Løsninger til eksamensopgaver på A-niveau 2011 →

18. maj 2011: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: $x^2+x-12=0$

Dette er en andengradsligning, der kan løses enten ved diskriminantmetoden eller ved at finde to tal, hvis produkt er -12, og hvis sum er 1.
Først sidstnævnte metode:
Da produktet skal være -12, er tallene 1, 2, 3, 4, 6 og 12 de mulige hele tal (fortegn ikke medregnet), og da summen af de to tal, skal være 1, må det være tallene -3 og 4.
Så man har:

$$x^2+x-12=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+4)\cdot(x-3)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=-4 \ \vee \ x=3}}$$

Diskriminantmetoden:

$$d=b^2-4ac=1^2-4\cdot1\cdot(-12)=1+48=49>0 \text{ dvs. to løsninger}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{d}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm7}{2}=\underline{\underline{\begin{cases}3\\-4\end{cases}}}$$

Opgave 2: $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\t+1\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}t-1\\3\end{pmatrix}$

Det bemærkes, at uanset værdien af t, har hver vektor mindst én koordinat, der ikke er 0, dvs. det er egentlige vektorer. Dermed gælder:

$$\vec{a}\perp\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}2\\t+1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}t-1\\3\end{pmatrix}=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$2\cdot(t-1)+(t+1)\cdot3=0 \quad \Leftrightarrow \quad 5t+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{t=-\frac{1}{5}}}$$

Opgave 3: $N(t)=23\cdot1{,}386^t$ N(t) er antallet af fluer til tiden t (målt i døgn).

Fra start (efter 0 døgn) er der 23 fluer i populationen.

Tallet 1,386 fortæller, at populationen vokser med 38,6% i døgnet (eksponentiel vækst)

Opgave 4: $\frac{dy}{dx}=y+x \qquad f(x)=e^x-x-1$

Det undersøges, om funktionen er en løsning til differentialligningen, ved at indsætte i differentialligningen og se, om det giver en identitet.
For at kunne indsætte skal funktionen først differentieres (der differentieres ledvist og konstantleddet forsvinder):

$$f'(x)=e^x-1$$

Der indsættes:

$$e^x-1=e^x-x-1+x \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{e^x-1=e^x-1}}$$

Der er fremkommet en identitet, og dermed er funktionen en løsning til differentialligningen.

Opgave 5: $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x} \quad ; \quad x > 0 \qquad P(1,3)$

Først bestemmes ved ledvis integration den form samtlige stamfunktioner er på:

$F(x) = x^2 + \ln|x| + k = x^2 + \ln(x) + k$ (numerisktegnet kan fjernes, da x > 0)

Da grafen for stamfunktionen skal gå gennem P, kan man finde konstanten k ved:

$3 = 1^2 + \ln(1) + k \quad \Leftrightarrow \quad k = 2$

Dvs. den søgte stamfunktion er:

$$\underline{\underline{F_P(x) = x^2 + \ln(x) + 2}}$$

Opgave 6: Det bemærkes, at det er grafen for den afledede funktion og IKKE for funktionen selv.

Dvs. man ser, at:

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \vee x = 3 \vee x = 5$

Desuden bemærkes det, at:

$f'(x) < 0 \; i \; [-3;-2[$

$f'(x) > 0 \; i \;]-2;3[$

$f'(x) < 0 \; i \;]3;5[$

$f'(x) > 0 \; i \;]5;6]$

Så man har:

$\underline{\underline{f \text{ er aftagende i } [-3;-2]}}$

$\underline{\underline{f \text{ er voksende i } [-2;3]}}$

$\underline{\underline{f \text{ er aftagende i } [3;5]}}$

$\underline{\underline{f \text{ er voksende i } [5;6]}}$

18. maj 2011: Delprøven MED hjælpemidler

<u>*Opgave 7:*</u> Løst med Maple:

$restart$

$with(Gym):$

a) Vi skal anvende regression, så listerne indskrives i Maple.

$Faldhøjde := [1.7, 2.0, 2.9, 4.1, 5.6, 6.3, 7.0, 8.0, 10.0, 13.9]:$

$Antalfald := [42, 21, 10.3, 6.8, 5.1, 4.8, 4.4, 4.1, 3.7, 3.2]:$

Da det er oplyst, at $f(x) := b \cdot x^a$ anvendes potensregression:

$f(x) := PowReg(Faldhøjde, Antalfald, x):$

$$f(x) = \frac{46.0955175760221}{x^{1.15357277252544}}$$

Man skal her være opmærksom på, at Maple har skrevet funktionen på en anden form, så vi skal benytte, at $p^{-n} = \frac{1}{p^n}$, og vi har så:

$f(x) := 46.0955 \cdot x^{-1.15357277}$

Dvs. $\underline{\underline{a = -1.15357277}}$ og $\underline{\underline{b = 46.0955}}$

b) Det gennemsnitlige antal fald er funktionsværdien, så vi skal løse:

$f(x) = 15 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 2.646418878]]$

Da det er en potensfunktion skal man dog være lidt varsom med at bruge 'solve' i Maple, da det ofte går galt på en mac-computer.
Så man kan alternativt anvende:

$fsolve(f(x) = 15, x) = 2.646418878$

Dvs. faldhøjden er $\underline{\underline{2.65\ m}}$

c) Da det er potensvækst er sammenhængen mellem den procentvise ændring i uafhængig (x) og afhængig (y) variabel givet ved:

$(1+r_y) = (1+r_x)^a$

Så man har:

$r_y = (1+r_x)^a - 1 = (1+0{,}50)^{-1{,}1536} - 1 = 1{,}5^{-1{,}1536} - 1 = -0{,}3736 = -37{,}4\%$

Dvs. at <u>det gennemsnitlige antal fald falder med 37,4%,</u> når faldhøjden øges med 50%.

Løst med n'spire:

$f(x) = b \cdot x^a$ x er faldhøjden i meter f(x) er det gennemsnitlige antal fald.

a) Da det er angivet, at modellen er potensvækst, indtastes på TI n'spire tabellens værdier under 'Lister og regneark': Faldhøjden i kolonne A og det gennemsnitlige antal fald i kolonne B.
Under 'Statistik'→'Statistiske beregninger' vælges 'Potensregression' med:
A-kolonnen som liste X og B-kolonnen som liste Y.
<u>Resultatet gemmes under f1</u>

	A	B	C	D
◆				=PowerRe
1	1.7	42	Titel	Potensre...
2	2	21	RegEqn	a*x^b
3	2.9	10.3	a	46.0955...
4	4.1	6.8	b	-1.15357...
5	5.6	5.1	r²	0.89654...
6	6.3	4.8	r	-0.94686...
7	7	4.4	Resid	{17.0069...
8	8	4.1	ResidTra...	{0.51907...
9	10	3.7		
10	13.9	3.2		

Det bemærkes, at modellen har byttet om på a- og b-værdier, så man har:
$\underline{\underline{b = 46{,}1 \quad og \quad a = -1{,}1536}}$

b) Hvis det gennemsnitlige antal fald er 15, har man f(x)=15. Dette løses ved:

$\text{solve}(f1(x)=15,x) \qquad x=2.64641887755$

Dvs. at <u>faldhøjden er 2,6m</u>

c) Da det er potensvækst er sammenhængen mellem den procentvise ændring i uafhængig (x) og afhængig (y) variabel givet ved:
$(1+r_y) = (1+r_x)^a$
Så man har:
$r_y = (1+r_x)^a - 1 = (1+0{,}50)^{-1{,}1536} - 1 = 1{,}5^{-1{,}1536} - 1 = -0{,}3736 = -37{,}4\%$
Dvs. at <u>det gennemsnitlige antal fald falder med 37,4%,</u> når faldhøjden øges med 50%.

Man kunne også have fundet det ved på TI n'spire først at udregne forholdet mellem det gennemsnitlige antal fald svarende til en faldhøjde 50% større end en vilkårlig faldhøjde og det gennemsnitlige antal fald svarende til denne vilkårlige faldhøjde:

$\frac{f1(1.5 \cdot x)}{f1(x)} - 1 \qquad -0.373579563157$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 8: Først bestemmes det samlede antal kunder ved at summere antal kunder i hvert interval:

$n = 10 + 23 + 16 + 21 + 10 + 9 = 89$

Så kan frekvenserne beregnes (Eksempel: intervallet 20-30 liter):

$$f_{20-30} = \frac{16}{89} = 0{,}180 = 18{,}0\%$$

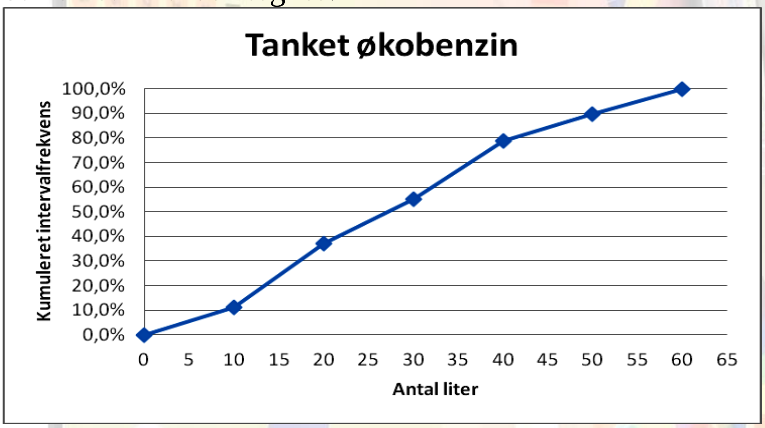
Den kumulerede intervalfrekvens bestemmes ved at lægge frekvenserne til og med det pågældende interval sammen (Eksempel: intervallet 20-30 liter):

11,2%+25,8%+18,0% = 55,1%

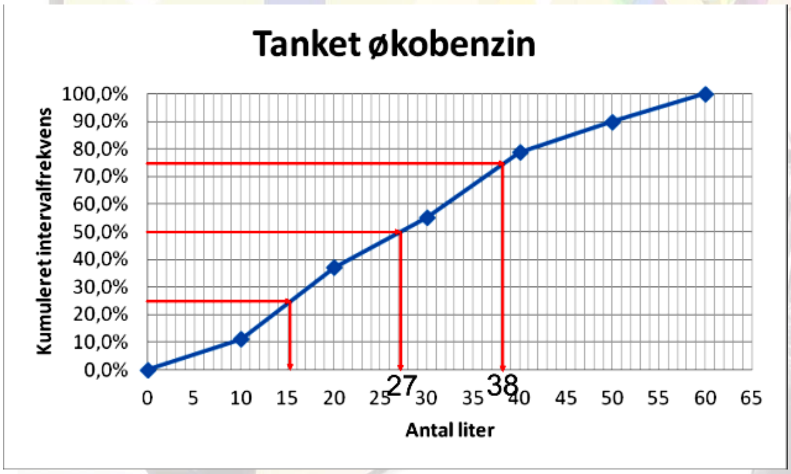
For at kunne indtegne en sumkurve i Excel indtastes det højre intervalendepunkt (og der indsættes et startpunkt på 0):

Mængde (liter)	Antal kunder	Frekvens	Kum. Frek.
0	0	0,0%	0,0%
10	10	11,2%	11,2%
20	23	25,8%	37,1%
30	16	18,0%	55,1%
40	21	23,6%	78,7%
50	10	11,2%	89,9%
60	9	10,1%	100,0%
Samlet antal kunder:	89		

Så kan sumkurven tegnes:



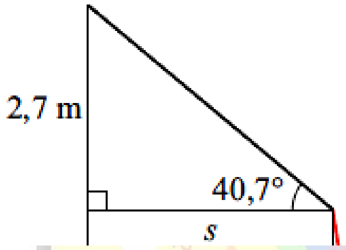
Kvartilsættet aflæses ved at gå vandret ind fra 25%, 50% og 75% og aflæse antal liter på 1. aksen:



Kvartilsættet er altså (15 liter, 27 liter, 38 liter)

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

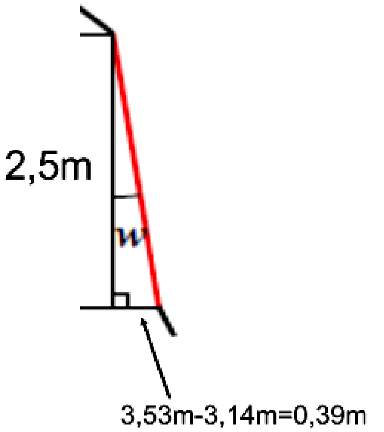
Opgave 9: a) Siden *s* er en del af denne retvinklede trekant:



Med udgangspunkt i den kendte, spidse vinkel kender man den modstående katete og skal finde den hosliggende katete, så man skal bruge tangens:

$$\tan(40,7°) = \frac{2,7m}{s} \quad \Leftrightarrow \quad s = \frac{2,7m}{\tan(40,7°)} = 3{,}13903959235m \approx \underline{\underline{3{,}1m}}$$

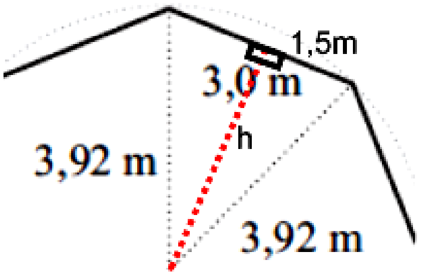
Vinkel w indgår i en anden retvinklet trekant, hvor man i forhold til vinkel w kender de to kateter:



$$\tan(w) = \frac{3,53m - 3{,}13903959235m}{2,5m}$$

$$w = \tan^{-1}(0{,}15638416306) = 8{,}88816277629° \approx \underline{\underline{8{,}9°}}$$

b) Da det er otte ligebenede trekanter, kan hver af dem med en højde (eller midtnormal, vinkelhalveringslinje eller median) opdeles i to retvinklede trekanter:



Pythagoras giver:

$$h^2 + (1{,}5m)^2 = (3{,}92m)^2$$

$$h = \sqrt{(3{,}92m)^2 - (1{,}5m)^2} = 3{,}62165707929m$$

Nu kendes længderne af højderne og grundlinjerne, så arealet af fiskerhusets grundflade er:

$$A = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3{,}0m \cdot 3{,}62165707929m = 43{,}4598849515m^2 \approx \underline{\underline{43{,}46m^2}}$$

Opgave 10: T(0,0,20) ; F(20,20,0) ; C(-20,20,0) ; D(-20,-20,0)

Ligningen for planen α, der indeholder firkanten *ABCD*, er: $x+3z+20=0$’

a) Afstanden fra punktet T til planen α bestemmes:

$$dist(T,\alpha)=\frac{|0+3\cdot 20+20|}{\sqrt{1^2+0^2+3^2}}=\frac{80}{\sqrt{10}}\approx 25,298$$

Da der regnes i meter, er afstanden dermed 25,3m

b) Først bestemmes en normalvektor for planen, der indeholder T, D og C, ved at tage krydsproduktet af vektorerne $\overrightarrow{TD}$ og $\overrightarrow{TC}$:

$$td:=\begin{bmatrix}-20-0\\-20-0\\0-20\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}-20\\-20\\-20\end{bmatrix}$$

$$tc:=\begin{bmatrix}-20-0\\20-0\\0-20\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}-20\\20\\-20\end{bmatrix}$$

$$\text{crossP}(td,tc) \qquad \begin{bmatrix}800\\0\\-800\end{bmatrix}$$

Som normalvektor vælges en vektor, der er parallel med denne, men kortere (koordinaterne divideres med 800):

$$\overrightarrow{n_{TDC}}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

En normalvektor for α kan aflæses ud fra ligningen, og så kan vinklen mellem planerne beregnes som vinklen mellem normalvektorerne:

$$\cos v=\frac{\overrightarrow{n_\alpha}\cdot\overrightarrow{n_{TDC}}}{|\overrightarrow{n_\alpha}|\cdot|\overrightarrow{n_{TDC}}|}$$

$$v=\cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right|}\right)=$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{1\cdot 1+0\cdot 0+3\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+0^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{20}}\right)=116,565051177°$$

Hvis der tænkes på den spidse vinkel (det er der ikke nævnt noget om, så den stumpe vinkel kan også bruges), er den:

$$v_{spids}=180°-116,565051177°=\underline{\underline{63,4349488229°}}$$

c) For at bestemme en parameterfremstilling for linjen gennem T og F har man brug for en retningsvektor og et punkt. Som punkt kan man f.eks. bruge T eller F, og en retningsvektor vælges som en vektor parallel med: $\overrightarrow{TF} = \begin{pmatrix} 20-0 \\ 20-0 \\ 0-20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ -20 \end{pmatrix}$

Koordinaterne divideres med 20, så man får: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Og en parameterfremstilling med T som udgangspunkt er:

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$$

Punktet B er skæringspunktet mellem ovenstående linje og planen α.
Det bestemmes ved at indsætte linjens koordinater i planens ligning:

$$t + 3 \cdot (20 - t) + 20 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2t + 80 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 40$$

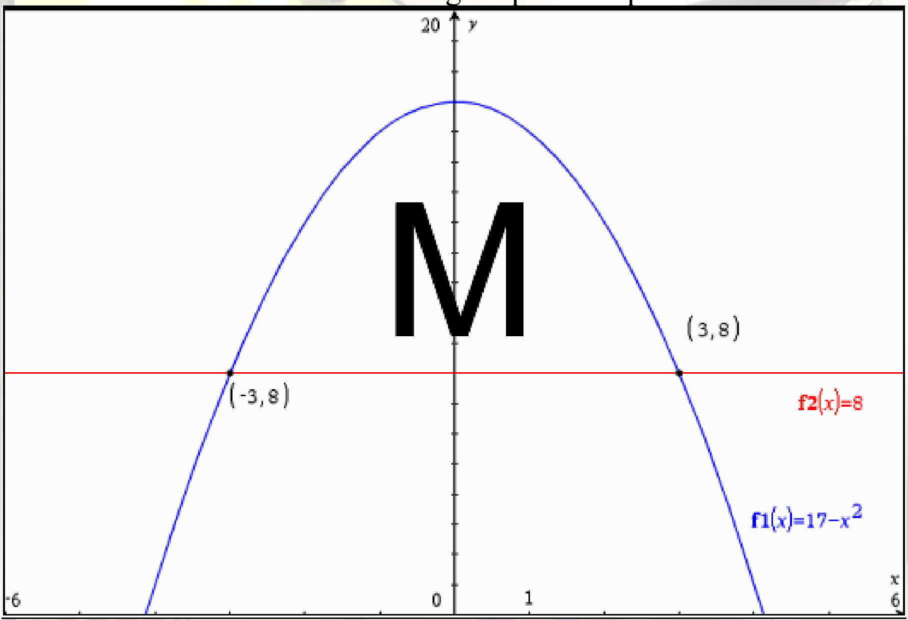
Skæringspunktet bestemmes så ved at indsætte denne værdi i parameterfremstillingen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + 40 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ -20 \end{pmatrix} \quad \text{Dvs. } \underline{B(40,40,-20)}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 11: $f(x) = 17 - x^2 \quad g(x) = 8$

a) Graferne for de to funktioner indtegnes på TI n'spire:



Området M er identificeret, og det bemærkes, at grafen for *f* ligger øverst i området.
De to skæringspunkter er fundet ved to gange at anvende "Undersøg grafer"→"Skæringspunkt" med grænser på hver side af det søgte punkt.
De kunne dog også være fundet ved:

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad 17 - x^2 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 9 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 3$$

Hermed bliver arealet af det området M:

$$A_M = \int_{-3}^{3} \left(f(x) - g(x) \right) dx = \int_{-3}^{3} \left(17 - x^2 - 8 \right) dx = \int_{-3}^{3} \left(9 - x^2 \right) dx =$$

$$\left[9x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-3}^{3} = \left(9 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 3^3 \right) - \left(9 \cdot (-3) - \frac{1}{3} \cdot (-3)^3 \right) = 27 - 9 + 27 - 9 = \underline{\underline{36}}$$

Det kunne også have været beregnet ved:

$$\int_{-3}^{3} \left(17 - x^2 - 8 \right) dx \qquad 36$$

b) Det er de samme grænser, der gælder for omdrejningslegemet, så man har:

$$V = V_f - V_g = \pi \cdot \int_{-3}^{3} f(x)^2 \, dx - \pi \cdot \int_{-3}^{3} g(x)^2 \, dx$$

Dette bestemmes på TI n'spire ved:

$$\pi \cdot \int_{-3}^{3} \left(\left(17 - x^2\right)^2 - 8^2 \right) dx \qquad \frac{4176 \cdot \pi}{5}$$

$$\pi \cdot \int_{-3}^{3} \left(\left(17 - x^2\right)^2 - 8^2 \right) dx \qquad 2623.85818428$$

Dvs. at <u>rumfanget af omdrejningslegemet er 2624</u>

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 12: $f(t)=6,61\cdot\sin\left(0,0167\cdot t-1,303\right)+12,2 \quad ; \quad 0\leq t\leq 365$

f(t) er længden af dagen målt i timer ; t er tiden målt i døgn efter 1. januar 2011.

a) Da det er en trigonometrisk funktion, skal der regnes i radianer. Så man får:

$$f(100)=6,61\cdot\sin\left(0,0167\cdot 100-1,303\right)+12,2=6,61\cdot\sin\left(0,367\right)+12,2=14,571779$$

Dvs. at længden af dagen 100 dage efter 1. januar 2011 er <u>14,57 timer</u>

b) I Maple kan man finde det tidspunkt, hvor dagen er længst, ved at finde det sted, hvor den første afledede er 0, og den anden afledede er negativ:

restart

$with(Gym):$

$f(t) := 6.61\cdot\sin(0.0167\cdot t-1.303)+12.2:$

Da det er en trigonometrisk funktion, skal man anvende "intervalsolve" for ikke at overse en løsning:

$intervalsolve(f'(t)=0,\ t=0..365) = [172.0836124,\ 360.2029330]$

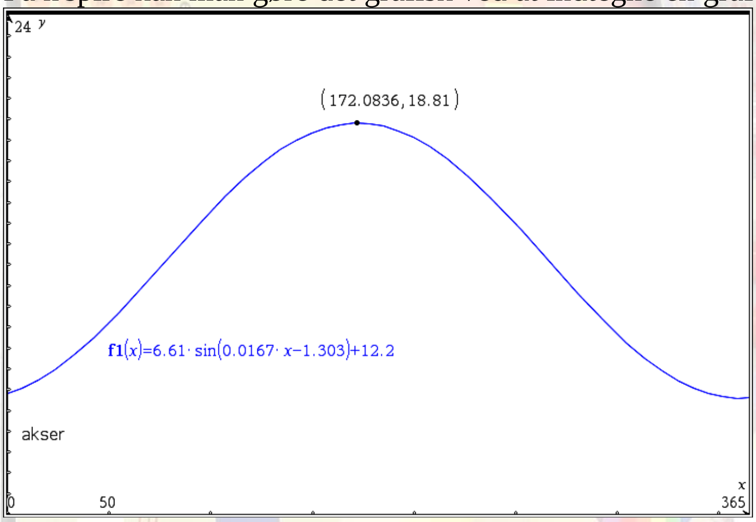
Fortegnene for den anden afledede funktion bestemmes disse steder:

$f''(172.0836124) = -0.0018434629 < 0$

$f''(360.2029330) = 0.0018434629 > 0$

Da man søger et lokalt maksimum, er man interesseret i det sted, hvor den anden afledede er negativ, dvs. det er efter $\underline{\underline{172}}$ dage, at dagen er længst.

På n'spire kan man gøre det grafisk ved at indtegne en graf i intervallet [0;365]:



Maksimum for grafen er fundet ved 'Undersøg grafer'→'Maksimum', hvor grænserne er valgt på hver sin side af det sted, hvor maksimum ses at ligge.

Så <u>dagen er længst 172 dage efter 1. januar 2011</u>

c) Man kan differentiere funktionen på lommeregneren, men man kan også bemærke, at det er en sammensat funktion, hvorfor den afledede funktion bliver:

$$f'(t)=6,61\cdot 0,0167\cdot\cos\left(0,0167\cdot t-1,303\right)+0=0,110387\cdot\cos\left(0,0167\cdot t-1,303\right)$$

$$f'(100)=0,110387\cdot\cos\left(0,0167\cdot 100-1,303\right)=0,110387\cdot\cos\left(0,367\right)=\underline{\underline{0,103036108323}}$$

Dette tal fortæller, at <u>100 dage efter 1. januar 2011 vokser dagens længde med 0,103 timer pr. døgn.</u>

<u>Opgave 13:</u> $0,4\cdot\frac{dI}{dt}+10\cdot I=9 \quad ; \quad I(0)=0$ I er strømstyrken målt i ampere, og t er tiden i sekunder.

a) Da strømstyrken er en løsning til differentialligningen, kan man finde dens væksthastighed, når strømstyrken er 0,3 ampere ved at indsætte i differentialligningen:

$$0,4\cdot\frac{dI}{dt}+10\cdot I=9 \quad\Leftrightarrow\quad 0,4\cdot\frac{dI}{dt}=9-10\cdot I \quad\Leftrightarrow\quad \frac{dI}{dt}=\frac{9-10\cdot I}{0,4}$$

$$I=0,3: \frac{dI}{dt}=\frac{9-10\cdot 0,3}{0,4}=\frac{9-3}{0,4}=\frac{6}{0,4}=15$$

Dvs. at <u>strømmens væksthastighed er 15 ampere pr. sekund.</u>

b) På TI n'spire findes den partikulære løsning til differentialligningen, hvis graf går gennem (0,0) ved:

```
deSolve(0.4·i'+10·i=9 and i(0)=0,t,i)
                          i=0.9−0.9·e^(-25·t)
```

Dvs. at en forskrift for I er: $\underline{\underline{I(t)=0,9\cdot\left(1-e^{-25\cdot t}\right)}}$

<u>Opgave 14:</u> $f(x)=(x-3)^2 \quad ; \quad (1, f(1))$

a) En ligning for tangenten til grafen for *f* i punktet (1,f(1)) bestemmes på TI n'spire ved:

```
tangentLine((x−3)^2,x,1)                    8−4·x
```

Dvs. ligningen for tangenten er: $\underline{\underline{y=-4x+8}}$

Hvis man ikke vil bruge lommeregner, kan man finde tangentens ligning ved først at differentiere funktionen som en sammensat funktion:

$f'(x)=1\cdot 2\cdot(x-3)=2x-6$

Tangentens hældning er så:

$f'(1)=2\cdot 1-6=-4$

Røringspunktets y-værdi er:

$f(1)=(1-3)^2=4$

Og så er tangentens ligning:

$y-4=-4\cdot(x-1) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{y=-4\cdot x+8}}$

b) Når røringspunktets førstekoordinat er *a* får man følgende tangentligning:

tangentLine$((x-3)^2, x, a)$ $\quad 2\cdot(a-3)\cdot x-(a-3)\cdot(a+3)$

Dvs. ligningen for tangenten er: $y = 2\cdot(a-3)\cdot x-(a-3)\cdot(a+3)$

Med udregninger får man:

$f'(x) = 1\cdot 2\cdot(x-3) = 2x-6$

Tangentens hældning er så:

$f'(a) = 2\cdot a - 6$

Røringspunktets y-værdi er:

$f(a) = (a-3)^2$

Og så er tangentens ligning:

$$y-(a-3)^2 = (2a-6)\cdot(x-a) \quad\Leftrightarrow\quad y = (2a-6)\cdot x-(2a-6)\cdot a+(a-3)^2 \quad\Leftrightarrow$$
$$y = (2a-6)\cdot x-2a^2+6a+a^2-6a+9 \quad\Leftrightarrow\quad y = (2a-6)\cdot x - a^2+9$$

Punktet Q har x-værdien 0, så y-værdien er:

$y = (2a-6)\cdot 0 - a^2+9 = -a^2+9$ $\qquad \underline{\underline{Q(0,-a^2+9)}}$

Punktet R har y-værdien 0, så x-værdien er:

$$0 = (2a-6)\cdot x-a^2+9 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{a^2-9}{2a-6} = x$$

Denne omskrivning er lovlig, da a < 3, hvorfor nævneren ikke kan være 0.
Ved at faktorisere i tæller og nævner kan man få forkortet brøken ved:

$$x = \frac{(a+3)\cdot(a-3)}{2\cdot(a-3)} = \frac{(a+3)}{2} \qquad \underline{\underline{R\left(\frac{(a+3)}{2},0\right)}}$$

c) $T(a) = \frac{1}{4}\cdot(9-a^2)\cdot(a+3) \quad ; \quad 0 \le a < 3$

På TI n'spire defineres funktionen, hvorefter den afledede funktion og den anden afledede funktion undersøges:

$t(a) := \frac{1}{4}\cdot(9-a^2)\cdot(a+3)$ $\quad$ *Udført*

solve$\left(\frac{d}{da}(t(a))=0,a\right)$ $\quad a=-3$ or $a=1$

$\frac{d^2}{da^2}(t(a))|a=1$ $\quad -3$

Det eneste sted i intervallet [0;3[, hvor den afledede funktion er 0, er for a=1, og da den anden afledede dette sted er negativ (-3), er det et maksimumssted.

