan også bestemmes som det halve af produktet mellem en grundlinje og højden på denne. Dvs. man har:

$$T = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot h_b \quad \Leftrightarrow \quad h_b = \frac{2\cdot T}{|AC|} = \frac{2\cdot 15{,}9870455}{7} = 4{,}56772728821 = \underline{\underline{4{,}6}}$$

Metode 2: Først højde, så areal:

Lad den rette vinkel på figuren (højdens fodpunkt) være D. Trekant ABD er retvinklet, og i denne trekant er: $\angle BAD = 180° - 114° = 66°$

Højden er den modstående katete til denne vinkel, så man har:

$$\sin(\angle BAD) = \frac{h_b}{|AB|} \quad \Leftrightarrow \quad h_b = \sin(\angle BAD) \cdot |AB|$$

$$h_b = \sin(66°) \cdot 5 = 4,56772728821 = \underline{\underline{4,6}}$$

Arealet kan så bestemmes ved:

$$T = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot 4,56772728821 \cdot 7 = \underline{\underline{16,0}}$$

8.104: $f(x) = -0,164 \cdot x^2 + 18,9 \cdot x + 710$

f er befolkningstallet til tiden x målt i antal år efter 1900.

a) Man kan finde det største befolkningstal grafisk ved at indtegne funktionen og finde maksimum, men man kan også udnytte, at grafen for funktionen er en parabel med benene nedad, så toppunktets y-værdi angiver det største befolkningstal:

$$f_{\max} = \frac{-d}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-(18,9^2 - 4 \cdot (-0,164) \cdot 710)}{4 \cdot (-0,164)} = 1254,52743$$

Dvs. ifølge modellen nåede befolkningstallet op på 1255

På n'spire findes den x-værdi, hvor $f(x) = 200$ ved at løse ligningen $200 = -0,164 \cdot x^2 + 18,9 \cdot x + 710$

```
solve(200=-0.164·x²+18.9·x+710,x)
        x=-22.5656124042 or x=137.809514843
```

Modellen arbejder kun med positive x-værdier, og x=138 svarer til år 2038, så ifølge modellen vil befolkningstallet i Gedser i 2038 være 200.

8.105: a) Først bestemmes frekvenserne, og derefter de kumulerede frekvenser:

Antal cigaretter pr. dag	Antal personer	Intervalfrekvens	Kum. Intervalfrekvens
5 - 10	74	13,9%	13,9%
10 - 15	119	22,4%	36,3%
15 - 20	127	23,9%	60,3%
20 -25	129	24,3%	84,6%
25 - 30	32	6,0%	90,6%
30 -35	50	9,4%	100,0%

Eksempel på udregninger:

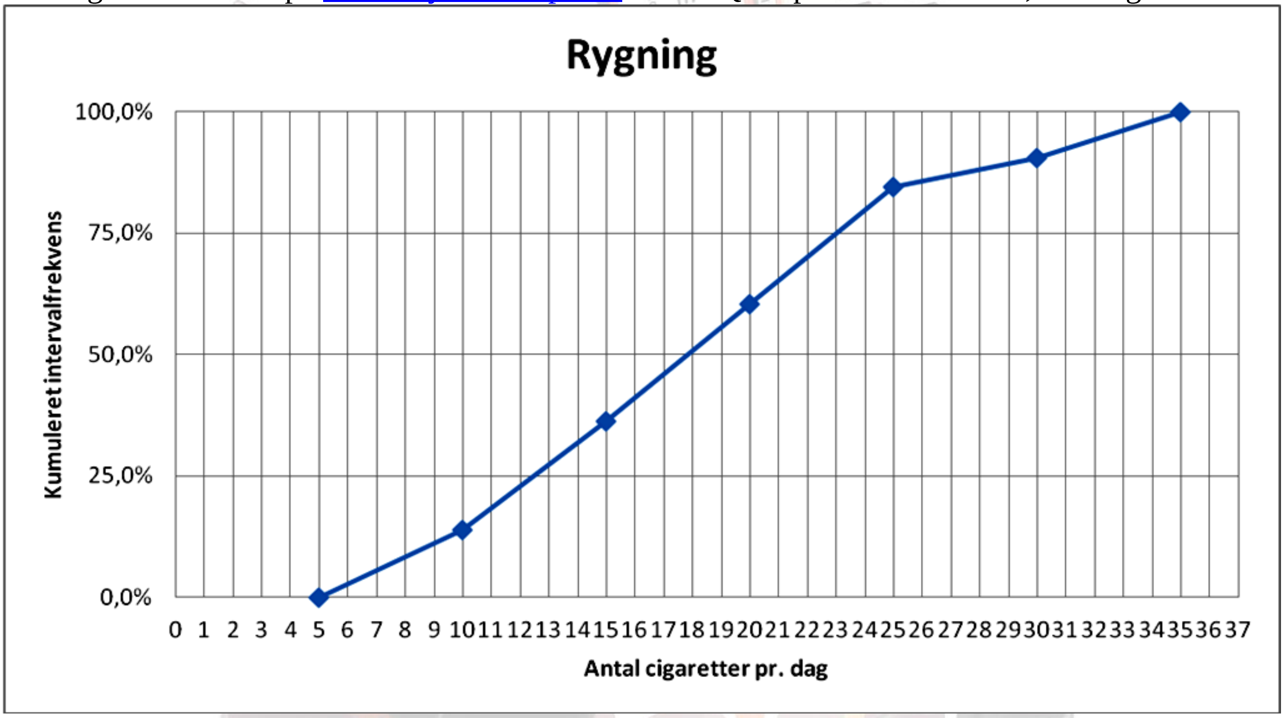
Intervallet 20-25 cigaretter:

$$\text{intervalfrekvens} = \frac{\text{antal personer}}{531} = \frac{129}{531} = 0,243 = 24,3\%$$

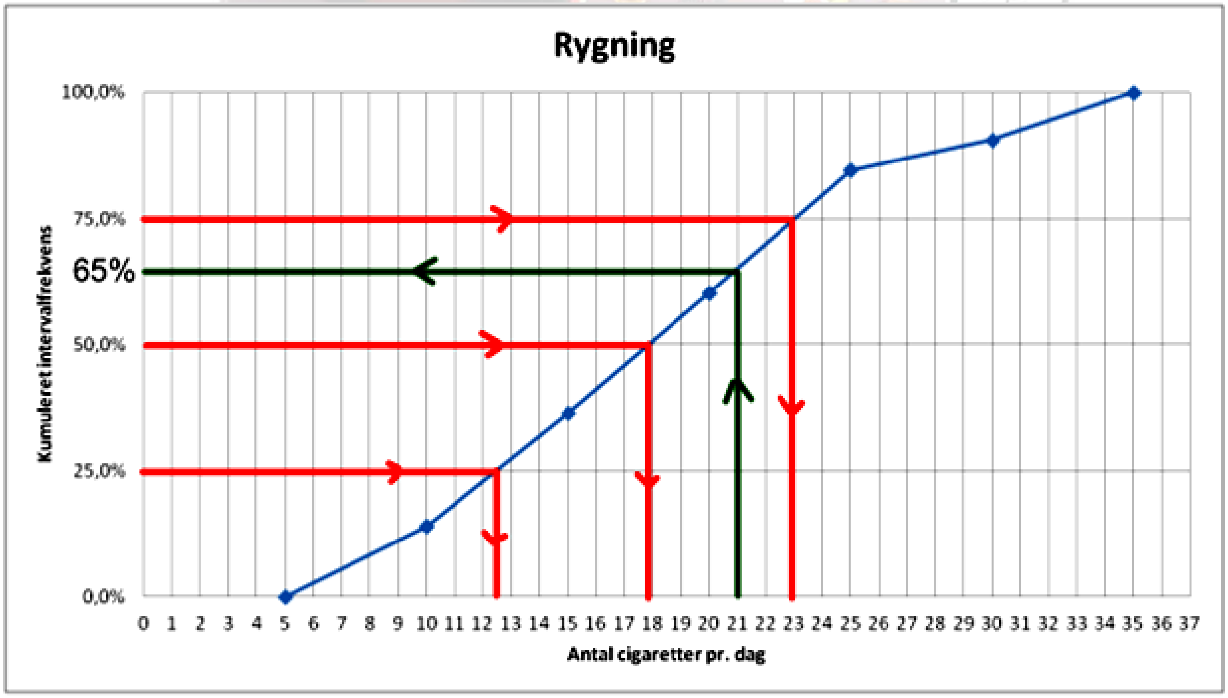
$$\text{Kum. intervalfrekvens} = 13,9\% + 22,4\% + 23,9\% + 24,3\% = 84,6\%$$

Sumkurven tegnes ved at afbillede de kumulerede intervalfrekvenser op ad 2. aksen og intervallernes højre intervalendepunkt ud af x-aksen. Desuden indsættes 5 som startpunkt (kum. Intervalfrekvens 0), og punkterne forbindes med rette linjestykker:

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD



b) Kvartilsættet aflæses ved at gå vandret ind fra 25%, 50% og 75% og aflæse de tilsvarende værdier på førsteaksen:



Da det er et antal cigaretter, giver det kun mening med hele tal, så kvartilsættet bliver <u>(12,18,23)</u>

Ved at gå op fra 21 cigaretter (hvis man går ud fra, at kun hele tal giver mening, skal man egentlig gå op fra 20,5%) aflæses det, at 65% af rygerne ryger højst 21 cigaretter om dagen, og dermed er det 100%-65% = <u>35%, der ryger mindst 21 cigaretter om dagen</u>

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

8.106: $M(t) = 3{,}2 \cdot 10^5 + 7{,}8 \cdot 10^5 \cdot e^{0{,}154 \cdot t}$ t er tiden målt i timer og M er antallet af bakterier.

På TI n'spire bestemmes M'(18) ved:

$$\frac{d}{dt}\left(3.2 \cdot 10^5 + 7.8 \cdot 10^5 \cdot e^{0.154 \cdot t}\right)|t=18 \qquad 1920788.85595$$

Dvs. at $\underline{\underline{M'(18) = 1{,}92 \cdot 10^6}}$,

hvilket fortæller, at antallet af bakterier efter 18 timer vokser med 1,9 millioner i timen.

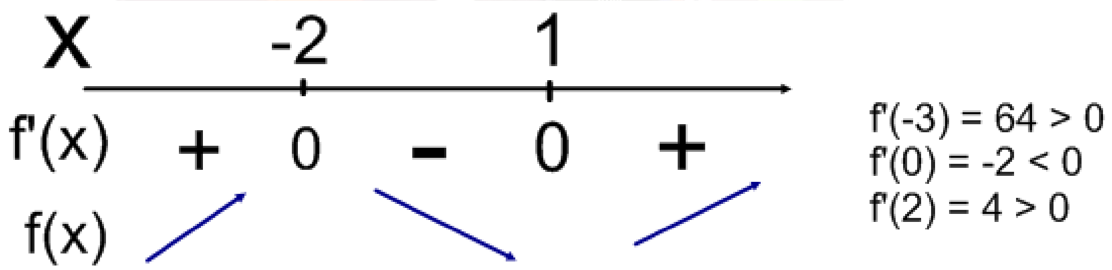
8.107: $f'(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$

Det bemærkes, at det er den afledede funktion (fejlagtigt omtalt som 'differentialkvotient' i opgaven) og ikke selve funktionen, der er angivet.

For at bestemme monotoniforholdene for f, skal man altså begynde at finde nulpunkter for den afledede funktion og efterfølgende værdier for denne i de intervaller, der dannes af nulpunkterne. Dette gøres på TI n'spire ved:

$f1(x):=x^4-x^3-3\cdot x^2+5\cdot x-2$	*Udført*
solve$(f1(x)=0,x)$	$x=-2$ or $x=1$
$f1(-3)$	64
$f1(0)$	-2
$f1(2)$	4

Dermed har man fortegnsskemaet:



Dvs. at:

f er voksende i intervallerne]-∞;-2] og [1,∞[

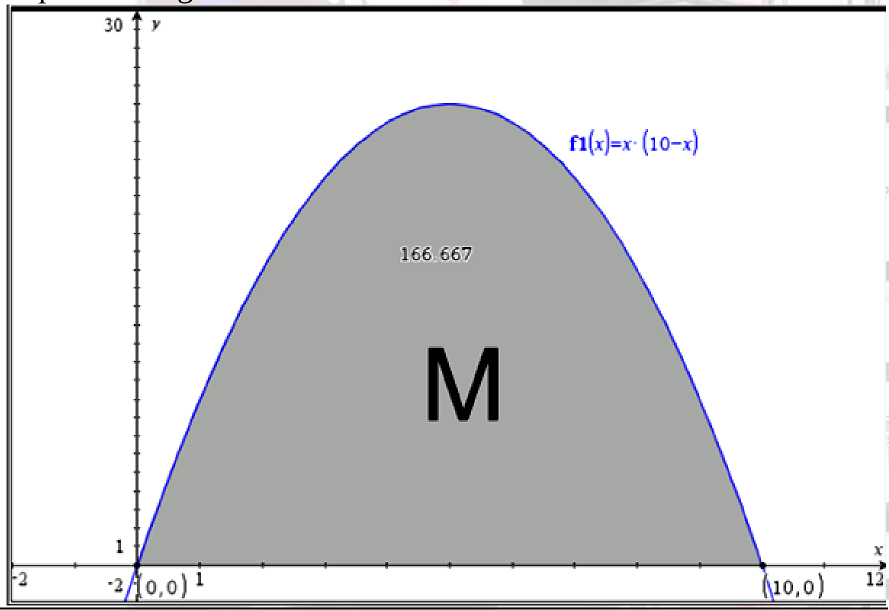
f er aftagende i intervallet [-2;1]

f har lokalt maksimum i x = -2 og lokalt minimum i x = 1.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>8.108:</u> $f(x) = x \cdot (k - x) \quad ; \quad k > 0$

a) Når k = 10 kan man finde den punktmængde, der afgrænses af grafen for f og x-aksen ved på TI n'spire under grafer at indtaste funktionen:



Punktmængdens placering er skitseret, og nulpunkterne for funktionen er fundet ved 'undersøg grafer' → 'Nulpunkt'.

Man kunne også have fundet nulpunkterne ved at benytte nulreglen på følgende:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x \cdot (10 - x) \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee 10 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 10 .$$

Arealet af M kunne så bestemmes ved $A_M = \int_0^{10} f(x)dx$, der kan udregnes i hånden eller på lommeregner, men her er det i stedet bestemt på TI n'spire ved 'Undersøg grafer'→'Integral' med nedre grænse 0 og øvre grænse 10.