Dvs. at for <u>a=1</u> er arealet af trekanten størst.

24. maj 2011: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: $y = 2x^2 - 8x + 3$

Koordinatsættet til parablens toppunkt bestemmes ved først at udregne diskriminanten og derefter indsætte den i toppunktsudtrykket:

$$d = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 64 - 24 = 40$$

$$T\left(\frac{-b}{2a};\frac{-d}{4a}\right) = T\left(\frac{-(-8)}{2\cdot 2};\frac{-40}{4\cdot 2}\right) = T\left(\frac{8}{4};\frac{-40}{8}\right) = \underline{\underline{T(2,-5)}}$$

Opgave 2: 499 kr. pr. m^3 grus. 250 kr. for selve transporten.

Lad *P(x)* være prisen i kroner for levering af grus, og lad *x* være antal m^3 grus, der skal leveres. Da prisen er den samme pr. m^3 , er det en lineær sammenhæng. Der gælder så:

$$\underline{\underline{P(x) = 499 \cdot x + 250 \quad ; \quad x > 0}}$$

Opgave 3: Der integreres ledvist og grænserne indsættes:

$$\int_1^2 \left(6x^2 - 2x\right)dx = \left[2x^3 - x^2\right]_1^2 = \left(2\cdot 2^3 - 2^2\right) - \left(2\cdot 1^3 - 1^2\right) = 12 - 1 = \underline{\underline{11}}$$

Opgave 4: $f(x) = 2^x$ $\quad g(x) = 0{,}5^x$ $\quad h(x) = 1{,}2^x$

Alle tre funktioner er eksponentialfunktioner.

Hvis grundtallet er mindre end 1, er funktionen aftagende, og grafen A er grafen for en aftagende funktion.

Så A er grafen for funktionen *g(x)*

Da 2 > 1,2, har funktionen *f* en større vækstrate end *h* (vækstraten for f er 100%, mens den er 20% for h).

Da grafen B buer mere opad end grafen C, må der altså gælde:

B er grafen for funktionen *f*

C er grafen for funktionen *h*

Opgave 5: Da trekanterne er ensvinklede, er forholdene mellem ensliggende par af sider det samme for alle par, så man har:

$$\frac{|EC|}{|AC|} = \frac{|CD|}{|BC|} \quad \Leftrightarrow \quad |EC| = \frac{|CD|}{|BC|}\cdot|AC| = \frac{36}{30}\cdot 40 = \frac{6}{5}\cdot 40 = 6\cdot 8 = 48$$

Og så er:

$$|BE| = |EC| - |BC| = 48 - 30 = \underline{\underline{18}}$$

Opgave 6: Cirkel med $r=\sqrt{8}$ $C(1,0)$. Linje med ligningen $y=x-1$

For at kunne bestemme skæringspunkterne mellem cirklen og linjen, skal man først have opskrevet cirklens ligning, hvilket kan gøres, da man kender både radius og centrum:

$$(x-1)^2+(y-0)^2=\sqrt{8}^2 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2=8 \Leftrightarrow x^2-2x+y^2-7=0$$

Skæringspunkternes førstekoordinater findes ved at erstatte y-værdien i cirklens ligning med højresiden i linjens ligning:

$$x^2-2x+(x-1)^2-7=0 \Leftrightarrow x^2-2x+x^2-2x+1-7=0 \Leftrightarrow 2x^2-4x-6=0 \Leftrightarrow$$

$$x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow (x-3)\cdot(x+1)=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=3$$

Disse værdier indsættes i linjens ligning for at finde skæringspunkternes y-værdier:

$x=-1:\quad y=-1-1=-2$

$x=3:\quad y=3-1=2$

Så skæringspunkterne er $\underline{\underline{(-1,-2)\ og\ (3,2)}}$

24. maj 2011: Delprøven MED hjælpemidler

<u>*Opgave 7:*</u> $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

a) Projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er en vektor parallel med $\vec{b}$, og den bestemmes ved:

$$\overrightarrow{a_b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\cdot\vec{b} = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}\right|^2}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{5\cdot 6 - 10\cdot 8}{\sqrt{\left(6^2+8^2\right)}^2}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{-50}{100}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}}}$$

b) Arealet af parallelogrammet udspændt af de to vektorer bestemmes ved hjælp af determinanten:

$$A = \left|\det\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right| = \left\|\begin{matrix} 5 & 6 \\ -10 & 8 \end{matrix}\right\| = \left|5\cdot 8 - (-10)\cdot 6\right| = \left|40+60\right| = \underline{\underline{100}}$$

<u>*Opgave 8:*</u> Trekant BCT er en retvinklet trekant med den rette vinkel B.

a) I forhold til den spidse vinkel C kender man den hosliggende katete og hypotenusen, så man skal bruge cosinus og får:

$$\cos\left(\angle TCB\right) = \frac{r}{r+h}$$

$$\angle TCB = \cos^{-1}\left(\frac{6371km}{6371km + 0,828km}\right) = 0,923688378826° \approx \underline{\underline{0,924°}}$$

b) Da det er en retvinklet trekant, kan man benyttes Pythagoras:

$$\left|CT\right|^2 = \left|BC\right|^2 + \left|TB\right|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left|TB\right|^2 = \left|CT\right|^2 - \left|BC\right|^2$$

$$\left|TB\right| = \sqrt{(r+h)^2 - r^2} = \sqrt{(6371km + 0,828km)^2 - (6371km)^2} = 102,718360501km \approx \underline{\underline{102,7km}}$$

Dvs. at man (med en kikkert) vil have udsigt knap 103km i alle retninger fra toppen af bygningen.

Opgave 9:

a) Tabellens værdier indskrives i et regneark på TI-n'spire med år efter 1975 i liste a[] og antal bedrifter i liste b[], og der laves eksponentiel regression (menu → statistik → stat-beregning →eksponentiel regression) med liste b[] som funktion af liste a[].
Det giver: $\underline{\underline{N(t) = 65375 \cdot 0{,}92358^t}}$

b) $$T_{½} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(a)} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(0{,}98)} = 34{,}3096184915$$
Dvs. at det samlede antal malkekøer i Danmark halveres for hvert $\underline{\underline{34.\text{ år}}}$

c) *M(t)* angiver antallet af malkekøer i Danmark, og *N(t)* angiver antallet af landbrugsbedrifter med malkekøer, så kvotientfunktionen $\frac{M(t)}{N(t)}$ må altså angive det gennemsnitlige antal malkekøer pr. bedrift. Man har altså:

$$G(t) = \frac{1106000 \cdot 0{,}98^t}{65375 \cdot 0{,}92358^t} = \frac{1106000}{65375} \cdot \left(\frac{0{,}98}{0{,}92358}\right)^t = 16{,}917722494 \cdot 1{,}061077723^t = \underline{\underline{16{,}92 \cdot 1{,}061^t}},$$

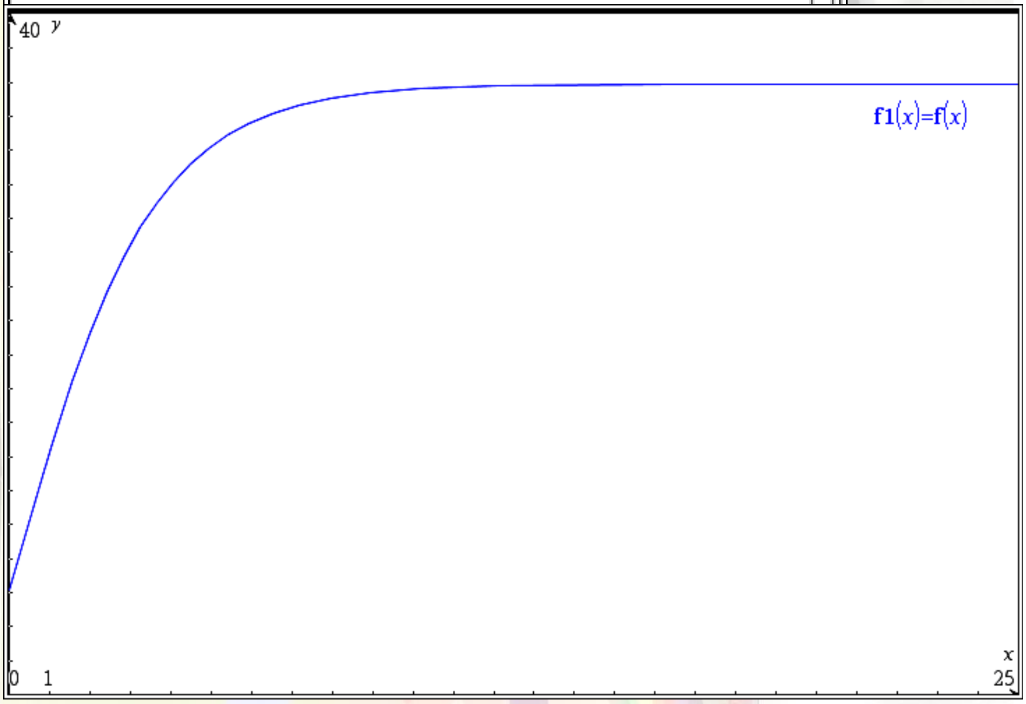
hvor antallet af køer blev opskrevet stykvis og ikke som antal tusinder, dvs. den nye funktion fortæller, at der i 1975 var knap 17 køer i gennemsnit pr. landbrugsbedrift med malkekøer.
Funktionen viser, at det gennemsnitlige antal malkekøer pr. landbrugsbedrift med malkekøer i perioden vokser med $\underline{\underline{6{,}1\%\text{ om året}}}$.

Opgave 10: $f(x) = 35{,}9 \cdot \left(1 - 0{,}493 \cdot e^{-0{,}499 \cdot x}\right)^{2{,}604}$; $0 \le x \le 25$

x er palmernes alder målt i år. f(x) er udbyttet pr. hektar målt i ton.

a) På TI n’spire defineres funktionen og grafen indtegnes under henholdsvis ’Beregninger’ og ’Grafer’:

$f(x) := 35.9 \cdot \left(1 - 0.493 \cdot e^{-0.499 \cdot x}\right)^{2.604}$ *Udført*



Når palmerne er 10 år gamle svarer det til x = 10, så på TI n’spire indtastes:

$f(10)$ 35.5871879516

Da man ser på én hektar, har man altså, at udbyttet er 35,6 tons

b) Væksthastigheden i udbyttet pr. hektar, når palmerne er 5 år gamle, er differentialkvotienten i 5, og den bestemmes på TI n’spire ved:

$\frac{d}{dx}(f(x))|x=5$ 1.7749835378

Dvs. at væksthastigheden i udbyttet fra en hektar er 1,77 tons pr. år

Opgave 11: A(0,32,0) ; B(32,0,0) ; C(32,32,0) ; D(9,23,23) ; E(23,9,23) ; F(23,23,23) ; G(16,16,14)

Planen β der indeholder *BCFE* har ligningen $23x+9z-736=0$

a) Afstanden fra punkt til plan bestemmes:

$$dist(G,\beta)=\frac{|23\cdot16+9\cdot14-736|}{\sqrt{23^2+9^2}}cm=\underline{\underline{9{,}79829359516cm}}$$

b) En ligning for planen, der indeholder sidefladen CADF kan bestemmes ud fra to vektorer, der udspænder planen, og som kan bruges til at bestemme en normalvektor for planen:

$$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}32-0\\32-32\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32\\0\\0\end{pmatrix}\qquad\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}9-0\\23-32\\23-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-9\\23\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}0\cdot23-0\cdot(-9)\\0\cdot9-32\cdot23\\32\cdot(-9)-0\cdot9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-736\\-288\end{pmatrix}$$

Som normalvektor vælges en vektor parallel med krydsproduktet, der fremkommer ved at dividere koordinaterne med -32: $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\23\\9\end{pmatrix}$

Punktet A ligger i planen, så ligningen bliver:

$$\alpha:\ 0\cdot(x-0)+23\cdot(y-32)+9\cdot(z-0)=0\quad\Leftrightarrow\quad\underline{\underline{23y+9z-736=0}}$$

c) Da man kender en normalvektor for begge planer, kan vinklen mellem planerne bestemmes ved:

$$\cos v=\frac{\overrightarrow{n_\alpha}\cdot\overrightarrow{n_\beta}}{|\overrightarrow{n_\alpha}|\cdot|\overrightarrow{n_\beta}|}$$

$$v=\cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix}0\\23\\9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}23\\0\\9\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0\\23\\9\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}23\\0\\9\end{pmatrix}\right|}\right)=$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{0\cdot23+23\cdot0+9\cdot9}{\sqrt{0^2+23^2+9^2}\cdot\sqrt{23^2+0^2+9^2}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{81}{529+81}\right)=\underline{\underline{82{,}3693344086°}}$$

Opgave 12: $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(x) \quad ; \quad x > 0$

a) For at bestemme monotoniforholdene skal der først ses på nulpunkter og fortegn for den afledede funktion, der bestemmes ved at differentiere funktionen ved hjælp af produktreglen:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} \cdot \ln(x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \cdot \left(1 - \ln(x)\right)$$

Nulpunkter bestemmes:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x^2} \cdot \left(1 - \ln(x)\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \ln(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = e$$

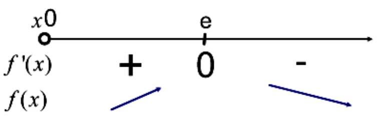
Ved den anden biimplikation er nulreglen benyttet, og her ses det, at kun den anden faktor kan være nul, da brøkens tæller aldrig kan blive 0.

Fortegnene for den afledede funktion bestemmes:

$$f'(1) = \frac{1}{1^2} \cdot \left(1 - \ln(1)\right) = 1 > 0$$

$$f'(3) = \frac{1}{3^2} \cdot \left(1 - \ln(3)\right) = -0{,}011 < 0$$

Så fortegnsskemaet bliver:



Dvs. at: <u>f er voksende i intervallet]0;e].</u>
<u>f er aftagende i intervallet [e;∞[</u>

Dette kunne også være fundet på TI n'spire ved at se på den anden afledede fortegn det sted, hvor den første afledede har nulpunkt:

$f(x) := \frac{1}{x} \cdot \ln(x)$	*Udført*
$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(f(x)) = 0, x\right)$	$x = e$
$\frac{d^2}{dx^2}(f(x)) \mid x = e$	-0.049787068368

Da fortegnet for den anden afledede er negativt, har funktionen lokalt maksimum i x=e, og ud fra dette kan monotoniforholdene angives.

b) Først skal man finde ud af, hvor punktmængden M ligger.
Hvis man skal gøre det ud fra funktionsforskriften, er det nulpunkterne for funktionen, der er vigtige: $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} \cdot \ln(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$

Da dette sted ligger i et interval, hvor funktionen er voksende, må grafen for f altså ligge under 1. aksen i]0,1[og derefter over 1. aksen i]1;∞[(der er ikke flere nulpunkter).
Og dermed må 1 være den nedre grænse i det bestemte integral, der angiver arealet:

$\int_1^{10} f(x)\, dx$	2.65094905519

Dvs. at $\underline{\underline{A_M = 2{,}65094905519}}$

<u>Opgave 13:</u> $\frac{dN}{dt} = 0,00526 \cdot N \cdot (209 - N)$ Oplysning: Efter 30 døgn var der 103 smittede.

a) Når antallet af smittede er 100, kan man bestemme væksthastigheden ved indsættelse i differentialligningen:

$$\frac{dN}{dt} = 0,00526 \cdot 100 \cdot (209 - 100) = 0,526 \cdot 109 = 57,334$$

Dvs. at <u>antallet af smittede vokser med 57 individer pr. døgn, når der er 100 smittede.</u>

b) Det er en differentialligning, der beskriver logistisk vækst, og den fuldstændige løsning er:

$$N(t) = \frac{209}{1 + c \cdot e^{-0,00526 \cdot 209 \cdot t}} = \frac{209}{1 + c \cdot e^{-1,09934 \cdot t}}$$

Da man kender antallet af smittede efter 30 døgn, kan man bestemme konstanten c:

$$103 = \frac{209}{1 + c \cdot e^{-1,09934 \cdot 30}} \Leftrightarrow 1 + c \cdot e^{-1,09934 \cdot 30} = \frac{209}{103} \Leftrightarrow c = \frac{\frac{209}{103} - 1}{e^{-1,09934 \cdot 30}} = 2,165646 \cdot 10^{14}$$

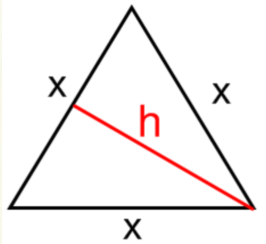
Dvs. at den søgte løsning er:

$$\underline{\underline{N(t) = \frac{209}{1 + 2,166 \cdot 10^{14} \cdot e^{-1,09934 \cdot t}}}}$$

Tallet 209 er den øvre grænse for den logistiske vækst, dvs. at <u>antallet af smittede ender med på sit højeste at være 209.</u>

<u>Opgave 14:</u> $1 \le x \le 5$

a) Rumfanget af beholderen er produktet af endefladens areal og højden, så først skal endefladens areal bestemmes. Da det er en ligesidet trekant, kan man opdele den i to retvinklede trekanter og dermed bestemme højdens længde ved hjælp af Pythagoras:



$$x^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + h^2 \quad \Leftrightarrow \quad h^2 = \frac{3}{4} \cdot x^2$$

$$h = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x$$

Så arealet af endefladen er:

$$A_{endeflade} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x \cdot x = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x^2$$

Så rumfanget er:

$$V = A_{endeflade} \cdot y = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x^2 \cdot y$$

Når x = 2 og y = 5 har man:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 \cdot 5 = \underline{\underline{5 \cdot \sqrt{3}}}$$

b) Når rumfanget skal være 1m^3 , har man:

$$1=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot x^2\cdot y \quad \Leftrightarrow \quad y=\frac{4}{\sqrt{3}\cdot x^2}$$

Overfladen består af to endeflader og tre sideflader.
Sidefladerne er rektangler, og hver af dem har arealet: $A_{sideflade}=x\cdot y$

Så det samlede overfladeareal er:

$$O=2\cdot A_{endeflade}+3\cdot A_{sideflade}=$$

$$2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot x^2+3\cdot x\cdot y=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x^2+3x\cdot\frac{4}{\sqrt{3}\cdot x^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x^2+4\cdot\frac{3}{\sqrt{3}}\cdot\frac{x}{x^2}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x^2+4\cdot\frac{\sqrt{3}}{x}}}$$

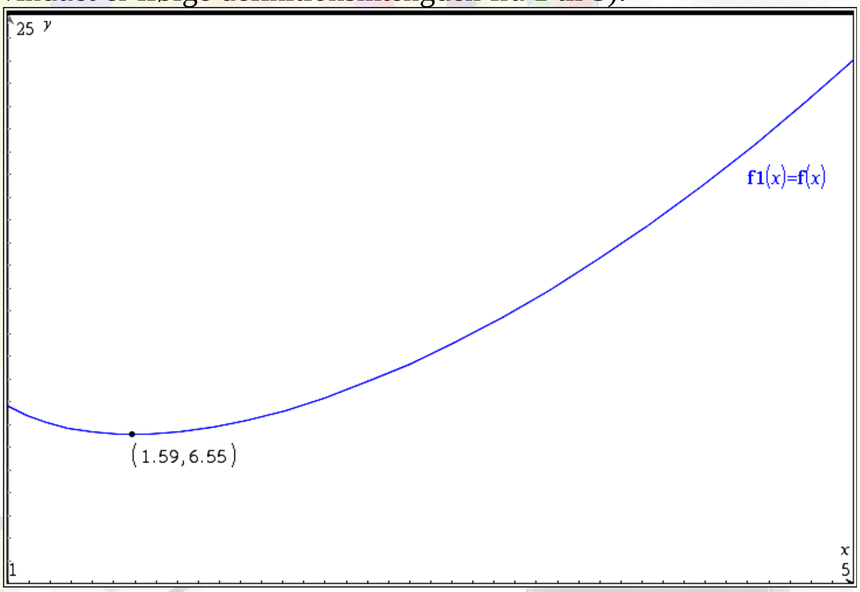
c) For at finde den x-værdi, der gør beholderens overfladeareal mindst muligt, defineres funktionen, og der ses på den første og anden afledede:

$f(x):=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x^2+4\cdot\frac{\sqrt{3}}{x}$	*Udført*
$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(f(x))=0,x\right)$	$x=2^{\frac{2}{3}}$
$\frac{d^2}{dx^2}(f(x))\mid x=2^{\frac{2}{3}}$	5.19615242271

Da den anden afledede er positiv det sted, hvor den første afledede har nulpunkt, er der lokalt minimum her, og dermed er beholderens overfladeareal mindst muligt, når

$$x=\underline{\underline{2^{\frac{2}{3}}}}\approx 1,5874$$

Det kunne også have været løst grafisk ved at indtegne grafen og bruge 'Undersøg grafer'→'Minimum' og placere grænserne på hver side af det sted, hvor minimumspunktet ses at være (vinduet er ifølge definitionsmængden fra 1 til 5):



11. august 2011: Delprøven UDEN hjælpemidler

<u>*Opgave 1:*</u> $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Arealet af det parallelogram, de to vektorer udspænder, beregnes ved hjælp af determinanten:

$$A = \left|\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right| = \left\|\begin{matrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{matrix}\right\| = |5 \cdot 6 - 4 \cdot 3| = |18| = \underline{\underline{18}}$$

<u>*Opgave 2:*</u> $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x$

Den afledede funktion bestemmes ved at differentiere ledvist:

$$f'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 2x + 3 = \underline{\underline{6x^2 - 2x + 3}}$$

<u>*Opgave 3:*</u> $m(t) = 124 \cdot t + 4783 \qquad 0 \le t \le 33$

t er tiden i år efter 1975.

m(t) er den gennemsnitlige årlige mælkeydelse pr. ko (målt i kg).

Det er en lineær sammenhæng, så man har:

Konstanten 4783 fortæller, at <u>i 1975 var den gennemsnitlige årlige mælkeydelse pr. ko 4783kg</u>

Konstanten 124 fortæller, at <u>siden 1975 er den gennemsnitlige årlige mælkeydelse pr. ko vokset med 124kg om året.</u>

<u>*Opgave 4:*</u> $\frac{dy}{dx} = 2x + xy \qquad P(1,3)$

For at bestemme ligningen for tangenten til grafen for *f* i punktet P, skal man kende punktets koordinater (hvilket man gør) samt tangentens hældning.

Hældningen kan bestemmes ved indsættelse i differentialligningen, da venstresiden netop angiver tangenthældningen i det pågældende punkt:

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 5$$

Nu kendes både punkt og hældning, så tangentligningen bliver:

$$y - y_0 = a \cdot \left(x - x_0\right)$$

$$y - 3 = 5 \cdot \left(x - 1\right) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = 5x - 2}}$$

Opgave 5: $\int \frac{2x}{x^2+3}dx$.

Dette ubestemte integral bestemmes ved at foretage substitutionen:

$$t = x^2+3$$

$$\frac{dt}{dx} = 2x$$

$$dt = 2x \cdot dx$$

Ovenstående indsættes, så integralet kun kommer til at indeholde t, hvorefter der integreres og efterfølgende vendes tilbage til x:

$$\int \frac{2x}{x^2+3}dx = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + k = \underline{\underline{\ln\left(x^2+3\right)+k}}$$

Numerisktegnet er fjernet, da udtrykket i parentesen altid er positivt.

Opgave 6: $3x + h = 3 \quad l = 2x$

Kassens rumfang er: $V = h \cdot l \cdot b = (3-3x) \cdot 2x \cdot x = \underline{\underline{-6x^3+6x^2}}$

11. august 2011: Delprøven MED hjælpemidler

Opgave 7: Løst med Maple:

a) Det er oplyst, at sammenhængen er $V = b \cdot L^a$. Der er altså tale om potensvækst (V er laksens vægt og L er dens længde), og da man har mere end to punkter, skal der anvendes regression:

restart

with(*Gym*) :

Længde := [50, 60, 70, 80, 90, 100, 105] :

Vægt := [1.29, 2.19, 3.47, 5.11, 7.45, 10.36, 12.05] :

$V(L)$:= *PowReg*(*Længde*, *Vægt*, *L*) :

$V(L) = 0.00000954156327653745\ L^{3.01581178365513}$

Dvs. at $\underline{\underline{a = 3.01581}}$ og $\underline{\underline{b = 9.54156 \cdot 10^{-6}}}$

b) En længde på 87cm svarer til $L = 87$, så man udregner:

$V(87) = 6.74286634659361$

Dvs. at vægten af en laks på 87cm er $\underline{\underline{6.74\ kg}}$

En vægt på 2,56kg svarer til $V = 2.56$, så man skal løse ligningen $V(L) = 2.56$:
Da det er en potensfunktion (som Maple kan have problemer med) anvendes den numeriske ligningsløser:

$V(L) = 2.56 \xrightarrow{\text{solve}} 63.10340516$

Dvs. længden er $\underline{\underline{63\ cm}}$

c) Da det er potensvækst er sammenhængen mellem den procentvise ændring i uafhængig (L) og afhængig (V) variabel givet ved:

$(1 + r_V) = (1 + r_L)^a$

Så man har:

$(1 + r_V) = (1 + 0.25)^{3.01581178365513} \xrightarrow{\text{solve for r\_\_V}} [[r_V = 0.9600283780]]$

Dvs. at laksens vægt øges med $\underline{\underline{96\ \%}}$, når længden øges med 25%

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Løst med n'spire:

$V = b \cdot L^a$ Der er altså tale om potensvækst (V er laksens vægt og L er dens længde):

Laksens længde (cm)	50	60	70	80	90	100	105
Laksens vægt (kg)	1,29	2,19	3,47	5,11	7,45	10,36	12,05

a) Tabellens værdier indskrives i et regneark på TI-n'spire med laksens længde i liste a[] og laksens vægt i liste b[], og der laves potensregression (menu → statistik → stat-beregning →potensregression) med liste b[] som funktion af liste a[]. Resultatet gemmes som f1.

		B	C	D
◆				=PowerRe
1	50	1.29	Titel	Potensre…
2	60	2.19	RegEqn	a*x^b
3	70	3.47	a	9.54156…
4	80	5.11	b	3.01581…
5	90	7.45	r²	0.99969…
6	100	10.36	r	0.99984…
7	105	12.05	Resid	{0.02119…
8			ResidTra…	{0.01657…

Det bemærkes, at lommeregneren i forhold til modellen bytter om på *a* og *b*, så man har:

$\underline{\underline{a = 3{,}0158 \; og \; b = 9{,}5416 \cdot 10^{-6}}}$ (potensen til b ses, når man markerer cellen)

b) Når laksen er 87cm lang, er L = 87, og da funktionen er gemt under f1, indtastes på TI n'spire:

$f1(87) \quad 6.7428663454$

Dvs. at en 87cm lang laks vejer 6,74kg

Når vægten er 2,56kg, er V(L)=2,56, hvilket på TI n'spire løses ved:

$\text{solve}(f1(x)=2.56,x) \quad x=63.1034051673$

Dvs. at en laks på 2,56kg er 63,1cm lang

c) Da det er potensvækst er sammenhængen mellem den procentvise ændring i uafhængig (L) og afhængig (V) variabel givet ved:

$(1+r_V) = (1+r_L)^a$

Så man har:

$r_V = (1+r_L)^a - 1 = (1+0{,}25)^{3{,}0158} - 1 = 1{,}25^{3{,}0158} - 1 = 0{,}96002322 \approx 96\%$

Dvs. at vægten øges med 96%, når længden øges med 25%.

$$\frac{f1(1.25 \cdot x)}{f1(x)} - 1 \quad 0.960028378087$$

<u>*Opgave 8:*</u> $\Delta ABC: \quad |AB| = 8 \quad ; \quad |BC| = 12 \quad ; \quad |AC| = 16$

a) Da man kender alle tre sidelængder, kan man bestemme en hvilken som helst vinkel ved hjælp af cosinusrelationerne:

$$\cos A = \frac{|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2}{2 \cdot |AB| \cdot |AC|}$$

$$A = \cos^{-1}\left(\frac{8^2 + 16^2 - 12^2}{2 \cdot 8 \cdot 16}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{11}{16}\right) = \underline{\underline{46{,}5674634422°}}$$

b) Trekant ABH er retvinklet, og man kender længden af hypotenusen.
Så kan længden af den katete, der er hosliggende i forhold til vinkel A, bestemmes ved hjælp af cosinus:

$$\cos A = \frac{|AH|}{|AB|} \quad \Leftrightarrow \quad |AH| = |AB| \cdot \cos A = 8 \cdot \cos(46{,}5674634422°) = 5{,}5$$

Nu kendes en vinkel og de to hosliggende sider, og arealet af trekanten kan hermed bestemmes:

$$T_{ABH} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AH| \cdot \sin(A) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5{,}5 \cdot \sin(46{,}5674634422°) = \underline{\underline{15{,}9760563031}}$$

c) Uanset hvor punktet G placeres på linjestykket AC, vil højden fra B i trekant ABG være den samme som i trekant ABH.
Da trekant ABH er retvinklet, kan længden af højden bestemmes ved:

$$h_B = |BH|$$

$$\sin A = \frac{|BH|}{|AB|} \quad \Leftrightarrow \quad |BH| = \sin(46{,}5674634422°) \cdot 8 = 5{,}80947501931$$

Da arealet af trekant ABG skal være lig 20, har man:

$$T_{ABG} = \frac{1}{2} \cdot |BH| \cdot |AG| \quad \Leftrightarrow \quad |AG| = \frac{2 \cdot T_{ABG}}{|BH|} = \frac{2 \cdot 20}{5{,}80947501931} = \underline{\underline{6{,}88530372659}}$$

Opgave 9: For at kunne tegne boxplots, skal man kende største og mindste observationer samt kvartilsættet.

For oksekødspølserne får man:

111 131 132 149 149 153 157 158 184 190

Da antallet af observationer er lige bestemmes medianen som gennemsnittet af de to midterste værdier (markeret med rødt), dvs. medianen er 151.

Sættet deles midt over, og da hver halvdel nu indeholder et ulige antal observationer, er den nedre kvartil den midterste af de 5 observationer (markeret med blåt).

Dvs. den nedre kvartil er 132, og den øvre kvartil er 158.

Mindste observation er 111 og største observation er 190.

For kyllingepølserne foretages det samme:

86 94 102 132 135 142 143 144 146 152

Mindste observation: 84

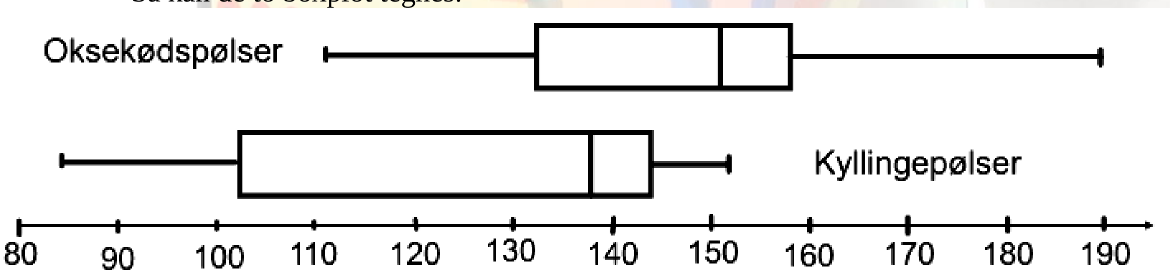
Nedre kvartil: 102

Median: 138,5

Øvre kvartil: 144

Største observation: 152

Så kan de to boxplot tegnes:



kcal/100g

Der er nogenlunde lige stor forskel i energiindholdet mellem den mest og den mindst energirige pølse for de to slags pølser, men tætheden for kyllingepølser er mere ujævnt fordelt, hvor de 5 mindst energirige fordeler sig over et stort område, og de 5 mest energirige ligger meget tæt.

Det ser ikke ud til, at kyllingepølser kan blive så energirige som de mest energirige oksekødspølser, da den største observation blandt kyllingepølserne ligger omtrent ved medianen for oksekødspølserne.

Og det ser ikke ud til, at oksekødspølser kan komme til at indeholde lige så lidt energi som de mindst energirige kyllingepølser, da den mindste observation for oksekødspølserne ligger over den nedre kvartil for kyllingepølserne.

Opgave 10: $N(t) = b \cdot a^t$. t er tiden i sekunder efter første detektion. N(t) er antal inficerede computere.

a) Det er oplyst, at $N(10) = 110 \quad og \quad N(30) = 160$

Dette giver to ligninger med to ubekendte:

$$\left.\begin{array}{l} 110 = b \cdot a^{10} \\ 160 = b \cdot a^{30} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a^{30}}{a^{10}} = \frac{160}{110} \quad \Leftrightarrow \quad a = \sqrt[20]{\frac{160}{110}} = 1,01891126754$$

b bestemmes:

$$110 = b \cdot a^{10} \Leftrightarrow b = \frac{110}{1,01891126754^{10}} = 91,2071817348$$

Dvs.:

$$\underline{\underline{N(t) = 91,21 \cdot 1,0189^t}}$$

Det kunne også have været løst på TI n'spire ved:

solve$\left(110=b\cdot a^{10} \text{ and } 160=b\cdot a^{30},a,b\right)$

$a=-1.01891126754$ and $b=91.2071817348$ or $a=1.01891126754$ and $b=91.2071817348$

Her ville man så skulle smide den ene løsning væk, da a > 0.

b) Når t=5 har man:

$$N(5) = 91,2071817348 \cdot 1.01891126754^5 = 100,163815775$$

Dvs. at efter 5 sekunder var <u>100 computere inficeret.</u>

Da man kender fremskrivningsfaktoren, kan fordoblingstiden beregnes:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1,01891126754)} = 36,9980943966$$

Dvs. at <u>fordoblingstiden er 37 sekunder</u>

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

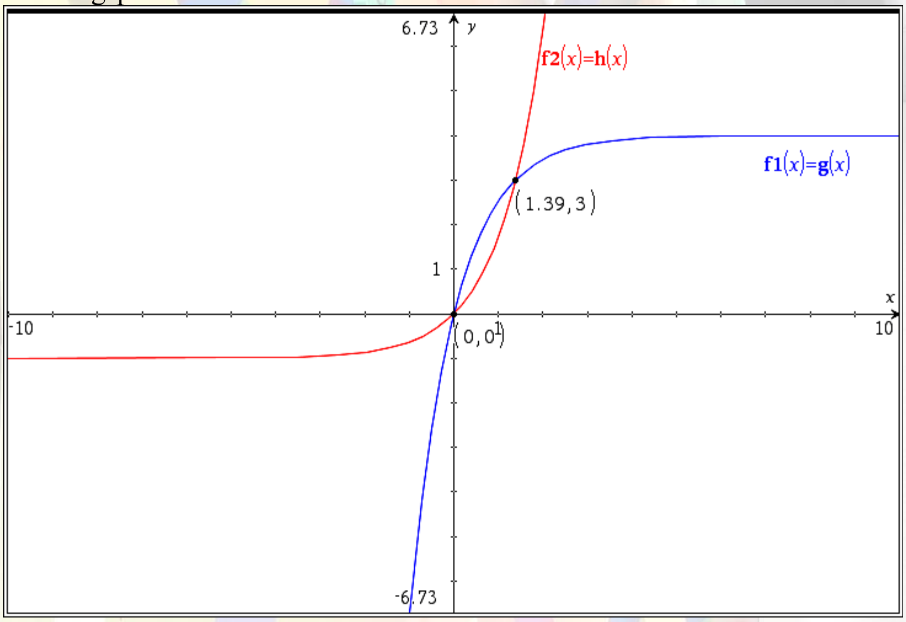
<u>*Opgave 11:*</u> $g(x) = 4 \cdot \left(1 - e^{-x}\right) \qquad h(x) = e^{x} - 1$

a) Først defineres de to funktioner, og deres skæringspunkter bestemmes på TI n'spire:

$g(x) := 4 \cdot \left(1 - e^{-x}\right)$	*Udført*
$h(x) := e^{x} - 1$	*Udført*
$\text{solve}(h(x) = g(x), x)$	$x = 0$ or $x = 2 \cdot \ln(2)$
$\text{solve}(h(x) = g(x), x)$	$x = 0.$ or $x = 1.38629436112$

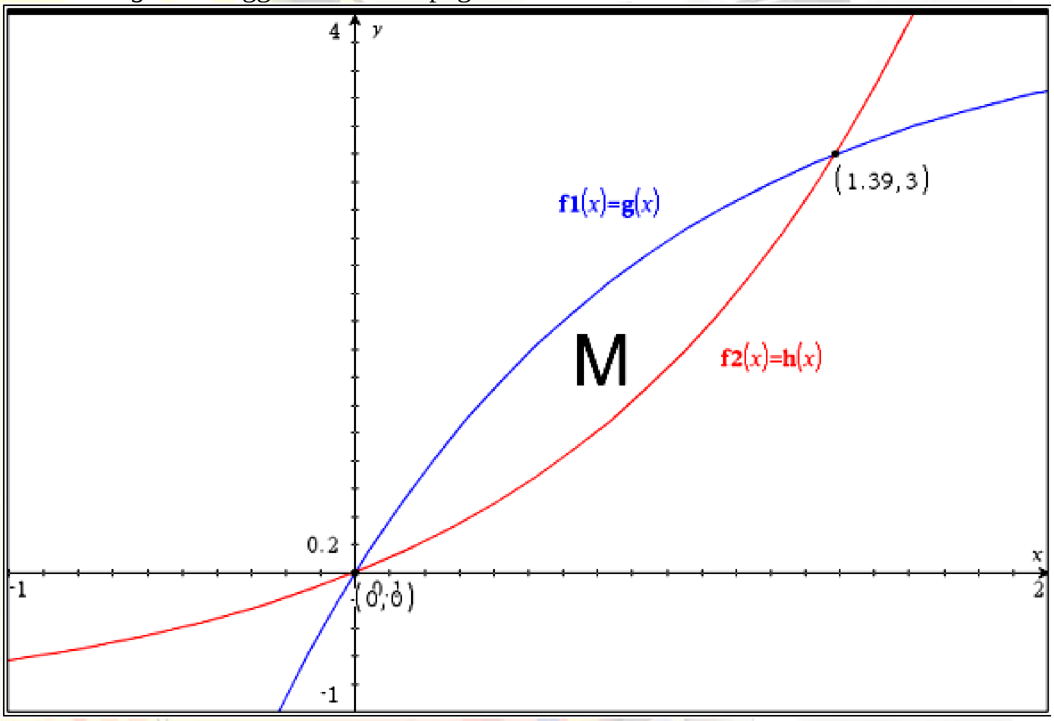
Dvs. <u>førstekoordinaterne til skæringspunkterne er 0 og 1,38629</u>

Graferne kan tegnes på TI n'spire, og skæringspunkterne kan bestemmes ved 'undersøg grafer' og 'skæringspunkt':



Problemet med denne metode er, at man ikke kan være sikker på, at alle skæringspunkter ses i det pågældende vindue (selvom det i dette tilfælde virker ret tydeligt).

b) Grafen for *g* ses at ligge øverst i det pågældende interval:



Så arealet af punktmængden M er (indtastet på TI n'spire):

$$\int_0^{2\cdot\ln(2)} (g(x)-h(x))\,dx \qquad 2\cdot(5\cdot\ln(2)-3)$$

$$\int_0^{2\cdot\ln(2)} (g(x)-h(x))\,dx \qquad 0.931471805599$$

Så $\underline{\underline{A_M = 0{,}931471805599}}$

c) Man kan differentiere g(x) på lommeregneren, men det kan også gøre ved at bemærke, at det andet led i parentesen er en sammensat funktion:

$$g(x) = 4\cdot\left(1-e^{-x}\right) = 4-4\cdot e^{-x}$$

$$g'(x) = 0-4\cdot(-1)\cdot e^{-x} = \underline{\underline{4\cdot e^{-x}}}$$

Da ekponentialfunktioner kun kan give positive værdier, er $g'(x) > 0 \quad \forall \ x \in \mathbb{R}$

Og <u>da den afledede funktion af g er positiv for alle tal, er funktionen *g* voksende.</u>

Opgave 12: C(0,0,5) og P(2,-1,3). $\alpha: \ 3x+6y-6z+3=0$

a) For at bestemme kuglens ligning, skal man kende centrums koordinater og radius. Man kender centrum, og da P ligger på kuglen, kan radius beregnes ved:

$$r=|CP|=\sqrt{(2-0)^2+(-1-0)^2+(3-5)^2}=\sqrt{4+1+4}=\sqrt{9}=3$$

Dvs. kuglens ligning er:

$$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-5)^2=3^2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x^2+y^2+(z-5)^2=9}}$$

For at angive ligningen for en plan, skal man kende et punkt i planen og en normalvektor for planen.

Punktet P ligger i planen, og da planen tangerer kuglen, er $\overrightarrow{PC}=\begin{pmatrix}0-2\\0-(-1)\\5-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$ en normalvektor til planen. Dermed er tangentplanens ligning:

$$-2\cdot(x-2)+1\cdot(y-(-1))+2\cdot(z-3)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{-2x+y+2z-1=0}}$$

b) Da α er en tangentplan, vil en normalvektor til α være parallel med linjen gennem C og Q og kan dermed bruges som retningsvektor i parameterfremstillingen for linjen gennem C og Q.

En normalvektor for planen aflæses ud fra dens ligning til: $\overrightarrow{n_{\alpha,1}}=\begin{pmatrix}3\\6\\-6\end{pmatrix}$.

En anden og kortere normalvektor er så: $\overrightarrow{n_\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$

Denne vektor bruges som retningsvektor og C som punkt på linjen, og en parameterfremstilling for linjen gennem C og Q bliver så:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

Skæringen mellem denne linje og planen α vil så give røringspunktet Q. Skæringen bestemmes ved at indsætte linjens koordinater i planens ligning:

$$3\cdot(0+t)+6\cdot(0+2t)-6\cdot(5-2t)+3=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$3t+12t-30+12t+3=0 \quad \Leftrightarrow \quad 27t=27 \quad \Leftrightarrow \quad t=1$$

Denne værdi for parameteren indsættes i linjens parameterfremstilling:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$ Dvs. <u>røringspunktet er Q(1,2,3)</u>

<u>*Opgave 13:*</u> $\frac{dN}{dt} = 0{,}82 \cdot 0{,}88^t \cdot N \quad ; \quad N(10) = 266$

t er tiden målt i døgn, og N er antallet af kræftceller målt i millioner.

a) For at kunne bestemme væksthastigheden til et givet tidspunkt ud fra differentialligningen, skal man til dette tidspunkt også kende N. Og da man netop kende N(10)=266, har man:

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}82 \cdot 0{,}88^{10} \cdot 266 = 60{,}7466328872$$

Dvs. at væksthastigheden efter 10 døgn er <u>60,7 millioner kræftceller pr. døgn.</u>

b) Da man kender differentialligningen og funktionsværdien til et givet tidspunkt, kan man på TI n'spire bestemme løsningen ved:

$\text{deSolve}\left(n'=0.82\cdot(0.88)^t\cdot n \text{ and } n(10)=266,t,n\right)$	$n=1587.58423307\cdot(0.001637474061)^{(0.88)^t}$

Dvs. at man har:

$$\underline{\underline{N(t) = 1587{,}58 \cdot 0{,}001637474061^{0{,}88^t}}}$$

<u>*Opgave 14:*</u> a) Symønstret består af en halvcirkel og 3 rette linjestykker, så omkredsen er:

$$O_{symønster} = O_{halvcirkel} + O_{rette\,sider} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\pi\cdot x + 2\cdot y + 2x = \underline{\underline{2y + (\pi+2)\cdot x}}$$

b) Når omkredsen skal være 100cm, har man:

$$100 = 2y + (\pi+2)\cdot x \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{100-(\pi+2)\cdot x}{2}$$

Arealet består af arealet af rektanglet fratrukket halvcirklens areal, så man har:

$$A_{symønster} = A_{rektangel} - A_{halvcirkel} = y\cdot 2x - \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot x^2 = \frac{100-(\pi+2)\cdot x}{2}\cdot 2x - \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot x^2 =$$

$$\left(100-(\pi+2)\cdot x\right)x - \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot x^2 = 100x - 2x^2 - \pi\cdot x^2 - \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot x^2 = \underline{\underline{\left(-2-\frac{3}{2}\cdot\pi\right)\cdot x^2 + 100x}}$$

c) Grafen for arealet er en parabel med benene nedad, så det største areal findes ved toppunktet, og den søgte x-værdi er dermed toppunktets førstekoordinat:

$$x_{max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2\cdot\left(-2-\frac{3}{2}\cdot\pi\right)} = \underline{\underline{7{,}44891277101}}$$

Det kunne også have været fundet grafisk, eller man kan bestemme stedet ud fra den første og den anden afledede:

$a(x):=\left(-2-\frac{3}{2}\cdot\pi\right)\cdot x^2+100\cdot x$	*Udført*
$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(a(x))=0,x\right)$	$x=7.44891277101$
$\frac{d^2}{dx^2}(a(x))\vert x=7.448912771014$	-13.4247779608

Da den anden afledede er negativ, er der det sted, hvor den afledede funktion er 0, et lokalt maksimum.

9. december 2011: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: Udtrykket reduceres bl.a. ved at anvende en kvadratsætning på første led:

$$(a-b)^2+2a(a+b)-b^2=a^2+b^2-2ab+2a^2+2ab-b^2=\underline{\underline{3a^2}}$$

Opgave 2: $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\t\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$

Begge vektorer har uanset værdien af t mindst én koordinat, der ikke er nul, så der er tale om egentlige vektorer. Dermed gælder:

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow 2\cdot(-3)+t\cdot4=0 \Leftrightarrow 4t=6 \Leftrightarrow \underline{\underline{t=\frac{3}{2}}}$$

Opgave 3: $x^2-2x+y^2+6y+z^2+2z+2=0$

Kuglens ligning omskrives, så centrum og radius kan aflæses:

$$(x-1)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=-2+1^2+3^2+1^2=9=3^2$$

Så kan kuglens radius og centrum aflæses til:

$$\underline{\underline{r=3 \text{ og } C(1,-3,-1)}}$$

Opgave 4: $f(x)=b\cdot a^x \qquad f(3)=1 \qquad f(6)=8$

De to kendte funktionsværdier indsættes i funktionsudtrykket, så man får to ligninger med to ubekendte, der benyttes til at finde a-værdien, hvorefter den første af funktionsværdierne benyttes til at finde b-værdien:

$$\left.\begin{array}{l}1=b\cdot a^3\\8=b\cdot a^6\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{8}{1}=\frac{a^6}{a^3} \Leftrightarrow 8=a^{6-3} \Leftrightarrow a^3=8 \Leftrightarrow a=\sqrt[3]{8}=\underline{\underline{2}}$$

b bestemmes:

$$1=b\cdot2^3 \Leftrightarrow \underline{\underline{b=\frac{1}{8}}}$$

Opgave 5: $y = x^2 - 2x - 8$

Parablens skæringspunkter med førsteaksen er de steder, hvor y-værdien er nul, dvs. man får en andengradsligning, der enten kan løses med diskriminantmetoden eller ved at finde to tal, hvis produkt giver -8 (de mulige hele tal er – fortegn ikke medregnet – derfor 1, 2, 4 og 8) og hvis sum er -2.
Først sidstnævnte metode:
Tallene -4 og 2 opfylder betingelserne, så man har:

$0 = x^2 - 2x - 8 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = (x+2)(x-4) \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \vee x = 4$ (nulreglen anvendt i sidste skridt).

Hermed er de søgte koordinatsæt: $\underline{\underline{(-2,0)\ og\ (4,0)}}$

Diskriminantmetoden:

$$0 = x^2 - 2x - 8$$

$$d = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-8) = 4 + 32 = 36 > 0 \ \ dvs.\ 2\,løsninger$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2\cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

Opgave 6: Da rumfanget er 9m^3 har man:

$$9 = h\cdot x\cdot x \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{h = \frac{9}{x^2}}} \qquad \text{(med enheder: } h = \frac{9m^3}{x^2}\text{)}$$

Det samlede areal er så:

$$A = 2\cdot A_{sider} + A_{tag} = 2\cdot h\cdot x + x\cdot x = 2\cdot\frac{9}{x^2}\cdot x + x^2 = \underline{\underline{x^2 + \frac{18}{x}}} \quad \text{(med enheder: } A = x^2 + \frac{18m^3}{x}\text{)}$$

9. december 2011: Delprøven MED hjælpemidler

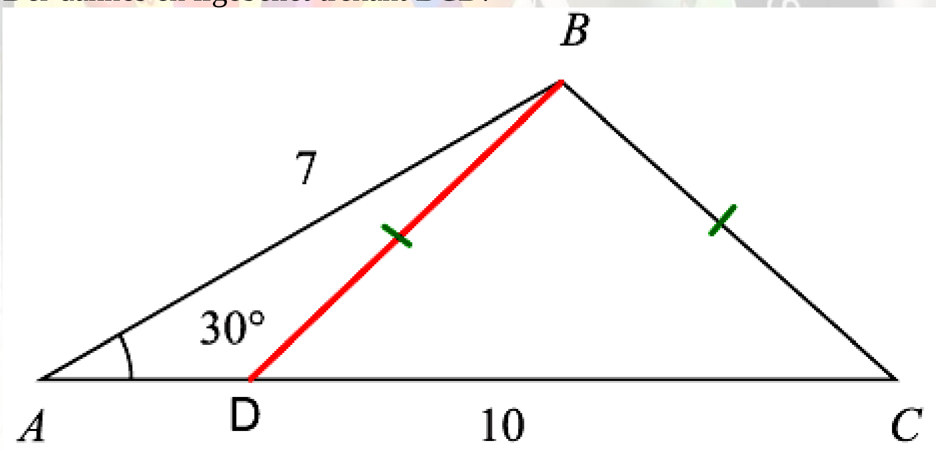
<u>*Opgave 7:*</u> $\Delta ABC: \quad |AC| = 10 \quad |AB| = 7 \quad \angle A = 30°$

a) Man kender en vinkel og de to hosliggende sider, så den modstående side kan beregnes med en cosinusrelation:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos A$$

$$|BC| = \sqrt{7^2 + 10^2 - 2 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \cos(30°)} = \underline{\underline{5,26843842805}}$$

b) Der dannes en ligebenet trekant BCD:



Man kan bestemme arealet af trekant ABD, hvis man kender vinkel B i denne, da man så kender en vinkel og de to hosliggende siders længder.
Vinkel B i trekant ABD kan bestemmes, hvis man først finder vinkel D ved hjælp af sinusrelationerne. Man ved, at $\angle ADB$ er stump, da $\angle BDC$ er spids, fordi $\angle BDC = \angle BCD$ og en trekant ikke kan have to stumpe vinkler.
At $\angle ADB$ er stump udnyttes, når vinklen skal isoleres:

$$\frac{\sin(\angle ADB)}{7} = \frac{\sin A}{|BD|} \Leftrightarrow \frac{\sin(\angle ADB)}{7} = \frac{\sin A}{|BC|}$$

$$\angle ADB = 180° - \sin^{-1}\left(\frac{\sin A}{|BC|} \cdot 7\right) = 180° - \sin^{-1}\left(\frac{\sin(30°)}{5,26843842805} \cdot 7\right) = 138,368788415°$$

Så er $\angle ABD$:

$$\angle ABD = 180° - \angle A - \angle ADB = 180° - 30° - 138,368788415° = 11,6312115855°$$

Så er arealet af ΔABD:

$$T_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BD| \cdot \sin(\angle ABD) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5,26843842805 \cdot \sin(11,6312115855°) = \underline{\underline{3,71762239272}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>*Opgave 8:*</u> $f(x)=b\cdot x^{a}$; $0\le x\le 90$

f(x) er kraftpåvirkningen og x er vinklen:

Vinkel (grader)	20	40	60	80
Kraftpåvirkning (N)	0,035	0,063	0,085	0,10

a) For at bestemme konstanterne indtastes tabellens værdier på TI n'spire under 'Lister og regneark' med vinklerne i liste A og kraftpåvirkningerne i liste B. Da modellen er potensvækst (se forskriften), vælger man 'Statistik'→'Statistiske beregninger'→'Potensregression'. A[] vælges som x-værdier og B[] som y-værdier, og resultatet gemmes under f1:

		B	C	D	E
◆				=PowerRe	
1	20	0.035	Titel	Potensre...	
2	40	0.063	RegEqn	a*x^b	
3	60	0.085	a	0.00359...	
4	80	0.1	b	0.76692...	
5			r²	0.99466...	
6			r	0.99732...	
7			Resid	{-7.7467...	
8			ResidTra...	{-0.0218...	