Dvs. $\underline{\underline{A_M = 166{,}667}}$

b) $f(x) = x \cdot (k - x) \quad ; \quad k > 0$

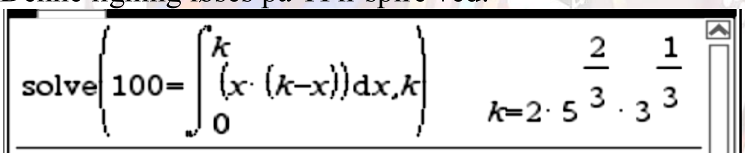
Nulpunkterne bestemmes:

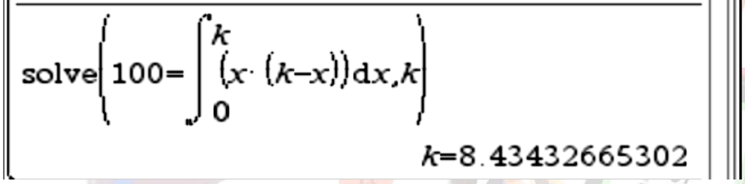
$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x \cdot (k - x) \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee k - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = k$$

k er positiv og ligger altså til højre for 0, og grafen er en parabel med benene nedad (a-værdien er -1), dvs. punktmængden vil have samme form og ligge som vist i spørgsmål a), bortset fra at 10 er udskiftet med k. Hvis arealet af punktmængden skal være 100, har man derfor:

$$100 = \int_0^k x \cdot (k - x)\, dx$$

Denne ligning løses på TI n'spire ved:





Dvs. at <u>k = 8,43432665302</u>

8.109: a) Der er tale om to retviklede trekanter, hvor vejstrækningerne AP og PB udgør hypotenuserne i trekanterne. Dermed kan de udtrykkes ved *x* ved at bruge Pythagoras, og ved at udnytte, at når kateten i den ene trekant har længden *x*, så er længden af det resterende stykke af grænsen (svarende til en katete i den anden trekant) lig med 46km - x:
(Der regnes uden enheder. Længderne opgives i km)

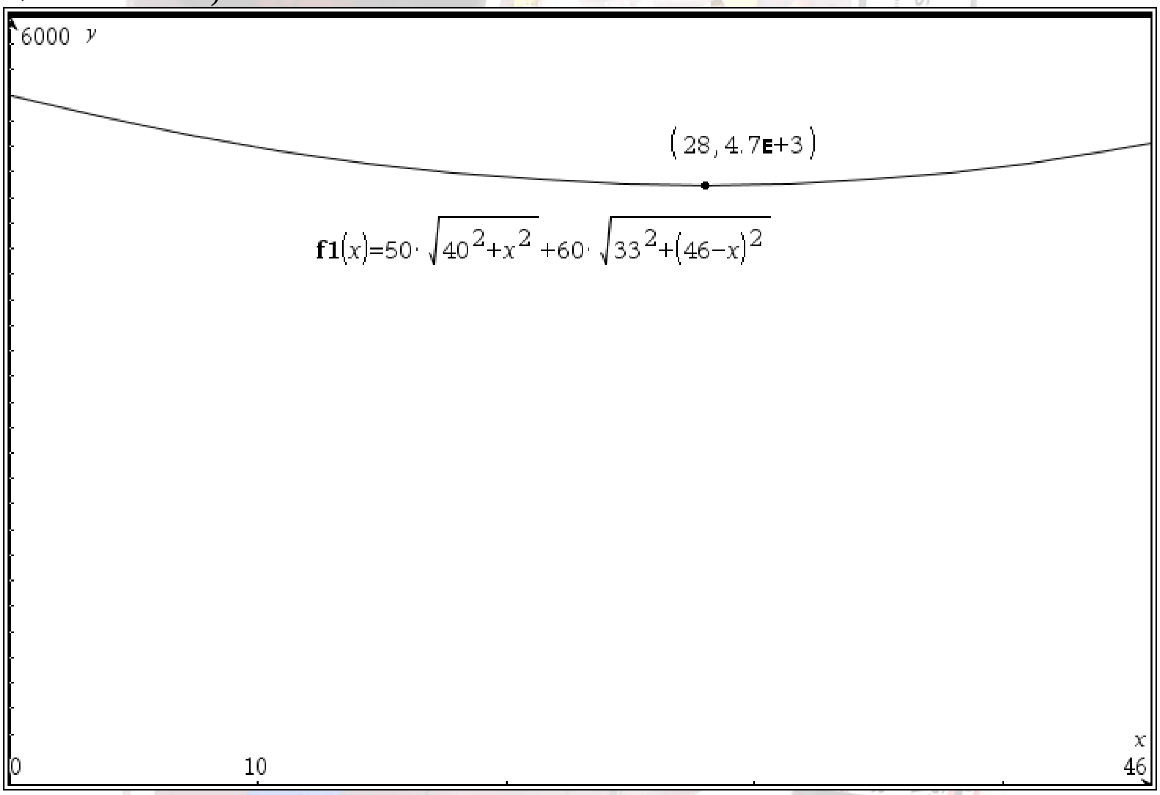
$$|AP|^2 = 40^2 + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{|AP| = \sqrt{40^2 + x^2}}} \quad ; \quad 0 \leq x \leq 46$$

$$|PB|^2 = 33^2 + (46 - x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{|AP| = \sqrt{33^2 + (46 - x)^2}}} \quad ; \quad 0 \leq x \leq 46$$

b) Lad f(x) være prisen for vejen udtrykt i millioner kr. Prisen for hver af de to dele af vejen findes ved at multiplicere *længden af stykket* med *prisen pr. længde*. Så man har:

$$f(x) = 50 \cdot |AP| + 60 \cdot |PB| = \underline{\underline{50 \cdot \sqrt{40^2 + x^2} + 60 \cdot \sqrt{33^2 + (46 - x)^2}}} \quad ; \quad 0 \leq x \leq 46$$

For at finde den værdi for x, der gør vejen billigst mulig, kunne man foretage en funktionsanalyse og finde et minimumssted, men i dette tilfælde er det et funktionsudtryk, der ikke er så nemt at arbejde med, og vigtigst af alt kender man det område [0;46], som x-værdierne ligger inden for, så i dette tilfælde løses opgaven ved på TI n'spire at tegne en graf:
(For at finde ud af den øvre grænse på y-aksen, kan man finde en funktionsværdi for en x-værdi i området [0;46]. F.eks. giver f(20) = 4757, så den øvre grænse for y-værdierne skal i hvert fald være større end denne).



Minimumspunktet for grafen er fundet ved "Undersøg grafer"→"Minimum" og valg af grænser på hver side af det område, der ses at indeholde de mindste y-værdier.
Det er kun x-værdien, der skal bruges, dvs. man ser at <u>når x = 28km bliver vejen billigst mulig.</u>

August 2009: Delprøven uden hjælpemidler

8.110: I første led anvendes den tredje kvadratsætning og i andet led ganges b ind i parentesen:

$$(a-b)(a+b)+b(a+b)-a^2=a^2-b^2+ab+b^2-a^2=\underline{\underline{ab}}$$

8.111: $P(x)=2x^2+4x+1$

Først bestemmes diskriminanten, og så bestemmes parablens toppunkt ved toppunktsformlen:

$$d=b^2-4\cdot a\cdot c=4^2-4\cdot 2\cdot 1=16-8=8$$

$$T=\left(\frac{-b}{2a};\frac{-d}{4a}\right)=\left(\frac{-4}{2\cdot 2};\frac{-8}{4\cdot 2}\right)=\left(\frac{-4}{4};\frac{-8}{8}\right)=\underline{\underline{(-1,-1)}}$$

8.112: Det bestemte integral bestemmes ved hjælp af en (vilkårlig) stamfunktion:

$$\int_1^2 3x^2dx=\left[x^3\right]_1^2=2^3-1^3=8-1=\underline{\underline{7}}$$

8.113: Der er oplyst en sammenhæng $y=-16x+840$, hvor y er antallet af danskere, der blev dræbt i trafikken pr. år, og x er antal år efter 1977.

Det er en lineær sammenhæng, og når x=0 er y = 840, hvilket fortæller, at der er i 1977 blev dræbt 840 danskere i trafikken.

Tallet -16 fortæller, at der for hvert år efter 1977 (og indtil 2001, der i opgaveteksten er sat som øvre grænse) er blevet dræbt 16 danskere færre om året i trafikken.

8.114: Trekant ABC er retvinklet, og dermed kan Pythagoras anvendes til at bestemme længden af hypotenusen:

$$|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$$

$$|AB|=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=\underline{\underline{10}}$$

Da de to trekanter er ensvinklede, er forholdet mellem ensliggende sider det samme for alle par af sider, og dermed er:

$$\frac{|PR|}{|AC|}=\frac{|PQ|}{|AB|}\Leftrightarrow\quad |PR|=\frac{|PQ|}{|AB|}\cdot|AC|=\frac{15}{10}\cdot 8=\frac{3}{2}\cdot 8=\frac{24}{2}=\underline{\underline{12}}$$

August 2009: Delprøven med hjælpemidler

8.115: Man har en stikprøve på 2000 mennesker, men det er ikke oplyst, hvordan denne stikprøve er udtaget. Hvis det er blandt alle aldersgrupper, må man forvente, at det ikke er en særlig stor del af disse, der udvikler Alzheimers. Når stikprøven desuden deles op i grupper, der drikker juice mere end tre gange ugentligt, mindre end en gang om ugen og dermed også en gruppe, der ligger imellem disse, så kan nogle af disse grupper godt ende med at blive for små til, at man får pålidelige resultater.

Desuden kan der ligge en skjult variabel i alderen, da udviklingen af Alzheimers i hvert fald er korreleret med alderen, og da man også kunne forvente, at indtagelsen af juice var korreleret med alderen. Således kunne der opstå en systematisk fejl, dvs. stikprøven ville være biased.

8.116: a) I Maple indtastes værdierne, og da det er oplyst, at forskriften er $M = b \cdot l^a$ (dvs. en potensfunktion, da l og M er de to variable), skal der laves potensregression:

$with(Gym)$:

$længde := [3.1, 4.9, 7.8, 9.5]$:

$vægt := [25, 86, 340, 600]$:

$M(l) := PowReg(længde, vægt, l)$:

$M(l) = 0.971468166381126\, l^{2.84866708747064}$

Dvs. at $\underline{\underline{a = 2,84866708747064}}$ og $\underline{\underline{b = 0,971468166381126}}$

b) Når er bløddyr er 6,3 mm langt, svarer det til $l = 6{,}3$, så da Maple har gemt funktionen indtastes:

$M(6.3) = 183.858489943072$

Dvs. et 6,3mm langt bløddyr vejer $\underline{\underline{183,86\ mg}}$

8.117: a) Når antallet af dyr vokser med en fast procentdel (12%), er der tale om en eksponentiel udvikling, og fremskrivningsfaktoren er $a = 1 + r = 1 + 0{,}12 = 1{,}12$. Så med en begyndelsesværdi på 300 bliver forskriften:

$\underline{\underline{P(t) = 300 \cdot 1{,}12^t}}$, hvor t er antal år og P er populationens størrelse.

b) $N = 250 \cdot 1{,}05^t$

Da man kan aflæse fremskrivningsfaktoren til 1,05, kan man udregne fordoblingstiden:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}05)} = 14{,}206699082891$$

Dvs. at fordoblingstiden er $\underline{\underline{14{,}2 \text{ år}}}$

<u>*8.118:*</u> $l = 162 \cdot \left(1 - 0{,}98 \cdot e^{-0{,}2 \cdot t}\right)$; $0 \le t \le 20$

Fiskens længde *l* angives i cm, og dens alder *t* angives i år.

a) Når fisken er 1 år, er $t = 1$, så man får:

$$l = 162 \cdot \left(1 - 0{,}98 \cdot e^{-0{,}2 \cdot 1}\right) = 162 \cdot \left(1 - 0{,}98 \cdot e^{-0{,}2}\right) = 32{,}0183056413$$

Dvs. <u>fisken er 32,0cm lang</u>

b) Grafen indtegnes i Geogebra, og desuden indtegnes den vandrette linje $y = 90$, så man kan løse det sidste spørgsmål grafisk:

Funktion

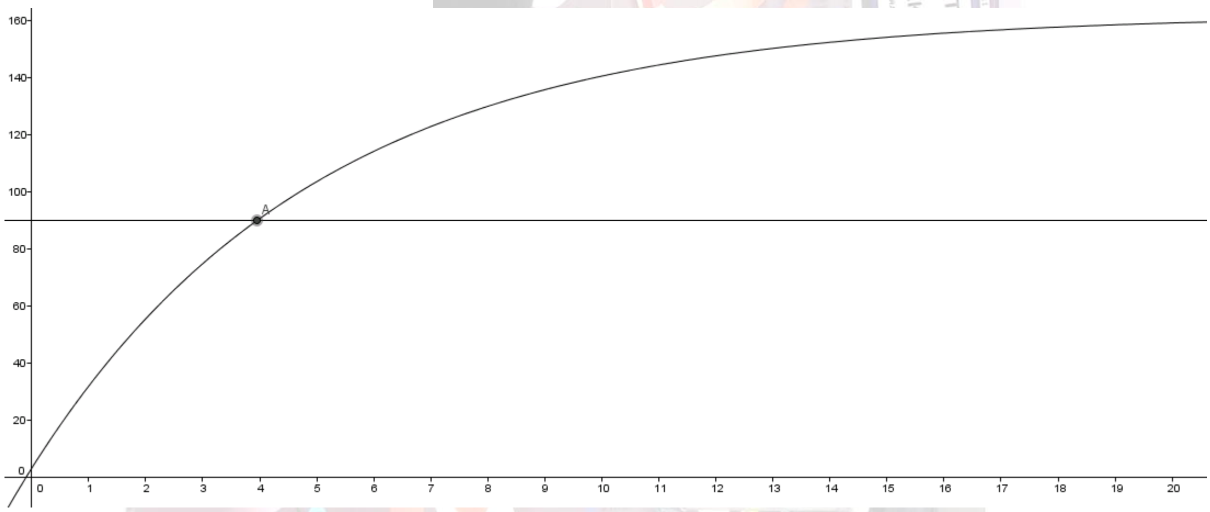
$l(t) = 162\left(1 - 0.98\, e^{-0.2t}\right)$

Linje

a: y = 90

Punkt

A = (3.95, 90)



På n'spire kan man finde fiskens alder, når dens længde er 90cm ved:

$$\text{solve}\left(90 = 162 \cdot \left(1 - 0.98 \cdot \mathbf{e}^{-0.2 \cdot t}\right), t\right) \qquad t = 3.95363754449$$

Dvs. <u>fisken er 4,0 år gammel</u>, når den er 90 cm lang.

8.119: $\angle B = 17,0°$ $|AC| = 500m$ $|BC| = 50m$ ΔABC er retvinklet

a) Da trekant ABC er retvinklet med den rette vinkel C, giver Pythagoras:

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

$$|AB| = \sqrt{(500m)^2 + (50m)^2} = \underline{\underline{502,493781056m}}$$

Og når man igen udnytter, at det er en retvinklet trekant, har man:

$$\tan A = \frac{|BC|}{|AC|}$$

$$A = \tan^{-1}\left(\frac{50m}{500m}\right) = \underline{\underline{5,7105931375°}}$$

b) For at bestemme højden af højhuset, skal man arbejde med trekant ABD.
Man kender kun én sidelængde og kan altså ikke bruge cosinusrelationerne.
For at kunne bruge sinusrelationerne skal man først udregne nogle vinkler i trekant ABD.
Da man kender vinkel A i trekant ABC, og da højhuset danner en ret vinkel med jordoverfladen (se figuren), har man:

$$\angle BAD = 90° - \angle BAC = 90° - 5,7105931375° = 84,2894068625°$$

Og så er:

$$\angle ADB = 180° - \angle ABD - \angle BAD = 180° - 17,0° - 84,2894068625° = 78,7105931375°$$

Og så kan højden af højhuset bestemmes med sinusrelationerne:

$$\frac{|AD|}{\sin(\angle ABD)} = \frac{|AB|}{\sin(\angle ADB)} \Leftrightarrow |AD| = \frac{|AB|}{\sin(\angle ADB)} \cdot \sin(\angle ABD)$$

$$|AD| = \frac{502,493781056m}{\sin(78,7105931375°)} \cdot \sin(17,0°) = \underline{\underline{149,813728797m}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk   Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

8.120: $f(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30 \quad ; \quad P(3, f(3))$

a) En ligning for tangenten til grafen for *f* i P kan bestemmes på flere måder:

Metode 1: På TI n'spire indtastes:

$\text{tangentLine}\left(x^3-4\cdot x^2-11\cdot x+30,x,3\right)$	$12-8\cdot x$

Dvs. at ligningen for tangenten er $\underline{\underline{y = -8x + 12}}$

Metode 2: For at bestemme en ligning for tangenten, skal man kende y-koordinaten til røringspunktet samt tangentens hældning.

y-koordinaten bestemmes ved indsættelse: $f(3) = 3^3 - 4\cdot 3^2 - 11\cdot 3 + 30 = -12$

Tangentens hældning findes ved først at differentiere funktionen og derefter indsætte x-værdien:

$f'(x) = 3x^2 - 8x - 11$

$f'(3) = 3\cdot 3^2 - 8\cdot 3 - 11 = -8$

Hermed kan ligningen bestemmes ved at indsætte i udtrykket for en ret linje:

$y - y_0 = a\cdot(x - x_0)$

$y - (-12) = -8\cdot(x - 3) \quad \Leftrightarrow \quad y = -8x + 24 - 12 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = -8x + 12}}$

b) Monotoniforholdene findes ved først at bestemme nulpunkter for den afledede funktion:

På TI n'spire defineres funktionen, dens afledede funktion bestemmes, der findes nulpunkter for denne og endelig findes funktionsværdier for den afledede funktion i de intervaller, der dannes af nulpunkterne:

$f(x):=x^3-4\cdot x^2-11\cdot x+30$	*Udført*
$f1(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$	*Udført*
$\text{solve}(f1(x)=0,x)$	$x=-1$ or $x=\frac{11}{3}$
$f1(-2)$	17
$f1(0)$	-11
$f1(4)$	5

Dette giver fortegnsskemaet:

X		-1		$\frac{11}{3}$	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	↗		↘		↗

f'(-2) = 17 > 0
f'(0) = -11 < 0
f'(4) = 5 > 0

Dvs. at:

<u>f er voksende i intervallerne]-∞;-1] og</u> $\underline{\underline{\left[\frac{11}{3};\infty\right[}}$ <u>og f er aftagende i intervallet</u> $\underline{\underline{\left[-1;\frac{11}{3}\right]}}$

f har lokalt maksimum i x = -1 og lokalt minimum i $x = \frac{11}{3}$.