Det bemærkes, at lommeregneren bytter om på konstanterne, så man har:

$\underline{\underline{a=0,7669296 \ og \ b=0,0035956}}$

b) En vinkel på 45° svarer til x = 45, og da modellens funktionsforskrift er gemt som f1, indtastes:

$f1(45)$ 0.066630774839

Dvs. at <u>kraftpåvirkningen er 0,067N</u>

c) Da det er potensvækst er sammenhængen mellem den procentvise ændring i uafhængig (x) og afhængig (y) variabel givet ved:

$$\left(1+r_y\right)=\left(1+r_x\right)^a$$

Så man har: $r_y=\left(1+r_x\right)^a-1=\left(1+0,30\right)^{0,7669296}-1=1,3^{0,7669296}-1=0,222888=22,3\%$

Dvs. at <u>kraftpåvirkningen øges med 22,3%,</u> når vinklen øges med 30%.

Man kunne også have fundet det ved på TI n'spire først at udregne forholdet mellem kraftpåvirkningen svarende til en vinkel 30% større end en vilkårlig vinkel og kraftpåvirkningen svarende til denne vilkårlige vinkel:

$\dfrac{f1(1.3\cdot x)}{f1(x)}-1$ 0.222887562564

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 9: $T(0,0,520)$ $A(400,0,200)$ $B(280,280,200)$ $C(0,400,200)$

a) For at kunne bestemme en ligning for den plan α, der indeholder tagfladen ABT, skal man kende et punkt i planen (her kan man bruge enten A, B eller T) og en normalvektor for planen.
For at finde en normalvektor bestemmes krydsproduktet mellem to ikke-parallelle vektorer, der udspænder planen:

$$\overrightarrow{TA}=\begin{pmatrix}400-0\\0-0\\200-520\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}400\\0\\-320\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{TB}=\begin{pmatrix}280-0\\280-0\\200-520\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}280\\280\\-320\end{pmatrix}$$

Disse vektorer udspænder planen, men for at gøre udregningerne lidt nemmere, kan man vælge nogle kortere vektorer, der er parallelle med disse:

$$\vec{r_1}=\frac{1}{80}\cdot\overrightarrow{TA}=\begin{pmatrix}5\\0\\-4\end{pmatrix} \qquad \vec{r_2}=\frac{1}{40}\cdot\overrightarrow{TB}=\begin{pmatrix}7\\7\\-8\end{pmatrix}$$

$$\vec{r_1}\times\vec{r_2}=\begin{pmatrix}0\cdot(-8)-(-4)\cdot 7\\-4\cdot 7-5\cdot(-8)\\5\cdot 7-0\cdot 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28\\12\\35\end{pmatrix}=\vec{n}$$

Punktet T anvendes, og med den fundne normalvektor får man:

$$\alpha:\ 28\cdot(x-0)+12\cdot(y-0)+35\cdot(z-520)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{28x+12y+35z-18200=0}}$$

Man kunne også have fundet ligningen ved på TI n'spire at indtaste:

```
solve(c· 520+d=0 and a· 400+c· 200+d=0 and a· 280+b· 280+c· 200+d=0 and d=1,a,b,c)
```

$$a=\frac{-1}{650} \text{ and } b=\frac{-3}{4550} \text{ and } c=\frac{-1}{520} \text{ and } d=1$$

Dette ville dog ikke give en ligning på en form, der var nem at arbejde med, og man ville derfor nok være nødt til at gange ligningen igennem med et passende tal (f.eks. 18200).

b) Tagfladen BCT ligger i planen β med ligningen: $12x+28y+35z=18200$
Når man skal bestemme afstanden fra punktet O(0,0,0) til planen, er det vigtigt at huske at få planen om på den "rigtige" form: $12x+28y+35z-18200=0$

Afstanden er så: $dist(O,\beta)=\dfrac{|12\cdot 0+28\cdot 0+35\cdot 0-18200|}{\sqrt{12^2+28^2+35^2}}=\dfrac{|-18200|}{\sqrt{2153}}=\underline{\underline{392{,}237735621}}$

c) Vinklen mellem to planer svarer til vinklen mellem normalvektorer til planerne, og disse kan aflæses ud fra ligningerne, så man har:

$$\cos v=\frac{\vec{n_\alpha}\cdot\vec{n_\beta}}{|\vec{n_\alpha}|\cdot|\vec{n_\beta}|}=\frac{\begin{pmatrix}28\\12\\35\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}12\\28\\35\end{pmatrix}}{\sqrt{28^2+12^2+35^2}\cdot\sqrt{12^2+28^2+35^2}}=\frac{28\cdot 12+12\cdot 28+35\cdot 35}{12^2+28^2+35^2}=\frac{1897}{2153}$$

$$v=\cos^{-1}\left(\frac{1897}{2153}\right)=\underline{\underline{28{,}2251252797°}}$$

<u>*Opgave 10:*</u> $f(x) = x^2 - 50 \cdot \ln(x) \quad ; \quad x > 0$

a) En ligning for tangenten til grafen for f i punktet (3,f(3)) bestemmes ved på TI n'spire at indtaste:

$f(x):=x^2-50\cdot\ln(x)\vert x>0$	*Udført*
$\text{tangentLine}(f(x),x,3)$	$\frac{-32\cdot x}{3}-50\cdot\ln(3)+41$
$\text{tangentLine}(f(x),x,3)$	$-10.6666666667\cdot x-13.9306144334$

Så tangenten har ligningen: $\underline{\underline{y = -\frac{32}{3} \cdot x - 50 \cdot \ln(3) + 41}}$

b) Da funktionen allerede er defineret, kan monotoniforholdene bestemmes ved at regne på afledede funktionen på lommeregneren. Man kan enten bruge fortegnsskema for den afledede funktion eller regne på første og anden afledede som her:

$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(f(x))=0,x\right)$	$x=5$
$\frac{d^2}{dx^2}(f(x))\vert x=5$	4

Det eneste sted, hvor den afledede funktion giver 0, er x=5, og her er den anden afledede positiv, dvs. det er et lokalt minimumspunkt.
Dermed gælder:
<u>*f* er aftagende i intervallet]0;5]</u>
<u>*f* er voksende i intervallet [5;∞[</u>

c) Linjen med ligningen $y = f'(x_0) \cdot x = \left(2 \cdot x_0 - \frac{50}{x_0}\right) \cdot x$ skal være tangent til grafen for *f*.

Da $f'(x_0)$ netop er hældningen for tangenten til grafen i x_0, vil hældningen automatisk passe. Man skal altså kun sørge for, at y-værdien for funktionen og tangenten er den samme det pågældende sted. Man har altså:

$$x_0^2 - 50 \cdot \ln(x_0) = \left(2x_0 - \frac{50}{x_0}\right) \cdot x_0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0^2 - 50 \cdot \ln(x_0) = 2x_0^2 - 50 \quad \Leftrightarrow$$

$$x_0^2 + 50(\ln(x_0) - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x_0 = 2{,}41824451383}}$$

Til det sidste skridt er anvendt lommeregner:

$\text{solve}\left(x^2+50\cdot(\ln(x)-1)=0,x\right)$	
	$x=2.41824451383$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 11: $\dfrac{dC}{dt} = 0{,}4 - 0{,}02 \cdot C$ C(0) = 0 C(t) er koncentrationen målt i ppm. t er tiden i minutter.

a) Man kan enten genkende differentialligningen som en standardligning med den fuldstændige løsning:

$C(t) = \dfrac{0{,}4}{0{,}02} + c \cdot e^{-0{,}02 \cdot t} = 20 + c \cdot e^{-0{,}02 \cdot t}$,

eller man kan finde løsningen på TI n'spire ved:

deSolve$(c'=0.4-0.02 \cdot c, t, c)$

$c = c2 \cdot (0.980198673307)^t + 20.$

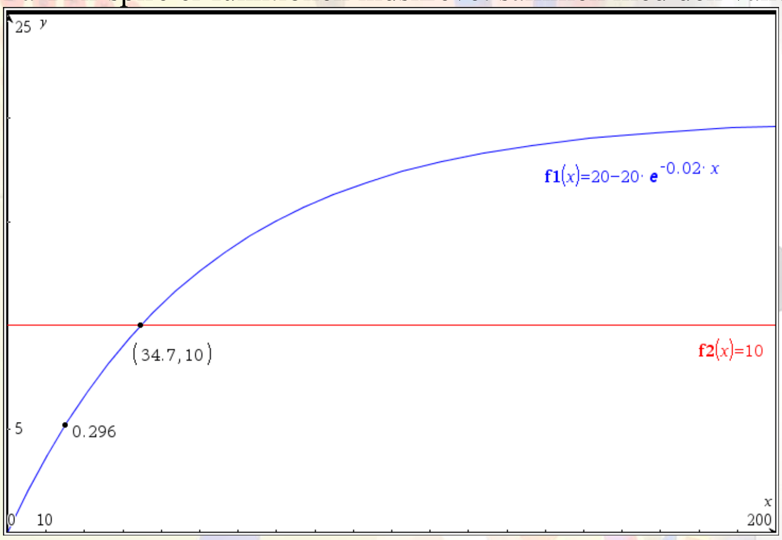
Det er samme resultat, da $e^{-0{,}02} = 0{,}98019867$

Konstanten c bestemmes ud fra oplysningen C(0) = 0:

$0 = 20 + c \cdot e^{-0{,}02 \cdot 0} \quad \Leftrightarrow \quad c = -20$

Dermed er den søgte løsning: $\underline{\underline{C(t) = 20 - 20 \cdot e^{-0{,}02 \cdot t}}}$

b) På TI n'spire er funktionen indskrevet sammen med den vandrette linje y = 10:



Skæringspunktet mellem de to grafer er bestemt ved "Undersøg grafer" og "skæringspunkt", og det fortæller, at <u>koncentrationen er 10 ppm efter 34,7 minutter.</u>

Tidspunktet kunne også have været bestemt ved:

solve$\left(10=20-20 \cdot e^{-0.02 \cdot t}, t\right)$

$t=34.657359028$

c) C'(15) er bestemt på grafen ved at vælge "Undersøg grafer" og "dy/dx", hvorefter grafen og stedet x = 15 er valgt.

Dvs. <u>C'(15) = 0,296</u>, hvilket fortæller, at <u>efter 15 minutter vokser koncentrationen med 0,296 ppm pr. minut</u>

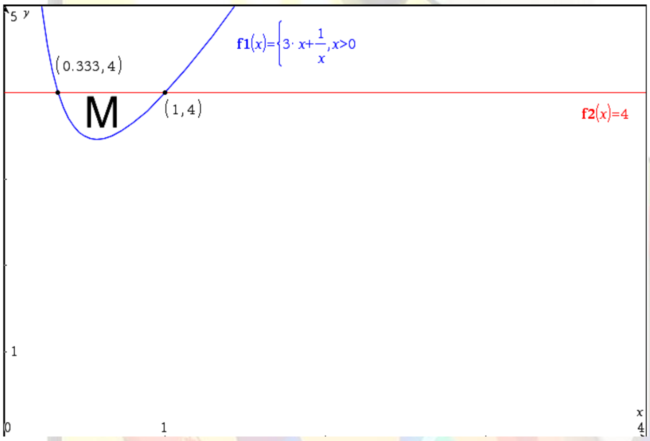
Man kunne også have bestemt værdien med indtastningen:

$\dfrac{d}{dt}\left(20-20 \cdot e^{-0.02 \cdot t}\right)\Big|_{t=15}$

0.296327288273

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 12: a) Grafen for *f* og linjen med ligningen y = 4 indtegnes på TI n'spire, og punktmængden M i første kvadrant identificeres:



Skæringerne er fundet ved 2 gange at bruge "Undersøg grafer"→"Skæringspunkt", hvor grænserne vælges på hver side af det søgte skæringspunkt.

De kan også bestemmes ved:

$$\text{solve}\left(3\cdot x+\frac{1}{x}=4,x\right) \qquad x=\frac{1}{3} \text{ or } x=1$$

I dette område ligger den vandrette linje øverst, så arealet af området kan bestemmes ved:

$$A=\int_{\frac{1}{3}}^{1}\left(4-\left(3x+\frac{1}{x}\right)\right)dx=\left[4x-\frac{3}{2}x^2-\ln|x|\right]_{\frac{1}{3}}^{1}=\left(4\cdot 1-\frac{3}{2}\cdot 1^2-\ln(1)\right)-\left(4\cdot\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2-\ln\left(\frac{1}{3}\right)\right)=$$

$$4-\frac{3}{2}-0-\frac{4}{3}+\frac{1}{6}-\ln(3)=\frac{24+1-8-9}{6}-\ln(3)=\underline{\underline{\frac{4}{3}-\ln(3)}}\approx 0,2347$$

Det kunne også være beregnet ved:

$$\int_{\frac{1}{3}}^{1}\left(4-3\cdot x-\frac{1}{x}\right)dx \qquad \frac{4}{3}-\ln(3)$$

b) Rumfanget af omdrejningslegemet bestemmes ved først at rotere den vandrette linje og derefter grafen for *f* :

$$V=\pi\cdot\int_{\frac{1}{3}}^{1}4^2\,dx-\pi\cdot\int_{\frac{1}{3}}^{1}\left(3x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$$

Det beregnes på TI n'spire:

$$\pi\cdot\int_{\frac{1}{3}}^{1}16\,dx-\pi\cdot\int_{\frac{1}{3}}^{1}\left(3\cdot x+\frac{1}{x}\right)^2 dx \qquad \frac{16\cdot\pi}{9}$$

$$\pi\cdot\int_{\frac{1}{3}}^{1}16\,dx-\pi\cdot\int_{\frac{1}{3}}^{1}\left(3\cdot x+\frac{1}{x}\right)^2 dx \qquad 5.58505360586$$

Dvs. $\underline{\underline{V = 5{,}5851}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 13: $f(x) = 211,4885 - 10,4801 \cdot \left(e^{0,0329 \cdot x} + e^{-0,0329 \cdot x}\right)$

a) Ved jordoverfladen er f(x) = 0, og bredden af buen ved jordoverfladen er altså afstanden mellem funktionens to nulpunkter. Denne afstand bestemmes på TI n'spire ved:

$f(x):=211.4885-10.4801\cdot\left(e^{0.0329\cdot x}+e^{-0.0329\cdot x}\right)$	*Udført*
$\text{solve}(f(x)=0,x)$	$x=-91.2531218737$ or $x=91.2531218737$
$91.25312187367--91.25312187367$	182.506243747

Dvs. buens bredde er 182,5m

b) Buelængden kan beregnes ved $l = \int_a^b \sqrt{\left(f'(x)\right)^2 + 1} \cdot dx$

Da funktionen er defineret på lommeregneren, kan længden beregnes ved:

$\displaystyle\int_{-91.2531218737}^{91.2531218737} \sqrt{\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^2+1}\,dx$	451.255473766

Dvs. at længden af buen er 451,3m

Opgave 14: Da tangentens hældningskoefficient (svarende til $\frac{dy}{dx}$ eller f'(x)) er proportional med f(x) med proportionalitetskonstanten 0,17, har man: $\underline{\underline{f'(x) = 0,17 \cdot f(x)}}$, hvilket er den søgte differentialligning.

Da man kender funktionsværdien i punktet P, kan man bruge differentialligningen til at finde tangentens hældningskoefficient:

$$\frac{dy}{dx} = 0,17 \cdot 3 = \underline{\underline{0,51}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

25.maj 2012: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: Udtrykket reduceres bl.a. ved at udnytte en kvadratsætning til første led:

$$(a-b)(a+b)-2a^2+b^2=a^2-b^2-2a^2+b^2=\underline{\underline{-a^2}}$$

Opgave 2: Linjer givet ved ligningerne:

$l: 2x-3y=1$

$m: \ x+6y=8$

Koordinatsættet til skæringspunktet mellem de to linjer findes ved at løse ligningssystemet:

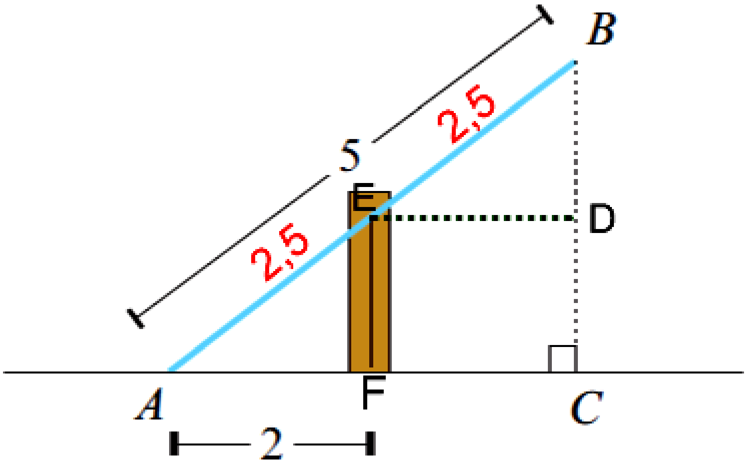
$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y=1 \\ x+6y=8 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x-3y=1 \\ 2x+12y=16 \end{array}\right\} \Rightarrow (2x+12y)-(2x-3y)=16-1 \Leftrightarrow 15y=15 \Leftrightarrow y=1$$

y-værdien indsættes i den nederste ligning for at finde x:

$$x+6\cdot 1=8 \quad \Leftrightarrow \quad x=2$$

Dvs. at koordinatsættet til skæringspunktet mellem linjerne er (2,1)

Opgave 3: Da vippen er ophængt på midten, er trekanterne AEF og BDE kongruente, og de er retvinklede:



Så giver Pythagoras:

$$|AE|^2=|AF|^2+|EF|^2$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2=2^2+|EF|^2$$

$$|EF|=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-2^2}=\sqrt{\frac{25}{4}-\frac{16}{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$$

Så er:

$$|BC|=2\cdot|EF|=2\cdot\frac{3}{2}=3$$

Dvs. at punktet B er 3m over jorden.

<u>*Opgave 4:*</u> $3x^2 - 2x + c = 0$

Hvis andengradsligningen skal have netop én løsning, skal diskriminanten være 0:

$$d = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot c = 4 - 12c$$

$$0 = 4 - 12c \quad \Leftrightarrow \quad 12c = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{c = \frac{1}{3}}}$$

<u>*Opgave 5:*</u> $f(x) = (x+1) \cdot e^x \qquad \frac{dy}{dx} = y + \frac{y}{x+1}$

Det undersøges, om funktionen er en løsning til differentialligningen, ved at indsætte i differentialligningen og se, om det giver en identitet.
For at kunne indsætte skal funktionen først differentieres (det er en produktfunktion):

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x+1) \cdot e^x = (x+2) \cdot e^x$$

Der indsættes:

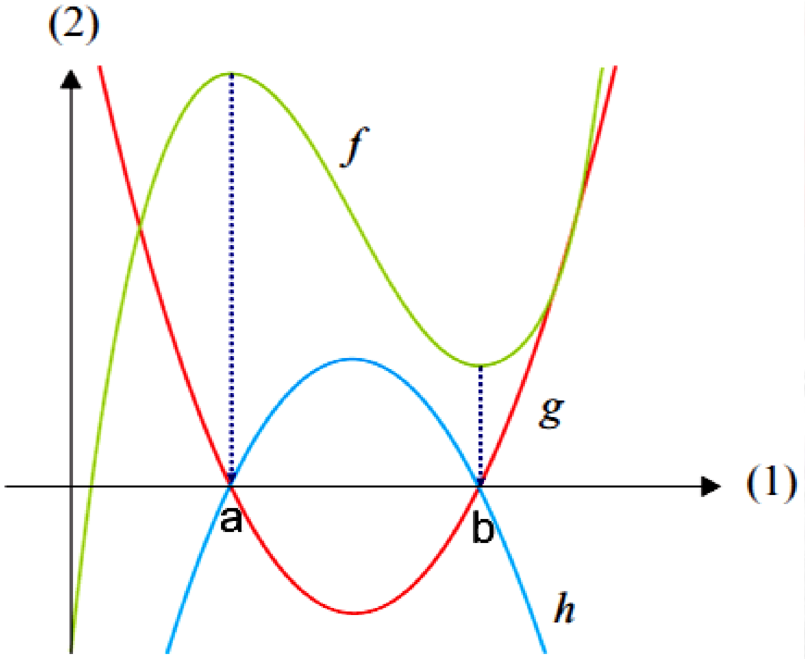
$$(x+2) \cdot e^x = (x+1) \cdot e^x + \frac{(x+1) \cdot e^x}{x+1} \quad \Leftrightarrow$$

$$(x+2) \cdot e^x = (x+1) \cdot e^x + e^x \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{(x+2) \cdot e^x = (x+2) \cdot e^x}}$$

Der er fremkommet en identitet, og <u>dermed er funktionen en løsning til differentialligningen.</u>

<u>*Opgave 6:*</u> Det bemærkes, at de to steder *a* og *b*, hvor *f* har ekstrema, svarer til nulpunkterne for både *g* og *h*, og derfor kan dette ikke bruges til at svare på, hvilken af funktionerne *g* og *h*, der er den afledede til *f*:



Men hvis man f.eks. kigger i intervallet]a;b[ses det, at *f* er aftagende, hvorfor den afledede funktion til *f* er negativ. Dette passer med funktionen *g*, men ikke med funktionen *h*.

<u>Derfor er *g* den afledede funktion til *f*</u>

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

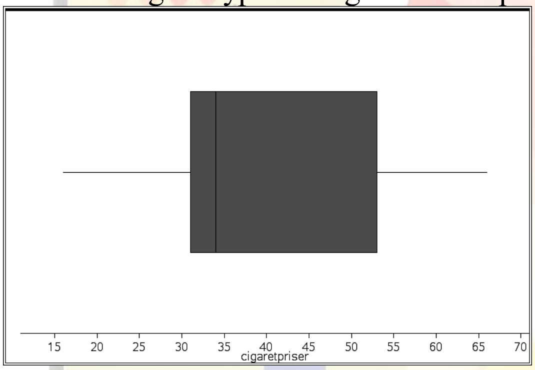
25. maj 2012: Delprøven *MED hjælpemidler*

Opgave 7: Først indtastes tabellens værdier under 'Lister og regneark' på TI n'spire. Liste A navngives "Cigaretpriser" (Hvis man ikke angiver et navn, kan man ikke lave et boxplot senere i opgaven). Derefter vælges 'Statistik'→'Statistiske beregninger'→'Statistik med én variabel'. Der vælges 1 liste, og X1-listen er A[] og frekvenslisten 1:

	A	B	C	D	E
◆				=OneVar(a	
1	16		Titel	Statistik ...	
2	19		x̄	38.2666...	
3	28		Σx	574.	
4	31		Σx²	25126.	
5	31		sx := sn-...	15.0260...	
6	32		σx := σn...	14.5165...	
7	32		n	15.	
8	34		MinX	16.	
9	35		Q₁X	31.	
10	38		MedianX...	34.	
11	38		Q₃X	53.	
12	53		MaxX	66.	
13	60		SSX := Σ...	3160.93...	

Dvs. at kvartilsættet for cigaretpriserne er (31,34,53)

For at tegne et boxplot vælges 'Diagrammer og statistik'.
Der klikkes på x-aksen, så 'cigaretpriser' tilføjes.
Under 'Diagramtyper' vælges nu 'Boxplot', hvilket giver:



Opgave 8: $f(x) = \left(x^3 - 8\right) \cdot \ln(x) \quad ; \quad x > 0$

a) Ligningen f(x)=0 kan enten løses med 'solve' på lommeregneren, eller man kan benytte nulreglen og sige:

$$0 = \left(x^3 - 8\right) \cdot \ln(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 8 = 0 \vee \ln(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 2 \vee x = 1}}$$

b) En ligning for tangenten til grafen for *f* i punktet *P(1,f(1))* bestemmes ved:

$$\text{tangentLine}\left(\left(x^3-8\right)\cdot \ln(x), x, 1\right) \qquad 7-7\cdot x$$

Dvs. tangentens ligning er $\underline{\underline{y = -7x + 7}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>*Opgave 9:*</u> $f(t) = b \cdot a^t$. *t* er antal år efter 2004. *f(t)* er antal Facebook-brugere i verden målt i millioner:

Årstal	2004	2005	2006	2009	2010
Antal brugere (mio.)	1	5,5	12	350	600

a) Modellen er en eksponentiel udvikling, så for at finde en forskrift indskrives tabellens værdier på TI n'spire med årstal efter 2004 (dvs. 0, 1, 2, 5 og 6) i liste A og antal brugere i millioner i liste B. Der vælges 'Statistik'→'Statistiske beregninger'→'Eksponentiel regression' med liste A som x-værdier og liste B som y-værdier. Resultatet gemmes under f1:

	A	B	C	D
◆				=ExpReg(
1	0	1	Titel	Ekspone...
2	1	5.5	RegEqn	a*b^x
3	2	12	a	1.39384...
4	5	350	b	2.87488...
5	6	600	r²	0.98854...
6			r	0.99425...
7			Resid	{⁻0.3938...
8			ResidTra...	{⁻0.3320...

Det bemærkes, at lommeregner har en model, hvor a og b er ombyttet i forhold til vores model, så man har:

$\underline{\underline{a = 2{,}87488675 \ og \ b = 1{,}39384529}}$

b) Fordoblingstiden kan bestemmes, da man kender fremskrivningsfaktoren *a*:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(2{,}87488675)} = 0{,}65638112$$

Dvs. at <u>fordoblingstiden er 0,66år</u>

Det kunne også have været beregnet på TI n'spire ved:

```
solve(f1(x)=2·f1(0),x)
                          x=0.656381119957
```

c) Da modellens funktionsforskrift er gemt under f1, kan antallet af Facebook-brugere i 2008 (x=4) bestemmes ved:

```
f1(4)                     95.2132819584
```

Dvs. at der i 2008 ifølge modellen var <u>95 millioner Facebook-brugere i verden</u>

Fremskrivningsfaktoren a = 2,87 svarer til en vækstrate på $r = 2{,}87 - 1 = 1{,}87 = 187\%$, dvs. <u>antallet af Facebook-brugere i verden vokser med 187% om året</u>

Løst med Maple:

$f(t) = b \cdot a^t$. *t* er antal år efter 2004. *f(t)* er antal Facebook-brugere i verden målt i millioner:

Da det er en eksponentiel udvikling, laves der eksponentiel regression med Maple:

restart

with(*Gym*) :

År := [0, 1, 2, 5, 6] :

Antalbrugere := [1 , 5.5, 12, 350, 600] :

f(*t*) := *ExpReg*(*År*, *Antalbrugere*, *t*) :

$f(t) = 1.39384528732616\ 2.87488674861275^t$

Dvs. at $\underline{\underline{a = 2.875}}$ og $\underline{\underline{b = 1.3938}}$

b) Fordoblingstiden kan bestemmes, da man kender fremskrivningsfaktoren *a*:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(2{,}87488675)} = 0{,}65638112$$

Dvs. at <u>fordoblingstiden er 0,66år</u>

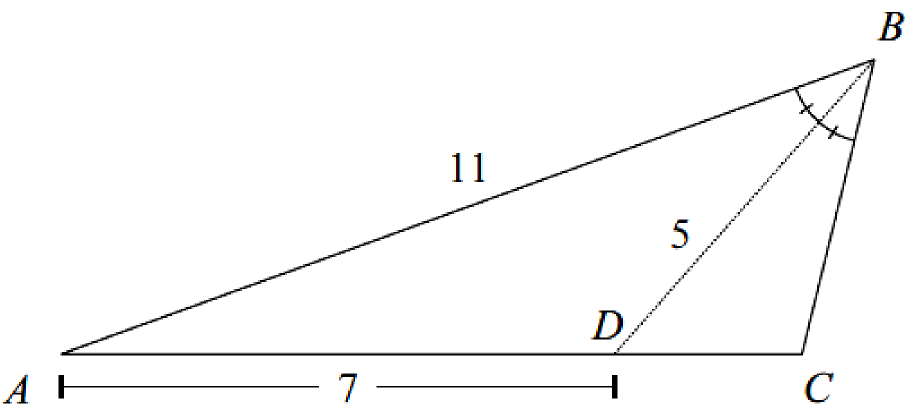
c) År 2008 svarer til *t* = *4*, så i Maple indtastes:

$f(4) = 95.2132819382449$

Dvs. at der i 2008 ifølge modellen var <u>95 millioner Facebook-brugere i verden</u>

Fremskrivningsfaktoren a = 2,87 svarer til en vækstrate på $r = 2{,}87 - 1 = 1{,}87 = 187\%$, dvs. <u>antallet af Facebook-brugere i verden vokser med 187% om året</u>

Opgave 10: Følgende figur er givet:



a) I trekant ABD kender man alle tre sidelængder, så enhver vinkel kan bestemmes ved en cosinusrelation:

$$\cos B = \frac{|BD|^2 + |AB|^2 - |AD|^2}{2 \cdot |BD| \cdot |AB|}$$

$$B = \cos^{-1}\left(\frac{5^2 + 11^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 11}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{97}{110}\right) = \underline{\underline{28{,}1375265744°}}$$

b) Vinkel A indgår i både trekant ABC og ABD, så man kan bruge siderne i trekant ABD til at beregne den (selvom opgaveteksten omtaler trekant ABC):

$$\cos A = \frac{|AD|^2 + |AB|^2 - |BD|^2}{2 \cdot |AD| \cdot |AB|}$$

$$A = \cos^{-1}\left(\frac{7^2 + 11^2 - 5^2}{2 \cdot 7 \cdot 11}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{145}{154}\right) = \underline{\underline{19{,}6850548247°}}$$

For at kunne bestemme $|AC|$ mangler man vinklerne B og C i trekant ABC.

Da BD er en vinkelhalveringslinje, har man:

$\angle ABC = 2 \cdot \angle ABD = 2 \cdot 28{,}1375265744° = 56{,}2750531489°$

Vinkelsummen i en trekant giver:

$C = 180° - A - \angle ABC = 180° - 19{,}6850548247° - 56{,}2750531489° = 104{,}039892026°$

Sinusrelationerne giver:

$$\frac{|AC|}{\sin(\angle ABC)} = \frac{|AB|}{\sin(C)} \quad \Leftrightarrow \quad |AC| = \frac{|AB|}{\sin(C)} \cdot \sin(\angle ABC)$$

$$|AC| = \frac{11}{\sin(104{,}039892026°)} \cdot \sin(56{,}2750531489°) = \underline{\underline{9{,}43055555556}}$$

Opgave 11: $Cirkel: \ (x-2)^2+(y+1)^2=100 \qquad Linje\ l: 3x+4y-7=0$

a) Cirklens centrum aflæses ud fra ligningen til C(2,-1).
Så kan afstanden fra centrum til linjen bestemmes ved:

$$dist(C,l)=\frac{|3\cdot 2+4\cdot(-1)-7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-5|}{\sqrt{25}}=\frac{5}{5}=\underline{\underline{1}}$$

b) En normalvektor til linjen *m*, der står vinkelret på linjen *l*, findes ved at tage tværvektoren til en normalvektor til linjen *l* (der aflæses ud fra linjens ligning):

$$\overrightarrow{n_l}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{n_m}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$$

Da linjen *m* går gennem cirklens centrum, bliver dens ligning:

$$-4\cdot(x-2)+3\cdot(y-(-1))=0 \quad \Leftrightarrow \quad -4x+3y+11=0$$

Skæringspunkterne mellem denne linje og cirklen findes ved på TI n'spire at løse de to ligninger:

$\text{solve}\left((x-2)^2+(y+1)^2=100 \text{ and } -4\cdot x+3\cdot y+11=0,x,y\right)$	$x=-4$ and $y=-9$ or $x=8$ and $y=7$

Dvs. at skæringspunkterne er $\underline{\underline{(-4,-9)\ og\ (8,7)}}$

Opgave 12: $f(x)=4-\frac{x^2}{4}$

a) For at kunne bestemme arealet af punktmængden M, skal man først bestemme funktionens nulpunkter, da de skal fungere som øvre og nedre grænse i det bestemte integral, der svarer til arealet (da grafen ligger over x-aksen). Dette gøres på TI n'spire ved:

$f(x):=4-\frac{x^2}{4}$	*Udført*
$\text{solve}(f(x)=0,x)$	$x=-4$ or $x=4$
$\int_{-4}^{4} f(x)\,dx$	$\frac{64}{3}$
	3/99

Dvs. at $\underline{\underline{A_M=\frac{64}{3}}}$

b) Det angivne rektangel har længden $2x$ og bredden $f(x)$, så arealet af rektanglet er:

$$A_{rektangel}=2x\cdot f(x)=2x\cdot\left(4-\frac{x^2}{4}\right)=8x-\frac{1}{2}\cdot x^3$$

Dvs. at arealet af det skraverede område er:

$$A_{skraveret}=A_{parabel}-A_{rektangel}=\underline{\underline{\frac{64}{3}-8x+\frac{1}{2}\cdot x^3 \quad ; \quad 0<x<4}}$$

Opgave 13: A(106,141,68) ; B(52,109,0) ; C(25,117,0) ; D(40,158,59) ; E(65,169,85) ; F(25,297,100) ; G(87,25,85) ; I(47,37,103)

a) En ligning for den plan α , der indeholder punkterne A, B og C, bestemmes ved at finde en normalvektor for planen og et punkt i planen (hvor et hvilket som helst af punkterne A, B og C kan vælges).
Normalvektoren bestemmes ved først at tage krydsproduktet af to vektorer, der udspænder planen:

$$\overrightarrow{CA}=\begin{pmatrix}106-25\\141-117\\68-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}81\\24\\68\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}52-25\\109-117\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}27\\-8\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}24\cdot 0-68\cdot(-8)\\68\cdot 27-81\cdot 0\\81\cdot(-8)-24\cdot 27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}544\\1836\\-1296\end{pmatrix}$$

En vektor parallel med denne, men kortere (hver koordinat divideres med 4) benyttes som normalvektor for planen:

$$\overrightarrow{n_\alpha}=\begin{pmatrix}136\\459\\-324\end{pmatrix}$$

Punktet B benyttes som punkt i planen, og dermed bliver ligningen:

$$\alpha:\ 136\cdot(x-52)+459\cdot(y-109)-324\cdot(z-0)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{136x+459y-324z-57103=0}}$$

b) $\beta:\ 326x+75y-135z=16925$
Man kan aflæse en normalvektor for denne plan ud fra dens ligning, og så kan vinklen mellem planerne bestemmes som vinklen mellem deres normalvektorer:

$$\cos v=\frac{\overrightarrow{n_\alpha}\cdot\overrightarrow{n_\beta}}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_\beta}\right|}$$

$$v=\cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix}136\\459\\-324\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}326\\75\\-135\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}136\\459\\-324\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}326\\75\\-135\end{pmatrix}\right|}\right)=$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{136\cdot 326+459\cdot 75-324\cdot(-135)}{\sqrt{136^2+459^2+324^2}\cdot\sqrt{326^2+75^2+135^2}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{122501}{\sqrt{43481993278}}\right)=\underline{\underline{54,0223983662^\circ}}$$

c) $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 65-106 \\ 169-141 \\ 85-68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -41 \\ 28 \\ 17 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{GI} = \begin{pmatrix} 47-87 \\ 37-25 \\ 103-85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$

Det undersøges, om de to vektorer er parallelle, ved at se, om deres krydsprodukt giver 0.
Dette gøres på TI n'spire ved:

$ae:=\begin{bmatrix} -41 \\ 28 \\ 17 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -41 \\ 28 \\ 17 \end{bmatrix}$
$gi:=\begin{bmatrix} -40 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -40 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$
crossP(*ae*,*gi*)	$\begin{bmatrix} 300 \\ 58 \\ 628 \end{bmatrix}$

Da krydsproduktet ikke giver nulvektoren, er de to vektorer ikke parallelle

Tagfladen AEIG er altså ikke et parallelogram, og for at finde arealet er man derfor nødt til at opdele det i to trekanter AGI og AEI.

Man har allerede $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -41 \\ 28 \\ 17 \end{pmatrix}$ og $\overrightarrow{GI} = \begin{pmatrix} -40 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$.

To andre vektorer, der sammen med ovenstående udspænder de to trekanter, er:

$$\overrightarrow{AI} = \begin{pmatrix} 47-106 \\ 37-141 \\ 103-68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -59 \\ -104 \\ 35 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{GA} = \begin{pmatrix} 106-87 \\ 141-25 \\ 68-85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 116 \\ -17 \end{pmatrix}$$

Arealet af tagfladen er så: $A_{AEIG} = T_{AGI} + T_{AEI} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{GI} \times \overrightarrow{GA}\right| + \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{AI}\right|$

Det udnyttes, at to af vektorerne allerede er defineret, så på TI n'spire indtastes:

$ai:=\begin{bmatrix} -59 \\ -104 \\ 35 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -59 \\ -104 \\ 35 \end{bmatrix}$
$ga:=\begin{bmatrix} 19 \\ 116 \\ -17 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 19 \\ 116 \\ -17 \end{bmatrix}$
k1:=crossP(*ae*,*ai*)	$\begin{bmatrix} 2748 \\ 432 \\ 5916 \end{bmatrix}$
k2:=crossP(*gi*,*ga*)	$\begin{bmatrix} -2292 \\ -338 \\ -4868 \end{bmatrix}$
$0.5 \cdot \sqrt{\text{dotP}(k1,k1)}$	3268.68413892
$0.5 \cdot \sqrt{\text{dotP}(k2,k2)}$	2695.59511055
3268.6841389159+2695.5951105461	5964.27924946

Dvs. at arealet af tagfladen er 5964 feet^2

<u>*Opgave 14:*</u> $\frac{dh}{dt} = 5,24 - 0,045 \cdot h \quad , \quad 0 \le t \le 48$ Når t = 0 er h = 50.

a) Væksthastigheden når barnet er 100 cm højt kan bestemmes ved indsættelse i differentialligningen, da venstresiden netop angiver væksthastigheden:

$$\frac{dh}{dt} = 5,24 - 0,045 \cdot 100 = 5,24 - 4,5 = \underline{\underline{0,74}}$$

Dvs. at væksthastigheden er <u>0,74 cm pr. måned.</u>

b) En forskrift for *h* kan enten bestemmes ved at genkende differentialligningen som en standardligning med den fuldstændige løsning:

$$h(t) = \frac{5,24}{0,045} - c \cdot e^{-0,045 \cdot t} = \frac{1048}{9} - c \cdot e^{-0,045 \cdot t}$$

Eller den fuldstændige løsning kan bestemmes på TI n'spire:

$$\text{deSolve}\left(h' = 5.24 - 0.045 \cdot h, t, h\right)$$
$$h = c3 \cdot (0.955997481833)^{t} + 116.444444444$$

Ud fra oplysningen om, at barnet fra fødslen er 50 cm højt, kan man bestemme konstanten:

$$50 = \frac{1048}{9} - c \cdot e^{-0,045 \cdot 0} \quad \Leftrightarrow \quad c = 116,44 - 50 = 66,44$$

Dvs. at den søgte løsning er: $\underline{\underline{h(t) = 116,44 - 66,44 \cdot e^{-0,045 \cdot t}}}$

Når barnet er 100cm højt har man:

$$100 = 116,44 - 66,44 \cdot e^{-0,045 \cdot t}$$

Denne ligning løses ved indtastningen:

$$\text{solve}\left(100 = 116.44 - 66.44 \cdot e^{-0.045 \cdot t}, t\right)$$
$$t = 31.0351532248$$

<u>Dvs. at barnet ifølge modellen skal være 31 måneder, før det er 100cm højt.</u>

<u>*Opgave 15:*</u> $f(x) = 19 \cdot \dfrac{\sqrt{-x^2+100x+14400}}{65}$; $0 \le x \le 180$

a) Man kan bestemme maksimum for *f* ved at lave funktionsanalyse eller bruge en grafisk løsningsmetode, men man kan også bemærke, at den uafhængige variabel kun indgår i brøkens tæller, så funktionen giver den største værdi, når kvadratrodens argument er størst muligt. Udtrykket under kvadratroden er forskriften for en parabel med benene nedad (a-værdien er -1), så dens største værdi er toppunktets y-værdi:

$$f_{\max} = \frac{19}{65} \cdot \sqrt{T_y} = \frac{19}{65} \cdot \sqrt{\frac{-d}{4a}} = \frac{19}{65} \cdot \sqrt{\frac{-\left(b^2-4ac\right)}{4a}} =$$

$$\frac{19}{65} \cdot \sqrt{\frac{-\left(100^2-4\cdot(-1)\cdot 14400\right)}{4\cdot(-1)}} = \frac{19}{65} \cdot \sqrt{\frac{67600}{4}} = \underline{\underline{38}}$$

Da dette er halvdelen af bredden, <u>er bygningen 76m bred på det bredeste sted.</u>
Hvis man ville have løst det med en funktionsundersøgelse, kunne man på TI n'spire have indtastet følgende, hvor man først finder ekstremumsstedet ved hjælp af den afledede funktions nulpunkt, derefter med den anden afledede negative fortegn det pågældende sted sikrer sig, at det er et maksimumssted, og endelig finder funktionsværdien det pågældende sted:

$f(x) := \frac{19}{65} \cdot \sqrt{-x^2+100 \cdot x+14400}$	*Udført*
$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(f(x))=0,x\right)$	$x=50$
$\frac{d^2}{dx^2}(f(x))\|x=50$	$\frac{-19}{8450}$
$f(50)$	38

b) Da det er oplyst på figuren (og da det kan kontrolleres, at f(180)=0), kan man på TI n'spire, hvor funktionen allerede er defineret, bestemme rumfanget af figuren ved:

$\pi \cdot \int_0^{180} (f(x))^2\,dx$	$\frac{32749920 \cdot \pi}{169}$
$\pi \cdot \int_0^{180} (f(x))^2\,dx$	608798.272649

Dvs. at bygningens rumfang er: $\underline{\underline{V = 608798\,m^3}}$

31.maj 2012: Delprøven UDEN hjælpemidler

<u>*Opgave 1:*</u> Udtrykket reduceres ved at anvende en kvadratsætning på første led og ophæve en minusparentes i andet led:

$$(p+q)^2-(p^2-q^2)-2pq=p^2+q^2+2pq-p^2+q^2-2pq=\underline{\underline{2q^2}}$$

<u>*Opgave 2:*</u> $x^2+x-30=0$

Andengradsligningen kan løses enten ved diskriminantmetoden eller ved at faktorisere.

Faktorisering:
Man skal finde to tal, hvis produkt er -30 og sum 1. Da produktet skal være -30, er de mulige hele tal 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 og 30 (fortegn ikke medregnet). Da summen skal være 1, har man:

$$x^2+x-30=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x+6)(x-5)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=-6 \vee x=5}}$$

Diskriminantmetode:

$$d=b^2-4ac=1^2-4\cdot1\cdot(-30)=1+120=121>0 \quad dvs.\ 2\ løsninger$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{d}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{121}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm11}{2}=\begin{cases}5\\ \underline{\underline{-6}}\end{cases}$$

<u>*Opgave 3:*</u> $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$

Arealet af det parallelogram, som de to vektorer udspænder, beregnes ved hjælp af determinanten:

$$A=\left|\det\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right|=\left\|\begin{matrix}3&-2\\2&5\end{matrix}\right\|=|3\cdot5-2\cdot(-2)|=|15+4|=\underline{\underline{19}}$$

<u>*Opgave 4:*</u> $F(x)=x^6\cdot e^x+3$.

Integrationsprøven anvendes til at finde ud af, hvilken funktion *F* er en stamfunktion til, så *F* differentieres, og der anvendes produktreglen:

$$F'(x)=\left(x^6\right)'\cdot e^x+x^6\cdot\left(e^x\right)'+0=6x^5\cdot e^x+x^6\cdot e^x=\underline{\underline{f_2(x)}}$$

Dvs. at <u>*F* er en stamfunktion til $f_2(x)$</u>

<u>*Opgave 5:*</u> $f(x)=4x^{-2}$ $\quad g(x)=4x^{1,5}$ $\quad h(x)=4x^{0,4}$

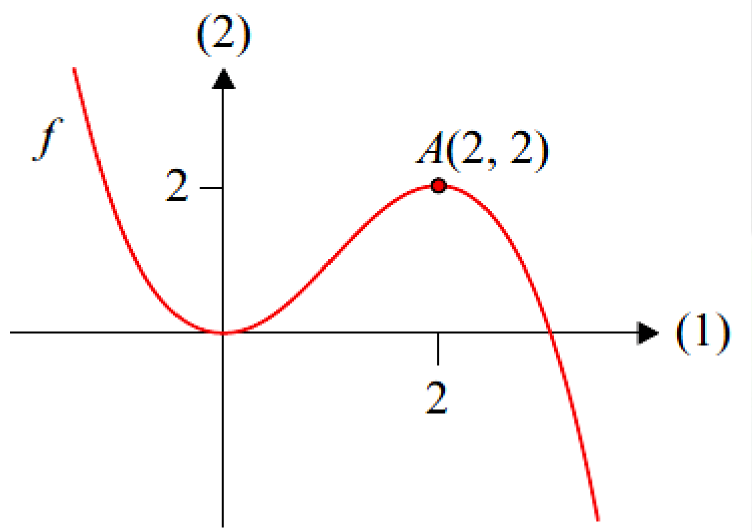
Alle funktionerne er på formen $p(x)=4x^a$.

Funktionen *f* har en negativ a-værdi (-2), dvs. det er en aftagende funktion.
<u>Dermed hører funktionen *f* til grafen C</u>

Funktionen *h* har en a-værdi mellem 0 og 1 (0,4), og dermed er det en voksende funktion, men væksthastigheden er aftagende. <u>Dermed hører funktionen *h* til grafen B</u>

Funktionen *g* har en a-værdi over 1 (1,5), og dermed er det en voksende funktion med voksende væksthastighed. <u>Dermed hører funktionen *g* til grafen A</u>

<u>*Opgave 6:*</u> $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2$



Lokalt ekstremumspunkt i A(2,2).

Grafen går gennem (0,0), men det kan ikke bruges til at bestemme a og b, da de forsvinder, hvis man indsætter punktets koordinater i funktionsforskriften.

Men man kan bruge punktet A, der giver:

$$2 = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 8a + 4b$$

Dette er én ligning med to ubekendte, så der mangler en ligning.
Denne bestemmes ved at udnytte, at punktet A er et ekstremumspunkt, dvs. når x = 2 er den afledede funktion 0:

$$f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x$$

$$f'(2) = 0$$

$$0 = 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 12a + 4b$$

Så har man to ligninger med to ubekendte, hvor a-værdien kan findes ved først at trække den øverste ligning fra den nederste (lige store koefficienters metode, da der står 4b i begge ligninger):

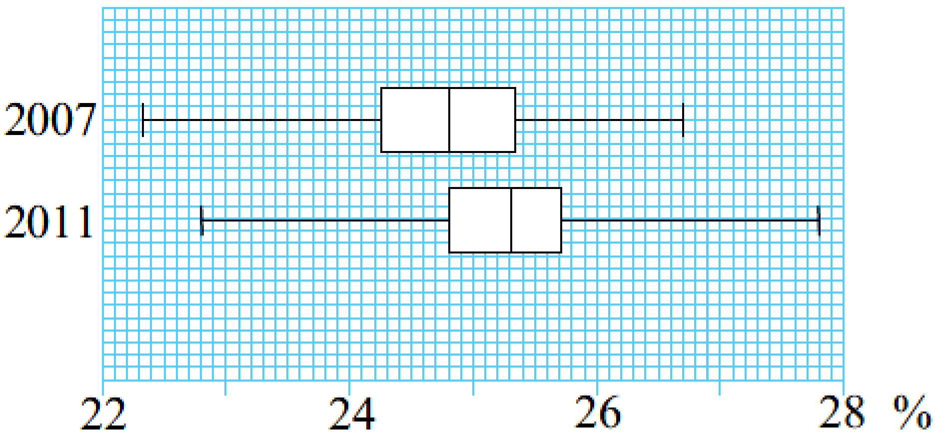
$$\left.\begin{array}{r} 0 = 12a + 4b \\ 2 = 8a + 4b \end{array}\right\} \Rightarrow 0 - 2 = (12a + 4b) - (8a + 4b) \quad \Leftrightarrow \quad -2 = 4a \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{a = -\frac{1}{2}}}$$

Indsættes at finde b:

$$2 = 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 4b \quad \Leftrightarrow \quad 2 = -4 + 4b \quad \Leftrightarrow \quad 6 = 4b \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{b = \frac{3}{2}}}$$

31. maj 2012: Delprøven MED hjælpemidler

<u>Opgave 7:</u> Fordeling af danske kommuners personbeskatning:



Kvartilsættene aflæses ud fra de tre lodrette streger i selve boksene:
2007: <u>(24,25% ; 24,8% ; 25,35%)</u> 2011: <u>(24,8% ; 25,3% ; 25,7%)</u>

Personbeskatningen er generelt steget fra 2007 til 2011, og mindst én kommune ligger nu mere end 1% højere, end den højeste personbeskatning i 2007.
De midterste 50% af kommunerne ligger i 2011 tættere end i 2007.