8.121: $f(x) = -12x^2 + 8x \qquad P(2,6)$

Ved integration bestemmes den form samtlige stamfunktioner er på:

$$F(x) = \frac{-12}{3}x^3 + \frac{8}{2}x^2 + k = -4x^3 + 4x^2 + k$$

For at finde netop den stamfunktion, hvis graf går gennem P, indsættes punktets koordinater i forskriften, så k-værdien kan bestemmes:

$$6 = -4\cdot 2^3 + 4\cdot 2^2 + k \quad \Leftrightarrow \quad 6 = -32 + 16 + k \quad \Leftrightarrow \quad k = 22$$

Dermed er forskriften for den søgte stamfunktion:

$$\underline{\underline{F(x) = -4x^3 + 4x^2 + 22}}$$

8.122: a) Området består af et rektangel med sidelængderne $2x$ og y og en trekant med grundlinje $2x$ og højden x, så arealet af området bliver:

$$A = A_{rektangel} + A_{trekant} = 2x\cdot y + \frac{1}{2}\cdot 2x\cdot x = \underline{\underline{2xy + x^2}}$$

For at bestemme omkredsen, skal man kende længderne af sidestykkerne BC og CD. Da trekant BCD er ligebenet, deler højden trekanten i to kongruente retvinklede trekanter, hvor begge kateter har længden x, så Pythagoras giver:

$$|BC| = |CD| = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}\cdot x$$

Så omkredsen bliver:

$$O = |AB| + |BC| + |CD| + |DE| + |EF| = y + \sqrt{2}\cdot x + \sqrt{2}\cdot x + y + 2x = \underline{\underline{2y + 2\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot x}}$$

b) Når arealet af området er 12, har man:

$$12 = 2xy + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 12 - x^2 = 2xy \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{12 - x^2}{2x}$$

Så bliver omkredsen:

$$O = 2\cdot\frac{12 - x^2}{2x} + 2\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot x = \frac{12}{x} - x + 2x + 2\sqrt{2}\cdot x = \underline{\underline{\frac{12}{x} + \left(1+2\sqrt{2}\right)\cdot x}}$$

8.123: $f(x) = -x^2 + 4x \qquad 0 < x < 4:\ O(0,0) \qquad P\left(x, f(x)\right) \qquad Q(x,0) \qquad \Delta OPQ$ er retvinklet

a) Da punktet P ligger på grafen, kan man hele tiden bestemme y-koordinaten for P ved at indsætte i funktionsforskriften.

Så når $x = 1$ har man $f(1) = -1^2 + 4\cdot 1 = -1 + 4 = 3 \qquad dvs. \quad P(1,3)$

Da trekanten er retvinklet, fungerer de to kateter som højde og grundlinje, så arealet af trekanten er:

$$T = \frac{1}{2}\cdot|OQ|\cdot|PQ| = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3 = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

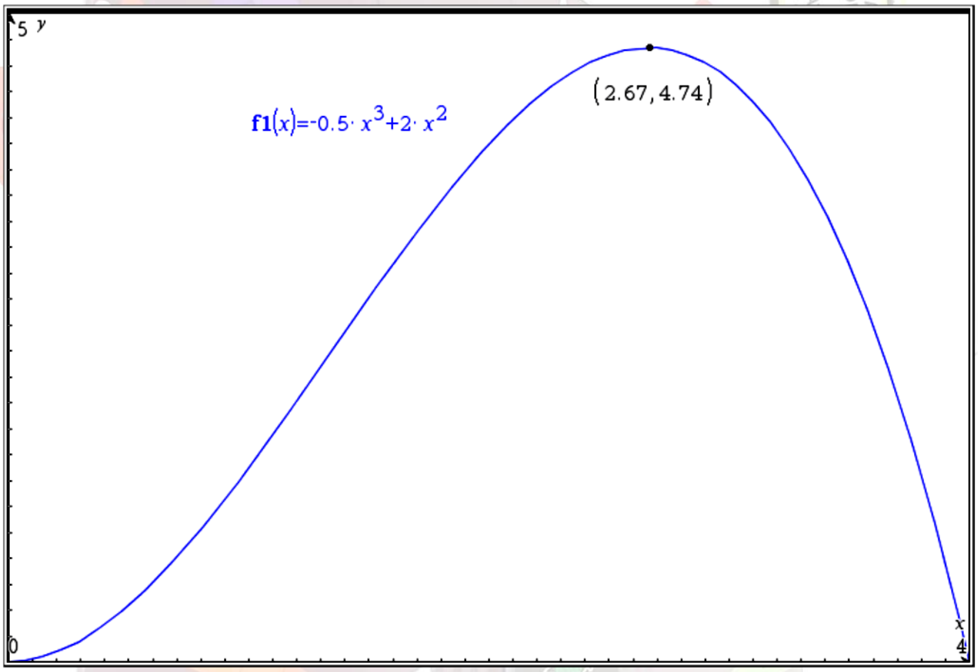
Arealet som funktion af x findes på samme måde, hvor man bare regner med x i stedet for konkrete værdier:

$$T(x) = \frac{1}{2}\cdot|OQ|\cdot|PQ| = \frac{1}{2}\cdot x\cdot f(x) = \frac{1}{2}\cdot x\cdot\left(-x^2 + 4x\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\cdot x^3 + 2\cdot x^2}}$$

b) For at finde den værdi af x, der giver det største areal, kan man enten tegne en graf og undersøge den på lommeregneren, eller man kan lave funktionsanalyse.

Grafisk metode:

Grafen tegnes på TI n'spire under grafer. Da x-værdierne skal ligge mellem 0 og 4 tilpasses vinduet til dette, og ved hjælp af 'Undersøg grafer'→'Maksimum', hvor grænserne placeres på hver sin side af det sted, hvor man kan se, at maksimum befinder sig, finder man det sted, hvor funktionen har maksimum:



Dvs. at arealet af trekant OPQ bliver størst muligt, når $\underline{\underline{x = 2,67}}$

Funktionsanalyse:

Nulpunkter for den afledede funktion bestemmes:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\cdot 3\cdot x^2 + 4\cdot x = -\frac{3}{2}x^2 + 4x$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3}{2}x^2 + 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\cdot\left(-\frac{3}{2}x + 4\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \vee -\frac{3}{2}x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad \frac{3}{2}x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{8}{3}$$

Løsningen $x = 0$ kan ikke være et maksimumssted, da arealet her er 0.

For at undersøge, om den anden løsning svarer til et maksimumssted, ses på fortegnet for den afledede funktion på hver side af stedet:

$$f'(2) = -\frac{3}{2}\cdot 2^2 + 4\cdot 2 = -6 + 8 = 2 > 0$$

$$f'(3) = -\frac{3}{2}\cdot 3^2 + 4\cdot 3 = -\frac{27}{2} + 12 = -\frac{3}{2} < 0$$

Da den afledede funktion er positiv til venstre fra stedet og funktionen dermed voksende her, og da den afledede funktion er negativ til højre for stedet og funktionen dermed aftagende her, er stedet et maksimumssted, dvs. arealet af trekant OPQ bliver størst muligt, når $\underline{\underline{x = \frac{8}{3}}}$

December 2009: Delprøven uden hjælpemidler

8.124: $A(3,7)$ $B(9,25)$ $f(x)$ er en lineær funktion, der går gennem de to punkter.

For at angive forskriften skal man kende hældningen og skæringen med y-aksen.
Først bestemmes hældningen:

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{25-7}{9-3}=\frac{18}{6}=3$$

Funktionsudtrykket for en lineær funktion er $f(x)=ax+b$, så ved indsættelse af koordinatsættet til et af punkterne (her A) fås:

$$7=3\cdot 3+b \quad\Leftrightarrow\quad b=-2$$

Dvs. forskriften er: $\underline{\underline{f(x)=3x-2}}$

8.125: $f(x)=x^7$

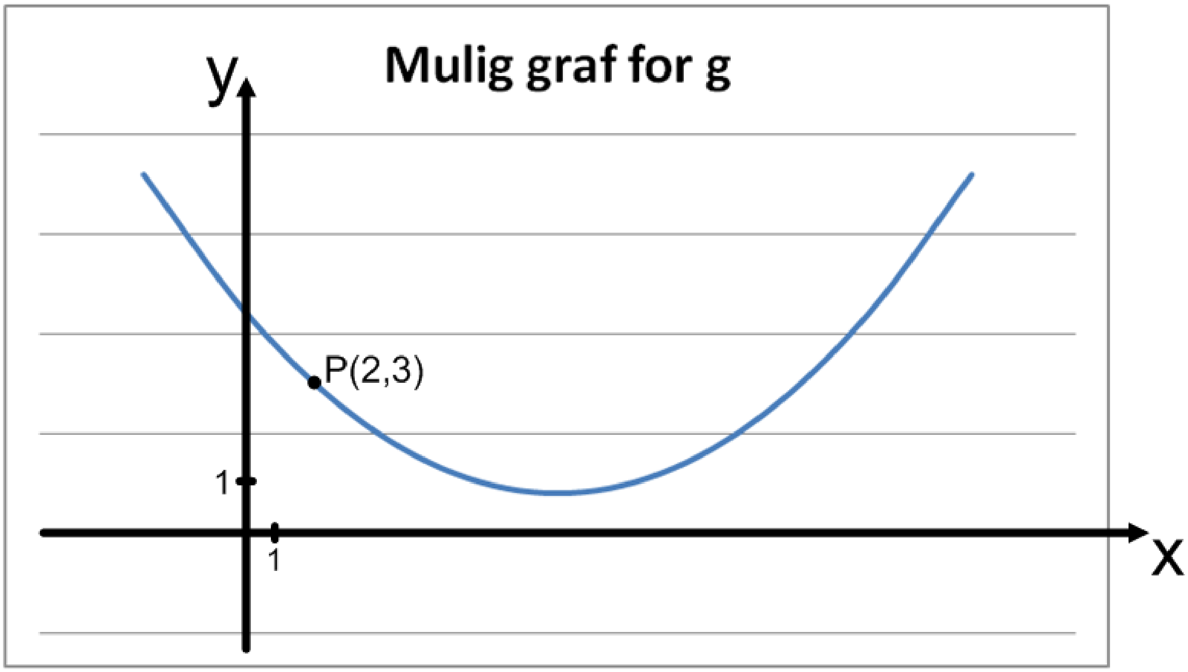
Det er en potensfunktion, og den afledede funktion bliver altså:

$$f'(x)=7\cdot x^{7-1}=\underline{\underline{7\cdot x^6}}$$

8.126: $f(x)=x^2-5x+4$

Diskriminanten beregnes: $d=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 4=25-16=\underline{\underline{9}}$

Når diskriminanten er negativ, vil g's graf (der er et polynomium) ikke have nogen skæringspunkter med x-aksen, og da grafen går gennem $P(2,3)$, som ligger over x-aksen, skal hele parablen ligge over x-aksen, dvs. benene skal vende opad:



<u>8.127:</u> $f(x) = -6x^2 + 6x$

Det bestemte integral bestemmes ved hjælp af en stamfunktion:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(-6x^2 + 6x\right)dx = \left[-\frac{6}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2\right]_0^1 = -2\cdot 1^3 + 3\cdot 1^2 - \left(-2\cdot 0^3 + 3\cdot 0^2\right) = -2 + 3 = \underline{\underline{1}}$$

En geometrisk fortolkning af resultatet har som udgangspunkt noget med arealer at gøre. Men det er kun, hvis grafen for *f* ligger over x-aksen i det pågældende interval, at det bestemte integral direkte svarer til et areal. Derfor skal det nu undersøges, hvordan grafen ligger i forhold til akserne:
Grafen for *f* er en parabel, der vender benene nedad.
Nu undersøges det, om – og i så fald hvor – grafen skærer x-aksen:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$-6x^2 + 6x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$-x^2 + x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x(-x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

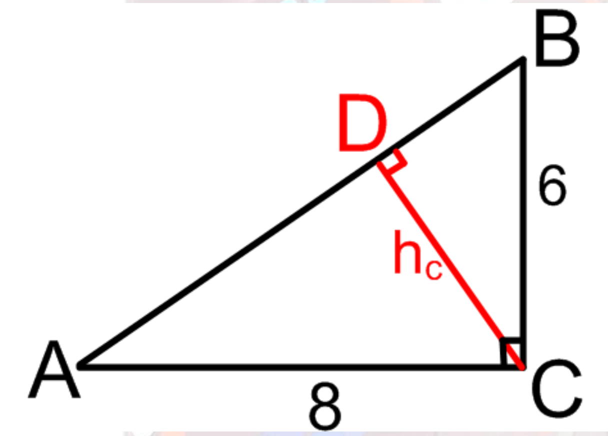
$$x = 0 \vee x = 1$$

Dvs. grafen skærer x-aksen i x=0 og x=1, og da benene vender nedad, vil grafen derfor i intervallet [0,1] ligge på eller over x-aksen. Dermed svarer det udregnede bestemte integral til arealet af den punktmængde, der afgrænses af grafen for *f* og x-aksen (i 1. kvadrant).
Dvs. <u>arealet af det område, der i 1. kvadrant afgrænses af grafen for *f* og x-aksen er 1</u>

<u>8.128:</u> Da ΔABC er retvinklet, kan man bestemme længden af siden AB (hypotenusen) ved hjælp af Pythagoras:

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

$$|AB| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = \underline{\underline{10}}$$



Længden af højden fra C kan bestemmes på flere måder:

<u>Metode 1:</u> Da trekanten er retvinklet, vil højden fra B svare til siden BC, så med AC som grundlinje bliver arealet af trekant ABC:

$$T = \frac{1}{2}\cdot h\cdot g = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8 = 24$$

Man kunne også have benyttet siden AB som grundlinje, når man skulle udregne arealet af trekanten, og da man her skulle have fået samme resultat, har man altså:

$$T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot h_c \cdot |AB|$$

$$24 = \frac{1}{2} \cdot h_c \cdot 10 \iff 24 = 5 \cdot h_c \iff h_c = \underline{\underline{\frac{24}{5}}}$$

Metode 2:

ΔABC og ΔBCD er ensvinklede, da de begge er retvinklede og $\angle A = \angle BCD$. Det sidste ses ved:
Da ΔACD er retvinklet, er $\angle ACD = 90° - \angle A$.
Da $\angle C = 90°$, er $\angle BCD = 90° - \angle ACD = 90° - (90° - \angle A) = \angle A$.
Dvs. de to trekanter har to vinkler (og dermed også den tredje vinkel) ens.

Da trekanterne er ensvinklede, er forholdene mellem ensliggende sider i de to trekanter ens, dvs. man har:

$$\frac{h_c}{|AC|} = \frac{|BC|}{|AB|} \iff h_c = \frac{|BC|}{|AB|} \cdot |AC|$$

$$h_c = \frac{6}{10} \cdot 8 = \frac{48}{10} = \underline{\underline{\frac{24}{5}}}$$

December 2009: Delprøven med hjælpemidler

8.129: $L(x) = 0{,}18 \cdot x + 69$

L(x) er kasterekorden i meter og *x* er antal år efter 1975.
a) År 2005 er 30 år efter 1975, så $x = 30$.
Kasterekorden i år 2005 er derfor ifølge modellen: $L(30) = 0{,}18 \cdot 30 + 69 = 5{,}4 + 69 = 74{,}4$
Dvs. kasterekorden er 74,4*m*
Konstanten 69 svarer til funktionsværdien, når $x = 0$, så kasterekorden i 1975 var 69*m*
Tallet 0,18 er hældningen, der fortæller, at
for hvert år siden 1975 er kasterekorden ifølge modellen øget med 0,18*m*.

8.130: a) Da populationen vokser med en fast procentdel pr. år, er der tale om eksponentiel vækst. En vækstrate på 2,4% svarer til en fremskrivningsfaktor på $a = 1 + r = 1 + 0{,}024 = 1{,}024$.
Da der fra start er 45000 individer, har man:
$N(t) = 45000 \cdot 1{,}024^t$, hvor N er antallet af individer, og *t* er antal år.

b) Da man kender fremskrivningsfaktoren, kan man bestemme fordoblingskonstanten ved:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}024)} = 29{,}2263$$

Dvs. at antallet af individer i populationen fordobles for hver 29 år.