Opgave 8: $A(1,1)\quad B(5,3)$ Linjen *l* går gennem punkterne *A* og *B*.

a) For at bestemme ligningen for *l* på formen $ax+by+c=0$, skal man bruge en normalvektor og et punkt. Som punkt kan man bruge enten *A* eller *B*, mens en normalvektor bestemmes ved først at finde en retningsvektor og derefter finde en tværvektor til den:

$$\vec{r}=\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}5-1\\3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{n}=\hat{r}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$$

Med udgangspunkt i punktet A er linjens ligning:

$$-2\cdot(x-1)+4\cdot(y-1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{-2x+4y-2=0}}$$

b) Ligningen for parablen: $y=x^2-8x+13{,}5$

Først bestemmes koordinatsættet til parablens toppunkt:

$$T\left(-\frac{b}{2a};-\frac{d}{4a}\right)=T\left(-\frac{(-8)}{2\cdot 1};-\frac{(-8)^2-4\cdot 1\cdot 13{,}5}{4\cdot 1}\right)=T\left(4;-\frac{10}{4}\right)=T\left(4;-\frac{5}{2}\right)$$

Så kan afstanden mellem linjen og parablens toppunkt bestemmes:

$$dist(T,l)=\frac{\left|-2\cdot 4+4\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-2\right|}{\sqrt{(-2)^2+4^2}}=\frac{|-20|}{\sqrt{20}}=\underline{\underline{\sqrt{20}}}$$

c) Projektionen af parablens toppunkt på *l* bestemmes ved at finde skæringen mellem *l* og den linje *m*, der står vinkelret på *l* og går gennem parablens toppunkt.
Så først bestemmes en ligning for *m*. Da *m* står vinkelret på *l*, kan man bruge *l*'s retningsvektor som normalvektor for *m*, og da *m* går gennem parablens toppunkt har man:

$$\overrightarrow{n_m}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$$

$$m:\ 4\cdot(x-4)+2\cdot\left(y+\frac{5}{2}\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4x+2y-11=0$$

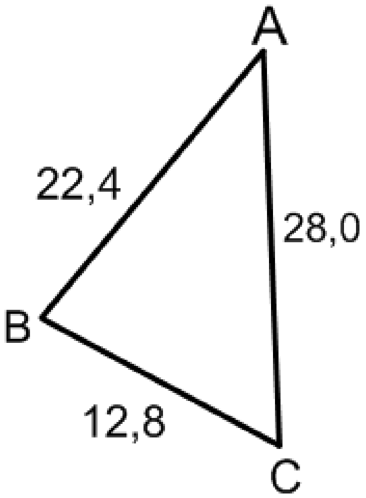
Skæringen mellem de to linjer bestemmes ved at løse de to ligninger med to ubekendte på TI n'spire ved:

```
solve(4·x+2·y−11=0 and -2·x+4·y−2=0,x,y)
                                   x=2 and y=3/2
```

Dvs. at koordinatsættet til projektionen af parablens toppunkt på *l* er $\underline{\underline{\left(2;\frac{3}{2}\right)}}$

Opgave 9: $\Delta ABC: \quad |AB| = 22,4 \quad |BC| = 12,8 \quad |AC| = 28,0$

a) Der tegnes en skitse af trekanten:



Da man kender alle sidelængderne, kan en vinkel bestemmes ved en cosinusrelation:

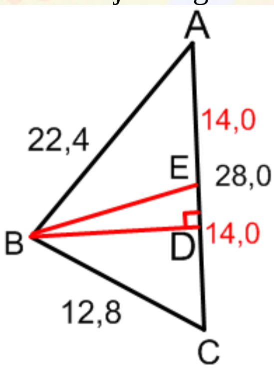
$$\cos(\angle ACB) = \frac{|AC|^2 + |BC|^2 - |AB|^2}{2 \cdot |AC| \cdot |BC|}$$

$$\angle ACB = \cos^{-1}\left(\frac{28,0^2 + 12,8^2 - 22,4^2}{2 \cdot 28,0 \cdot 12,8}\right) = \underline{\underline{51,5141436299°}}$$

Da man nu kender en vinkel og længderne af de to hosliggende sider, kan man finde arealet med ½-appelsin-formlen:

$$T = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AC| \cdot \sin(\angle ACB) = \frac{1}{2} \cdot 12,8 \cdot 28,0 \cdot \sin(51,5141436299°) = \underline{\underline{140,270915018}}$$

b) En skitse med højden og medianen fra B indtegnet:



Da trekant BCD er retvinklet, har man:

$$\cos(C) = \frac{|CD|}{|BC|} \quad \Leftrightarrow \quad |CD| = \cos(51,5141436299°) \cdot 12,8 = 7,96571428571$$

Så er:

$$|DE| = |CE| - |CD| = 14 - 7,96571428571 = \underline{\underline{6,03428571429}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 10: $v = b \cdot m^a$

Masse (kg)	0,025	0,314	3,5	11,4
Hastighed (mL/h)	72,85	529,40	2751,00	7079,40

v er hastigheden, hvormed blodplasmaet renses for medicin. m er forsøgsdyrets masse.

a) Da det er potensvækst, indtastes tabellens værdier på TI n'spire under 'Lister og regneark' med massen i liste A og hastigheden i liste B. Med 'Statistik'→'Statistiske beregninger'→'Potensregression', hvor liste A vælges som x-værdier og liste B som y-værdier, findes en forskrift for modellen, der gemmes under f1:

	A	B	C	D	E
◆				=PowerRe	
1	0.025	72.85	Titel	Potensre…	
2	0.314	529.4	RegEqn	a*x^b	
3	3.5	2751.	a	1153.81…	
4	11.4	7079.4	b	0.73952…	
5			r²	0.99911…	
6			r	0.99955…	
7			Resid	{-2.5497…	

D1 ="Potensregression"

Det bemærkes, at lommeregnerens model har ombyttet a og b i forhold til vores model, så man har: $a = 0,739525803 \ og \ b = 1153,810519$

b) Et forsøgsdyr på 70kg svarer til m=70 (eller på lommeregneren x=70):

$f1(70) \quad 26707.4303329$

Blodplasmaet i et forsøgsdyr på 70kg renses for medicin med hastigheden 26707mL/h

Når blodplasmaet renses for medicin med hastigheden 5000mL/h er v=5000:

$\text{solve}(f1(x)=5000,x) \quad x=7.26340652163$

Dvs. at så vejer forsøgsdyret 7,3kg

c) Det er karakteristisk for en potensvækst, at der er en fast procentvis ændring i funktionsværdien, når den uafhængige variabel ændres med en fast procentdel. Der gælder: $(1+r_v) = (1+r_m)^a$

Da massen stiger med 20% har man:

$$r_v = (1+r_m)^a - 1 = (1+0,20)^{0,739525803} - 1 = 1,2^{0,739525803} - 1 = 0,144343941221 \approx 14,4\%$$

Dvs. at hastigheden stiger med 14,4%, når massen stiger med 20%

Det kunne også være bestemt på TI n'spire ved:

$\frac{f1(1.2 \cdot x)}{f1(x)} - 1 \quad 0.144343941272$

Opgave 11: $A(11,-1,3)$ $B(8,26,12)$ $C(12,22,0)$ $D(12,0,0)$ $E(-4,22,0)$ $F(0,26,12)$ $G(0,-1,3)$

a) For at bestemme en ligning for den plan, der indeholder A, B, C og D, skal man kende en normalvektor og et punkt (som punkt kan ethvert af punkterne A, B, C og D benyttes). En normalvektor bestemmes ved først at finde krydsproduktet mellem to vektorer, der udspænder planen:

$$\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 12-12 \\ 22-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 22 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 11-12 \\ -1-0 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 22 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22\cdot 3 - 0\cdot(-1) \\ 0\cdot(-1) - 0\cdot 3 \\ 0\cdot(-1) - 22\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 \\ 0 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Så vælges:

$$\overrightarrow{n_\alpha} = \frac{1}{22}\cdot\begin{pmatrix} 66 \\ 0 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Med udgangspunkt i punktet D får man altså:

$$3\cdot(x-12)+0\cdot(y-0)+1\cdot(z-0)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{3x+z-36=0}}$$

b) Planen β, der indeholder endefladen BCEF, er beskrevet ved ligningen $3y-z=66$
Vinklen mellem to planer svarer til vinklen mellem normalvektorer til planerne, og da de kan aflæses af ligningerne for planerne fås:

$$\overrightarrow{n_\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{n_\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \cos v = \frac{\overrightarrow{n_\alpha}\cdot\overrightarrow{n_\beta}}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_\beta}\right|}$$

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{3\cdot 0+0\cdot 3+1\cdot(-1)}{\sqrt{3^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+3^2+(-1)^2}}\right) =$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{10}\right) = 95,7391704773°$$

Den spidse vinkel er så:

$$v_{spids} = 180° - 95,7391704773° = \underline{\underline{84,2608295227°}}$$

c) Da sidefladen ABCD ikke er et parallelogram, opdeles den i to trekanter, så man kan bestemme arealet ved hjælp af krydsprodukter:

$\Delta ABD:$

$$\overrightarrow{DA}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DB}=\begin{pmatrix}8-12\\26-0\\12-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\26\\12\end{pmatrix}$$

$$T_{ABD}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DB}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-1\cdot 12-3\cdot 26\\3\cdot(-4)-(-1)\cdot 12\\-1\cdot 26-(-1)\cdot(-4)\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-90\\0\\-30\end{pmatrix}\right|=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-90)^2+0^2+(-30)^2}=47,4341649025$$

$\Delta BCD:$

$$\overrightarrow{DB}=\begin{pmatrix}-4\\26\\12\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}0\\22\\0\end{pmatrix}$$

$$T_{BCD}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{DB}\times\overrightarrow{DC}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}26\cdot 0-12\cdot 22\\12\cdot 0-(-4)\cdot 0\\-4\cdot 22-26\cdot 0\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-264\\0\\-88\end{pmatrix}\right|=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-264)^2+0^2+(-88)^2}=139,140217047$$

$$A_{ABCD}=T_{ABC}+T_{BCD}=\underline{\underline{186,57438195}}$$

På TI n'spire kunne en selve arealberegningen være udført ved:

$da:=\begin{bmatrix}-1\\-1\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\-1\\3\end{bmatrix}$
$db:=\begin{bmatrix}-4\\26\\12\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-4\\26\\12\end{bmatrix}$
$dc:=\begin{bmatrix}0\\22\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\22\\0\end{bmatrix}$
0.5· √(dotP(crossP(da,db),crossP(da,db)))	47.4341649025
0.5· √(dotP(crossP(db,dc),crossP(db,dc)))	139.140217047
47.434164902526+139.14021704741	186.57438195

<u>*Opgave 12:*</u> $\frac{dS}{dt} = 1,5 - \frac{2}{100+t} \cdot S$ S(t) er saltmængden (målt i kg) til tidspunktet *t* (målt i minutter).

Oplysning: Til tidspunktet t = 0 er saltmængden 30 kg.

a) Den fuldstændige løsning til differentialligningen bestemmes på TI n'spire ved indtastningen:

$$\text{deSolve}\left(s' = 1.5 - \frac{2}{100+t} \cdot s, t, s\right)$$

$$s = \frac{c1}{(t+100)^2} + 0.5 \cdot (t+100)$$

Dvs. den fuldstændige løsning er:

$$S(t) = \frac{c}{(t+100)^2} + 0,5 \cdot (t+100)$$

Da man kender saltmængden fra start, kan man bestemme konstanten:

$$30 = \frac{c}{(0+100)^2} + 0,5 \cdot (0+100) \quad \Leftrightarrow \quad 30 = \frac{c}{10000} + 50 \quad \Leftrightarrow \quad c = -20 \cdot 10000 = -200.000$$

Den søgte løsning er altså:

$$\underline{\underline{S(t) = \frac{-200000}{(t+100)^2} + 0,5 \cdot (t+100)}}$$

b) Det tidspunkt, hvor saltmængden er 60 kg, bestemmes:

$$60 = \frac{-200000}{(t+100)^2} + 0,5 \cdot (t+100)$$

Denne ligning løses på TI n'spire ved:

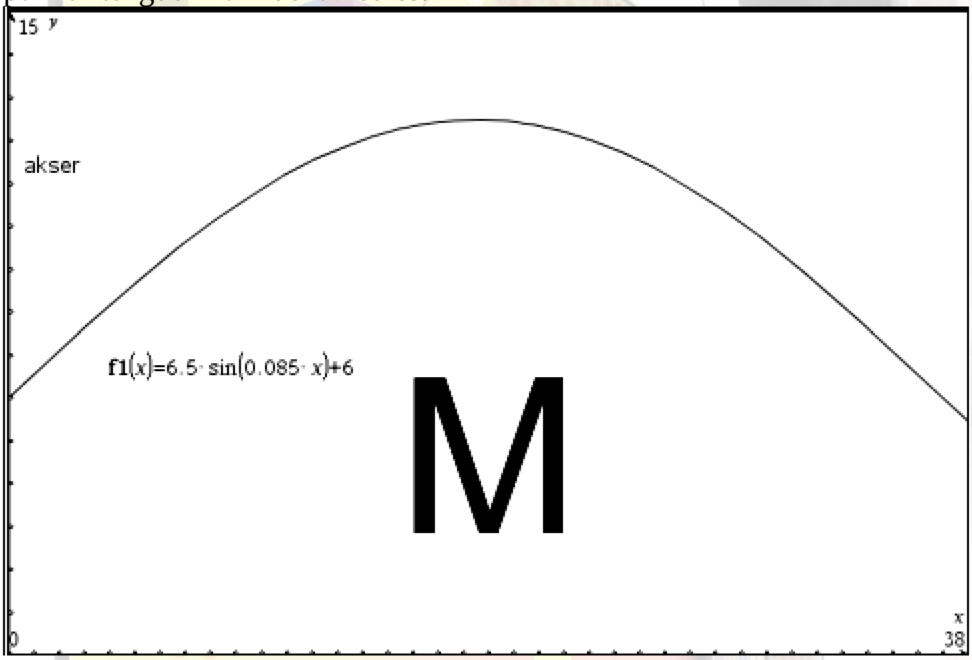
$$\text{solve}\left(60 = \frac{-200000}{(t+100)^2} + 0.5 \cdot (t+100), t\right)$$

$$t = 40.3162682809$$

Dvs. at der er 60kg salt i karret <u>efter 40,3 minutter</u>

Opgave 13: $f(x) = 6{,}5 \cdot \sin(0{,}0849 \cdot x) + 6$

Lommeregneren skal stå til at regne vinkler i radianer, og så kan f1(x) på TI n'spire defineres til: $f1(x) := 6{,}5 \cdot \sin(0{,}0849 \cdot x) + 6$, hvorefter der kan tegnes en graf i intervallet [0;38], så punktmængden kan identificeres:



Den nedre grænse er altså 0 og den øvre 38, så arealet af punktmængden M kan bestemmes ved:

$$\int_0^{38} f1(x)\,dx \qquad 380.847456596$$

Dvs. at $\underline{\underline{A_M = 380{,}847}}$

b) Overfladearealet af omdrejningslegemet er givet ved $O = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{38} f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$

Da funktionen allerede er defineret på lommeregneren, kan det udregnes ved:

$$2 \cdot \pi \cdot \int_0^{38} \left(f1(x) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}(f1(x)) \right)^2} \right) dx \qquad 2545.63860436$$

Dvs. at <u>loftlampens overfladeareal er 2545,6cm^2</u>

Opgave 14: Beholderen består af en kasse og en halvkugle, så man har:

a) $V_{beholder} = V_{kasse} + V_{halvkugle} = 2r \cdot 2r \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot r^3 = \underline{\underline{4r^2 h + \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3}}$

b) Når beholderens volumen er 5, har man:

$$5 = 4 \cdot r^2 \cdot h + \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \cdot r^2 \cdot h = 5 - \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{h = \frac{5}{4r^2} - \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot r}}$$

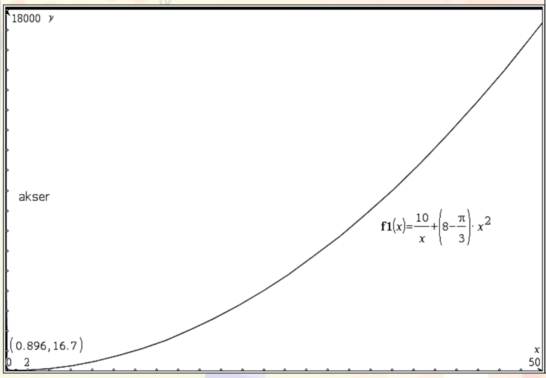
Beholderens overflade består af en kasse, hvor der er fjernet en cirkel, men til gengæld lagt en halvkugle oveni, så man har:

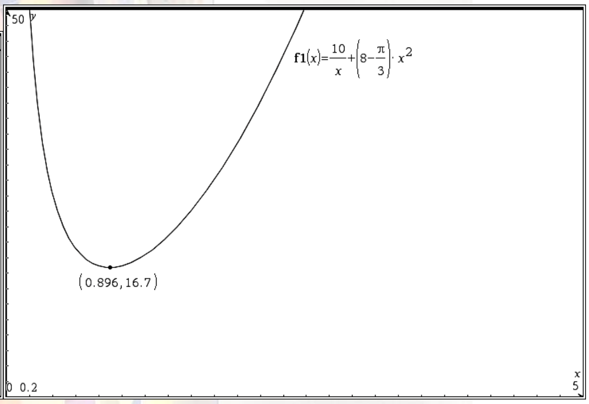
$$O_{beholder} = O_{kasse} - A_{cirkel} + O_{halvkugle} = 2 \cdot A_{kasse\,bund} + 4 \cdot A_{kasse\,sider} - A_{cirkel} + \frac{1}{2} \cdot O_{kugle} =$$

$$2 \cdot 2r \cdot 2r + 4 \cdot 2r \cdot h - \pi \cdot r^2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 8r^2 + 8r \cdot \left(\frac{5}{4r^2} - \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot r \right) - \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r^2 =$$

$$8r^2 + \frac{10}{r} - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r^2 = \frac{10}{r} + 8r^2 - \frac{\pi}{3} \cdot r^2 = \underline{\underline{\frac{10}{r} + \left(8 - \frac{\pi}{3} \right) \cdot r^2}}$$

c) Den r-værdi, der giver det mindste overfladeareal, når 0 < r < 50 bestemmes grafisk ved at indtaste funktionsforskriften under grafer , tilpasse vinduet så grafen ses, og endelig finde minimumsstedet ved 'Undersøg grafer'→'Minimum' og grænserne valgt på hver sin side af det sted, hvor minimum ses at være:





Det første vindue viser, at funktionen ikke får flere lokale minima inden for området, mens det lille vindue viser minimumspunktet.

Så man har, at overfladearealet bliver mindst muligt, når $\underline{\underline{r = 0{,}896}}$

Det kunne også have været løst under 'beregninger' på TI n'spire ved:

$f(x) := \left(8 - \frac{\pi}{3}\right) \cdot x^2 + \frac{10}{x}$	*Udført*
$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(f(x)) = 0, x\right)$	$x=0.895921663788$
$\frac{d^2}{dx^2}(f(x))\vert x=0.89592166378836$	41.7168146928

Da den anden afledede er positiv det sted, hvor den første afledede har nulpunkt, er det et minimumssted.

15.august 2012: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: t angiver tiden målt i antal år efter 2004 ; $0 \le t \le 6$

E angiver elforbruget til fjernsyn i Danmark målt i GWh pr. år.

Da elforbruget i perioden vokser med et fast tal 82 om året, er der tale om en lineær model, og med en begyndelsesværdi på 765 giver det:

$$\underline{\underline{E(t) = 82 \cdot t + 765}}$$

Opgave 2: $f(x) = 3x^2 - 4x + 8 \qquad P(2, f(2))$

For at kunne bestemme ligningen for tangenten til grafen for f i punktet P skal man kende punktets koordinater og tangentens hældning.

Først bestemmes punktets y-værdi:

$$f(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 8 = 12$$

Differentialkvotienten i punktet angiver tangenthældningen:

$$f'(x) = 6x - 4$$

$$f'(2) = 6 \cdot 2 - 4 = 8$$

Dvs. tangentligningen er:

$$y - 12 = 8 \cdot (x - 2) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = 8x - 4}}$$

Opgave 3: Trekant ABE er retvinklet, så man har:

$$|AB|^2 = |AE|^2 + |BE|^2$$

$$|AB| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = \underline{\underline{13}}$$

Skalafaktoren, når man går fra den lille trekant ABE til den store ACD, der er ensvinklede trekanter, da de deler en vinkel og begge desuden har en ret vinkel, bestemmes ved:

$$k = \frac{|AD|}{|AE|} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

Så er:

$$|FC| = 2 \cdot |CD| = 2 \cdot k \cdot |BE| = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 5 = \underline{\underline{15}}$$

Opgave 4: $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4$

Cirklens ligning omskrives, så radius og centrums koordinater kan aflæses:

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 + 1^2 + 2^2 = 9 = 3^2$$

Dvs. $\underline{\underline{r = 3 \text{ og } \quad C(-1, 2)}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 5: $\int \frac{4x}{2x^2+3}dx$

Dette ubestemte integral bestemmes ved integration ved substitution:

$t = 2x^2 + 3$

$\frac{dt}{dx} = 4x$

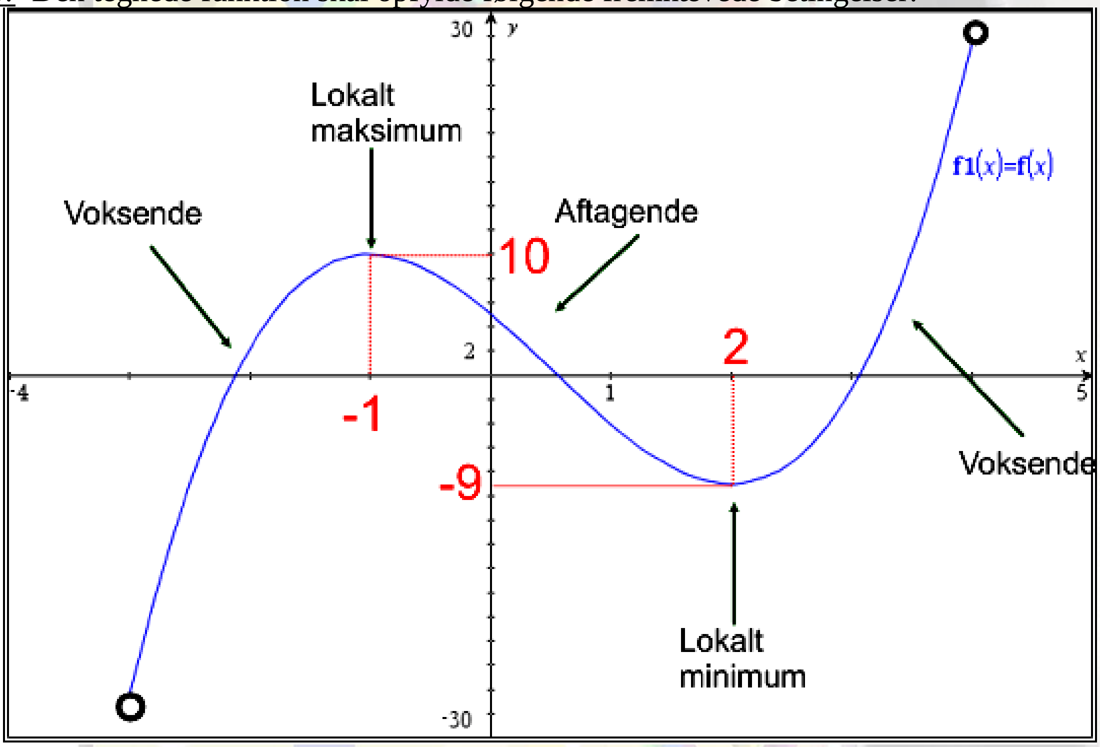
$dt = 4x \cdot dx$

Ovenstående indsættes, så integrationen kan foregå med hensyn til t:

$\int \frac{4x}{2x^2+3}dx = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + k = \underline{\underline{\ln\left(2x^2+3\right)+k}}$

(Numerisktegnet fjernes, da udtrykket i parentesen er positivt)

Opgave 6: Den tegnede funktion skal opfylde følgende fremhævede betingelser:



15.august 2012: Delprøven MED hjælpemidler

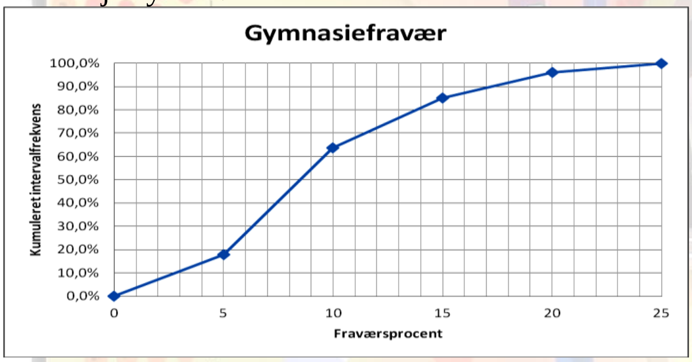
Opgave 7: a) For at kunne tegne en sumkurve beregnes først intervalfrekvenser og kumulerede intervalfrekvenser. Den første søjle består af de højre intervalendepunkter, og der er indført en ekstra række til 0%-fravær:

Fravær i %	Antal elever	Frekvens	Kum. Frek.
0	0	0,0%	0,0%
5	101	17,7%	17,7%
10	262	46,0%	63,7%
15	122	21,4%	85,1%
20	63	11,1%	96,1%
25	22	3,9%	100,0%
Samlet antal elever:	570		

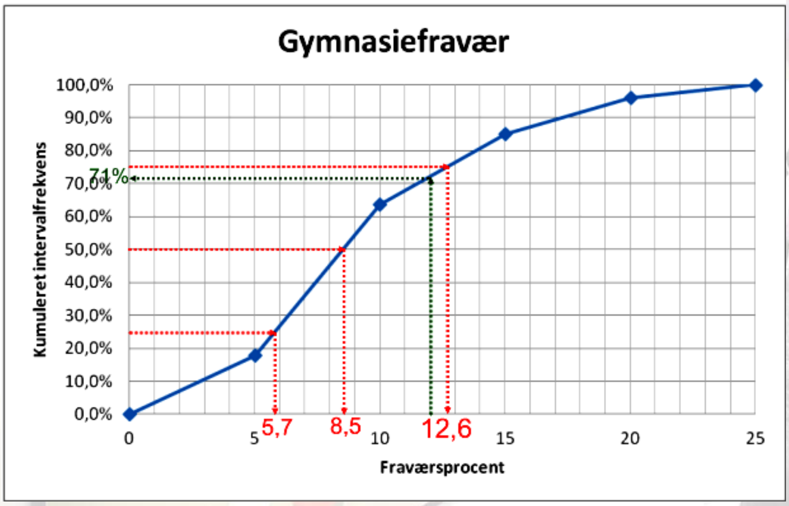
Eksempel på beregning (intervallet 15-20): Frekvens: $f = \frac{63}{570} = 0{,}111 = 11{,}1\%$

Kumuleret frekvens: $f_k = 17{,}7\% + 46{,}0\% + 21{,}4\% + 11{,}1\% = 96{,}1\%$

I Excel tegnes sumkurven så ved at indsætte et xy-diagram, hvor punkterne er forbundet af rette linjestykker:



b) Kvartilsættet aflæses ved at gå vandret ind fra 25% (nedre kvartil), 50% (median) og 75% (øvre kvartil), mens den kumulerede intervalfrekvens svarende til 12% fravær bestemmes ved at gå lodret op fra 12% på førsteaksen:



Dvs. at kvartilsættet er (5,7%, 8,5%, 12,6%)

Da 100%-71% = 29%, har 29% af eleverne over 12% fravær

Opgave 8: ΔABC : $|AB| = 12,5$ $|AC| = 10$ $|BC| = 17$ Enhed: cm

a) Da man kender længden af alle siderne i trekant ABC, benyttes cosinusrelationerne til at bestemme vinkler:

$$\cos A = \frac{|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2}{2 \cdot |AB| \cdot |AC|}$$

$$A = \cos^{-1}\left(\frac{12,5^2 + 10^2 - 17^2}{2 \cdot 12,5 \cdot 10}\right) = \underline{\underline{97,5273823006°}}$$

b) $\angle ECD = 18,5°$ $|DE| = 3,5$ $\angle DEC = 64°$

I trekant CDE kender man to vinkler og en side, så det er sinusrelationerne, der skal anvendes til at bestemme flere sidelængder:

$$\frac{|CD|}{\sin(\angle DEC)} = \frac{|DE|}{\sin(\angle ECD)} \Leftrightarrow |CD| = \frac{|DE|}{\sin(\angle ECD)} \cdot \sin(\angle DEC)$$

$$|CD| = \frac{3,5cm}{\sin(18,5°)} \cdot \sin(64°) = 9,91406554725cm \approx \underline{\underline{9,9cm}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 9: $m(t) = b \cdot a^t$; t er tidspunktet målt i år efter 2008. m er årlig global mobil datatrafik (i exabyte).

Årstal	2008	2009	2010	2011
Årlig global mobil datatrafik (exabyte)	0,48	1,08	2,84	7,16

a) Variablen står som eksponent, så der skal anvendes eksponentiel regression i Maple. Det bemærkes, at tidspunktet angives i antal år EFTER 2008.

restart

with(*Gym*) :

$Tid := [0, 1, 2, 3]$:

$Datatrafik := [0.48, 1.08, 2.84, 7.16]$:

$m(t) := ExpReg(Tid, Datatrafik, t)$:

$$m(t) = 0.461942156964632\ 2.47794118464703^t$$

Dvs. $\underline{\underline{a = 2.4779}}$ og $\underline{\underline{b = 0.46194}}$

b) År 2014 svarer til $t = 6$, så man har:

$$m(6) = 106.938370338937$$

Dvs. <u>ifølge modellen vil den årlige globale mobile datatrafik i 2014 være 106,9 exabyte.</u>

Da man kender fremskrivningsfaktoren a, kan man bestemme den årlige vækstrate:

$r = a - 1 = 2,477941185 - 1 = 1,477941185 \approx \underline{\underline{148\%}}$

c) Fremskrivningsfaktoren benyttes også til at bestemme fordoblingstiden:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(2,477941185)} = 0,763859109$$

Dvs. at <u>fordoblingstiden er 0,76år</u>

Dvs. at <u>for hvert 0,76år, der forløber, fordobles den globale årlige mobile datatrafik.</u>

I TI n'spire:
Modellen er en eksponentiel udvikling, så for at bestemme funktionsforskriftens konstanter indtastes tabellens værdier (Årstallene dog som antal år EFTER 2008, dvs. 0, 1, 2 og 3) under 'Lister og regneark' på TI n'spire med årstal i liste A og årlig global mobil datatrafik i liste B. Med 'Statistik'→'Statistiske beregninger'→'Eksponentiel regression' og a[] som x-liste og b[] som y-liste bestemmes en forskrift, der gemmes under f1:

	A	B	C	D	E
◆				=ExpReg(	
1	0	0.48	Titel	Ekspone...	
2	1	1.08	RegEqn	a*b^x	
3	2	2.84	a	0.46194...	
4	3	7.16	b	2.47794...	
5			r²	0.99873...	
6			r	0.99936...	
7			Resid	{0.01805...	

D1 ="Eksponentiel regression"

Det bemærkes, at lommeregneren har byttet om på konstanterne a og b, så man har:
$a = 2,477941185 \quad og \quad b = 0,461942157$

b) År 2014 svarer til t = 6, og da modellen er gemt under f1 indtastes:

$f1(6)$ 106.938370345

Dvs. ifølge modellen vil den årlige globale mobile datatrafik i 2014 være 106,9 exabyte.

Da man kender fremskrivningsfaktoren a, kan man bestemme den årlige vækstrate:
$r = a - 1 = 2,477941185 - 1 = 1,477941185 \approx 148\%$

c) Fremskrivningsfaktoren benyttes også til at bestemme fordoblingstiden:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(2,477941185)} = 0,763859109$$

Det kunne også have været bestemt ved indtastningen:

solve$(f1(x)=2\cdot f1(0),x)$ x=0.763859109435

Dvs. at fordoblingstiden er 0,76år
Dvs. at for hvert 0,76år, der forløber, fordobles den globale årlige mobile datatrafik.

Opgave 10: O(0,0,0) ; A(80,-50,125) ; B(0,0,150) ; C(0,300,150) ; D(80,350,125) ; E(0,300,0)

Ligning for plan indeholdende frontfladen OADE: $-25x+16z=0$

a) Vinkler mellem planer svarer til vinklerne mellem deres normalvektorer. Man kender en normalvektor til frontfladen:

$$\overrightarrow{n_{OADE}}=\begin{pmatrix}-25\\0\\16\end{pmatrix}$$

En normalvektor til endefladen OAB bestemmes ved at finde krydsproduktet mellem to vektorer, der udspænder endefladen:

$$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}80-0\\-50-0\\125-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}80\\-50\\125\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}0-0\\0-0\\150-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\150\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}-50\cdot150-125\cdot0\\125\cdot0-80\cdot150\\80\cdot0-(-50)\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7500\\-12000\\0\end{pmatrix}$$

Som normalvektor vælges så en vektor parallel med denne, men kortere:

$$\overrightarrow{n_{OAB}}=\begin{pmatrix}5\\8\\0\end{pmatrix}$$ (koordinaterne er divideret med -1500)

Så kan en af vinklerne mellem normalvektorerne bestemmes:

$$\cos v=\frac{\overrightarrow{n_{OADE}}\cdot\overrightarrow{n_{OAB}}}{\left|\overrightarrow{n_{OADE}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_{OAB}}\right|}$$

$$v=\cos^{-1}\left(\frac{-25\cdot5+0\cdot8+16\cdot0}{\sqrt{25^2+0^2+16^2}\cdot\sqrt{5^2+8^2+0^2}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{-125}{\sqrt{881}\cdot\sqrt{89}}\right)=116{,}513134062°$$

$$v_{spids}=180°-116{,}513134062°=\underline{\underline{63{,}4868659376°}}$$

Da det var den spidse vinkel, der blev spurgt om, beregnes den i sidste skridt.

b) Frontfladen kan bygges op af de to trekanter OAD og ODE, og arealet af den kan så bestemmes ved at udregne arealet af hver af trekanterne:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 80 \\ -50 \\ 125 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 80 \\ 350 \\ 125 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{frontflade} = T_{OAD} + T_{ODE} = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OD} \right| + \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{OE} \right| =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -50 \cdot 125 - 125 \cdot 350 \\ 125 \cdot 80 - 80 \cdot 125 \\ 80 \cdot 350 - (-50) \cdot 80 \end{pmatrix} \right| + \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 350 \cdot 0 - 125 \cdot 300 \\ 125 \cdot 0 - 80 \cdot 0 \\ 80 \cdot 300 - 350 \cdot 0 \end{pmatrix} \right| =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -50000 \\ 0 \\ 32000 \end{pmatrix} \right| + \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -37500 \\ 0 \\ 24000 \end{pmatrix} \right| =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{50000^2 + 0^2 + 32000^2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{37500^2 + 0^2 + 24000^2} =$$

$$29681{,}6441593 + 22261{,}2331195 = 51942{,}8772788$$

Dvs. at arealet er 51943cm^2

c) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 150 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 60 \\ -25 \end{pmatrix} \quad ; \ t \in \mathbb{R}$$

Skæringspunktet mellem denne linje og frontfladen bestemmes ved at indsætte linjens koordinater i planens ligning:

$$-25 \cdot (16t) + 16 \cdot (150 - 25t) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

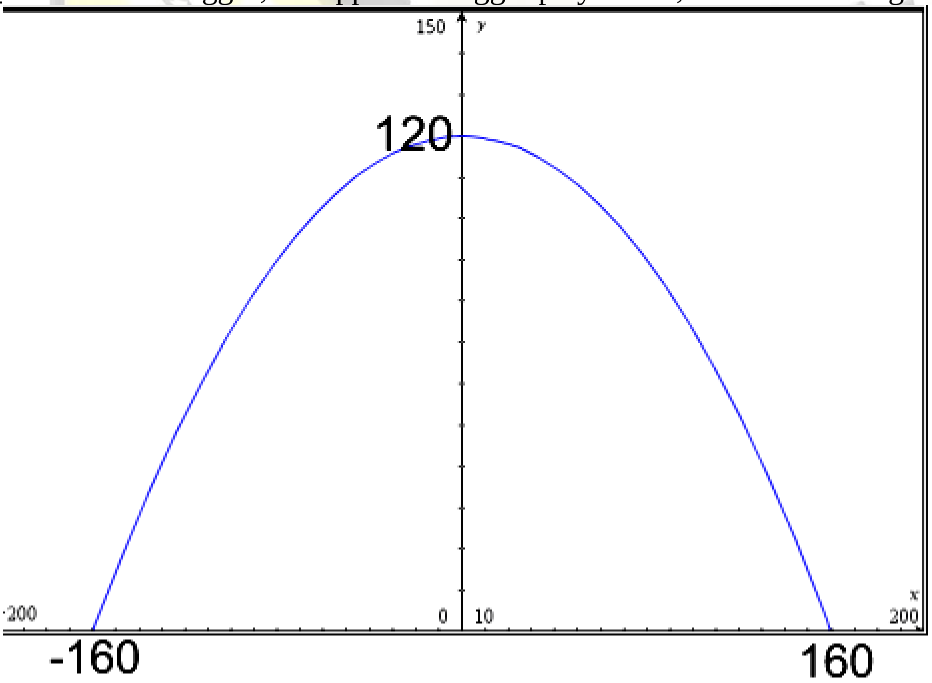
$$-400t + 2400 - 400t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 800t = 2400 \quad \Leftrightarrow \quad t = 3$$

Denne værdi indsættes i parameterfremstillingen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 150 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 60 \\ -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 180 \\ 75 \end{pmatrix}$$

Dvs. at den centrale del af lysstrålen rammer frontfladen i punktet (48,180,75)

Opgave 11: Parablen indlægges, så toppunktet ligger på y-aksen, der dermed fungerer som symmetriakse:



Ligningen for parablen har formen:

$y = ax^2 + bx + c$

Toppunktets førstekoordinat er 0, dvs. $\frac{-b}{2a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 0$

Da grafen skærer y-aksen i 120, er $c = 120$

Punktet (160,0) kan nu bruges til at bestemme a-værdien:

$y = ax^2 + bx + c$

$0 = a \cdot 160^2 + 0 \cdot 160 + 120 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{120}{160^2} = -\frac{3}{640}$

Dvs:

$$\underline{\underline{y = -\frac{3}{640} \cdot x^2 + 120}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 12: $a(t) = \dfrac{16400}{(t-68)^2+400} + \dfrac{1480}{(t-93)^2+18}$; $0 \le t \le 140$

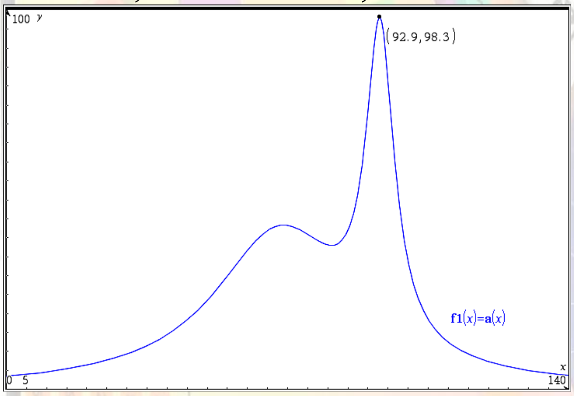
t er tidspunktet målt i ms og a er førerdukkens deceleration i m/s^2.

a) For at kunne tegne grafen defineres funktionen først på TI n'spire ved:

$$a(x):=\frac{16400}{(x-68)^2+400}+\frac{1480}{(x-93)^2+18}|0\le x\le 140$$

Udført

Så tegnes grafen og vinduet justeres, så hele grafen kan ses. Den maksimale deceleration bestemmes ved 'Undersøg grafer'→'Maksimum', hvor grænserne placeres på hver sin side af det sted, hvor man kan se, at maksimum befinder sig:



Dvs. at den største deceleration er $\underline{\underline{98,3\frac{m}{s^2}}}$

Det kunne også have været fundet ved hjælp af de afledede funktioner, hvor der dog viser sig at være tre lokale ekstrema, der derfor med den anden afledede skal undersøges for, om de er maksimum (negativ anden afledet) eller minimum (positiv anden afledet), hvorefter det skal undersøges, hvilket af de to lokale maksima, der er globalt maksimum:

$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(a(x))=0,x\right)$	$x=68.9851639834$ or $x=80.8793488047$ or $x=92.9140744256$
$\frac{d^2}{dx^2}(a(x))\|x=68.98516398336$	-0.177939560836
$\frac{d^2}{dx^2}(a(x))\|x=80.879348804734$	0.296678272829
$\frac{d^2}{dx^2}(a(x))\|x=92.9140744256$	-9.06824419294
$a(68.9851639834)$	43.3893576801
$a(92.9140744256)$	98.2557402242

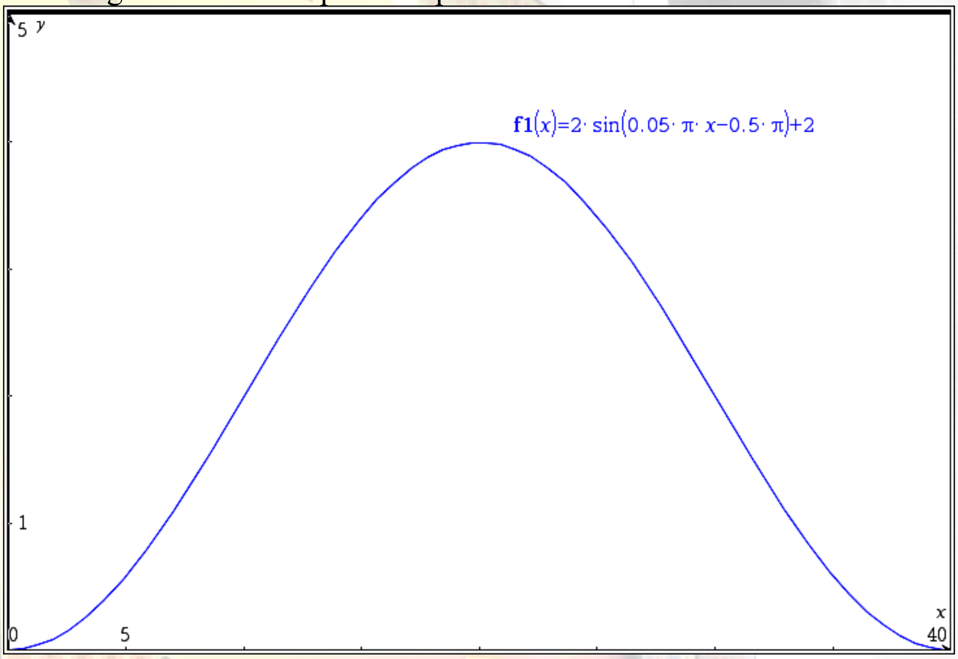
b) $SI = \int_0^T (a(t))^{2,5}\,dt$

$SI_{140} = \int_0^{140} (a(t))^{2,5}\,dt = \underline{982848}$

Udregningen er foretaget på TI n'spire ved: $\int_0^{140} (a(x))^{2.5}\,dx$ 982847.712787

Opgave 13: $f(x) = 2 \cdot \sin(0,05 \cdot \pi \cdot x - 0,5 \cdot \pi) + 2$

a) Da det er en trigonometrisk funktion, skal man regne i radianer.
Så indtegnes funktionen på TI n'spire:



b) Da funktionen nu ligger som f1, bestemmes rumfanget af omdrejningslegemet på TI n'spire ved (igen skal man sikre sig, at lommeregneren regner i radianer):

$$\pi \cdot \int_0^{40} (f1(x))^2 \, dx \qquad 753.982236862$$

Dvs. at: $\underline{\underline{V = 753,98}}$

c) Da det er et omdrejningslegeme, vil tværsnittets kant være cirkelformet.
Radius i cirklen svarer til funktionens maksimum, og da sinusfunktionens maksimumsværdi er 1, har man:

$r = f_{\max} = 2 \cdot 1 + 2 = 4$

$A_{biceps,\max} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 4^2 = \underline{\underline{16\pi}} \approx 50,2654824574$

<u>Opgave 14:</u> $\frac{dm}{dt}=\frac{k}{7000}-\frac{42}{7000}\cdot m$; m(t) er vægten i kg ; t er tiden i døgn ; k er kostindtag i kcal/døgn.

a) Det er oplyst, at vægten er 85 kg, dvs. m = 85, og kostindtaget er 3300 kcal/døgn, dvs. k=3300. Dermed kan væksthastigheden bestemmes:

$$\frac{dm}{dt}=\frac{3300}{7000}-\frac{42}{7000}\cdot 85=-0,0385714$$

Dvs. at personen <u>taber sig med 0,039kg pr. døgn med dette kostindtag.</u>

b) Den nye person vejer 87 kg til t = 0.
Den fuldstændige løsning til differentialligningen bestemmes på TI n'spire ved:

$$\text{deSolve}\left(m'=\frac{k}{7000}-\frac{42}{7000}\cdot m,t,m\right)$$

$$m=c4\cdot e^{\frac{-3\cdot t}{500}}+\frac{k}{42}$$

Dvs. man har: $m(t)=\frac{k}{42}+c\cdot e^{\frac{-3\cdot t}{500}}$

Konstanten *c* udtrykt ved *k* bestemmes:

$$\text{solve}\left(87=c\cdot e^{\frac{-3\cdot 0}{500}}+\frac{k}{42},c\right) \qquad c=\frac{-(k-3654)}{42}$$

Dvs. man har:

$$m(t)=\frac{k}{42}-\frac{k-3654}{42}\cdot e^{\frac{-3\cdot t}{500}}$$

c) Hvis personen efter 100 døgn skal veje 80 kg, skal kostindtaget være:

$$80=\frac{k}{42}-\frac{k-3654}{42}\cdot e^{\frac{-3\cdot 100}{500}}$$

Denne ligning løse ved indtastningen:

$$\text{solve}\left(80=\frac{k}{42}-\frac{k-3654}{42}\cdot e^{\frac{-3\cdot 100}{500}},k\right)$$

$$k=3002.38745074$$

Dvs. <u>k = 3002</u> (svarende til at kostindtaget er 3002 kcal pr. døgn)

7. december 2012: Delprøven UDEN hjælpemidler

<u>*Opgave 1:*</u> $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ t \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

Begge vektorer er egentlige vektorer, da de uanset værdien af *t* har mindst én koordinat forskellig fra nul. Så man har:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \det\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ t & 8 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3\cdot 8 - t\cdot 2 = 0 \Leftrightarrow 2t = 24 \Leftrightarrow \underline{\underline{t = 12}}$$

<u>*Opgave 2:*</u> $p(x) = x^2 - 10x + 24$

Parablen skærer førsteaksen de steder, hvor $p(x) = 0$, så man skal løse andengradsligningen:

$$0 = x^2 - 10x + 24$$

1. <u>metode: Faktorisering.</u>
   Man skal finde to tal, hvis produkt giver 24 og sum -10. Da produktet skal være 24, er de mulige hele tal 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 og 24 (fortegn ikke medregnet). Da summen skal være -10, må det være tallene -4 og -6, så man har:
   $$0 = x^2 - 10x + 24 \Leftrightarrow (x-4)\cdot(x-6) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 4 \vee x = 6}}$$

2. <u>metode: Diskriminantmetoden.</u>
   $$d = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4\cdot 1\cdot 24 = 100 - 96 = 4 > 0 \quad dvs. 2 \ løsninger$$
   $$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{4}}{2\cdot 1} = \frac{10 \pm 2}{2} = \underline{\underline{\begin{cases} 6 \\ 4 \end{cases}}}$$

<u>*Opgave 3:*</u> Da trekant ABC er retvinklet, giver Pythagoras:

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 \Leftrightarrow |BC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2$$

$$|BC| = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = \underline{\underline{4}}$$

For at kunne bestemme længden af siden DF, skal man udnytte, at de to trekanter er ensvinklede, således at forholdet mellem par af ensliggende sider er det samme for alle tre par. Så man har:

$$\frac{|DF|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|AC|} \Leftrightarrow |DF| = \frac{|DE|}{|AC|}\cdot|AB| = \frac{6}{3}\cdot 5 = \underline{\underline{10}}$$

<u>*Opgave 4:*</u> $f(x) = 3x^2 + 6x \quad P(1,2)$

Ved ledvis integration bestemmes den form samtlige stamfunktioner er på:

$$F(x) = x^3 + 3x^2 + k$$

Punktet indsættes for at bestemme k-værdien:

$$2 = 1^3 + 3\cdot 1^2 + k \Leftrightarrow 2 = 4 + k \Leftrightarrow k = -2$$

Dvs. at den søgte stamfunktion er:

$$\underline{\underline{F_P(x) = x^3 + 3x^2 - 2}}$$

<u>Opgave 5:</u> $\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x}$; $x > 0$ $\qquad P(2,7)$

For at bestemme ligningen for tangenten til grafen for funktion *f*, der er en løsning til differentialligningen, i punktet *P*, skal man kende røringspunktet koordinater og tangentens hældning. Punktets koordinater er allerede angivet, og tangentens hældning bestemmes ved at indsætte punktets koordinater i differentialligningen:

$$a = \frac{dy}{dx} = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Dvs. at tangentens ligning bliver:

$$y - 7 = 3\cdot(x-2) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = 3x+1}}$$

<u>Opgave 6:</u> $f(x) = \ln(x) - x + 3$; $x > 0$

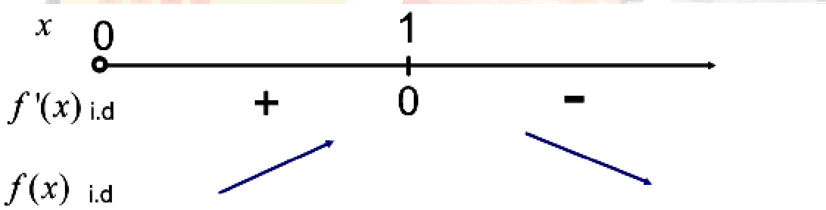
Monotoniforholdene bestemmes ved først at finde nulpunkter og fortegn for den afledede funktion og derefter tegne et fortegnsskema:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} - 1 = 2 - 1 = 1 > 0 \quad dvs.\ f \text{ er voksende}$$

$$f'(2) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0 \quad dvs.\ f \text{ er aftagende}$$



Så:

<u>*f* er voksende i intervallet]0;1]</u>

<u>*f* er aftagende i intervallet [1;∞[</u>

Man kunne også have erstattet fortegnsskemaet med en undersøgelse af den anden afledede, der skal vise om stedet x = 1 er lokalt maksimum eller minimum:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{1^2} = -1 < 0 \quad dvs. maksimum$$

7. december 2012: Delprøven MED hjælpemidler

<u>*Opgave 7:*</u> $C(-1,4)\quad P(2,8)$

a) Cirklens ligning kan opskrives, når man kender radius og centrums koordinater. Centrum er kendt, så det er kun radius, der skal bestemmes.
Da cirklen med centrum i C går gennem punktet P, er radius givet ved:

$$r=|CP|=\sqrt{(2-(-1))^2+(8-4)^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$$

Dvs. at cirklens ligning er:

$$(x-(-1))^2+(y-4)^2=5^2 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{(x+1)^2+(y-4)^2=25}}$$

b) $l:\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\15\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$

Skæringspunkterne mellem linjen og cirklen bestemmes ved at indsætte linjens koordinater udtrykt ved t på x og y's plads i cirklens ligning:

$$(-3+t+1)^2+(15+7t-4)^2=25 \quad\Leftrightarrow\quad (-2+t)^2+(11+7t)^2=25 \quad\Leftrightarrow$$
$$4+t^2-4t+121+49t^2+154t=25 \quad\Leftrightarrow\quad 50t^2+150t+100=0 \quad\Leftrightarrow$$
$$t^2+3t+2=0 \quad\Leftrightarrow\quad (t+2)\cdot(t+1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad t=-2\vee t=-1$$

Ligningen kunne naturligvis også være løst med 'solve' på lommeregneren.

Nu indsættes t-værdierne i linjens ligning:

$$t=-2:\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\15\end{pmatrix}+(-2)\cdot\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-2\\15-14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$$

$$t=-1:\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\15\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-1\\15-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\8\end{pmatrix}$$

Dvs. at skæringspunkterne er $\underline{\underline{(-5,1)\ og\ (-4,8)}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 8: a) Hvis man vil finde kvartilsættet for det systoliske blodtryk for mændene i hånden, skal observationerne opskrives i rækkefølge efter størrelse:

119 119 120 120 120 121 121 122 122 123 123 123 127 127 127 128 129 129 129 129

Da det er et lige antal observationer bestemmes medianen som gennemsnittet af de to midterste observationer:

$$m = \frac{123+123}{2} = 123$$

Den nedre kvartil bestemmes som medianen af den første halvdel (igen et lige antal observationer):

119 119 120 120 120 121 121 122 122 123 $\qquad Q_n = \frac{120+121}{2} = 120,5$

Den øvre kvartil bestemmes som medianen af den anden halvdel (igen et lige antal observationer):

123 123 127 127 127 128 129 129 129 129 $\qquad Q_n = \frac{127+128}{2} = 127,5$

Den mindste observation er 119 og den højeste 129.