8.131: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 6$
a) Ligningen for tangenten i punktet P(2,f(2)) bestemmes ved på TI n'spire at indtaste:

$f(x):=x^3-3\cdot x^2-9\cdot x+6$	*Udført*
tangentLine(f(x),x,2)	$2-9\cdot x$

Dvs. at tangentens ligning er $y = -9x + 2$

b) På TI n'spire bestemmes den afledede funktion, nulpunkterne for denne samt fortegnede for den i de intervaller, der dannes af nulpunkterne:

$f1(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$	*Udført*
$f1(x)$	$3\cdot x^2-6\cdot x-9$
solve(f1(x)=0,x)	x=-1 or x=3
f1(-2)	15
f1(0)	-9
f1(4)	15

Ud fra dette kan der tegnes et fortegnsskema:

x		-1		3	
f'(x)	+	0	−	0	+
f(x)	↗		↘		↗

f'(-2) = 15 > 0
f'(0) = -9 < 0
f'(4) = 15 > 0

Man har altså at:
f er voksende i intervallerne]-∞;-1] og [3;∞[
f er aftagende i intervallet [-1;3]

8.132: $\Delta ABC: \quad \angle A = 56^\circ \quad |AB| = 10m \quad \angle ABC = 80^\circ$

a) Da man kun kender én sidelængde, kan man ikke bruge cosinusrelationerne.
For at kunne bruge sinusrelationerne, skal man kende et par bestående af en vinkel og dens modstående side, så man har brug for at kende vinkel C. Denne kan bestemmes ud fra vinkelsummen i en trekant: $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 56^\circ - 80^\circ = 44^\circ$
Så kan den søgte længde bestemmes med en sinusrelation:

$$\frac{|BC|}{\sin A} = \frac{|AB|}{\sin C} \quad \Leftrightarrow \quad |BC| = \frac{|AB|}{\sin C} \cdot \sin A$$

$$|BC| = \frac{10m}{\sin 44^\circ} \cdot \sin 56^\circ = \underline{\underline{11,9344645917m}}$$

b) Det er oplyst, at $|AD| = 3m$

I trekant ABD kender man derfor en vinkel (A) og dens to hosliggende siders længder, og dermed kan den sidste sidelængde bestemmes ved en cosinusrelation:

$$|BD|^2 = |AD|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |AD| \cdot |AB| \cdot \cos(A)$$

$$|BD| = \sqrt{(3m)^2 + (10m)^2 - 2 \cdot 3m \cdot 10m \cdot \cos(56^\circ)} = \underline{\underline{8,6861053293m}}$$

8.133: $P(t) = P_0 \cdot a^t$

P er det årlige antal pendlere over Øresund fra Sverige til Danmark, og *t* er tiden målt i år efter 2001.
Da det er forskriften for en eksponentiel udvikling, skal man bruge eksponentiel regression.
a) På TI n'spire indtastes årene i liste A og antal pendlere i liste B.
Under værktøjer vælges 'Statistik', 'Statistiske beregninger' og 'Eksponentiel regression'.
x-liste: a[] ; y-liste: b[] ; GemEgn: f1.

A	B	C	D
			=ExpReg(a[],b[],
0	3751	Titel	Eksponentiel re...
2	5683	RegEqn	a*b^x
4	8783	a	3619.81
6	15742	b	1.26733
		r²	0.993026
		r	0.996507
		Resid	{131.18551153...
		ResidTra...	{0.0355996928...

Dvs. $\underline{\underline{P_0 = 3620 \ og \ a = 1,26733}}$

b) *a* er fremskrivningsfaktoren, og den fortæller, at antallet af pendlere er vokset med 26,7% om året.
År 2010 svarer til *t* = 9, så antallet af pendlere kan bestemmes ved:

f1(9)	30528.

Dvs. at i 2010 vil antallet af pendlere fra Sverige til Danmark over Øresund være 30528

8.134: a) Først bestemmes frekvenserne, og derefter de kumulerede frekvenser:

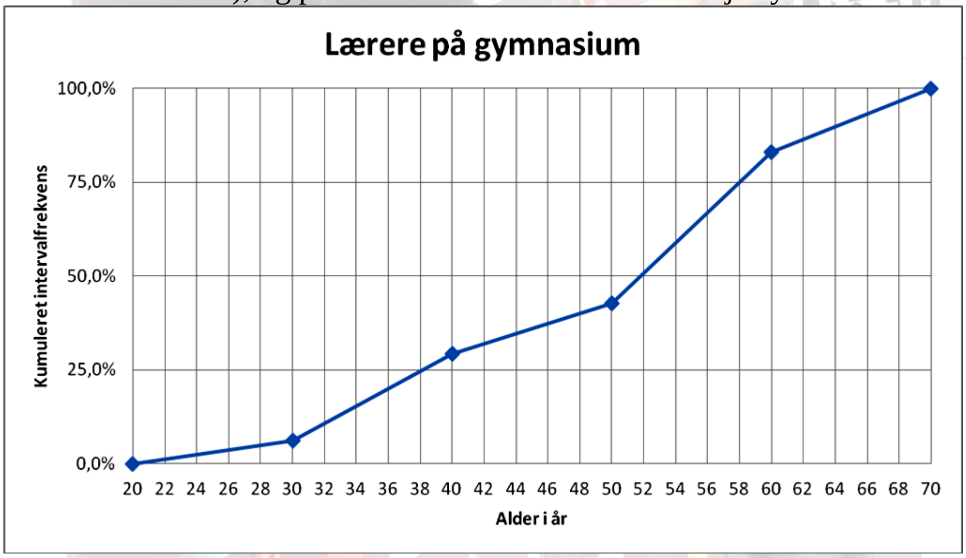
Alder	Antal	Intervalfrekvens	Kum. Intervalfrekvens
20-30	5	6,1%	6,1%
30-40	19	23,2%	29,3%
40-50	11	13,4%	42,7%
50-60	33	40,2%	82,9%
60-70	14	17,1%	100,0%

Eksempel på udregninger:
Intervallet 40-50 cigaretter:

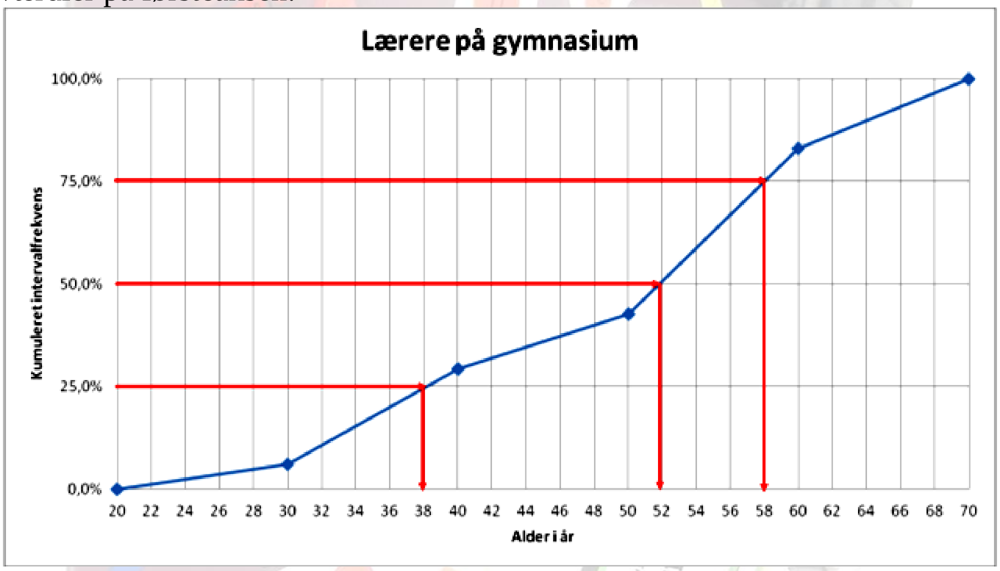
$$\text{intervalfrekvens} = \frac{\text{antal}}{82} = \frac{11}{82} = 0{,}134 = 13{,}4\%$$

$$\text{Kum. intervalfrekvens} = 6{,}1\% + 23{,}2\% + 13{,}4\% = 42{,}7\%$$

Sumkurven tegnes ved at afbillede de kumulerede intervalfrekvenser op ad 2. aksen og intervallernes højre intervalendepunkt ud af x-aksen. Desuden indsættes 20 som startpunkt (kum. Intervalfrekvens 0), og punkterne forbindes med rette linjestykker:



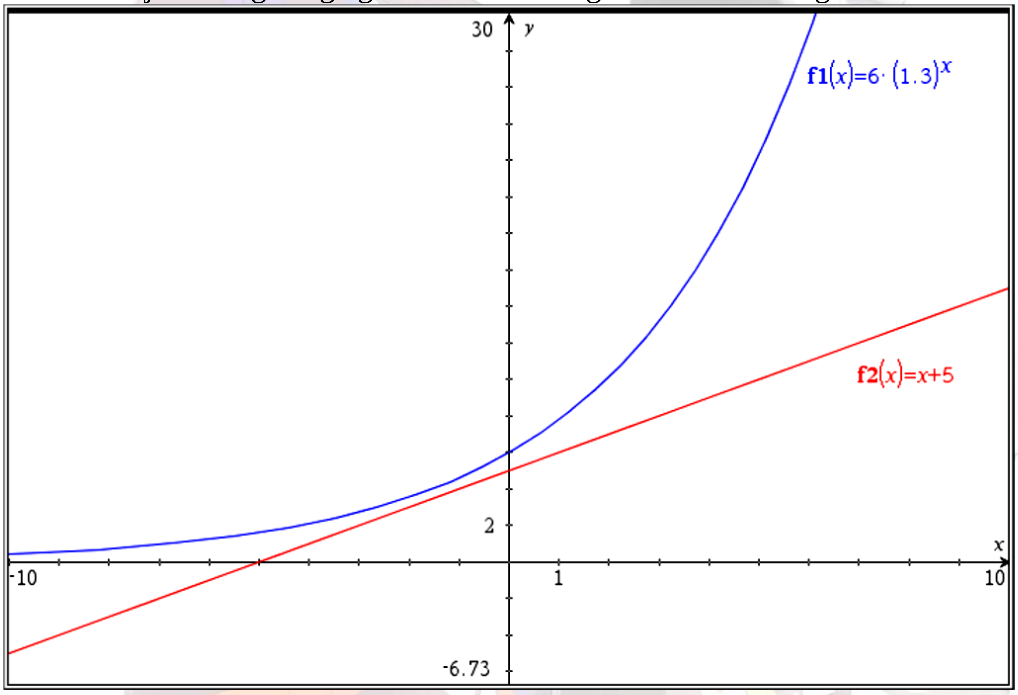
Kvartilsættet aflæses ved at gå vandret ind fra 25%, 50% og 75% og aflæse de tilsvarende værdier på førsteaksen:



Kvartilsættet er altså (38år , 52år , 58år)

<u>8.135:</u> $f(x) = 6 \cdot 1{,}3^x \quad g(x) = x + k \quad 0 \le k \le 5$

a) Det er vist på figuren, at grafen for *f* ligger over grafen for *g*.
Men dette tjekkes også lige grafisk ved at vælge den størst mulige k-værdi:



Der er ingen skæring, så man kan arbejde videre med, at grafen for f ligger over g's:

Det er angivet, at punktmængden M afgrænses af de lodrette linjer med ligningerne x=0 og x=3.
Følgende indtastes på TI n'spire:

$f(x):=6\cdot(1.3)^x$	*Udført*
$g(x):=x+k$	*Udført*
$\int_0^3 \left(f(x)-(x+1)\right)dx$	19.8741548399
$\text{solve}\left(\int_0^3 \left(f(x)-g(x)\right)dx=14,k\right)$	$k=2.95805161332$

Man har altså:

$\underline{\underline{A_M = 19{,}874155}}$

b) Den viste udregning med 'solve' fortæller desuden, at $\underline{\underline{k = 2{,}9580516}}$, hvis arealet af M skal være 14.

<u>8.136:</u> $f(x) = 5,69 \cdot (x - 67,2)^{0,5} \quad ; \quad 67,2 < x < 1050$

f er produktionshastigheden målt i kg pr. time. x er energiforbruget målt i MJ pr. time.

a) På n'spire defineres funktionen, og efterfølgende bestemmes produktionshastigheden ved et energiforbrug på 420 MJ pr. time samt energiforbruget, når produktionshastigheden er 130 kg pr. time:

$f(x):=5.69\cdot(x-67.2)^{0.5}$	*Udført*
$f(420)$	106.875105053
$\text{solve}(f(x)=130,x)$	$x=589.189986441$

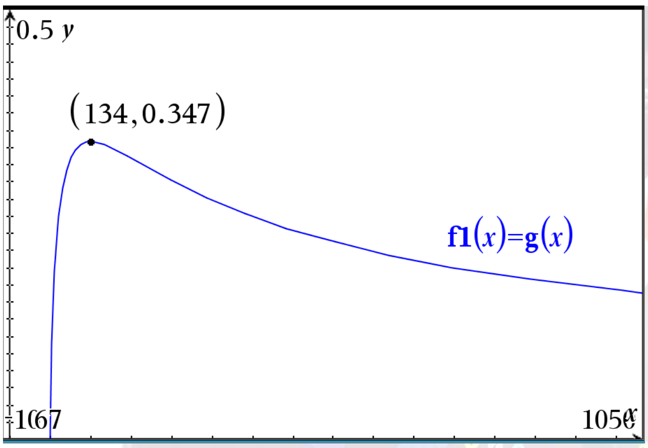
Dvs. at <u>produktionshastigheden er 106,9 kg. pr. time</u>, når energiforbruget er 420 MJ pr. time.

Når produktionshastigheden er 130 kg pr. time er <u>energiforbruget 589MJ pr. time.</u>

b) $g(x) = \dfrac{f(x)}{x} \quad ; \quad 67,2 < x < 1050$, hvor g er produktionseffektiviteten.

Da funktionen f allerede er defineret, kan man definere g og skitsere grafen i n'spire:

$g(x):=\dfrac{f(x)}{x}$ *Udført*



Maksimum er bestemt grafisk ved 'Undersøg grafer' og 'Maksimum'.

Man kan også gøre det ved at finde det sted, hvor den afledede funktion er 0:

$\text{solve}\left(\dfrac{d}{dx}(g(x))=0,x\right)$	$x=134.4$

På grafen ses det, at det er et maksimum, så produktionseffektiviteten er højst, når <u>energiforbruget er 134,4 MJ pr. time.</u>

Maj 2010: Delprøven uden hjælpemidler

8.137: For at reducere første led anvendes første kvadratsætning, og man får så:

$$(a+b)^2-2ab-a^2=a^2+b^2+2ab-2ab-a^2=\underline{\underline{b^2}}$$

8.138: Rektanglet er delt i to trekanter med den røde diagonal, og den dannede trekant ACD er retvinklet, da vinkel D er en del af rektanglet (hvor alle vinkler er rette - jvf. navnet).
Dermed kan Pythagoras anvendes til at bestemme længden af AC:

$$|AC|^2=|AD|^2+|CD|^2$$

$$|AC|=\sqrt{10^2+7^2}=\sqrt{100+49}=\underline{\underline{\sqrt{149}}}$$

Denne kvadratrod er et irrationelt tal og kan ikke (så nemt) udregnes i hovedet.

8.139: Det er grafen for en funktion af typen $f(x)=ax+b$, og det er oplyst, at den går gennem $P(2,5)$ og $Q(4,11)$.
Punkternes koordinater indsættes i forskriften:

$$\left.\begin{matrix}11=a\cdot4+b\\5=a\cdot2+b\end{matrix}\right\}\Rightarrow 11-5=(a\cdot4+b)-(a\cdot2+b)\quad\Leftrightarrow\quad 6=4a-2a\quad\Leftrightarrow\quad 2a=6\quad\Leftrightarrow\quad\underline{\underline{a=3}}$$

Denne værdi indsættes i den nederste ligning for at bestemme b-værdien:

$$5=3\cdot2+b\quad\Leftrightarrow\quad b=5-6=\underline{\underline{-1}}$$

8.140: $2x^2-6x+4=0$
Denne andengradsligning løses på 2 forskellige måder.

Metode 1 (forkorte, faktorisere og udnytte nulreglen):

$$2x^2-6x+4=0\ \Leftrightarrow\ x^2-3x+2=0\ \Leftrightarrow\ (x-2)\cdot(x-1)=0\ \Leftrightarrow\ \underline{\underline{x=1\ \vee\ x=2}}$$

Metode 2 (Diskriminantmetoden):
Diskriminanten bestemmes:

$d=b^2-4ac=(-6)^2-4\cdot2\cdot4=36-32=4>0$ dvs. 2 løsninger

Løsningerne bestemmes:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{d}}{2a}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{4}}{2\cdot2}=\frac{6\pm2}{4}=\begin{cases}2\\\underline{\underline{1}}\end{cases}$$

8.141: $f(x)=-x^2+3x$
Det ser ud til, at grafen skærer x-aksen i x = 0 og x = 3, og dette kan tjekkes ved indsættelse:

$$f(0)=-0^2+3\cdot0=0$$

$$f(3)=-3^2+3\cdot3=-9+9=0$$

Den nedre grænse er altså 0 og den øvre 3. Da punktmængden er placeret over x-aksen, kan arealet af den bestemmes ved:

$$A_M=\int_0^3\left(-x^2+3x\right)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\left(-\frac{1}{3}\cdot3^3+\frac{3}{2}\cdot3^2\right)-\left(-\frac{1}{3}\cdot0^3+\frac{3}{2}\cdot0^2\right)=-9+\frac{27}{2}=\underline{\underline{\frac{9}{2}}}$$

<u>*8.142:*</u> Da hegnet er 20m, har man $x + y + x = 20 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = 20 - 2x}}$

Arealet af løbegården er givet ved:

$$A(x) = x \cdot y = x \cdot (20 - 2x) = -2x^2 + 20x$$

Grafen for A(x) er en parabel med benene nedad. Den største værdi for arealet findes altså det sted, hvor parablen har toppunkt. Det er kun toppunktets førstekoordinat, der skal bruges, da der kun spørges efter x-værdien (og ikke selve værdien af det største areal):

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-20}{2 \cdot (-2)} = \frac{-20}{-4} = \underline{\underline{5}}$$

Maj 2010: Delprøven med hjælpemidler

8.143: $f(x)=4x+5 \quad g(x)=-2x+12$

a) Det er tilladt at anvende hjælpemidler i denne opgave, men første spørgsmål løses nok nemmest i hånden ved at indsætte 5 på *x*'s plads i funktionsforskriften for *f*:

$$f(5)=4\cdot5+5=20+5=\underline{\underline{25}}$$

Ligningen $g(x)=16$ kan godt løses med 'solve', men den kan også løses i hånden:

$$g(x)=16 \Leftrightarrow$$

$$-2x+12=16 \Leftrightarrow -2x=4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{-2}=\underline{\underline{-2}}$$

b) Graferne for de to funktioner er rette linjer. Skæringspunktet svarer til det punkt, der ligger på begge grafer, dvs. et sted (*x*-værdi), hvor funktionerne har samme funktionsværdi (*y*-værdi).
Da funktionsværdierne skal være ens, har man altså:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow$$

$$4x+5=-2x+12 \Leftrightarrow 6x=7 \Leftrightarrow x=\frac{7}{6}$$

Dette er altså skæringspunktets førstekoordinat, og ved at indsætte i et af udtrykkene, kan man finde andenkoordinaten. Der indsættes i *f*:

$$f\left(\frac{7}{6}\right)=4\cdot\frac{7}{6}+5=2\cdot\frac{7}{3}+5=\frac{14}{3}+5=\frac{14}{3}+\frac{15}{3}=\frac{29}{3}$$

Dvs. at koordinatsættet til skæringspunktet er: $\underline{\underline{(x,y)=\left(\frac{7}{6};\frac{29}{3}\right)}}$

Man kunne også have bestemt dette på n'spire ved:

solve$(y=4\cdot x+5$ and $y=-2\cdot x+12,x,y)$ $\qquad x=\frac{7}{6}$ and $y=\frac{29}{3}$

8.144: $f(x)=0{,}023\cdot x^{2{,}777}$ *x* er længden målt i mm *f(x)* er vægten målt i mg

a) Vægten af en 30mm lang hundestejle beregnes ved at indsætte i funktionsforskriften:

$$f(30)=0{,}023\cdot 30^{2{,}777}=290{,}866403084$$

Dvs. en 30mm lang hundestejle vejer 291mg

b) Når hundestejlen vejer 1000mg har man:

$$1000=0{,}023\cdot x^{2{,}777}$$

Denne ligning løses på TI n'spire ved indtastningen:

solve$(1000=0.023\cdot x^{2.777},x)$
$x=46.7999778811$

Dvs. at en hundestejle, der vejer 1000mg, ifølge modellen er 46,8mm lang

8.145:

a) Det er oplyst, at sammenhængen har formen $f(x) = b \cdot a^x$, dvs. det er en eksponentiel udvikling, og da man har mere end to sæt sammenhørende værdier, skal der altså laves eksponentiel regression:
På TI-nspire vælges "Tilføj lister og regneark", antal år efter 2005 indtastes i søjle A, mens antallet af årligt transporterede svin ud af Danmark målt i millioner indtastes i søjle B.
Der trykkes på 'menu'-knappen, hvor der vælges 'statistik'→'Stat-beregning'→ 'Eksponentiel regression':
X-liste: a[]
Y-liste: b[]
Gem RegEqn i: f1
Lommeregneren anvender forskriften $f_1(x) = a \cdot b^x$ og giver a = 3,36528 og b = 1,23538, dvs. den har byttet om på a og b, og den søgte forskrift er dermed:

$$\underline{\underline{f(x) = 3,4 \cdot 1,235^x}}$$

b) Når x = 0, er året 2005, og f(0)=3,4 (svarende til b-værdien), dvs. tallet 3,4 fortæller, at ifølge modellen blev der i 2005 transporteret 3,4 millioner svin ud af Danmark.
Fremskrivningsfaktoren (a-værdien) er 1,235 svarende til en vækstrate på 23,5%. Dvs. at tallet 1,235 fortæller, at der hvert år ifølge modellen transporteres 23,5% flere svin ud af Danmark.

8.146: I trekant ABC er $a = 8$; $b = 20$; $c = 16$

a) Da man kender alle sidelængder, kan en hvilken som helst vinkel bestemmes med en cosinusrelation:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

$$A = \cos^{-1}\left(\frac{20^2 + 16^2 - 8^2}{2 \cdot 20 \cdot 16}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{37}{40}\right) = \underline{\underline{22,3316450092°}}$$

b) Arealet kan nu bestemmes med ½-appelsinformlen med udgangspunkt i vinkel A:

$$T = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 16 \cdot \sin(22,3316450092°) = \underline{\underline{60,7947366143}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

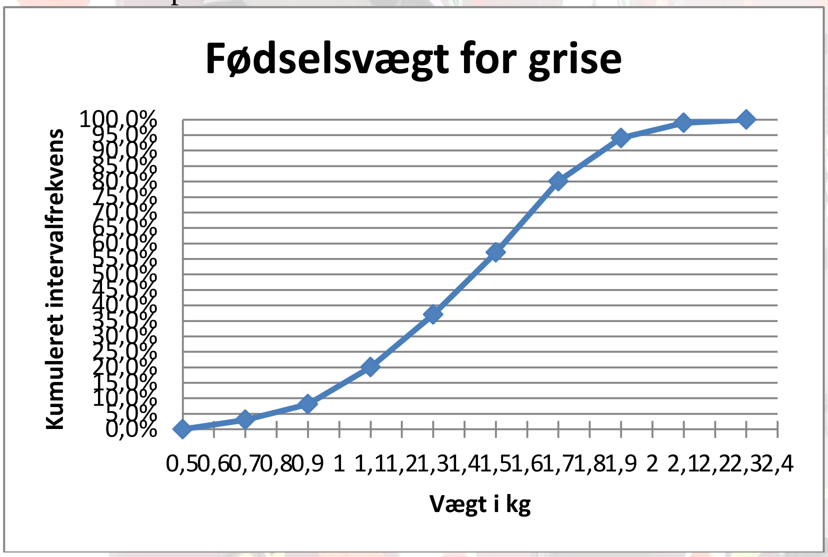
8.147: Det er den kumulerede intervalfrekvens, der skal afsættes på en sumkurve, så først bestemmes intervalfrekvenserne ved at dividere hyppighederne med observationssættets størrelse, og derefter kumuleres disse:

Vægt i kg	0,5-0,7	0,7-0,9	0,9-1,1	1,1-1,3	1,3-1,5	1,5-1,7	1,7-1,9	1,9-2,1	2,1-2,3
Antal grise	26	43	102	145	171	196	119	42	9
Int. frekv.	3%	5%	12%	17%	20%	23%	14%	5%	1%
Kum. int. fr	3%	8%	20%	37%	57%	80%	94%	99%	100%

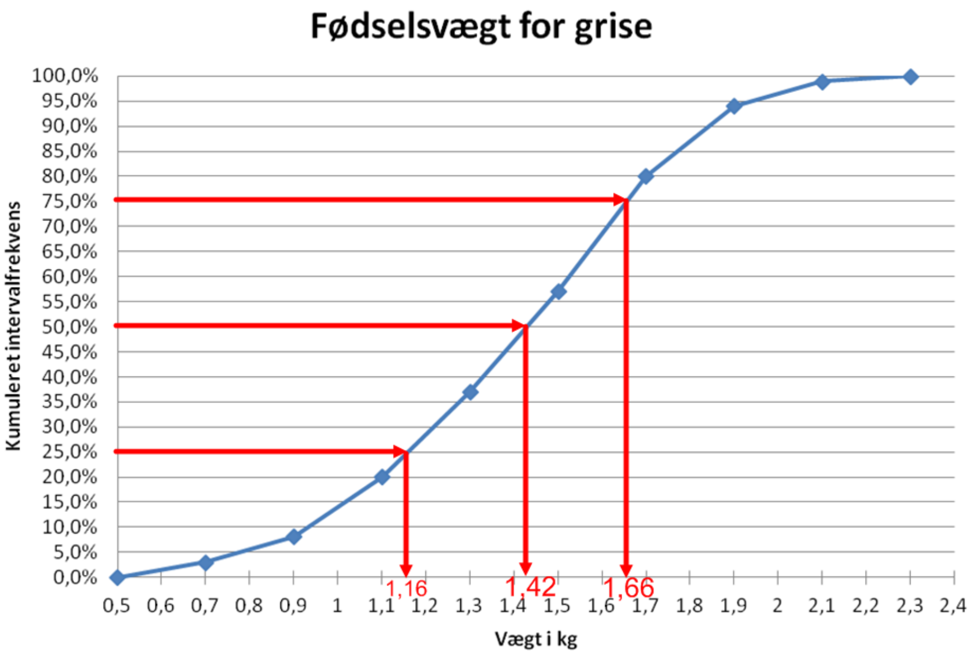
Regneeksempler (vægt 0,9 - 1,1 kg): Intervalfrekvens: $i.f = \frac{102}{853} = 0{,}12 = 12\%$

Kumuleret intervalfrekvens: $k.i.f = 3\% + 5\% + 12\% = 20\%$

Så kan sumkurven tegnes, hvor de kumulerede intervalfrekvenser er afsat ud fra intervallernes HØJRE endepunkt.



Kvartilsættet bestemmes ved at aflæse værdierne på 1. aksen svarende til 25%, 50% og 75%.



Dvs. kvartilsættet er: (1,16kg ; 1,42kg ; 1,66kg)

8.148: $f(x) = x^3 - 4,5x^2 - 30x + 30$

a) Funktionens nulpunkter er de steder, hvor f(x)=0, dvs. man skal løse ligningen

$0 = x^3 - 4,5x^2 - 30x + 30$

Dette gøres på TI n'spire ved indtastningen: solve($0 = x^3 - 4,5x^2 - 30x + 30$,x), der giver

x=−4.2412199541631 or x=0.90235464068561 or x=7.8388653134775

Dvs. nulpunkterne for funktionen er $\underline{\underline{x = -4,24 \vee x = 0,90 \vee x = 7,84}}$

b) Den afledede funktion bestemmes ved at differentiere ledvist:

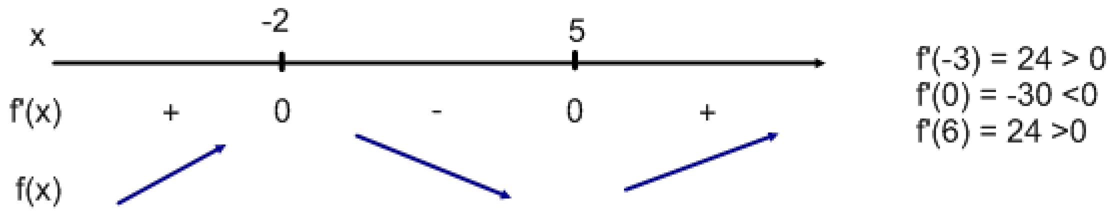
$f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} - 4,5 \cdot 2 \cdot x^{2-1} - 30 \cdot 1 \cdot x^{1-1} + 0 = \underline{\underline{3x^2 - 9x - 30}}$

For at bestemme monotoniforholdene, skal man først finde nulpunkter for den afledede funktion og derefter lave et fortegnsskema:

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 9x - 30 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x - 10 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$(x-5)\cdot(x+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = -2 \vee x = 5}$

Fortegnene for den afledede funktion i de tre intervaller afgrænset af nulpunkterne bestemmes ved at vælge en x-værdi i hvert af intervallerne:



Altså har man:

$\underline{\text{f er voksende i intervallet }]-\infty;-2]}$

$\underline{\text{f er aftagende i intervallet [-2;5]}}$

$\underline{\text{f er voksende i intervallet }[5;\infty[}$

$\underline{\text{f har lokalt maksimum i x = -2}}$

$\underline{\text{f har lokalt minimum i x = 5}}$

8.149: $f(x) = \frac{5}{x} + 6x^2 \quad ; \quad x > 0 \quad ; \quad P(2,3)$

Der integreres ledvist, og samtlige stamfunktioner er altså på formen:

$F(x) = 5 \cdot \ln|x| + 2x^3 + k = 5 \cdot \ln(x) + 2x^3 + k$ (numerisktegnet kan fjernes, da x > 0)

Da grafen for stamfunktionen skal gå gennem P, indsættes P's koordinater i funktionsudtrykket for stamfunktionerne, så man kan bestemme den søge værdi af konstanten k:

$3 = 5 \cdot \ln(2) + 2 \cdot 2^3 + k \quad \Leftrightarrow \quad k = -13 - 5 \cdot \ln(2) = -16,4657359$

Dvs. at den søgte stamfunktion er:

$\underline{\underline{F(x) = 5 \cdot \ln(x) + 2x^3 - 16,4657359}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

8.150: $f(x) = -0,02388x^2 + 0,8693x + 2 \quad A(10,0) \quad B(25,0) \quad C(25,8) \quad D(10,8)$

a) Det afgørende for, om bolden kommer over bygningen, er, om den kommer over punkterne C og D. Dette afgøres ved at se, om funktionsværdien disse steder er over 2. koordinaterne for C og D:

$f(10) = -0,02388 \cdot 10^2 + 0,8693 \cdot 10 + 2 = 8,305 > 8$

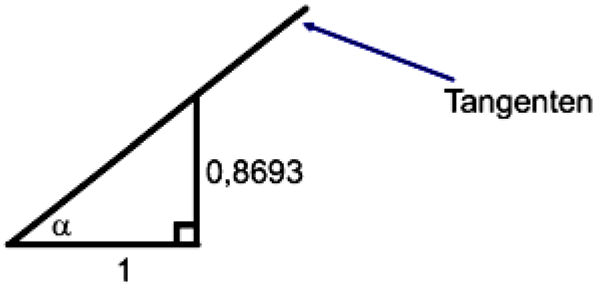
$f(25) = -0,02388 \cdot 25^2 + 0,8693 \cdot 25 + 2 = 8,8075 > 8$

Dvs. at bolden kommer over bygningen

b) For at kunne bestemme vinklen skal man kende tangentens hældning.
Tangentens ligning bestemmes på TI n'spire ved:

```
tangentLine(-0.02388·x^2+0.8693·x+2,x,0)
                                     0.8693·x+2.
```

Tangentens hældning er altså 0,8693.
Dvs. at hvis man går ét skridt ud ad x-aksen, går man 0,8693 op ad y-aksen:



Ud fra den retvinklede trekant kan vinklen hermed bestemmes ved:

$$\tan(\alpha) = \frac{0,8693}{1} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}(0,8693) = \underline{\underline{41,00°}}$$ (hvilket er en yderst fornuftig kastevinkel)

Juni 2010: Delprøven uden hjælpemidler

8.151: $3\cdot(2x+1)=4x+9 \Leftrightarrow 6x+3=4x+9 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=3}}$

8.152: $f(x)=7x+b$, hvor b er et tal. $P(3,31)$.
Punktets koordinater indsættes i forskriften for at finde *b*-værdien:
$31=7\cdot 3+b \quad \Leftrightarrow \quad b=31-21=\underline{\underline{10}}$

8.153: Da de to trekanter er ensvinklede (ligedannede), er forholdet mellem ensliggende sider det samme for alle par, dvs. man har:

$$\frac{|DE|}{|AB|}=\frac{|DF|}{|AC|} \quad \Leftrightarrow \quad |DE|=\frac{|DF|}{|AC|}\cdot|AB|$$

$$|DE|=\frac{20}{5}\cdot 3=4\cdot 3=\underline{\underline{12}}$$

8.154: $f(x)=15x+75$ $\quad$ *f (x)* er prisen i kroner for at transportere varer *x* km.
Hvis en vare skal transporteres 10 km er x = 10, dvs:
$f(10)=15\cdot 10+75=150+75=225$
Dvs. at <u>prisen for en 10 km transport er 225 kr.</u>

De 75 er begyndelsesværdien, dvs<u>. i dette tilfælde koster det 75 kr i startgebyr</u>

De 15 er hældningen, dvs. <u>det koster 15 kr. ekstra for hver km varen skal fragtes.</u>

8.155: P(1,6) og Q(3,24). Det er oplyst, at det er en eksponentielt voksende funktion, så punkternes koordinater indsættes i forskriften $f(x)=b\cdot a^x$:

$$\left.\begin{aligned} 24&=b\cdot a^3 \\ 6&=b\cdot a^1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{24}{6}=\frac{b\cdot a^3}{b\cdot a^1} \quad \Leftrightarrow \quad 4=\frac{a^3}{a^1} \quad \Leftrightarrow \quad 4=a^{3-1} \quad \Leftrightarrow \quad 4=a^2 \quad \Leftrightarrow \quad a=\sqrt{4}=\underline{\underline{2}}$$

Ved sidste biimplikation er det udnyttet, at a-værdien er positiv for eksponentielle udviklinger, for ellers ville -2 også have været en mulighed.
Denne værdi indsættes i den nederste af de to ligninger for at finde b-værdien:

$$6=b\cdot 2^1 \quad \Leftrightarrow \quad b=\frac{6}{2}=\underline{\underline{3}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

8.156: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

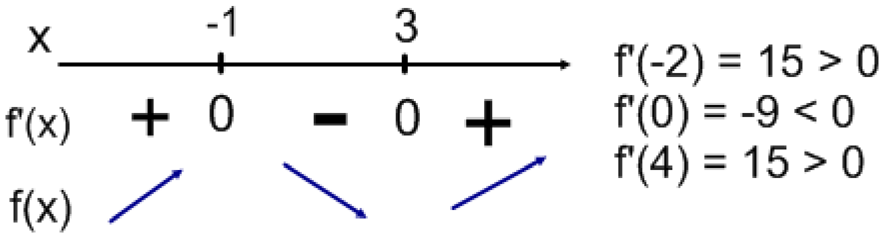
Den afledede funktion bestemmes ved ledvis differentiation:

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

Nulpunkter for den afledede funktion bestemmes:

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 3x^2 - 6x - 9 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - 2x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = (x-3)\cdot(x+1) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = -1 \vee x = 3}}$

Monotoniforholdene bestemmes ved et lave et fortegnsskema:



Man har altså at:

f er voksende i intervallerne]-∞;-1] og [3;∞[

f er aftagende i intervallet [-1;3]

Det ses også, at f har lokalt maksimum i x = -1 og lokalt minimum i x = 3.

Juni 2010: Delprøven med hjælpemidler

8.157: $f(x) = x^2 - 7x + 16 \qquad g(x) = x + 1$

a) Ved indsættelse i funktionsforskriften fås: $f(8) = 8^2 - 7 \cdot 8 + 16 = 64 - 56 + 16 = \underline{\underline{24}}$

b) For at bestemme koordinatsættet til parablens toppunkt, bestemmes først værdien af diskriminanten:

$d = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 49 - 64 = -15$

Så bliver toppunktet: $T\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-d}{4a}\right) = T\left(\frac{-(-7)}{2 \cdot 1}; \frac{-(-15)}{4 \cdot 1}\right) = \underline{\underline{T\left(\frac{7}{2}; \frac{15}{4}\right)}}$

c) Da funktionsforskrifterne er kendt, kan man løse ligningen ved:

$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow$

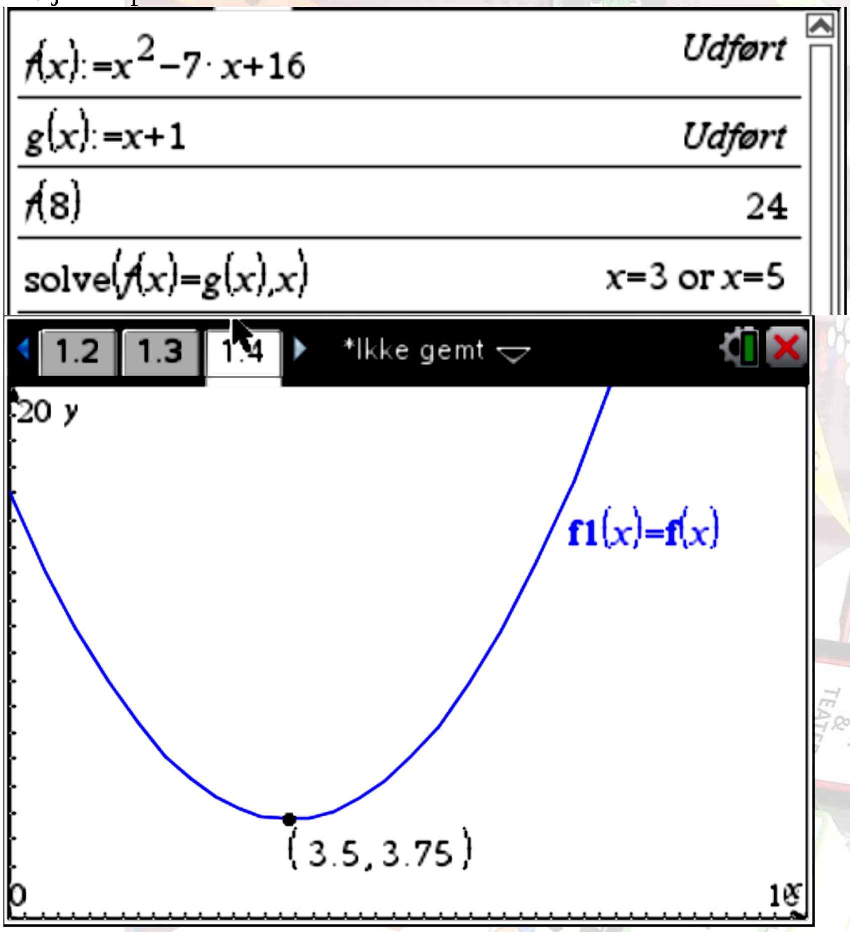
$x^2 - 7x + 16 = x + 1 \quad \Leftrightarrow$

$x^2 - 8x + 15 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$(x-3) \cdot (x-5) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 3 \vee x = 5}}$

I næst sidste skridt er det benyttet, at man skal finde to tal, hvis produkt er 15 (dvs. blandt de hele tal er – fortegn ikke medregnet - 1, 3, 5, og 15 mulige), og hvis sum er -8. Man kunne også have anvendt diskriminantmetoden.

Man kunne også have løst opgaven på TI n'spire ved følgende indtastninger, hvor man så skulle have tilføjet en passende tekst:



<u>8.158:</u> a) Det er oplyst, at sammenhængen har formen $f(x) = b \cdot x^a$, dvs. det er en potensfunktion ganget med en konstant, og da man har mere end to sæt sammenhørende værdier, skal der altså laves potensregression:

På TI-nspire vælges ”Tilføj lister og regneark”, løbedistancen målt i km indtastes i søjle A, mens tiden målt i sekunder indtastes i søjle B.

Der trykkes på ’menu’-knappen, hvor der vælges ’statistik’→’Stat-beregning’→ ’Potensregression’:

X-liste: a[]

Y-liste: b[]

Gem RegEqn i: f1

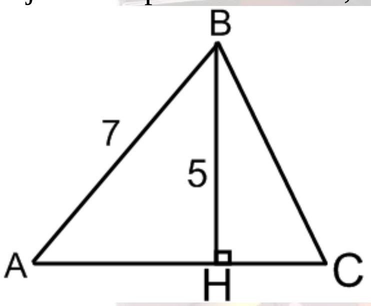
Lommeregneren anvender forskriften $f(x) = a \cdot x^b$ og giver a = 185,897 og b = 1,0602, dvs. den har byttet om på a og b, og svaret er dermed:

$\underline{\underline{a = 1,0602 \text{ og } b = 186}}$

b) Når distancen er 42,195km, har man x = 42,195, og da sammenhængen er gemt som f1, kan man altså finde tiden ved på lommeregneren at skrive f1(42.195), der giver 9826,905.

<u>Dvs. det tager kondiløberen 9827 sekunder (164 minutter) at løbe en maraton.</u>

<u>8.159:</u> Højdens fodpunkt kaldes M, så man har:



a) Trekant ABH er retvinklet, og i forhold til vinkel A kender man den modstående katete og hypotenusen, så man har:

$$\sin A = \frac{|BH|}{|AB|}$$

$$A = \sin^{-1}\left(\frac{5}{7}\right) = 45,5846914028° \approx \underline{\underline{45,6°}}$$

b) Da man kender arealet, kan længden af siden AC bestemmes ved ½-appelsinformlen:

$$T = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin A \quad \Leftrightarrow \quad |AC| = \frac{2 \cdot T}{|AB| \cdot \sin A}$$

$$|AC| = \frac{2 \cdot 25}{7 \cdot \frac{5}{7}} = \frac{50}{5} = \underline{\underline{10}}$$

c) Man mangler længden af siden BC for at kunne bestemme omkredsen, og den bestemmes ved at benytte en cosinusrelation på trekant ABC:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos A$$

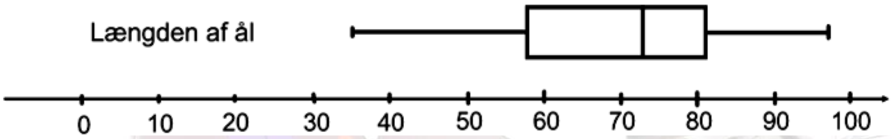
$$|BC| = \sqrt{7^2 + 10^2 - 2 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \cos(45,58469°)} = 7,14286 \approx 7,1$$

Dvs. at omkredsen er:

$$O_{\Delta ABC} = |AB| + |BC| + |AC| = 7 + 7,1 + 10 = \underline{\underline{24,1}}$$

<u>8.160:</u> Minimums- og maksimums-målingerne angives ved de korte streger til venstre og højre.

Medianen angives ved den lodrette streg i boksens midte, mens nedre kvartil er boksens venstre væg og den øvre kvartil den højre væg:



8.161: $f(x)=\sqrt{x}-x+2$

Det er angivet, at funktionen har nulpunkt i x=4 (hvilket også kan ses ved at udregning, da f(4)=0), og da den begynder i x = 0, har man nedre og øvre grænse på plads:

$$A_M=\int_0^4 f(x)dx=\int_0^4\left(\sqrt{x}-x+2\right)dx=\left[\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^4=$$

$$\frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\cdot 4^2+2\cdot 4-\left(\frac{2}{3}\cdot 0^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\cdot 0^2+2\cdot 0\right)=\frac{2}{3}\cdot\sqrt[2]{4}^3-8+8-0+0-0=\frac{2}{3}\cdot 2^3=\underline{\underline{\frac{16}{3}}}$$

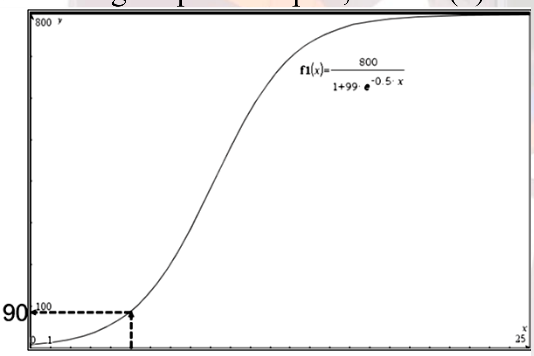
På TI n'spire kunne udregningen foretages ved:

$f(x):=\sqrt{x}-x+2$	*Udført*
$\int_0^4 f(x)\,dx$	$\frac{16}{3}$

8.162: N(t) angiver antallet af personer, der er influenzaramte t døgn efter en epidemis udbrud:

$$N(t)=\frac{800}{1+99\cdot e^{-0,5\cdot t}}$$

a) Grafen tegnes på TI n'spire, med f1(x) som N(t):



På grafen ses det, at der ca. er 90 influenzaramte personer efter 5 døgn, men for at bestemme det mere præcist ifølge modellen, kan det beregnes ud fra forskriften:

$n(t):=\frac{800}{1+99\cdot e^{-0.5\cdot t}}$	*Udført*
$n(5)$	87.6576412471

Dvs. at ifølge modellen er der 88 influenzaramte efter 5 døgn

b) Da N(t) ovenfor blev defineret, kan differentialkvotienten i 12 bestemmes ved:

$\frac{d}{dt}(n(t))\vert t=12$	63.2867854341

Dvs. N'(12) = 63,29.

Det fortæller, at efter 12 døgn øges antallet af influenzasmittede med 63 personer i døgnet.

<u>8.163:</u> a) Kassen har 4 sider med ens areal, så dens overfladeareal bestemmes ved:

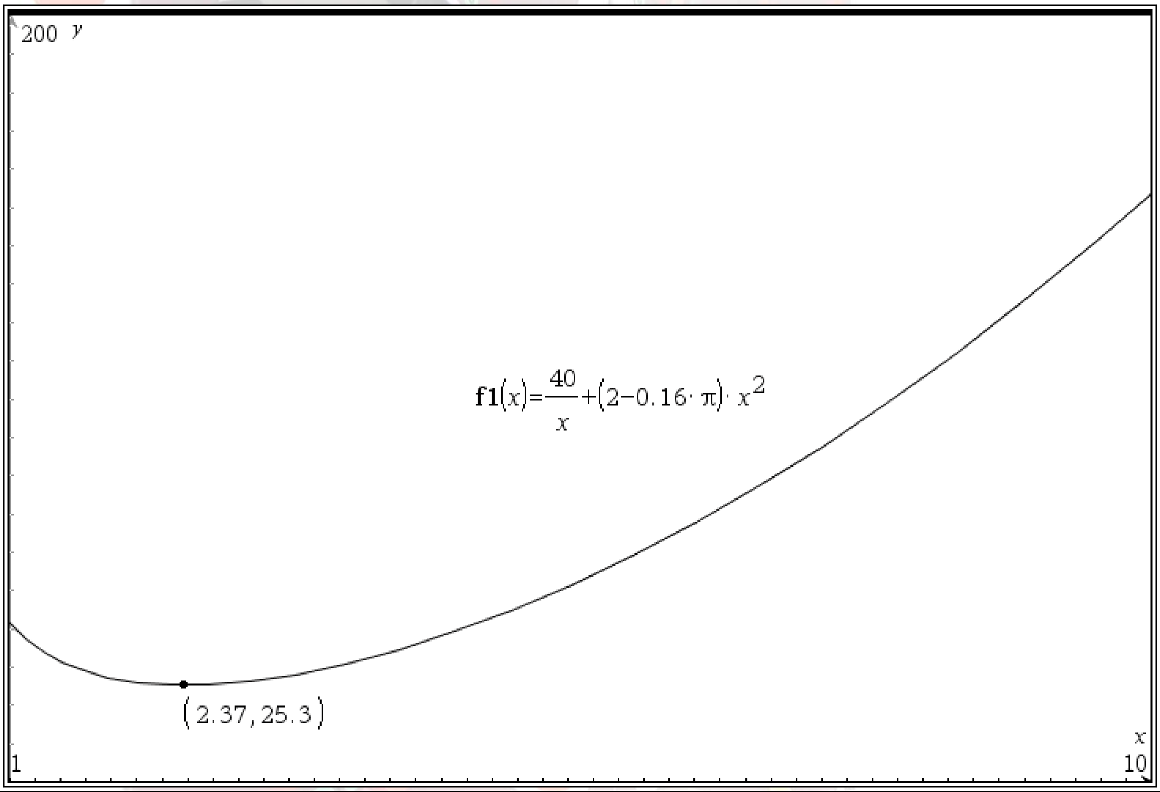
$$A_{kasse} = 4\cdot A_{side} + A_{bund} + A_{låg} = 4\cdot h\cdot x + x\cdot x + \left(x\cdot x - \pi\cdot(0,4\cdot x)^2\right) =$$

$$4hx + 2x^2 - 0,4^2\cdot\pi\cdot x^2 = \underline{\underline{4hx + (2-0,16\cdot\pi)\cdot x^2}}$$

b) Da rumfanget er 10, har man: $h\cdot x\cdot x = 10 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{h = \dfrac{10}{x^2}}}$

Hermed kan man udtrykke arealet ved x og efterfølgende lave en graf med x-værdier i intervallet [1,10]:

$$A_{kasse}(x) = 4\cdot\frac{10}{x^2}\cdot x + (2-0,16\cdot\pi)\cdot x^2 = \frac{40}{x} + (2-0,16\cdot\pi)\cdot x^2$$



Minimumspunktet er fundet ved "Undersøg grafer" → "Minimum" og vælge grænserne på hver side af det område, hvor man kan se, at de mindste y-værdier ligger.

Dvs. at <u>kassen får det mindste overfladeareal, når x = 2,37</u>

August 2010: Delprøven uden hjælpemidler

8.164: Udtrykket reduceres ved først at anvende den tredje kvadratsætning (To tals sum gange de samme to tals differens):

$$(a+b)\cdot(a-b)+b^2=a^2-b^2+b^2=\underline{\underline{a^2}}$$

8.165: $f(x)=2x^2-4x$

Funktionsværdien bestemmes ved indsættelse i funktionsudtrykket:

$$f(3)=2\cdot 3^2-4\cdot 3=2\cdot 9-12=18-12=\underline{\underline{6}}$$

8.166: $f(x)=3x^2-12x+9$

For at bestemme koordinatsættet til parablens toppunkt, findes først diskriminanten:

$$d=b^2-4ac=(-12)^2-4\cdot 3\cdot 9=144-108=36$$

Toppunktets koordinatsæt er så:

$$T\left(\frac{-b}{2a};\frac{-d}{4a}\right)=T\left(\frac{-(-12)}{2\cdot 3};\frac{-36}{4\cdot 3}\right)=T\left(\frac{12}{6};\frac{-36}{12}\right)=\underline{\underline{T(2,-3)}}$$

8.167: I den retvinklede trekant ABC er det vinkel C, der er den rette vinkel. Dermed giver Pythagoras:

$$a^2+b^2=c^2 \quad\Leftrightarrow\quad a^2=c^2-b^2$$

$$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{10^2-8^2}=\sqrt{100-64}=\sqrt{36}=\underline{\underline{6}}$$

Da trekanten er retvinklet, svarer højden fra B til siden BC. Så med siden AC som grundlinje har man:

$$T=\frac{1}{2}\cdot h\cdot g=\frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|AC|=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=\underline{\underline{24}}$$

8.168: Da koefficienterne til y i begge ligninger er 1, benyttes lige store koefficienters metode, hvor den øverste ligning trækkes fra den nederste:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=2 \\ 3x+y=14 \end{array}\right\} \Rightarrow (3x+y)-(x+y)=14-2 \quad\Leftrightarrow\quad 2x=12 \quad\Leftrightarrow\quad x=6$$

Dette indsættes i den øverste ligning for at bestemme y-værdien:

$$6+y=2 \quad\Leftrightarrow\quad y=-4$$

Dvs. ligningssystemet har løsningen: $\underline{\underline{(x,y)=(6,-4)}}$

Hvis man i stedet ville have benyttet substitutionsmetoden, kunne man f.eks. have isoleret y i den øverste ligning og indsat den i den nederste:

$x+y=2 \quad\Leftrightarrow\quad y=2-x$ indsættes:

$$3x+(2-x)=14 \quad\Leftrightarrow\quad 2x+2=14 \quad\Leftrightarrow\quad 2x=12 \quad\Leftrightarrow\quad x=6$$

Dette indsættes i den øverste ligning for at bestemme y-værdien:

$$6+y=2 \quad\Leftrightarrow\quad y=-4$$

Dvs. ligningssystemet har løsningen: $\underline{\underline{(x,y)=(6,-4)}}$

8.169: Rumfanget V af kassen er givet som produktet af længden, bredden og højden. Da rumfanget ifølge opgaveteksten er 32 (enheden dm^3 indgår ikke i udregningerne), højden betegnet med h og længden og bredden begge med x (da bunden er kvadratisk), får man:

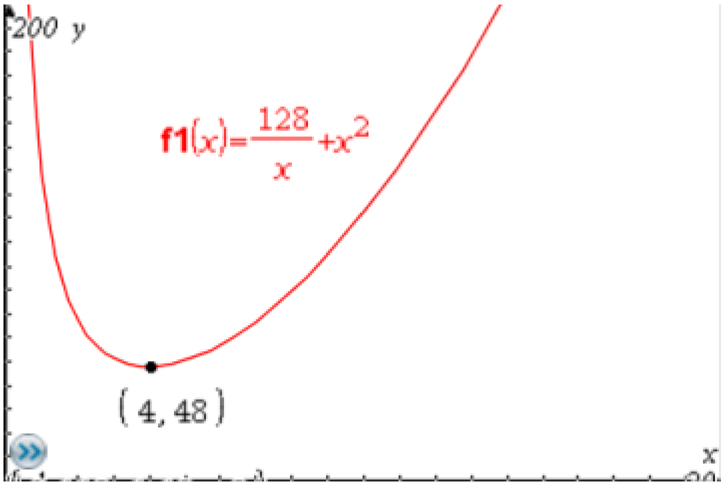
$$V = l \cdot b \cdot h$$

$$32 = x \cdot x \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{h = \frac{32}{x^2}}}$$

Kassen (der ikke har nogen top) har et overfladeareal A, der udgøres af 4 ens sider og en kvadratisk bund, så man har:

$$A = 4 \cdot x \cdot h + x \cdot x = 4x \cdot \frac{32}{x^2} + x^2 = \frac{128}{x} + x^2$$

For at finde det mindste overfladeareal indtastes funktionsudtrykket under grafer.
Man ved, at den mindst mulige x-værdi er nul, så grafen søges ved at bevæge sig op langs y-aksen, og da den er fundet, ses det, at et passende vindue er [0;20] for x-værdierne og [0;200] for y-værdierne. Minimumsstedet findes ved 'menu'→'undersøg grafer'→'minimum':



Dvs. kassens længde (og bredde) skal være $\underline{\underline{4dm}}$ for at kassens overfladeareal bliver mindst muligt.

August 2010: Delprøven med hjælpemidler

<u>8.170:</u> Det er oplyst, at sammenhængen er på formen $f(x) = ax + b$, dvs. det er en lineær sammenhæng.

a) Da man kender mere end to sæt sammenhørende værdier, skal der laves regression.
På TI-nspire vælges ”Tilføj lister og regneark”, antal år efter 1987 indtastes i søjle A, mens antal svært overvægtige danskere over 16 år indtastes i søjle B.
Der trykkes på ’menu’-knappen, hvor der vælges ’statistik’→’Stat-beregning’→ ’Lineær regression (mx+b)’:
X-liste: a[]
Y-liste: b[]
Gem RegEqn i: f1
Lommeregneren giver: m = 12149,116 og b = 253896,40
Dvs. man har at:

$$\underline{\underline{f(x) = 12149 \cdot x + 253896}}$$

b) 25 år efter 1987 (x = 25) ligger uden for det observerede område, men modellen kan bruges til at bestemme en forventet værdi. Da forskriften er gemt som f1, findes det på lommeregneren ved at skrive f1(25), der giver 557624.
<u>Dvs. at 25 år efter 1987 (i år 2012) forventes det, at der er 557624 svært overvægtige danskere over 16 år.</u>

<u>8.171:</u> $f(t) = 150 \cdot 0{,}9779^t$, hvor f(t) er mængden af stof i blodet målt i mg og t er tiden i timer.
Ved først at definere funktionen på TI n’spire, kan man efterfølgende beregne svarene på a) og b):

$f(t):=150\cdot(0.9779)^t$	Udført
$\text{solve}(f(t)=0.5\cdot f(0),t)$	$t=31.0162613744$
$f(24)$	87.731987109

a) Med kommandoen ”solve” har man altså bestemt, at <u>halveringstiden er 31 timer.</u>
b) <u>24 timer efter indtagelsen er der 87,7mg af stoffet i blodet.</u>
c) Tallet 0,9779 er fremskrivningsfaktoren a. Vækstraten r er givet ved:
$r = a - 1 = 0{,}9779 - 1 = -0{,}0221 = -2{,}21\%$
Dvs. at <u>mængden af stof i blodet aftager med 2,21% i timen.</u>

<u>8.172:</u>

<u>8.173</u>: a) I trekant ABC kendes længden af to sider samt vinklen dannet af disse sider. Dermed kan den sidste sidelængde beregnes med en cosinusrelation:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2\cdot|AB|\cdot|AC|\cdot\cos A$$

$$|BC| = \sqrt{(8{,}93km)^2 + (2{,}51km)^2 - 2\cdot 8{,}93km\cdot 2{,}51km\cdot\cos(77{,}7°)}$$

$$|BC| = 8{,}74615035463km = \underline{\underline{8{,}75km}}$$

b) I trekant BCD kender man nu to sider og den modstående vinkel til en af siderne. Der spørges efter vinklen, der er modstående til den anden af siderne, og dermed kan sinusrelationerne bruges:

$$\frac{\sin B}{|CD|} = \frac{\sin D}{|BC|} \quad \Leftrightarrow \quad \sin B = \frac{\sin D}{|BC|} \cdot |CD|$$

$$B = \sin^{-1}\left(\frac{\sin(82,7°) \cdot 5,20km}{8,74615km}\right) = 36,1377195433° = \underline{\underline{36,1°}}$$

Det er undervejs udnyttet, at det er oplyst, at vinkel B i trekant BCD er spids (hvilket dog også ses ved, at længden af CD er mindre end længden af BC, hvorfor vinkel B ikke er over for den længste side). Hvis B kunne have været stump, skulle man have overvejet, om det var supplementvinklen til ovenstående, der var den rigtige vinkel)

_8.174:_ $f(x) = e^x - 3x + 1$

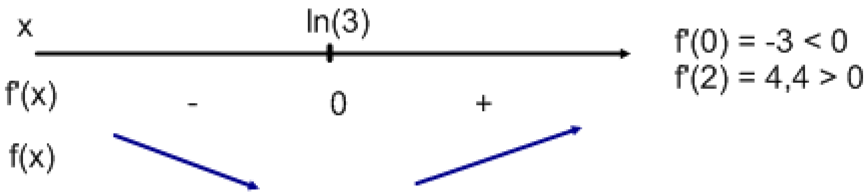
a) Den afledede funktion bestemmes ved at differentiere ledvist:

$$f'(x) = e^x - 3 \cdot 1 + 0 = \underline{\underline{e^x - 3}}$$

For at gøre rede for, at funktionen har et minimum, bestemmes monotoniforholdene:
Først nulpunkter for den afledede funktion:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = e^x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad 3 = e^x \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = \ln(3)} \approx 1,1$$

Der tegnes fortegnsskema:



Dvs. f er aftagende i intervallet $]-\infty;\ln(3)]$ og voksende i $[\ln(3);\infty[$, dvs.
<u>f har et minimum (i x = ln(3))</u>

b) Ligningen for tangenten til grafen i punktet P(2;f(2)) bestemmes ved på TI n'spire at indtaste:

$\text{tangentLine}(e^x-3\cdot x+1,x,2)$	$4.38905609893\cdot x-6.38905609893$

Dvs. at ligningen for tangenten er $\underline{\underline{y = 4,39 \cdot x - 6,39}}$

_8.175:_ $f(x) = 12 \cdot \sqrt{x} \qquad g(x) = x^2 - 7x + 18$

a) Først løses ligningen f(x)=g(x) på TI n'spire ved:

$f(x):=12\cdot\sqrt{x}$	*Udført*
$g(x):=x^2-7\cdot x+18$	*Udført*
$\text{solve}(f(x)=g(x),x)$	$x=1$ or $x=9$

Dvs. at:

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 1 \vee x = 9}}$$

b) Disse to steder udgør henholdsvis den nedre og den øvre grænse i integralet, og da grafen for f ligger over grafen for g i dette interval, har man:

$$A_M = \int_1^9 \left(f(x) - g(x)\right) dx$$

Da funktionerne allerede i spørgsmål a) blev defineret på TI n'spire, kan man nu udregne dette integral ved:

$$\int_1^9 (f(x)-g(x))\,dx \qquad \frac{304}{3}$$

Dvs.

$$\underline{\underline{A_M = \frac{304}{3}}}$$

<u>*8.176:*</u> $O(x) = 4{,}58 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 - 0{,}05 \cdot x^2 + 184{,}2 + 2 \cdot 10^7 \quad ; \quad 5000 \le x \le 20000$

x er antal enheder af en vare, mens O er omkostningerne målt i kr.

Enhedsomkostningerne E målt i kr. pr. enhed er så (som opgivet i opgaveteksten):

$$E(x) = \frac{O(x)}{x}$$

Man skal finde enhedsomkostningerne for x = 10000 og bagefter løse en ligning. Dette gøres på TI n'spire ved:

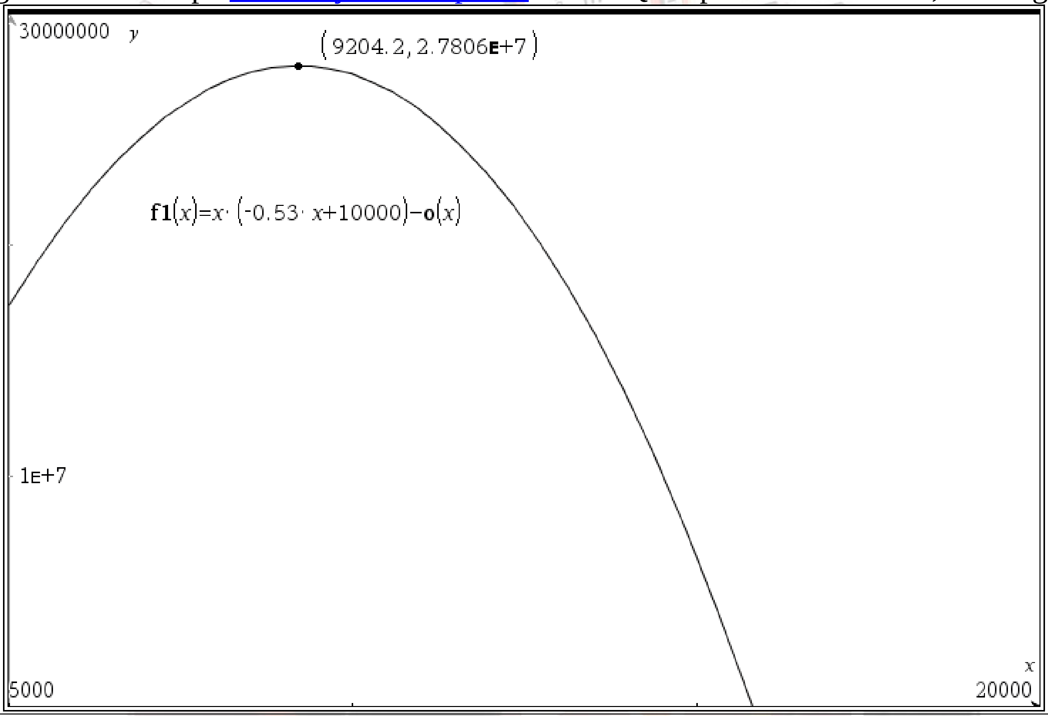
$o(x):=4.58\cdot 10^{-6}\cdot x^3-0.05\cdot x^2+184.2+2\cdot 10^7$	*Udført*
$e(x):=\frac{o(x)}{x}$	*Udført*
$e(10000)$	1958.01842
$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(o(x))=e(x),x\right)$	$x=15071.1820776$

Dvs. at <u>enhedsomkostningerne ved produktion af 10000 enheder er 1958 kr. pr. enhed.</u>

$O'(x) = E(x) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 15071}}$ (se indtastningen på lommeregneren ovenfor)

b) Da O(x) allerede er defineret på lommeregneren, kan man definere F(x) og efterfølgende tegne en graf over fortjenesten i intervallet [5000;20000]:

$f1(x):=x\cdot(-0.53\cdot x+10000)-o(x)$	*Udført*



Den øverste grænse er fundet ved at justere den op og ned, indtil grafen fylder vinduet.
Maksimumspunktet er fundet ved "Undersøg graf"→"Maksimum", hvor grænserne er valgt på hver side af det område, hvor det ses, at de største y-værdier findes.
Under "indstillinger" er antallet af cifre ændret, så man kan se x-værdien tilpas nøjagtigt.
Man har altså, at:
Når der produceres 9204 enheder, er fortjenesten størst.

December 2010: Delprøven uden hjælpemidler

8.177: Ligningen løses:

$$7x+2=5x+10 \quad \Leftrightarrow$$
$$7x-5x=10-2 \quad \Leftrightarrow$$
$$2x=8 \quad \Leftrightarrow$$
$$\underline{\underline{x=4}}$$

8.178: Funktionsværdien bestemmes ved indsættelse af x-værdien i funktionsforskriften:

$$f(x)=x^2+5x+1$$
$$f(3)=3^2+5\cdot 3+1=9+15+1=\underline{\underline{25}}$$

8.179: Når det årlige offentlige forbrug vokser med et fast tal om året, er der tale om lineær vækst.
Man kan indføre følgende variable:
t : Tiden målt i antal år efter 2004
f(t): Er det årlige offentlige forbrug målt i mia. kr.
Begyndelsesværdien er det årlige offentlige forbrug i 2004, dvs. 388 (når den angivne enhed anvendes), mens hældningen er det beløb, forbruget vokser med om året, dvs. 18,5:

$$\underline{\underline{f(t)=18{,}5\cdot t+388}}$$

8.180: Trekant ABC er retvinklet, og dermed kan Pythagoras bruges til at bestemme længden af AB, der er hypotenusen:

$$|AB|^2=|BC|^2+|AC|^2$$
$$|AB|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=\underline{\underline{5}}$$

Trekanterne er ensvinklede, dvs. der er en skalafaktor, der angiver forholdet mellem ensliggende sider. Denne er med udgangspunkt i den lille trekant:

$$k=\frac{|B_1C_1|}{|BC|}=\frac{9}{3}=3$$

Hermed er:

$$|A_1B_1|=k\cdot|AB|=3\cdot 5=\underline{\underline{15}}$$

8.181: Alle funktionerne er på formen $f(x)=b\cdot a^x$, hvor b er begyndelsesværdien og angiver skæringen med y-aksen, mens a-værdien er fremskrivningsfaktoren, der er afgørende for, om funktionen er voksende eller aftagende. Hvis a>1 er funktionen voksende, og hvis 0<a<1 er funktionen aftagende.

C (den grønne graf) er som den eneste af graferne grafen for en aftagende funktion, dvs. C er grafen for $\underline{\underline{g(x)=3\cdot 0{,}88^x}}$, da fremskrivningsfaktoren er 0,88 dvs. mindre end 1.

A (den røde graf) skærer y-aksen længere nede end B, dvs. A er graf for en funktion med en mindre begyndelsesværdi end B. Dermed svarer A til $\underline{\underline{f(x)=3\cdot 1{,}15^x}}$ og B til $\underline{\underline{h(x)=6\cdot 1{,}06^x}}$.

Man kunne også have bemærket, at graferne for A og C skærer y-aksen samme sted og dermed har ens begyndelsesværdier, og man kunne have bemærket, at A's funktion vokser voldsommere end B's og dermed må have en større fremskrivningsfaktor.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

8.182: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 5$

Først bestemmes den afledede funktion:

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$

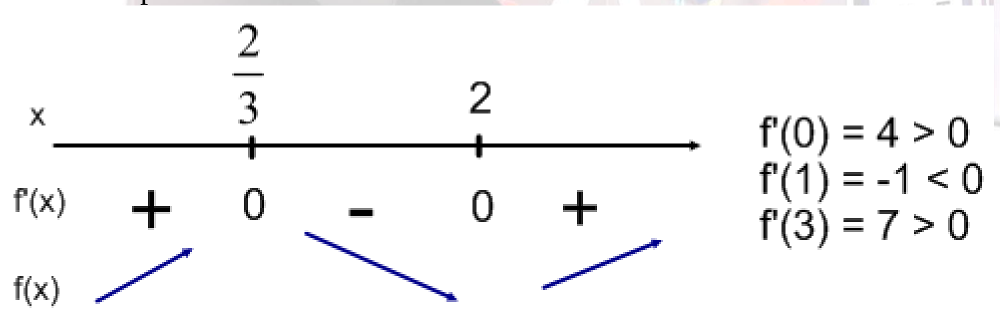
Nulpunkterne for den afledede funktion bestemmes:

$0 = 3x^2 - 8x + 4$

$d = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 64 - 48 = 16 > 0$ dvs. 2 løsninger

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm 4}{6} = \begin{cases} 2 \\ \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Der laves fortegnsskema ved at finde fortegnet for den afledede funktion i de tre intervaller afgrænset af de to nulpunkter:



Altså har man:

f er voksende i $\left]-\infty; \frac{2}{3}\right]$ og i $[2; \infty[$

f er aftagende i $\left[\frac{2}{3}; 2\right]$

f har lokalt maksimum i $x = \frac{2}{3}$

f har lokalt minimum i $x = 2$

December 2010: Delprøven med hjælpemidler

8.183: Man kender kun én sidelængde, så man er nødt til at bruge sinusrelationerne. For at kunne bruge disse, skal man kende vinklen over for den kendte side, så først bestemmes denne ud fra vinkelsummen i en trekant:

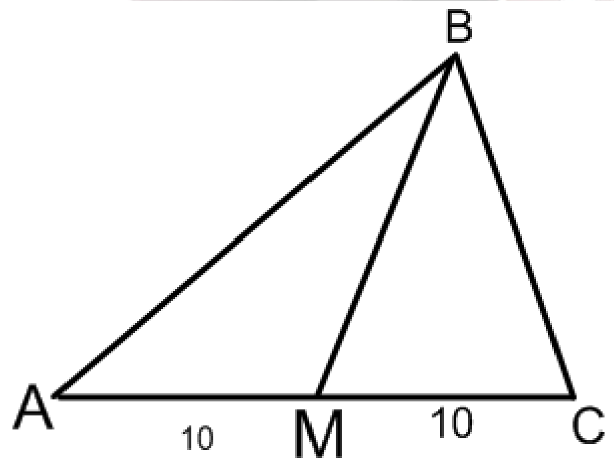
$\angle B = 180° - 33° - 72° = 75°$

Så kan længden af siden AB bestemmes:

$$\frac{|AB|}{\sin C} = \frac{|AC|}{\sin B} \Leftrightarrow |AB| = \frac{|AC|}{\sin B} \cdot \sin C$$

$$|AB| = \frac{20}{\sin(75°)} \cdot \sin(72°) = \underline{\underline{19,6921}}$$

(Da vinkel C er lidt mindre end vinkel B, passer det med, at resultatet blev lidt mindre end 20)



Medianen deler pr. definition siden AC i to lige store dele, dvs. $|AM| = 10$

I trekant ABM kender man altså nu en vinkel (A) og dens to hosliggende sider, og dermed kan arealet bestemmes med ½-appelsinformlen:

$$T = \frac{1}{2} \cdot |AM| \cdot |AB| \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 19,6921 \cdot \sin(33°) = 53,6254957515 \approx \underline{\underline{53,63}}$$

8.184: $L(t) = b \cdot t^a$, hvor L(t) angiver længden af en muslingeskal målt i cm og t er muslingens alder i år.

a) Tabellens værdier indtastes under ”Lister og regneark” på TI n’spire med alderen i kolonne A og længden i kolonne b:

	A	B	C
◆			
1	0.9	1.1	
2	2	2	
3	6	4.1	
4	6.9	4.5	
5	9.9	5.5	
6	10.7	5.9	
7	14	6.7	
8	15.9	7.3	

Modellen er en potensvækst, så der vælges:
”Statistik”→”Statistiske beregninger”→”Potensregression”.
x-værdierne er kolonne A og y-værdierne er kolonne B. Resultatet gemmes under f1:

	A	B	C	D	E
◆				=PowerRe	
1	0.9	1.1	Titel	Potensre...	
2	2	2	RegEqn	a*x^b	
3	6	4.1	a	1.23027...	
4	6.9	4.5	b	0.65478...	
5	9.9	5.5	r²	0.99765...	
6	10.7	5.9	r	0.99882...	
7	14	6.7	Resid	{-0.0482...	
8	15.9	7.3	ResidTra...	{-0.0429...	

Dvs. at a = 0,655 og b = 1,230 (lommeregneren angiver a og b omvendt)

b) Når en musling er 24 år fås: Indtastning på TI n’spire ”f1(24)”, der giver 9,857.
Dvs.. at en 24 årig muslings skal er 9,9cm lang

c) Differentialkvotienten i t = 24 bestemmes ved:

$$\frac{d}{dx}(f1(x))|x=24 \qquad 0.268926799863$$

Dvs. L’(24) = 0,27,
hvilket vil sige, at når en musling er 24 år vokser dens skal med 0,27cm pr. år i længden.

8.185: $g(t) = 3,7 \cdot 1,081^t$, hvor t er tidspunktet målt i antal år efter 1999, og g(t) er Kinas andel af verdensøkonomien målt i procent.
Når t = 0, er året 1999, og g(0)=3,7, dvs. tallet 3,7 fortæller, at i 1999 var Kinas andel af verdensøkonomien 3,7%.
Fremskrivningsfaktoren er 1,081 svarende til en vækstrate på 8,1%. Dvs. at tallet 1,081 fortæller, at Kinas andel af verdensøkonomien ifølge modellen vokser med 8,1% om året.

Fordoblingskonstanten beregnes:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1,081)} = 8,8994477$$

Dvs. at <u>Kinas andel af verdensøkonomien ifølge modellen fordobles på knap 9 år.</u>

<u>8.186:</u> $f(x) = ax + b \quad f(2,9) = 19 \quad f(8,7) = 76$

De to kendte punkter bruges til at opstille to ligninger med to ubekendte, der kan løses på TI n'spire med solve-kommandoen:

$$19 = a \cdot 2,9 + b$$

$$76 = a \cdot 8,7 + b$$

På TI n'spire indtastes "solve(19=2.9a+b and 76=8.7a+b,a,b), der giver: a = 9,827586 og b = -9,5

Dermed er forskriften:

$$\underline{\underline{f(x) = 9,8276 \cdot x - 9,5}}$$

En primærproduktion på 40 gram kulstof pr. kvadratmeter pr. år svarer til f(x)=40.

x-værdien, der angiver den isfri periode, bestemmes så ved:

solve(40=9.8275862068964· x−9.4999999999993,x)	x=5.03684210526

Dvs. at <u>den isfri periode er på 5 måneder.</u>

<u>8.187:</u>

<u>8.188:</u> $f(x) = 4 \cdot \ln(x) - 2x + 8$

En ligning for tangenten til grafen for *f* i punktet P(1,f(1)) bestemmes ved på TI n'spire at skrive:

tangentLine(4· ln(x)−2· x+8,x,1)	2· x+4

Dvs. at ligningen for tangenten er $\underline{\underline{y = 2x + 4}}$

<u>8.189</u>: a) Da hegnet er 300m langt, har man: $300 = y + 2x + y \quad \Leftrightarrow \quad 2y = 300 - 2x \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = 150 - x}}$

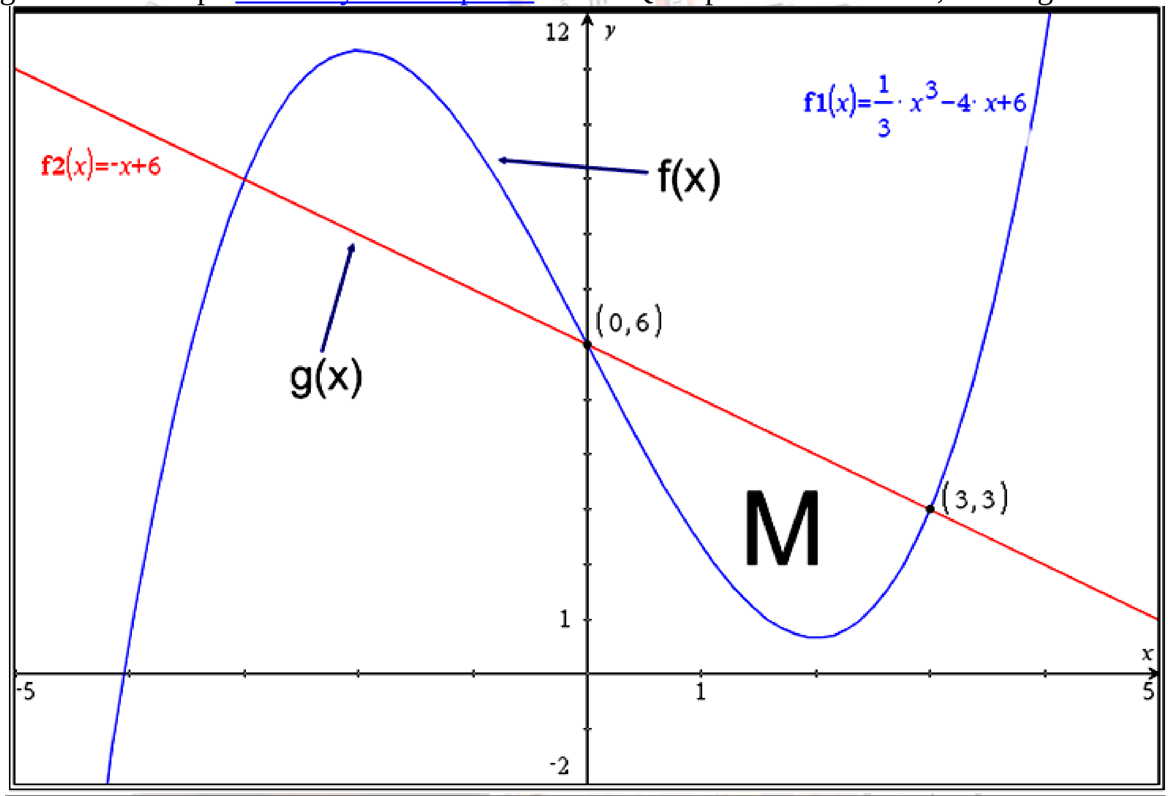
Arealet af publikumsområdet er arealet af rektanglet fratrukket trekanten, så man har:

$$A_{publikumsområde} = A_{rektangel} - A_{trekant} =$$

$$2x \cdot y - \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2x = 2x \cdot (150 - x) - x^2 = 300x - 2x^2 - x^2 = \underline{\underline{-3x^2 + 300x}}$$

<u>8.190:</u> $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 6 \qquad g(x) = -x + 6$

Graferne for de to funktioner indtegnes på TI n'spire, og deres skæringer bestemmes ved 'Undersøg grafer' → 'Skæringspunkt', således at man har de grænser, der skal benyttes, når arealet af M skal bestemmes:



Dvs. den nedre grænse er 0 og den øvre 3.
Da grafen for g ligger over grafen for f i det pågældende interval, har man:

$$A_M = \int_0^3 \left(g(x) - f(x)\right) dx$$

Dette bestemmes på TI n'spire ved:

$$f(x) := \frac{1}{3} \cdot x^3 - 4 \cdot x + 6 \qquad \text{Udført}$$

$$g(x) := -x + 6 \qquad \text{Udført}$$

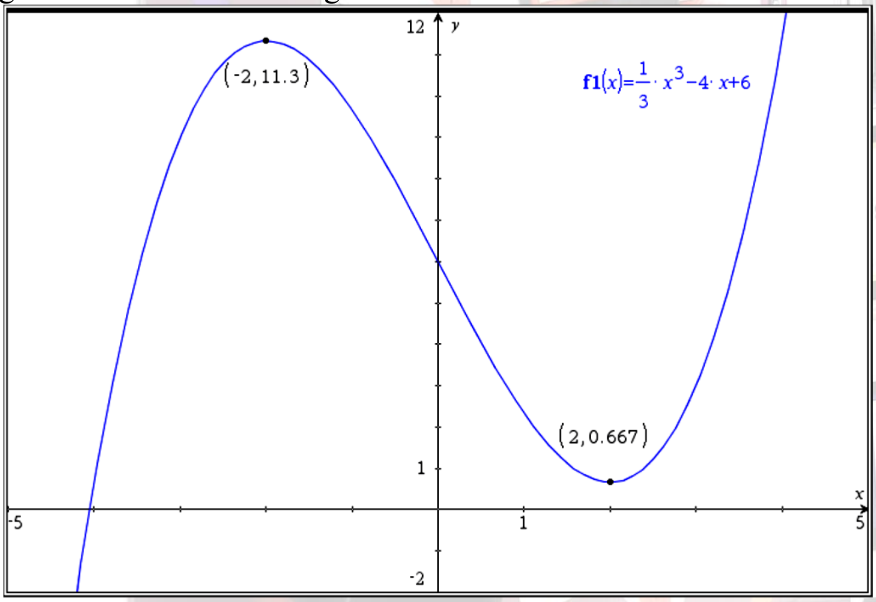
$$\int_0^3 \left(g(x) - f(x)\right) dx \qquad \frac{27}{4}$$

Dvs. at:

$$A_M = \frac{27}{4}$$

Hvis en vandret linje løber under det lokale minimum, vil den skære grafen ét sted.
Hvis en vandret linje rører grafen i det lokale minimum, vil den skære grafen to steder.
Hvis en vandret linje løber mellem det lokale maksimum og det lokale minimum, vil den skære grafen tre steder.
Hvis en vandret linje rører grafen i det lokale maksimum, vil den skære grafen to steder.
Hvis en vandret linje løber over det lokale maksimum, vil den skære grafen ét sted.

Dvs. man skal sørge for, at den vandrette linje enten rører grafen i det lokale maksimum eller i det lokale minimum. Så disses værdier skal bestemmes, hvilket gøres grafisk ved henholdsvis 'Undersøg grafer' → 'Maksimum' og 'Minimum':



Heraf kan man aflæse y-værdierne for maksimums- og minimumspunktet, men det er ikke eksakt, og hvis man gerne vil have eksakte værdier, kan man udnytte, at den afledede funktion er nul de to steder, hvorefter funktionsværdierne kan findes:

$f(x):=\frac{1}{3}\cdot x^3-4\cdot x+6$	*Udført*
$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(f(x))=0,x\right)$	$x=-2$ or $x=2$
$f(-2)$	$\frac{34}{3}$
$f(2)$	$\frac{2}{3}$

Dvs. at for $\underline{\underline{b=\frac{34}{3}}}$ og for $\underline{\underline{b=\frac{2}{3}}}$ vil linjen med ligningen y = b skære grafen for *f* netop 2 steder.