Disse observationer kan bruges til at tegne et boxplot, men det kan også gøres på TI n'spire ved først at indskrive de to observationer (rækkefølgen er ligegyldig) under 'Lister og regneark'. Det er vigtigt at navngive søjle A til f.eks. som her "Blodtrykm"
Med 'Menu' (håndholdt) eller Værktøjerne (computer) vælges 'Statistik'→'Statistiske beregninger'→'Statistik med 1-variabel'. Antal lister: 1. X1-listen er a[] og frekvenslisten er 1:

	A blodtry...	B	C	D	E	F	G	H	I
◆			=OneVar(a						
1	119	Titel	Statistik ...						
2	129	x̄	123.9						
3	120	Σx	2478.						
4	121	Σx²	307294.						
5	122	sx := sn-...	3.76828...						
6	129	σx := σn...	3.67287...						
7	122	n	20.						
8	127	MinX	119.						
9	123	Q₁X	120.5						
10	119	MedianX...	123.						
11	120	Q₃X	127.5						
12	123	MaxX	129.						
13	127	SSX := Σ...	269.8						
14	128								
15	129								

F13

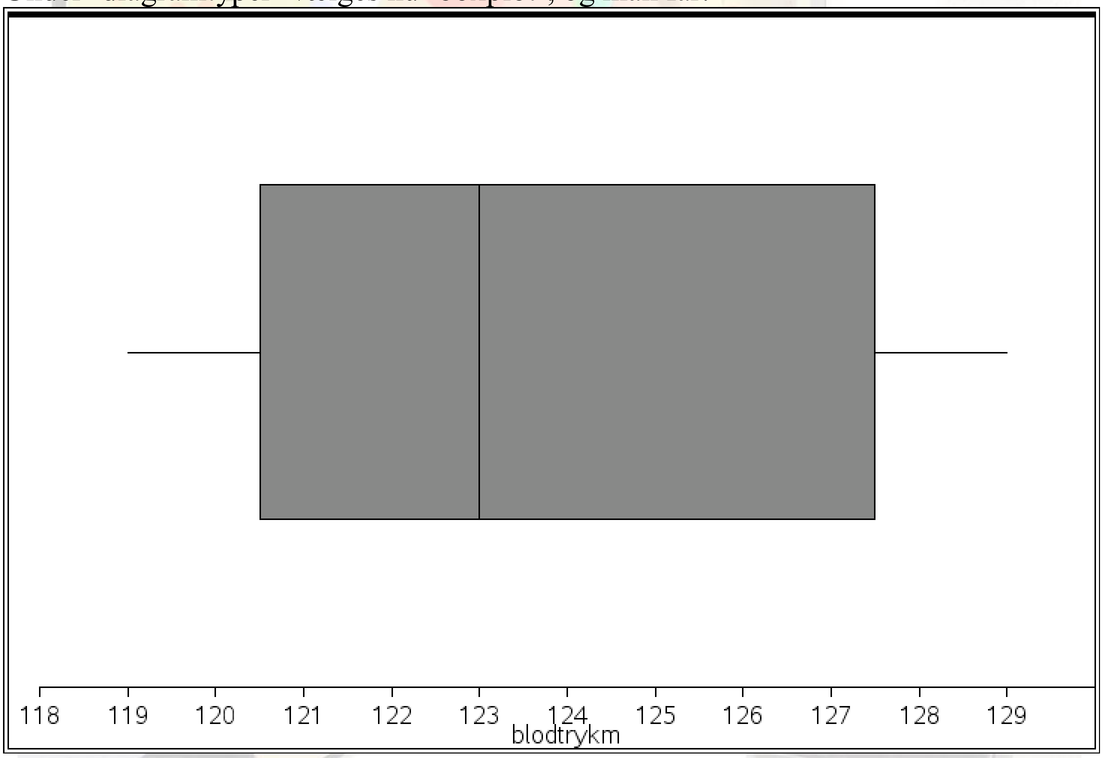
(bemærk at der mangler 15 rækker i bunden).

Alternativ måde at anvende listen:
Opskriv værdien af en observation i liste A og antallet af den pågældende observation i liste B (der så skal bruges som frekvenssøjle):
Der vælges så præcis samme indtastninger indtil sidste skridt, hvor:
X1-listen er a[] og frekvenslisten er b[]:

	A blodt	B	C	D	E	F	G	H	I
◆				=OneVar(a					
1	119	2	Titel	Statistik ...					
2	120	3	x̄	123.9					
3	121	2	Σx	2478.					
4	122	2	Σx²	307294.					
5	123	3	sx := sn-...	3.76828...					
6	127	3	σx := σn...	3.67287...					
7	128	1	n	20.					
8	129	4	MinX	119.					
9			Q₁X	120.5					
10			MedianX...	123.					
11			Q₃X	127.5					
12			MaxX	129.					
13			SSX := Σ...	269.8					
14									
15									

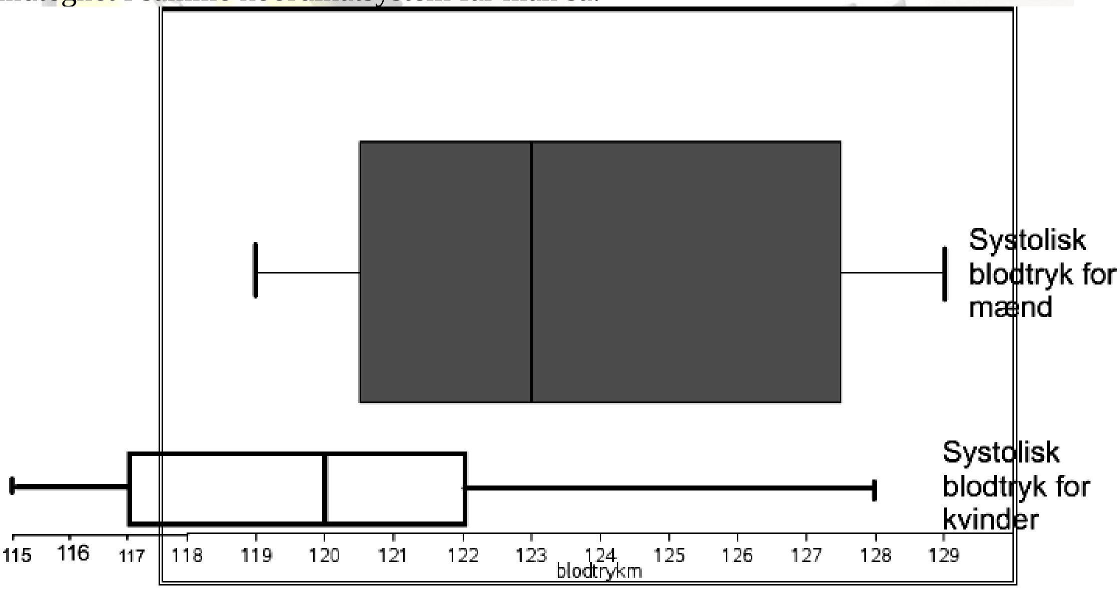
F13

For at tegne et boxplot vælges nu på en ny side 'Diagrammer og statistik', hvor 'Blodtrykm' tilføjes på førsteaksen.
Under 'diagramtyper' vælges nu 'boxplot', og man får:



Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Indtegnet i samme koordinatsystem får man så:



b) Kvinder har generelt lavere systolisk blodtryk end mænd. Mere end 25% af kvinderne har et blodtryk, der er lavere end det lavest registrerede hos mænd, og halvdelen af alle kvinder (angivet ved medianen) har – hvis undersøgelsen er repræsentativ – lavere blodtryk end de 75% af mændene, der har højest blodtryk. Mere end halvdelen af alle mændene (angivet ved medianen) har et højere blodtryk end de 75% af kvinderne med lavest blodtryk.
Desuden kan det bemærkes, at mindst en enkelt kvinde ligger noget længere fra kvindernes normal, end nogen mand ligger fra mændenes normal.

Opgave 9: a) Opgaven løses med Maple:

restart

with(*Gym*) :

Da modellen hedder $f(x) = b \cdot x^a$ anvendes potensregression:

$Vægt := [0.3, 2.4, 6.4, 13, 29.3, 51.8, 59.6]$:

$Hvilestofskifte := [28, 135, 293, 520, 956, 1394, 1591]$:

$f(x) := PowReg(Vægt, Hvilestofskifte, x)$:

$f(x) = 70.5119922116953\, x^{0.764625718223876}$

Man kan aflæse ud fra forskriften, at:

$\underline{\underline{a = 0.7646257}}$ og $\underline{\underline{b = 70.51199}}$

b) En vægt på 20kg svarer til $x = 20$, så man udregner:

$f(20) = 696.729148365850$

Dvs. hvilestofskiftet for et 20 kg tungt pattedyr er ifølge modellen $\underline{\underline{\dfrac{697\ kcal}{døgn}}}$

c) Da det er potensvækst er sammenhængen mellem den procentvise ændring i uafhængig (x) og afhængig (y) variabel givet ved:

$(1+r_y) = (1+r_x)^a$

Så man har:

$r_y = (1+r_x)^a - 1 = (1+0{,}15)^{0{,}76462572} - 1 = 1{,}15^{0{,}76462572} - 1 = 0{,}112784656 \approx 11{,}3\%$

Dvs. at <u>hvilestofskiftet øges med 11,3%,</u> når vægten øges med 15%.

I n'spire løses opgaven ved:

a) $f(x) = b \cdot x^a$; x er vægten af pattedyrene målt i kg ; *f(x)* er hvilestofskiftet målt i kcal/døgn.

Vægt (kg)	0,3	2,4	6,4	13	29,3	51,8	59,6
Hvilestofskifte (kcal/døgn)	28	135	293	520	956	1394	1591

Da modellen er potensvækst, indtastes værdierne på TI n'spire under 'Lister og regneark' med vægten i liste A og hvilestofskiftet i liste B. Der vælges 'Statistik'→'Statistiske beregninger'→'Potensregression', og som x-værdier vælges liste a[] og som y-værdier liste b[]. Resultatet gemmes som f1:

	A	B	C	D	E	F
◆				=PowerRe		
1	0.3	28	Titel	Potensre…		
2	2.4	135	RegEqn	a*x^b		
3	6.4	293	a	70.5119…		
4	13	520	b	0.76462…		
5	29.3	956	r²	0.99971…		
6	51.8	1394	r	0.99985…		
7	59.6	1591	Resid	{-0.0838…		
8			ResidTra…	{-0.0029…		

D1 ="Potensregression"

Da lommeregneren har byttet om på *a* og *b* i forhold til modellen, har man:

$\underline{\underline{a = 0{,}76462572 \ og \ b = 70{,}5119922}}$

b) Da modellens funktionsforskrift er gemt som f1, kan man finde hvilestofskiftet for et dyr på 20kg ved indtastningen:

$$f1(20) \qquad 696.729148358$$

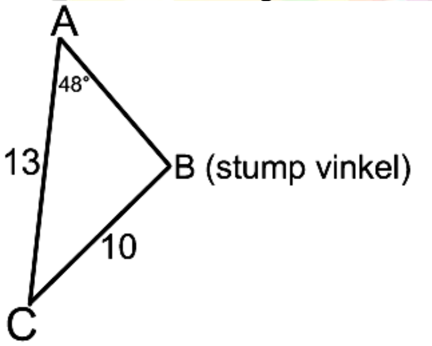
Dvs. at et dyr på 20kg ifølge modellen har et hvilestofskifte på 697 kcal/døgn

c) Kan løses som vist ovenfor, eller man kunne også have fundet det ved på TI n'spire først at udregne brøken, hvor nævneren består af funktionsværdien til en vilkårlig x-værdi, og tælleren består af funktionsværdien til en x-værdi, der er 15% større end den vilkårlige x-værdi:

$$\frac{f1(1.15\cdot x)}{f1(x)}-1 \qquad 0.112785$$

Opgave 10: $\Delta ABC:\ \angle A=48° \quad |AC|=13 \quad |BC|=10 \quad \angle B>90°$

a) En skitse af trekanten tegnes:



Nu skal længden af sidestykket AB bestemmes:

Metode 1. Cosinusrelation:
En cosinusrelation giver følgende ligning:

$$\cos A=\frac{|AC|^2+|AB|^2-|BC|^2}{2\cdot|AC|\cdot|AB|}$$

$$\cos(48°)=\frac{13^2+|AB|^2-10^2}{2\cdot 13\cdot|AB|}$$

Denne ligning løses på TI n'spire ved:

$$\text{solve}\left(\cos(48)=\frac{13^2+ab^2-10^2}{2\cdot 13\cdot ab},ab\right)$$
$$ab=6.11657765814 \text{ or } ab=11.2808181072$$

Ligningen har to løsninger (den kan omskrives til en andengradsligning), og man skal så bruge oplysningen om, at vinkel B er stump, til at vælge mellem de to løsninger.
Da B er stump, er der mindre end 90° tilbage til vinklerne A og C. Da vinkel A er 48°, er vinkel C altså mindre end 42°, og dermed er vinkel C den mindste af de tre vinkler. Derfor ligger vinkel C over for den korteste side, og dermed kan længden af siden AB altså ikke være 11,3, da denne side så ville være længere end siden BC.
Altså er $\underline{\underline{|AB|=6{,}11658}}$

Metode 2. Sinusrelationer:

Man kan ikke direkte bestemme længden af siden AB med sinusrelationerne, da man ikke kender vinkel C, men vinkel C kan bestemmes, hvis man først finder vinkel B:

$$\frac{\sin B}{|AB|} = \frac{\sin A}{|BC|}$$

$$\frac{\sin B}{13} = \frac{\sin(48°)}{10} \Leftrightarrow \sin B = \frac{\sin(48°)}{10}\cdot 13 \Leftrightarrow$$

$$B = \sin^{-1}\left(\frac{\sin(48°)}{10}\cdot 13\right) \vee B = 180° - \sin^{-1}\left(\frac{\sin(48°)}{10}\cdot 13\right) \Leftrightarrow$$

$$B = 75{,}036003707013° \vee \underline{B = 104{,}96399629299°}$$

Da B er stump, er det den anden af de to vinkler, der er den rigtige.

Og så kan vinkel C bestemmes:

$$180° = A + B + C$$

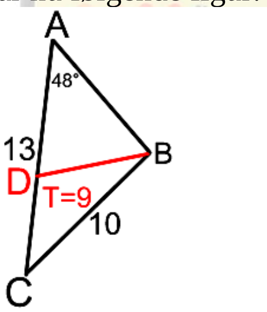
$$C = 180° - 48° - 104{,}96399629299° = 27{,}036003707°$$

$Dvs:$

$$\frac{|AB|}{\sin C} = \frac{|BC|}{\sin A} \Leftrightarrow |AB| = \frac{|BC|}{\sin A}\cdot \sin C$$

$$|AB| = \frac{10}{\sin(48°)}\cdot \sin(27{,}036003707°) = \underline{\underline{6{,}11657765814}}$$

b) Man har nu følgende figur:



Hvis man har brugt metode 1 (cosinusrelationsmetoden), kender man ikke vinkel C, men den kan bestemmes med sinusrelationerne ved at inddrage vinklerne A og C og de to modstående/tilhørende sider.

Metode 2 (sinusrelationsmetoden) gav undervejs vinkel C, og dermed kan man nu udnytte kendskabet til arealet af trekant BCD til at bestemme længden af siden CD:

$$T_{BCD} = \frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|CD|\cdot\sin(C) \Leftrightarrow |CD| = \frac{2\cdot T_{BCD}}{|BC|\cdot\sin(C)}$$

$$|CD| = \frac{2\cdot 9}{10\cdot\sin(27{,}036003707°)} = \underline{\underline{3{,}95995775524}}$$

Opgave 11: $P(t) = 60,297 \cdot 10^9 \cdot 1,031^t$

t er tiden målt i år efter 1950 ; *P(t)* er den årlige globale CO_2-udledning målt i tons.

a) Modellen er en eksponentiel udvikling med begyndelsesværdi $60,297 \cdot 10^9$ og grundtal/fremskrivningsfaktor 1,031.
Så konstanten $60,297 \cdot 10^9$ fortæller, at der i 1950 blev udledt $60,297 \cdot 10^9$ tons CO_2
Konstanten 1,031 fortæller, at udledningen af CO_2 er steget med 3,1% om året siden 1950.

b) $N(t) = 6,72 \cdot 10^7 \cdot t + 2,594 \cdot 10^9$; *N(t)* er befolkningstallet i verden til tiden *t*.
Lad $U_P(t)$ være den gennemsnitlige årlige CO_2-udledning pr. person til tiden *t*.
Denne størrelse udregnes ved at tage det samlede udslip og dividere med antallet af mennesker, dvs. modellen bliver:

$$U_P(t) = \frac{P(t)}{N(t)} = \frac{60,297 \cdot 10^9 \cdot 1,031^t}{6,72 \cdot 10^7 \cdot t + 2,594 \cdot 10^9}$$

År 2012 svarer til *t* = 62, så man har:

$$U_P(62) = \frac{60,297 \cdot 10^9 \cdot 1,031^{62}}{6,72 \cdot 10^7 \cdot 62 + 2,594 \cdot 10^9} = 59,2052963647$$

Dvs. at i år 2012 var den gennemsnitlige årlige CO_2-udledning pr. person ifølge modellen 59,2 tons

<u>*Opgave 12:*</u> $O(0,0,0)$ $A(7,3,0)$ $B(1,1,6)$ $C(-5,13,0)$ $D(1,8,0)$ $E(4,2,3)$ $F(-1,5,4)$

a) For at bestemme en ligning for den plan α, der indeholder sidefladen *ODE*, skal man kende et punkt i planen og en normalvektor for planen. Som punkt kan man bruge et hvilket som helst af punkterne O, D og E, mens man kan finde en normalvektor ved først at finde krydsproduktet mellem to vektorer, der udspænder planen:

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 8\cdot 3 - 0\cdot 2 \\ 0\cdot 4 - 1\cdot 3 \\ 1\cdot 2 - 8\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -3 \\ -30 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{n_\alpha} = -\frac{1}{3}\cdot \overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{OE} = -\frac{1}{3}\cdot \begin{pmatrix} 24 \\ -3 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Som normalvektor er valgt en vektor modsatrettet det udregnede krydsprodukt og en tredjedel så lang. Med denne vektor og punktet O som udgangspunkt får man:

$$\alpha:\ -8\cdot(x-0) + 1\cdot(y-0) + 10\cdot(z-0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{-8x + y + 10z = 0}}$$

b) Først bestemmes afstanden fra punktet *F* til planen *α*.

$$dist(F,\alpha) = \frac{\left|-8\cdot(-1) + 1\cdot 5 + 10\cdot 4\right|}{\sqrt{(-8)^2 + 1^2 + 10^2}} = \frac{|53|}{\sqrt{165}} = 4{,}12604440406$$

Problemet er, at denne afstand ikke svarer til afstanden fra *F* til sidefladen *ODE* med mindre projektionen af *F* på *α* ligger på sidefladen *ODE*. Det er muligvis en fejl i opgaveformuleringen, for normalt spørges der efter afstanden til planen og ikke til sidefladen, men hvis man skal besvare det formulerede spørgsmål, mangler man altså at vise, at projektionen ligger på sidefladen.
Dette gøres ved at løse følgende system af ligninger:

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\cdot \overrightarrow{OE} + s\cdot \overrightarrow{ED} + t\cdot \overrightarrow{n_\alpha}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + t\cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Hvis man skal vise, at projektionen af *F* på *α* ligger på sidefladen *ODE*, skal man vise, at der gælder:

$$0 \le r \le 1 \ \wedge \ 0 \le s \le 1 \ \wedge \ r \ge s$$

Hermed sikrer man sig, at når man begynder i *O(0,0,0)* og følger vektorerne $\overrightarrow{OE}$ og $\overrightarrow{ED}$, så havner man ikke uden for sidefladen ODE. Konstanten *t* har ingen betydning. Denne del af udtrykket sørger for, at man kommer til punktet *F* ved at bevæge sig vinkelret ud fra planen α.
Ligningssystemet løses på TI N'spire ved:

$f := \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\quad\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

$oe := \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\quad\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$ed := \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$ $\quad\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$

$n := \begin{bmatrix} -8 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$ $\quad\begin{bmatrix} -8 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$

solve($f=r\cdot oe+s\cdot ed+t\cdot n,r,s,t$) $\quad r=\frac{43}{55}$ and $s=\frac{257}{495}$ and $t=\frac{53}{165}$

solve($f=r\cdot oe+s\cdot ed+t\cdot n,r,s,t$)
$r=0.781818181818$ and $s=0.519191919192$ and $t=0.321212121212$

Det ses altså, at betingelserne $0 \le r \le 1 \ \wedge\ 0 \le s \le 1 \ \wedge\ r \ge s$ er opfyldt, og dermed gælder:

$dist(F,ODE) = dist(F,\alpha) = \underline{\underline{4{,}12604440406m}}$

c) $\beta:\ 5x+6y+7z=53$

Vinklen mellem to planer svarer til vinklen mellem deres normalvektorer, så man har:

$$\cos v = \frac{\overrightarrow{n_\beta}\cdot\overrightarrow{n_\alpha}}{\left|\overrightarrow{n_\beta}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|}$$

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-8\\1\\10\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-8\\1\\10\end{pmatrix}\right|}\right) =$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{5\cdot(-8)+6\cdot 1+7\cdot 10}{\sqrt{5^2+6^2+7^2}\cdot\sqrt{(-8)^2+1^2+10^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{36}{\sqrt{110}\cdot\sqrt{165}}\right) = 74{,}5012672434°$$

Da man søgte den stumpe vinkel:

$$v_{stump} = 180° - 74{,}5012672434° = \underline{\underline{105{,}498732757°}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>*Opgave 13:*</u> $f(x)=1+0{,}1\cdot x^2 \qquad P(5, f(5))$

a) En ligning for tangenten til grafen for *f* i punktet *P* kan på TI n'spire bestemmes ved:

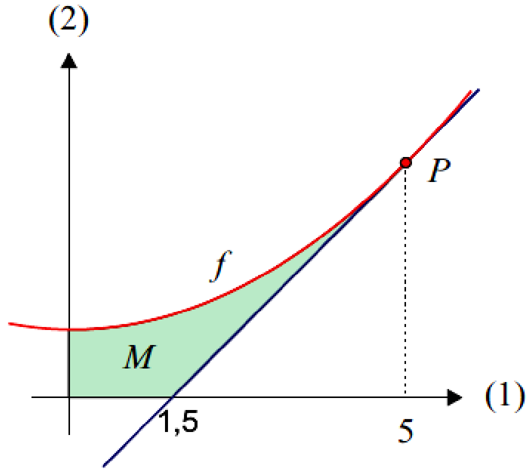
```
f(x):=1+0.1·x^2                 Udført
tangentLine(f(x),x,5)           x−1.5
```

Dermed er tangentens ligning: $\underline{\underline{y=x-1{,}5}}$

Dette kunne også have været udregnet i hånden ved:
Først bestemmes røringspunktets andenkoordinat:
$f(5)=1+0{,}1\cdot 5^2=1+0{,}1\cdot 25=3{,}5$
Så bestemmes tangentens hældning ved at finde differentialkvotienten i $x=5$:
$f'(x)=0{,}1\cdot 2\cdot x=0{,}2\cdot x$
$f'(5)=0{,}2\cdot 5=1$
Da man nu både kender tangentens hældning og røringspunktets koordinater har man:
$y-3{,}5=1\cdot(x-5) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y=x-1{,}5}}$

b) Først bestemmes førstekoordinaten til tangentens skæringspunkt med førsteaksen (y=0):
$0=x-1{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=1{,}5}}$

Lerskålen findes ved først at dreje den del af grafen for *f* , der ligger i intervallet [0,5], hvorefter man fratrækker det omdrejningslegeme, der fremkommer, når man drejer den del af tangenten, der ligger inden for intervallet [1,5 ; 5].



$V_{skål}=\pi\cdot\int_0^5 f(x)^2\,dx-\pi\cdot\int_{1,5}^5 (x-1{,}5)^2\,dx=\underline{\underline{16{,}6242611252}}$

Udregningen er foretaget på TI n'spire, hvor funktionen allerede er gemt, ved:

```
π·∫_0^5 (f(x))^2 dx − π·∫_1.5^5 (x−1.5)^2 dx
                                  16.6242611252
```

Opgave 14: $\frac{dv}{dt} - \frac{1}{15-t} \cdot v = \frac{300}{15-t} - 9{,}81 \quad 0 \le t \le 14$

v er rakettens fart målt i m/s og t er tiden efter affyring målt i sekunder.
Når $t = 0$ er $v = 0$.

a) Differentialligningen løses sammen med begyndelsesbetingelsen på TI n'spire ved:

$$\text{deSolve}\left(v' - \frac{1}{15-t} \cdot v = \frac{300}{15-t} - 9.81 \text{ and } v(0)=0, t, v\right) \quad v = \frac{-4.905 \cdot t \cdot (t+31.1620795107)}{t-15}$$

Dvs. at:

$$v(t) = \frac{-4{,}905 \cdot t \cdot (t + 31{,}1620795107)}{t-15}$$

Da man nu har udtrykket på lommeregneren, kan man finde det tidspunkt, hvor v = 1000:

$$\text{solve}\left(1000 = \frac{-4.905 \cdot t \cdot (t+31.162079510704)}{t-15}, t\right) \quad t=-247.396807386 \text{ or } t=12.3611295063$$

Den ene løsning ligger uden for modellens tidsinterval, så ifølge modellen opnår raketten farten 1000m/s efter 12,36 sekunder

Opgave 15: a) Da kilens rumfang er 100, er træklodsens rumfang 200, så man har:

$$200 = h \cdot x \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{200}{x^2}$$

Kilen består af 5 flader:
2 trekanter med højden h og grundlinjen x.
En kvadratisk bundflade med sidelængden x.
En rektangulær sideflade med bredden x og længden h.

Den skrå flade, der er en rektangulær sideflade med bredden x og højden:

$$h_{skråflade}^2 = h^2 + x^2$$
$$h_{skråflade} = \sqrt{h^2 + x^2}$$

Så overfladearealet bliver:

$$O(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot h \cdot x + x \cdot x + x \cdot h + x \cdot \sqrt{h^2 + x^2}$$

$$O(x) = \frac{200}{x^2} \cdot x + x^2 + x \cdot \frac{200}{x^2} + x \cdot \sqrt{\left(\frac{200}{x^2}\right)^2 + x^2}$$

$$O(x) = \frac{400}{x} + x^2 + x \cdot \sqrt{\frac{40000}{x^4} + x^2}$$

b) Ved hjælp af den første og anden afledede bestemmes nu den x-værdi, der gør overfladearealet mindst muligt:

$o(x):=\frac{400}{x}+x^2+x\cdot\sqrt{\frac{40000}{x^4}+x^2}$	*Udført*
$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(o(x))=0,x\right)$	$x=5.52039568226$
$\frac{d^2}{dx^2}(o(x))\vert x=5.520395682258$	13.2551019026

Først findes de ekstremumsstederne som de steder, hvor den første afledede giver 0, og derefter undersøges fortegnet for den anden afledede det pågældende sted. Da den anden afledede er positiv, er det et lokalt minimum, så overfladen er mindst mulig, når

$$\underline{\underline{x = 5{,}52\,cm}}$$

Det kunne også have været løst grafisk ved på TI n'spire under 'grafer' at få tegnet grafen og tilpasset vinduet, hvorefter minimumspunktet bestemmes ved 'Undersøg grafer'→'Minimum' med grænserne placeret på hver side af det sted, hvor man kan se, at minimum ligger: