Løsninger til eksamensopgaver på A-niveau 2013

24. maj 2013: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: Udtrykket reduceres ved at anvende en kvadratsætning på første led og gange ind i parentesen i andet led:

$$(p+q)^2 + 2p\cdot(p-q) = p^2 + q^2 + 2pq + 2p^2 - 2pq = \underline{\underline{3p^2 + q^2}}$$

Opgave 2: $f(x) = ax + b \quad A(3,4) \quad B(5,10)$

Metode 1:
Punkternes koordinater indsættes i funktionsudtrykket, og de to ligninger trækkes fra hinanden (venstreside fra venstreside og højreside fra højreside):

$$\left.\begin{array}{r} 4 = a\cdot 3 + b \\ 10 = a\cdot 5 + b \end{array}\right\} \Rightarrow 10 - 4 = (5a + b) - (3a + b) \quad \Leftrightarrow \quad 6 = 2a \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{a = 3}}$$

Denne værdi indsættes sammen med koordinaterne for punktet A i forskriften:

$$4 = 3\cdot 3 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 4 - 9 = \underline{\underline{-5}}$$

Metode 2:
Det er en lineær forskrift, så *a* og *b* kan bestemmes ved:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10-4}{5-3} = \frac{6}{2} = \underline{\underline{3}}$$

$$b = y_1 - a\cdot x_1 = 4 - 3\cdot 3 = 4 - 9 = \underline{\underline{-5}}$$

Opgave 3: $p(x) = ax^2 + bx + c \quad a < 0 \quad c < 0 \quad d < 0$

Da *a* er negativ, vender parablens ben nedad, dvs. graf A kan udelukkes.

Da diskriminanten er negativ, har polynomiet ingen rødder, dvs. grafen skærer ikke x-aksen. Dette udelukker graf B.

Da c-værdien er negativ, skærer parablen y-aksen på dennes negative del, men dette bringer os ikke videre, da dette gælder for både C og D.

Det er oplyst, at hældningskoefficienten for parablens tangent i parablens skæringspunkt med andenaksen er positiv, dvs. funktionen er voksende i et interval, der indeholder skæringspunktet. Dette er tilfældet for graf D, mens graf C's funktion er aftagende i et interval, der indeholder skæringspunktet.

Dvs. det er D, der er graf for *p*

Opgave 4: $f(x) = -x^3 + 9x$

Det er oplyst på figuren, at grafen skærer førsteaksen i *x=0* og i *x=3*.
Man kan dog også se dette ved indsættelse:

$$f(0) = -0^3 + 9\cdot 0 = -0 + 0 = 0$$

$$f(3) = -3^3 + 9\cdot 3 = -27 + 27 = 0$$

Da man ser på det stykke af grafen, hvor funktionen er ikke-negativ, kan arealet af M bestemmes ved det bestemte integral:

$$A_M = \int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 \left(-x^3 + 9x\right)dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{9}{2}\cdot x^2\right]_0^3 =$$

$$\left(-\frac{1}{4}\cdot 3^4 + \frac{9}{2}\cdot 3^2\right) - \left(-\frac{1}{4}\cdot 0^4 + \frac{9}{2}\cdot 0^2\right) = -\frac{81}{4} + \frac{81}{2} - 0 = \underline{\underline{\frac{81}{4}}}$$

Opgave 5: $f(x) = e^x + 7x$

Man kan vise, at en funktion er voksende, ved at vise, at dens afledede funktion er positiv i hele definitionsmængden (i dette tilfælde alle reelle tal) - dog må den gerne være nul i enkelte punkter.
Der differentieres ledvist:

$f'(x) = e^x + 7 > 0$ for alle x-værdier, da $e^x > 0$ for alle x-værdier.

$\underline{\underline{\text{Da } f'(x) > 0 \text{ for alle } x \in \mathbb{R}, \text{ er } f \text{ en voksende funktion}}}$

Opgave 6: $\ell: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$ Cirkel: $C(0,0)$ $r = \sqrt{2}$

Da man kender cirklens centrum og radius, kan dens ligning opskrives:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow \underline{\underline{x^2 + y^2 = 2}}$$

Skæringspunkterne mellem cirkel og linje bestemmes ved at indsætte linjens koordinater i cirklens ligning og dermed finde de relevante værdier for parameteren *t*:

$$(3+t)^2 + (-3-t)^2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$9 + t^2 + 6t + 9 + t^2 + 6t = 2 \Leftrightarrow$$

$$2t^2 + 12t + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$t^2 + 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(t+4)\cdot(t+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$t = -4 \vee t = -2$$

Andengradsligningen kunne også have været løst ved diskriminantmetoden, men det er nok hurtigere at finde to tal, hvis sum er 6 og produkt 8.
Disse værdier indsættes i linjens parameterfremstilling for at finde punkterne:

$$t = -4: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} - 4\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4 \\ -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$t = -2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ -3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dvs. skæringspunkterne er $\underline{\underline{(-1,1) \text{ og } (1,-1)}}$

24. maj 2013: Delprøven MED hjælpemidler

Opgave 7: Først løses opgaven med Maple. Derefter løses den med TI n'spire.

restart

with(*Gym*) :

a) Det er oplyst, at forskriften er $P(x) = b \cdot a^x$, så der skal laves eksponentiel regression.

$Årefter1990 := [0, 5, 10, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21]$:

$Procentdel := [3.1, 4.5, 6.5, 10.4, 11.8, 14.5, 15.2, 16.6, 18.1, 20]$:

$P(x) := ExpReg(Årefter1990, Procentdel, x)$:

$P(x) = 2.88330565068719\ 1.09521699048200^x$

Dvs. at $\underline{\underline{a = 1.095217}}$ og $\underline{\underline{b = 2.883306}}$

b) Tallet a er fremskrivningsfaktoren, der er forbundet med vækstraten r ved: $a = 1 + r$

Dvs. at $r = 1,095217 - 1 = 0,095217 = 9,5217\%$

<u>Altså vokser procentdelen af den tyske elektricitetsproduktion, der kommer fra vedvarende energi, med 9,5% om året.</u>

Fremskrivningsfaktoren benyttes til at bestemme fordoblingstiden: $T_2 = \frac{\ln 2}{\ln a} = \frac{\ln 2}{\ln 1,095217} = 7,621$

c) År 2020 svarer til $x = 30$, så man udregner:

$P(30) = 44.1464574607660$

Dvs. at ifølge modellen vil man i 2020 have 44% af Tysklands elektricitetsproduktion til at komme fra vedvarende energi, og da målet på 35% er under dette, er det et realistisk mål.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

LØST med n'spire:

$$P(x) = b \cdot a^x$$

P(x) er procentdelen af den tyske elektricitetsproduktion, der kommer fra vedvarende energi.
x er antal år efter 1990.

a) Det er en eksponentiel udvikling, og det bemærkes, at det er antal år EFTER 1990, så under 'Lister og regneark' på TI n'spire indtastes i liste A antal år efter 1990 (0, 5, 10, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21) og i liste B indtastes procentdelen, hvorefter der vælges 'Statistik'-->"Statistiske beregninger'-->'Eksponentiel regression':
x-liste: a[] ; y-liste: b[] ; Gem RegEqn i: f1 ; Frekvensliste: 1
Dette giver:

	A	B	C	D
◆				=ExpReg(a[],b[],1
1	0	3.1	Titel	Eksponentiel re...
2	5	4.5	RegEqn	a*b^x
3	10	6.5	a	2.88330565128
4	15	10.4	b	1.09521699048
5	16	11.8	r²	0.991588525816
6	17	14.5	r	0.995785381403
7	18	15.2	Resid	{0.21669434871...
8	19	16.6	ResidTra...	{0.07246467997...
9	20	18.1		
10	21	20		

Lommeregneren anvender *a* og *b* omvendt i forhold til vores forskrift, så man har:
$\underline{\underline{a = 1,095217 \text{ og } b = 2,883306}}$

b) Tallet *a* er fremskrivningsfaktoren, der er forbundet med vækstraten *r* ved: $a = 1 + r$
Dvs. at $r = 1,095217 - 1 = 0,095217 = 9,5217\%$
Altså vokser procentdelen af den tyske elektricitetsproduktion, der kommer fra vedvarende energi, med 9,5% om året.

Metode 1:

Fremskrivningsfaktoren benyttes til at bestemme fordoblingstiden: $T_2 = \dfrac{\ln 2}{\ln a} = \dfrac{\ln 2}{\ln 1,095217} = 7,621$

Metode 2:
Da funktionsudtrykket er gemt som f1, kan man også på lommeregneren bestemme fordoblingstiden ved at finde den tilvækst på x-værdien, der giver en fordobling af y-værdien:

$\text{solve}(f1(x+t) = 2 \cdot f1(x), x) \quad t = 7.62097925982$

Dvs. at fordoblingstiden er 7,6 år

c) Modellen giver i år 2020 (x=30): $P(30) = 2,8833 \cdot 1,0952^{30} = 44,15$
Dvs. modellen giver 44%, hvilket er væsentligt over målet på 35%, så målet virker realistisk.

Opgave 8: $f(x)=\ln(x)+x^2$, $x>0$ $\quad P(5, f(5))$

a) På TI n'spire kan ligningen for tangenten bestemmes ved:

tangentLine$(\ln(x)+x^2,x,5)$ $\quad \frac{51\cdot x}{5}+\ln(5)-26$

tangentLine$(\ln(x)+x^2,x,5)$
$10.2\cdot x-24.3905620876$

Dvs. at tangentens ligning er $\underline{\underline{y=10,2\cdot x-24,39056}}$

Hvis man ikke vil lade lommeregneren klare det hele, kan tangentligningen bestemmes ved hjælp af differentialkvotienten og funktionsværdien:

$$f(5)=\ln(5)+5^2=25+\ln(5)$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}+2x$$

$$f'(5)=\frac{1}{5}+2\cdot 5=\frac{51}{5}$$

Tangentens ligning er så:

$$y-(25+\ln(5))=\frac{51}{5}(x-5) \Leftrightarrow y=\frac{51}{5}x-51+25+\ln(5) \Leftrightarrow \underline{\underline{y=\frac{51}{5}x-26+\ln(5)}}$$

Opgave 9: $T_{ABC}=22,9 \quad \angle B=32,3° \quad |AB|=10,6$

a) Da det for alle trekanter gælder, at $T=\frac{1}{2}\cdot h\cdot g$, har man med linjestykket AB som grundlinje:

$$T_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot h_c$$

$$22,9=\frac{1}{2}\cdot 10,6\cdot h_c \Leftrightarrow h_c=\frac{22,9\cdot 2}{10,6}=\underline{\underline{4,3207547}}$$

b) For at bestemme omkredsen af trekanten, skal man kende alle tre sidelængder.
Da man kender arealet af trekanten, kan man med ½-appelsin-formlen med udgangspunkt i vinkel B bestemme længden af siden BC:

$$T_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\sin B$$

$$|BC|=\frac{T_{ABC}\cdot 2}{|AB|\cdot\sin B}=\frac{22,9\cdot 2}{10,6\cdot\sin(32,3°)}=\underline{\underline{8,0859656028741}}$$

Da man nu kender en vinkel og de to hosliggende sider, kan den sidste side bestemmes ved hjælp af en cosinusrelation:

$$|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2-2\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\cos B$$

$$|AC|=\sqrt{10,6^2+8,0859656028741^2-2\cdot 10,6\cdot 8,0859656028741\cdot\cos(32,3°)}=5,7311401852642$$

Dvs. omkredsen er:

$$O_{ABC}=|AB|+|BC|+|AC|=10,6+8,0859656028741+5,7311401852642=\underline{\underline{24,417105788138}}$$

Med Herons formel, hvor *s* er den halve omkreds, kan man tjekke, om man har regnet rigtigt:

$$T_{ABC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot 24,42\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 24,42-8,1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 24,42-5,7\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 24,42-10,6\right)}=22,9$$

Opgave 10: $A(2,0,0)$ $B(0,0,3)$ $C(-2,0,0)$ $D(0,2,0)$

For at kunne angive en ligning for den plan, der indeholder glasfladen ABD, skal man kende et punkt og en normalvektor til planen. Man har allerede et punkt, da man kan anvende A, B eller D. En normalvektor bestemmes ved først at udregne krydsproduktet af to vektorer, der udspænder planen.

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0-2\\0-0\\3-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}0-2\\2-0\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot0-3\cdot2\\3\cdot(-2)-(-2)\cdot0\\-2\cdot2-0\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-6\\-4\end{pmatrix}$$

Som normalvektor vælges en vektor, der er modsatrettet ovenstående og halvt så lang:

$$\overrightarrow{n_{ABD}}=\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$$

Med udgangspunkt i punktet A, får man så en ligning for planen:

$$3\cdot(x-2)+3\cdot(y-0)+2\cdot(z-0)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{3x+3y+2z-6=0}}$$

På TI n'spire kunne udregningerne foretages ved:

$a:=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$
$b:=\begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix}$
$d:=\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$
$ab:=b-a$	$\begin{bmatrix}-2\\0\\3\end{bmatrix}$
$ad:=d-a$	$\begin{bmatrix}-2\\2\\0\end{bmatrix}$
$\mathrm{crossP}(ab,ad)$	$\begin{bmatrix}-6\\-6\\-4\end{bmatrix}$

b) Vinklen mellem de to glasplader bestemmes som vinklen mellem deres normalvektorer:

En normalvektor for glasfladen BCD aflæses ud fra planens ligning: $\overrightarrow{n_{BCD}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Så kan vinklen bestemmes:

$$\cos v = \frac{\overrightarrow{n_{ABD}} \cdot \overrightarrow{n_{BCD}}}{\left|\overrightarrow{n_{ABD}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_{BCD}}\right|}$$

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right|} \right) = \cos^{-1}\left(\frac{3\cdot(-3)+3\cdot 3+2\cdot 2}{\sqrt{3^2+3^2+2^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+3^2+2^2}} \right) = \cos^{-1}\left(\frac{4}{22}\right) = 79{,}5243183036°$$

$$v_{glasplader} = 180° - v = 180° - 79{,}5243183036° = \underline{\underline{100{,}4756816964°}}$$

At den rigtige vinkel er den stumpe vinkel kan ses på flere måder.

1) Man kan betragte normalvektorerne og se, at de begge peger væk fra muren, hvorfor de ikke giver den vinkel, der ligger inde i drivhuset, men supplementvinklen til denne. Den ene af vektorerne skulle pege ind mod muren, mens den anden skulle pege væk, hvis man skulle have den søgte vinkel. Dette skyldes, at normalvektorerne i så fald ville ligge i de planer, der indeholder glasfladerne, når disse er roteret 90° i samme omløbsretning omkring aksen BD. Og når rotationen er i samme retning, så beholder man vinklen.
Da vektorerne pegede væk fra muren, svarer normalvektorernes retninger til, at glasfladerne er roteret 90° i hver sin omløbsretning omkring aksen BD, og derfor fremkommer supplementvinklen til glasfladernes vinkel.

2) Man kan se på trekanten dannet af punkterne A, C og det punkt på BD, der har kortest afstand til disse. Ved at anvende dist-formlen fra punkt til linje, får man, at dist(A,BD)=2,6, dvs. man har en trekant med sidelængderne 2,6, 2,6 og 4. Da summen af de to førstnævntes kvadrater er mindre end kvadratet på 4, er det en stumpvinklet trekant.

3) Man kan med en cosinusrelation beregne vinklen over for siden 4 i ovenstående trekant. Så får man den søgte vinkel.

Opgave 11: Man skal undersøge, om slikket følger en angivet farvefordeling, dvs. det er et χ^2-GOF-test.

a) Nulhypotesen er, at poserne indeholder lige mange slags slik af hver farve.

For at teste denne nulhypotese, skal man først udregne en forventet farvefordeling under forudsætning af, at nulhypotesen er rigtig:

Antallet af slikstykker er:

$A = 9 + 19 + 15 + 10 + 7 = 60$

Da der er fem forskellige farver, må man altså forvente $\frac{60}{5} = 12$ af hver farve.

På TI n'spire under 'Lister og regneark' indtastes i liste A de observerede størrelser. I liste B indtastes de forventede størrelser.

Der vælges 'Statistik' -->'Statistiske tests'-->'χ^2-Goodness Of Fit test.

Observeret liste: a[]

Forventet liste: b[]

Frihedsgrad:4

Antallet af frihedsgrader er 4, da man har brug for at kende antallet af fire af farverne, før man kan finde antallet af den sidste (når man ved, at der i alt er 60 stykker).

Dette giver:

	A	B	C	D
◆				=χ²GOF(a[],b[],4): C
1	9	12	Titel	χ²−Goodness of Fit…
2	19	12	χ²	8.
3	15	12	PVal	0.091578194444
4	10	12	df	4.
5	7	12	CompLis…	{0.75,4.083333333…

Da $p = 9{,}1578\% > 5\%$, kan man IKKE forkaste nulhypotesen.

Dvs. der er ikke signifikant forskel på antallet af stykker slik i de forskellige farver.

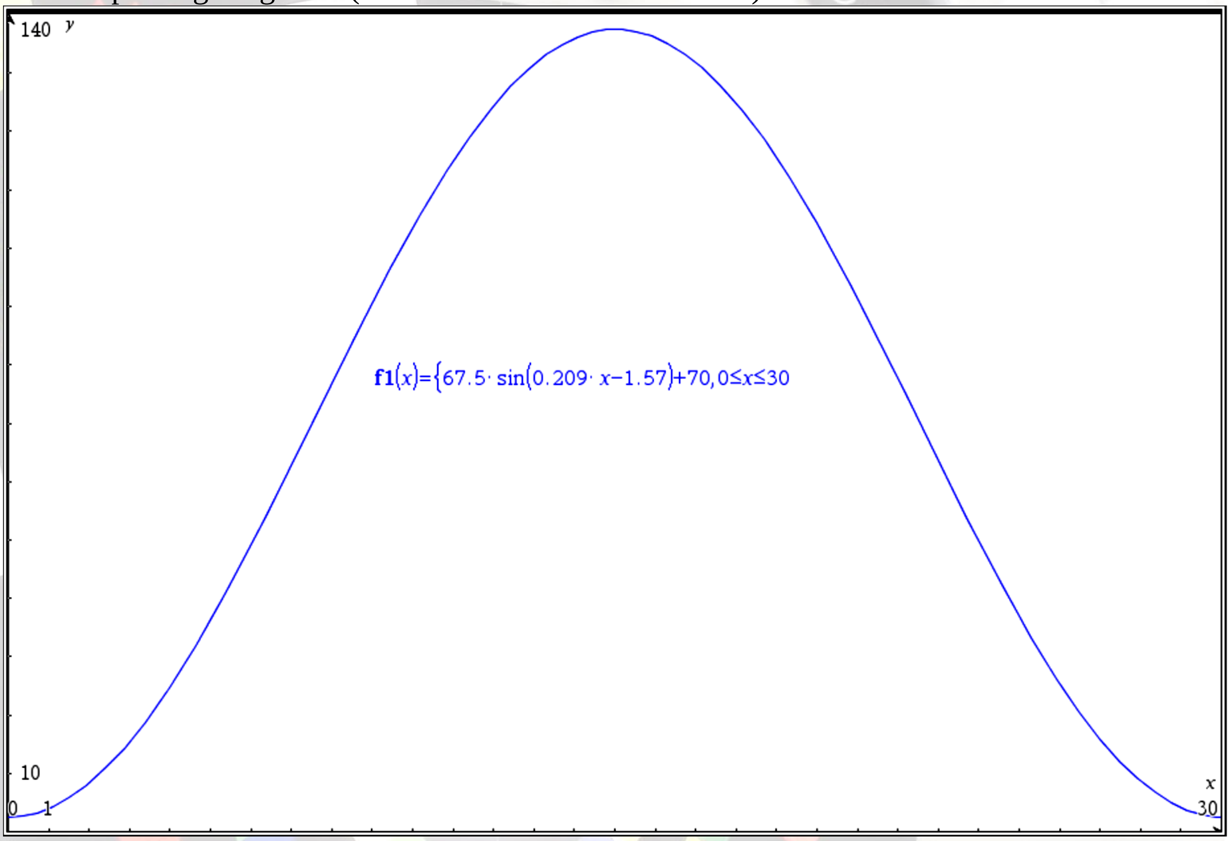
Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>*Opgave 12:*</u> $f(t) = 67{,}5 \cdot \sin(0{,}209 \cdot t - 1{,}57) + 70 \;\; ; \;\; 0 \leq t \leq 30$

f(t) er gondolens højde overjordoverfladen i meter til tiden *t* i minutter efter start.

Det er væsentligt at bemærke, at lommeregneren skal regne i radianer, da det er en trigonometrisk funktion.

På TI n'spire tegnes grafen (der er anvendt 'x' i stedet for 't'):



Da funktionen er gemt som f1, kan højden over jordoverfladen efter 7 minutter bestemmes ved:

```
f1(7)                62.7912738465
```

Dvs. at gondolen efter 7 minutter befinder sig <u>62,8 meter over jordoverfladen.</u>

b) Hvis gondolen skal være 40 meter over jordoverfladen, skal f(t) = 40.
Dette bestemmes på lommeregneren ved:

```
solve(f1(x)=40,x)
        x=5.30835410679 or x=24.7471131353
```

Man skulle finde det første tidspunkt, dvs. den mindste løsning, og dermed har man, at gondolen første gang befinder sig 40 meter over jordoverfladen <u>5,3 minutter efter start.</u>

<u>Opgave 13:</u> t er antal år efter 1975 og N er antal traner: $\frac{dN}{dt} = 0{,}00029N \cdot (1500 - N)$

a) Venstresiden i differentialligningen er netop væksthastigheden, så denne kan bestemmes ved at indsætte antallet af traner på højresiden:

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}00029 \cdot 500 \cdot (1500 - 500) = 0{,}00029 \cdot 500 \cdot 1000 = 0{,}29 \cdot 500 = 29 \cdot 5 = 145$$

Dvs. at <u>væksthastigheden er 145 traner pr. år</u>

b) Det er logistisk vækst, hvor den fuldstændige løsning er:

$$N(t) = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-a \cdot M \cdot t}} = \frac{1500}{1 + c \cdot e^{-0{,}00029 \cdot 1500 \cdot t}} = \frac{1500}{1 + c \cdot e^{-0{,}435 \cdot t}}$$

Når der til tiden 0 (i 1975) var 194 traner, kan c-værdien for den søgte partikulære løsning bestemmes:

$$194 = \frac{1500}{1 + c \cdot e^{-0{,}435 \cdot 0}} \iff 194 = \frac{1500}{1 + c} \iff 1 + c = \frac{1500}{194} \iff c = \frac{1500}{194} - 1 = \frac{653}{97}$$

Dvs. at den søgte løsning er: $\underline{\underline{N(t) = \frac{1500}{1 + \frac{653}{97} \cdot e^{-0{,}435 \cdot t}} \quad ; t \geq 0}}$

Man kunne også have bedt lommeregneren om at udregne resultatet. På TI n'spire med:

$$\text{deSolve}\left(n' = 2.9\text{E-}4 \cdot n \cdot (1500 - n) \text{ and } n(0) = 194, t, n\right)$$

$$n = \frac{1500. \cdot (1.54496305895)^t}{(1.54496305895)^t + 6.73195876289}$$

Man kan se, at de to udtryk er identiske ved at forkorte brøken i det sidste resultat med $1{,}54496305895^t$ og udregne $e^{-0{,}435}$

c) Det tidspunkt, hvor væksthastigheden er størst, kan bestemmes på flere forskellige måder:

<u>1. metode:</u>
Det er logistisk vækst, hvor man ved, at stedet med størst væksthastighed beregnes ved:

$$t = \frac{\ln c}{a \cdot M} = \frac{\ln \frac{653}{97}}{0{,}00029 \cdot 1500} = 4{,}3836$$

Dvs. at <u>den største væksthastighed er i år 1979</u> (1975 + 4)

2. metode:

Funktionsudtrykket indtastes på lommeregneren, og for at finde det sted, hvor væksthastigheden er størst, skal man finde det sted, hvor den afledede funktion er størst, dvs. den ANDEN afledede skal være nul, og den TREDJE afledede skal være negativ (da det så er et maksimum):

$$n(t):=\frac{1500}{1+\frac{653}{97}\cdot e^{-0.435\cdot t}} \qquad \textit{Udført}$$

$$\text{solve}\left(\frac{d^2}{dt^2}(n(t))=0,t\right) \qquad t=4.3836003466$$

$$\frac{d^3}{dt^3}(n(t))|t=4.3836003466048 \qquad -15.4336640625$$

3. metode:

Det er logistisk vækst, så man ved, at den største væksthastighed er der, hvor funktionen har nået halvdelen af sit maksimum på 1500, dvs. der hvor N = 750 (dette kan også ses ved at bemærke, at grafen for højresiden er en parabel med benene nedad, der har sit toppunkts førstekoordinat mellem de to nulpunkter, der er 0 og 1500).

Tidspunktet for dette bestemmes på lommeregneren:

$$n(t):=\frac{1500}{1+\frac{653}{97}\cdot e^{-0.435\cdot t}} \qquad \textit{Udført}$$

$$\text{solve}(750=n(t),t) \qquad t=4.3836003466$$

Opgave 14: $f(x) = -0,2 \cdot x^2 + 2x + 2,5$

a) Man kan bestemme maksimum for *f* på flere forskellige måder.
Man kan lave funktionsanalyse med fortegnsskema, eller man kan tegne grafen på lommeregneren og finde maksimum.

Det nemmeste er dog nok at bemærke, at grafen er en parabel med benene nedad, så maksimum kan bestemmes ved at finde toppunktet (egentlig har man kun brug for andenkoordinaten, men hvis man også tager førstekoordinaten med, kan man tjekke, at den ligger i intervallet [0;10]:

$$T\left(\frac{-b}{2a};\frac{-d}{4a}\right) = T\left(\frac{-2}{2\cdot(-0,2)};\frac{-\left(2^2-4\cdot(-0,2)\cdot 2,5\right)}{4\cdot(-0,2)}\right) = T\left(5;\frac{-6}{-0,8}\right) = T\left(5;\frac{15}{2}\right)$$

Dvs. $\underline{\underline{f_{maks} = 7,5}}$ $\quad B_{maks} = 2\cdot 7,5cm = \underline{\underline{15cm}}$

b) Rumfanget af væsken svarer til rumfanget af omdrejningslegemet i intervallet [0;*h*], hvor *h* skal ligge mellem 0 og 10.
Dette bestemmes ved at lade den øvre grænse være variabel:

$$V_{væske} = \pi \cdot \int_0^h f(x)^2\,dx$$

Dette bestemmes på TI n'spire ved (den første afrundet og den anden eksakt):

$f(x):=-0.2\cdot x^2+2\cdot x+2.5$ *Udført*

$\pi\cdot\int_0^h (f(x))^2\,dx$ $\quad 0.025132741229\cdot h\cdot\left(h^4-25.\cdot h^3+125.\cdot h^2+625.\cdot h+781.25\right)$

$f(x):=\frac{-1}{5}\cdot x^2+2\cdot x+\frac{5}{2}$ *Udført*

$\pi\cdot\int_0^h (f(x))^2\,dx$ $\quad \frac{h\cdot\left(4\cdot h^4-100\cdot h^3+500\cdot h^2+2500\cdot h+3125\right)\cdot\pi}{500}$

Dvs. at rumfanget udtrykt ved *h* er: $\underline{\underline{V(h) = \pi\cdot h\cdot\frac{4h^4-100h^3+500h^2+2500h+3125}{500}}}$

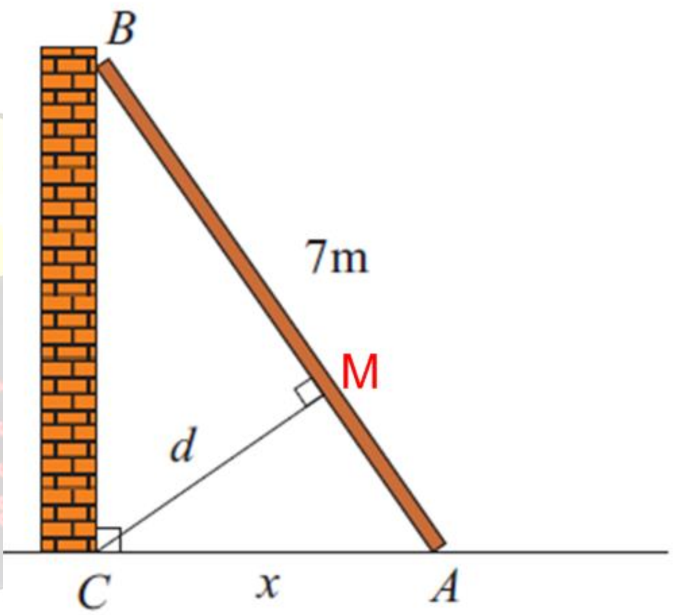
Væskehøjden svarende til et rumfang på 500 cm^3 findes ved at løse $V(h)=500$:

$v(h):=\frac{h\cdot\left(4\cdot h^4-100\cdot h^3+500\cdot h^2+2500\cdot h+3125\right)\cdot\pi}{500}$ *Udført*

solve$(v(h)=500,h)$ $\quad h=4.60611393782$

Dvs. når der fyldes 500 cm^3 i karaflen, er <u>væskehøjden 4,6cm</u>

Opgave 15: For at kunne henvise nemmere til figuren indføres punktet M som det punkt på stigen, der har den korteste afstand til punktet C.



a) Da trekant ABC er retvinklet med den rette vinkel C, giver Pythagoras:

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

$$|BC| = \sqrt{|AB|^2 - |AC|^2} = \sqrt{7^2 - x^2} = \underline{\underline{\sqrt{49 - x^2}}}$$

Trekanterne BCM og ABC er ensvinklede, da de begge er retvinklede og begge indeholder vinkel B. Dermed er forholdet mellem ensliggende sider i de to trekanter en konstant, og man har:

$$\frac{d}{x} = \frac{|BC|}{|AB|}$$

$$d = \frac{|BC|}{|AB|} \cdot x = \frac{\sqrt{49 - x^2}}{7} \cdot x = \underline{\underline{\frac{x \cdot \sqrt{49 - x^2}}{7}}}$$

b) Det sted, hvor *d* er størst, er den afledede funktion nul og den anden afledede funktion negativ. Dette sted bestemmes på TI n'spire:

$d(x) := \frac{x \cdot \sqrt{49 - x^2}}{7}$	*Udført*
$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(d(x)) = 0, x\right)$	$x = -4.94974746831$ or $x = 4.94974746831$
$\frac{d^2}{dx^2}(d(x)) \vert x = 4.9497474683058$	-0.571428571429

Det er kun steder i intervallet [0,7], der skal undersøges, og da den anden afledede er negativ, er det vist, at det er et maksimum.

Dvs. at <u>når *x = 4,95m* er *d* størst mulig.</u>

Opgave 16: T er stegens indre temperatur målt i °C.
x er tiden målt i minutter.
Ovnens temperatur er 150°C

Hastigheden, hvormed stegens temperatur stiger, angives så ved: $\frac{dT}{dx}$

Forskellen mellem ovnens temperatur og stegens indre temperatur er: $(150-T)$

Da hastigheden er proportional med forskellen gælder: $\frac{dT}{dx}=k\cdot(150-T)$

Da proportionalitetskonstanten er oplyst til 0,011 har man endelig den søgte differentialligning:

$$\underline{\underline{\frac{dT}{dx}=0,011\cdot(150-T)}}$$

29. maj 2013: Delprøven UDEN hjælpemidler

<u>*Opgave 1:*</u> $f(x) = 2x^2 - 8x + 15$

Diskriminanten indgår i udtrykket for parablens toppunkt, så den bestemmes først:

$d = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 15 = 64 - 120 = -56$

Koordinatsættet til parablens toppunkt er så:

$$T\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right) = T\left(\frac{-(-8)}{2\cdot 2}, \frac{-(-56)}{4\cdot 2}\right) = T\left(\frac{8}{4}, \frac{56}{8}\right) = \underline{\underline{T(2,7)}}$$

<u>*Opgave 2:*</u> $N(t) = 25000 \cdot 1{,}03^t$

N(t) angiver antallet af rådyr til tidspunktet *t* målt i år efter 2000.
Tallet 25000 er begyndelsesværdien, der altså fortæller, at i
<u>år 2000 var der 25000 rådyr i det bestemte område af Danmark</u>.

Det er en eksponentiel udvikling med fremskrivningsfaktoren 1,03.
Fremskrivningsfaktoren *a* er knyttet til vækstraten *r* ved *a* = 1 + *r*, dvs. vækstraten er 0,03=3%
Det betyder, at <u>antallet af rådyr i området i Danmark er vokset med 3% om året siden 2000.</u>

<u>*Opgave 3:*</u> Man kender allerede to af siderne i trekant ABC, så for at kunne bestemme omkredsen, mangler man bare at kende længden af siden AC. Denne bestemmes ved at udnytte, at de to trekanter er ensvinklede, hvorfor forholdet mellem ensliggende sider er en konstant.

$$\frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|AB|}{|DE|} \quad \Leftrightarrow \quad |AC| = \frac{|AB|}{|DE|} \cdot |DF| = \frac{6}{9} \cdot 18 = 6 \cdot 2 = 12$$

Så kan omkredsen bestemmes:

$$O = |AB| + |BC| + |AC| = 6 + 8 + 12 = \underline{\underline{26}}$$

<u>*Opgave 4:*</u> $f(x) = 6x^2 + 3 \quad P(2,10)$

Først bestemmes ved integration den form samtlige stamfunktioner er på:

$F(x) = \int (6x^2 + 3)\,dx = 2x^3 + 3x + k$

Ved at indsætte punktets koordinater kan man bestemme *k*-værdien, så grafen går gennem P:

$F(x) = 2x^3 + 3x + k$

$10 = 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2 + k \quad \Leftrightarrow \quad 10 = 16 + 6 + k \quad \Leftrightarrow \quad k = -12$

Dvs. at den søgte stamfunktion er:

$$\underline{\underline{F(x) = 2x^3 + 3x - 12}}$$

Opgave 5: $f(x)=0,5^x \quad g(x)=2^x \quad h(x)=0,5^x+2$

Først bestemmes skæringspunkterne med y-aksen:

$f(0)=0,5^0=1$

$g(0)=2^0=1$

$h(0)=0,5^0+2=1+2=3$

Grafen for *h* skærer altså y-aksen et andet sted end de to andre, dvs. B er graf for funktionen *h*
f og *g* er begge eksponentialfunktioner med grundtallene henholdsvis 0,5 og 2.
Da grundtallet for *f* er under 1, er det en aftagende funktion, dvs. C er graf for funktionen *f*
Da grundtallet for *g* er over 1, er det en voksende funktion, dvs. A er graf for funktionen *g*

Opgave 6: De afskårne retvinklede trekanter efterlader skrå sider, hvis længde kan bestemme med Pythagoras:

$l_{skrå}^2=6^2+8^2$

$l_{skrå}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$

Længderne af de to lodrette sider er:

$l_{lodret}=x-6$

Længden af den nederste vandrette side er *y*.

Længden af den øverste vandrette side er:

$l_{vandret,øverst}=y-2\cdot 8=y-16$

Omkredsen er så:

$O=2\cdot l_{skrå}+2\cdot l_{lodret}+l_{vandret,øverst}+l_{vandret,nederst}$

$O=2\cdot 10+2\cdot(x-6)+(y-16)+y=20+2x-12+2y-16=2x+2y-8$

Da omkredsen er 200, har man:

$200=2x+2y-8 \;\Leftrightarrow\; 100=x+y-4 \;\Leftrightarrow\; x+y=104$

Arealet af figuren er rektanglets areal fratrukket de to trekanters areal:

$A=A_{rektangel}-2\cdot T=x\cdot y-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 6=x\cdot y-48$

Arealet som funktion af *x* er så:

$A(x)=x\cdot(104-x)-48=-x^2+104x-48$

Grafen for dette udtryk er en parabel med benene nedad (negativ a-værdi), dvs. arealet er størst, hvor parablen har toppunkt. Den søgte x-værdi er altså førstekoordinaten for parablens toppunkt:

$x_{\max}=\frac{-b}{2a}=\frac{-104}{2\cdot(-1)}=\frac{104}{2}=\underline{\underline{52}}$

Den søgte y-værdi er så:

$y_{\max}=104-x_{\max}=104-52=\underline{\underline{52}}$

29. maj 2013: Delprøven MED hjælpemidler

Opgave 7: $A(20,5)\quad B(5,10)\quad \vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

a) Først bestemmes koordinaterne til den første vektor:

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}5-20\\10-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15\\5\end{pmatrix}$$

Arealet af det parallelogram, der udspændes af de to vektorer, bestemmes som den numeriske værdi er determinanten til vektorparret:

$$A_{par}=\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\vec{a}\right)\right|=\left\|\begin{matrix}-15 & -1\\5 & 2\end{matrix}\right\|=\left|-15\cdot 2-5\cdot(-1)\right|=\left|-30+5\right|=\left|-25\right|=\underline{\underline{25}}$$

b) Projektionen af $\overrightarrow{AB}$ på $\vec{a}$ bestemmes:

$$\overrightarrow{AB}_a=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|^2}\cdot\vec{a}=\frac{\begin{pmatrix}-15\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right|^2}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\frac{-15\cdot(-1)+5\cdot 2}{\sqrt{(-1)^2+2^2}^{\,2}}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\frac{25}{5}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=5\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}-5\\10\end{pmatrix}}}$$

Dette kunne også have været beregnet på TI n'spire ved:

$a:=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ $\quad\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$

$ab:=\begin{bmatrix}-15\\5\end{bmatrix}$ $\quad\begin{bmatrix}-15\\5\end{bmatrix}$

$\dfrac{\mathrm{dotP}(a,ab)}{(\mathrm{norm}(a))^2}\cdot a$ $\quad\begin{bmatrix}-5\\10\end{bmatrix}$

Opgave 8: Først løses opgaven i Maple. Derefter med n'spire.

restart

with(*Gym*) :

a) Det er oplyst, at $f(x)=b\cdot x^a$, så der skal anvendes potensregression.

Motoreffekt := [1537, 2003, 2637, 3489, 4537, 5755, 7606] :

Fart := [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16] :

$f(x)$:= *PowReg*(*Motoreffekt*, *Fart*, *x*) :

$f(x)=1.17935481322845\,x^{0.293305259938908}$

Dvs. at $\underline{\underline{a=0.293305}}$ og $\underline{\underline{b=1.1793548}}$

b) En motoreffekt på 8000kW svarer til $x=8000$, så man udregner:

$f(8000)=16.4604349588140$

Dvs. at med motoreffekten 8000kW sejler skibet $\underline{\underline{16.5\ knob}}$

c) Da det er potensvækst, har man:

$$\left(1+r_y\right)=\left(1+r_x\right)^a$$

$$r_y=\left(1+r_x\right)^a-1=\left(1+0,30\right)^{0,293305259975}-1=0,079991119911$$

Dvs. at en forøgelse af motoreffekten på 30% giver <u>en forøgelse af farten på 8%</u>

Udregnet med n'spire:

$f(x)=b\cdot x^a$ $f(x)$ er farten i knob og x er motoreffekten målt i kW.

a) Da man kender en hel række af sammenhørende værdier, skal der anvendes regression til at bestemme *a* og *b*. Det er en potensvækst, så på TI n'spire gøres følgende:
Under 'Lister og regneark' indtastes motoreffekten i liste A og farten i liste B.
Der vælges 'statistik' --> 'Statistiske beregninger' --> 'Potensregression'.
Så indskrives:
X-liste: a[]
Y-liste: b[]
Gem RegEqn i: f1
Frekvensliste: 1

	A	B	C	D
◆				=PowerReg(a[],b[].
1	1537	10	Titel	Potensregression...
2	2003	11	RegEqn	a*x^b
3	2637	12	a	1.17935481288
4	3489	13	b	0.293305259975
5	4537	14	r²	0.996599731277
6	5755	15	r	0.998298417948
7	7606	16	Resid	{-0.146416621194..
8			ResidTra...	{-0.014535507912..

Da lommeregneren anvender *a* og *b* omvendt i forhold til vores forskrift, har man:

$$\underline{\underline{a=0,2933\ og\ b=1,17935}}$$

b) Da funktionen er gemt på lommeregneren som f1, kan man bestemme farten af skibet ved en motoreffekt på 8000kW ved:

$f1(8000)$ 16.4604349593

<u>Dvs. at skibet sejler med farten 16,46 knob, når motoreffekten er 8000 kW.</u>

c) Da det er potensvækst, har man:

$$\left(1+r_y\right)=\left(1+r_x\right)^a$$

$$r_y=\left(1+r_x\right)^a-1=\left(1+0,30\right)^{0,293305259975}-1=0,079991119911$$

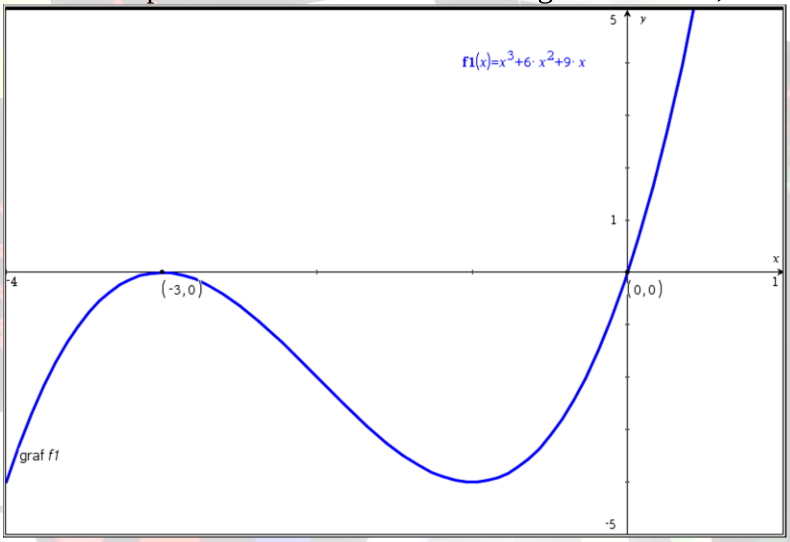
Dvs. at en forøgelse af motoreffekten på 30% giver <u>en forøgelse af farten på 8%</u>

Dette kunne også have været udregnet på TI n'spire, hvor man direkte beregner, hvor mange procent funktionsværdien er øget, når den uafhængige variabel er øget med 30%:

$\dfrac{f1(1.3\cdot x)}{f1(x)}-1$ 0.079991119911

<u>*Opgave 9:*</u> $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$

a) Grafen tegnes ved at indtaste funktionen under 'Grafer' på TI n'spire. Vinduet justeres, så man har alle skæringspunkter med akserne med (man kan se, at der ikke kan være flere, da et tredjegradspolynomium højst kan have to lokale ekstremumspunkter):
Samtidig bestemmes funktionens nulpunkter ved 'Undersøg grafer'-->'Nulpunkt', hvor der for hvert af nulpunkternes vedkommende vælges et interval, der indeholder punktet:



Dvs. at funktionen har nulpunkterne $\underline{\underline{x = -3 \text{ og } x = 0}}$

Dette kunne også have været udregnet i hånden ved at anvende en kvadratsætning og nulreglen:

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x = 0$$

$$x\left(x^2 + 6x + 9\right) = 0 \Leftrightarrow x(x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3$$

b) Monotoniforholdene bestemmes ved at anvende afledede funktioner:

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = -1$$

Disse to steder kan der være lokale ekstremumspunkter (og ud fra grafen kan man se, at det ER ekstremumspunkter og ikke vandrette vendetangenter).
Fortegnene for den anden afledede bestemmes de to steder for at se, hvilken slags ekstremumspunkt der er tale om:

$$f''(x) = 6x + 12$$

$$f''(-3) = 6\cdot(-3) + 12 = -18 + 12 = -6 < 0 \quad dvs. \text{maksimum}$$

$$f''(-1) = 6\cdot(-1) + 12 = -6 + 12 = 6 > 0 \quad dvs. \text{minimum}$$

Hermed må gælde:
f er voksende i intervallerne]-∞,-3] og [-1,∞[og aftagende i intervallet [-3,-1]

c) $g(x) = -x^2 + bx + c \qquad P(1, f(1))$

Tangentens ligning kan bestemmes på TI n'spire ved:

$\text{tangentLine}\left(x^3+6\cdot x^2+9\cdot x,x,1\right)$	$24\cdot x-8$

Dvs. tangentens ligning er: $\underline{\underline{y = 24x - 8}}$

Dette kunne man også selv have beregnet ved:
y-værdi for røringspunktet: $f(1) = 1^3 + 6\cdot 1^2 + 9\cdot 1 = 1 + 6 + 9 = 16$

Tangentens hældning: $f'(1) = 3\cdot 1^2 + 12\cdot 1 + 9 = 3 + 12 + 9 = 24$

Tangentens ligning: $y - 16 = 24\cdot(x-1) \Leftrightarrow y = 24x - 8$

Da *f* og *g* har en fælles tangent i P, ved man to ting:
1) Begge funktioners grafer går gennem P.
2) Differentialkvotienten i x = 1 er ens for de to funktioner (da den angiver tangenthældningen).

Da tangenthældningen er 24, har man altså, at der skal gælde g'(1) = 24.
Dette kan bruges til at bestemme *b*:

$$g'(x) = -2x + b$$

$$g'(1) = 24 \Leftrightarrow -2\cdot 1 + b = 24 \Leftrightarrow \underline{\underline{b = 26}}$$

Da graferne for begge funktioner går gennem P, har man:

$$f(1) = g(1)$$

$$1^3 + 6\cdot 1^2 + 9\cdot 1 = -1^2 + 26\cdot 1 + c \Leftrightarrow$$

$$16 = 25 + c \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{c = -9}}$$

<u>*Opgave 10:*</u> $r(t) = 7{,}18 \cdot 10^{-4} \cdot (t - 0{,}93)^2 \cdot \left(1 - e^{0{,}464\cdot(t-46{,}96)}\right) \qquad 0 \le t \le 47$

a) For at bestemme den temperatur *t*, hvor væksthastigheden *r(t)* for salmonellabakterierne er størst, skal man anvende afledede funktioner. Funktionen kan godt differentieres i hånden, men det er ret besværligt, og opgavestillerne har tydeligvis ønsket at lave en opgave, hvor man skal vise, at man kan anvende lommeregneren.
Så på TI n'spire defineres funktionen, hvorefter der bestemmes det eller de steder inden for det pågældende interval, hvor den afledede funktion giver 0, hvorefter den anden aflededes fortegn tjekkes disse steder for at se, om der er tale om maksimum, minimum eller vandrette vendetangenter:

$r(t):=7.18\cdot 10^{-4}\cdot(t-0.93)^2\cdot\left(1-e^{0.464\cdot(t-46.96)}\right)$	*Udført*
$\text{solve}\left(\frac{d}{dt}(r(t))=0,t\right)$	$t=0.93$ or $t=41.8917398637$
$\frac{d^2}{dt^2}(r(t))\vert t=0.93$	0.001435999999
$\frac{d^2}{dt^2}(r(t))\vert t=41.891739863698$	-0.028592249887

Da den anden afledede er positiv for t = 0,93, er der tale om (lokalt) mindst væksthastighed her, og da den anden afledede er negativ for t = 41,9, er der lokalt størst væksthastighed her.

Da væksthastigheden falder fra 0 til t = 0,93, skal man også lige sikre sig, at væksthastigheden i 0 er mindre end i 41,9, når man skal finde den temperatur, hvor væksthastigheden er størst:

$r(0)$	6.20998199786E-4
$r(41.891739863698)$	1.09000662198

Man har hermed sikret sig, at det ER den største væksthastighed, dvs.
<u>væksthastigheden er størst for temperaturen 41,9°C</u>

<u>*Opgave 11:*</u> a) Det ligger implicit i formuleringen, at punktet C ligger helt ud til vandkanten, og at afstanden fra den nærmeste mølle til land er længden af stykket BC (hvilket ikke giver sig selv, da landet kunne bue ud mod møllerne længere henne).
Da trekant ABC er retvinklet, og man med udgangspunkt i vinkel A kender den hosliggende katete og ønsker at finde den modstående, bruger man:

$$\tan A = \frac{|BC|}{|AC|} \quad \Leftrightarrow \quad |BC| = \tan A \cdot |AC| = \tan 46{,}2° \cdot 2300m = 2398{,}4178235m$$

Dvs. at <u>afstanden fra den nærmeste mølle til land er 2398,4 meter.</u>

Trekant ACD er ligeledes retvinklet, så man har også:

$$\tan\angle CAD = \frac{|CD|}{|AC|} \quad \Leftrightarrow$$

$$|CD| = \tan\angle CAD \cdot |AC| = \tan(46{,}2° + 11{,}0°) \cdot 2300m = \tan(57{,}2°)\cdot 2300m = 3568{,}90139625m$$

For at finde de 10 møllers indbyrdes afstand, skal stykket BD deles i 9 lige store stykker:

$$d_{mølle-mølle} = \frac{|BD|}{9} = \frac{|CD| - |BC|}{9} = \frac{3568{,}90139625m - 2398{,}4178235m}{9} = 130{,}053730306m \approx \underline{\underline{130m}}$$

Opgave 12: Nulhypotesen er:

Informationsadfærden vedrørende litteraturlæsning er uafhængig af gymnasietype.

Denne nulhypotese testes ved et χ^2-uafhængighedstest, hvilket på TI n'spire foretages ved:

$$\chi^2 2way \begin{bmatrix} 131 & 69 & 36 \\ 102 & 76 & 27 \\ 235 & 207 & 70 \end{bmatrix} : stat.results$$

$$\begin{bmatrix} \text{"Titel"} & \text{"}\chi^2\text{–uafhængighedstest"} \\ \text{"}\chi^2\text{"} & 8.94549342131 \\ \text{"PVal"} & 0.062476419629 \\ \text{"df"} & 4. \\ \text{"ExpMatrix"} & \text{"[...]"} \\ \text{"CompMatrix"} & \text{"[...]"} \end{bmatrix}$$

Da $p_{val} = 6{,}2\% > 5\%$, kan man altså IKKE forkaste nulhypotesen med et 5% signifikansniveau.

Der er altså ikke signifikant forskel på informationsadfærden vedrørende litteraturlæsning på de forskellige gymnasietyper.

Da der er 4 frihedsgrader, kan man også komme frem til konklusionen ved at sammenligne teststørrelsen 8,94549 med den kritiske værdi 9,49 og konstatere, at da teststørrelsen er mindre end den kritiske værdi, skal nulhypotesen ikke forkastes.

Opgave 13: $A(16,16,0) \quad B(-16,16,0) \quad C(-16,-16,0) \quad D(16,-16,0) \quad l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -27 \\ -16 \\ 23 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$

a) For at bestemme en ligning for den plan, der indeholder glaspyramidens sideflade ATB, skal man kende et punkt på denne (f.eks. punktet A) og en normalvektor for planen. Normalvektoren kan bestemmes ved først at finde krydsproduktet af to vektorer, der udspænder planen. Man kan bruge retningsvektoren for linjen l samt $\overrightarrow{AB}$.

$$\vec{r_l} = \begin{pmatrix} -27 \\ -16 \\ 23 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -16-16 \\ 16-16 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r_l} \times \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -27 \\ -16 \\ 23 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -32 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16\cdot 0 - 23\cdot 0 \\ 23\cdot(-32) - (-27)\cdot 0 \\ -27\cdot 0 - (-16)\cdot(-32) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -736 \\ -512 \end{pmatrix}$$

Dette kunne også have været beregnet på TI n'spire på følgende måde, hvor man også kan finde den største fælles divisor for 736 og 512, der kan bruges til at skalere vektoren og dermed få en normalvektor, der er nemmere at arbejde med:

$$r:=\begin{bmatrix}-27\\-16\\23\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}-27\\-16\\23\end{bmatrix}$$

$$ab:=\begin{bmatrix}-32\\0\\0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}-32\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\text{crossP}(r,ab) \qquad \begin{bmatrix}0\\-736\\-512\end{bmatrix}$$

$$\text{gcd}(512,736) \qquad 32$$

Da den største fælles divisor er 32, vælges normalvektoren givet ved:

$$\overrightarrow{n_\alpha} = -\frac{1}{32}\cdot\vec{r_l}\times\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{32}\cdot\begin{pmatrix}0\\-736\\-512\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\23\\16\end{pmatrix}$$

Med punktet A og denne normalvektor får man så:

$$0\cdot(x-16)+23\cdot(y-16)+16\cdot(z-0)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{23y+16z-368=0}}$$

b) $\beta:\ 23x-5z+368=0$

Skæringspunktet mellem linjen og planen bestemmes ved at indsætte koordinaterne fra parameterfremstillingen i planens ligning og på den måde bestemme den søgte værdi for parameteren *s*:

$$23\cdot(16-27s)-5\cdot(23s)+368=0 \Leftrightarrow 368-621-115s+368=0 \Leftrightarrow 115s=115 \Leftrightarrow s=1$$

Denne værdi indsættes i linjens parameterfremstilling for at finde T's koordinater:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16\\16\\0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}-27\\-16\\23\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16-27\\16-16\\0+23\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-11\\0\\23\end{pmatrix}$$

Dvs. at <u>T = (-11,0,23)</u>

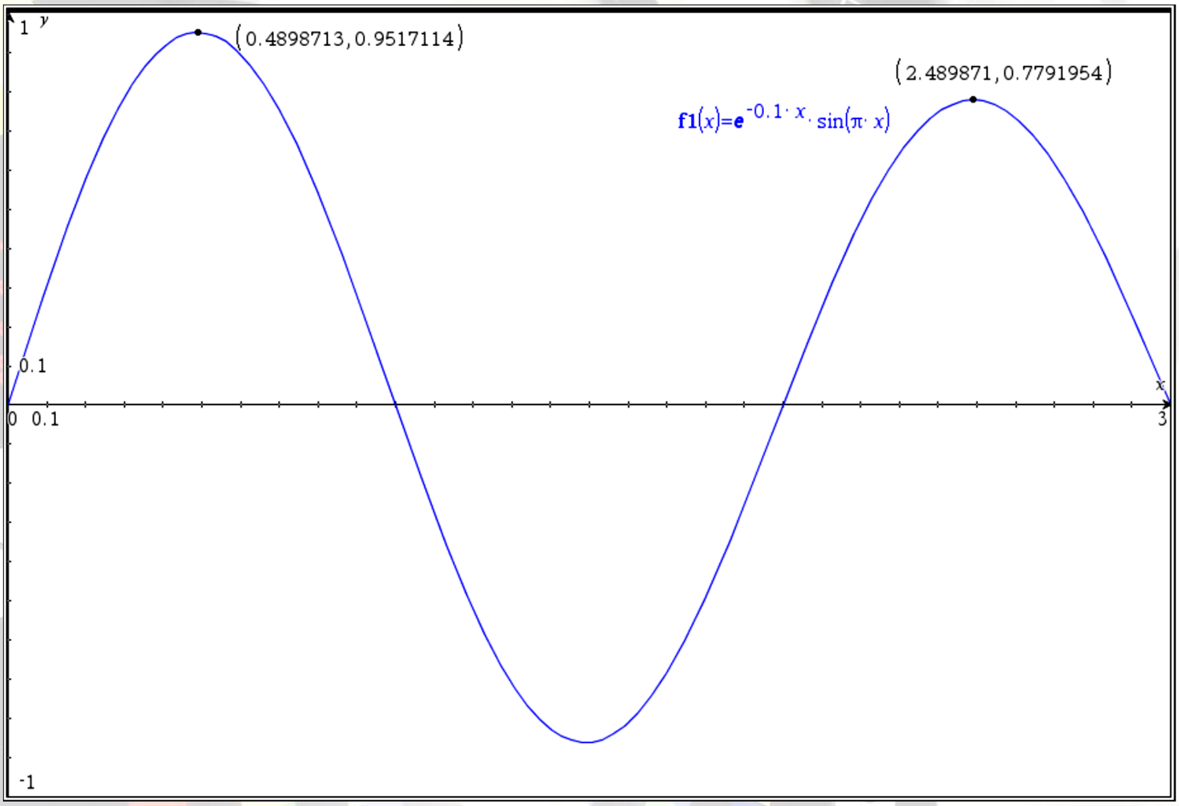
c) Vinklen mellem to planer er vinklen mellem deres normalvektorer. Normalvektoren for planen β aflæses som koefficienterne i ligningen:

$$\cos v = \frac{\overrightarrow{n_\alpha}\cdot\overrightarrow{n_\beta}}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_\beta}\right|} = \frac{\begin{pmatrix}0\\23\\16\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}23\\0\\-5\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0\\23\\16\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}23\\0\\-5\end{pmatrix}\right|} = \frac{0\cdot23+23\cdot0+16\cdot(-5)}{\sqrt{0^2+23^2+16^2}\cdot\sqrt{23^2+0^2+(-5)^2}} = \frac{-80}{\sqrt{434890}}$$

$$v_{stump} = \cos^{-1}\left(\frac{-80}{\sqrt{434890}}\right) = \underline{\underline{96{,}968^\circ}}$$

Opgave 14: $f(x) = e^{-0,1 \cdot x} \cdot \sin(\pi \cdot x)$, $x \geq 0$

a) Grafen tegnes under 'Grafer' på TI n'spire og vinduet indstilles, så man har intervallet [0,3] med (lommeregneren skal står i radianer). Maksima bestemmes ved 'Undersøg grafer' -->'Maksimum', hvor nedre og øvre grænse vælges på hver sin side af det søgte punkt:



Under indstillinger for grafer er antallet af viste decimaler sat til flydende 7, og man har altså, at de to lokale maksimumspunkter er *A(0,4898713 ; 0,9517114) og B(2,489871 ; 0,7791954)*

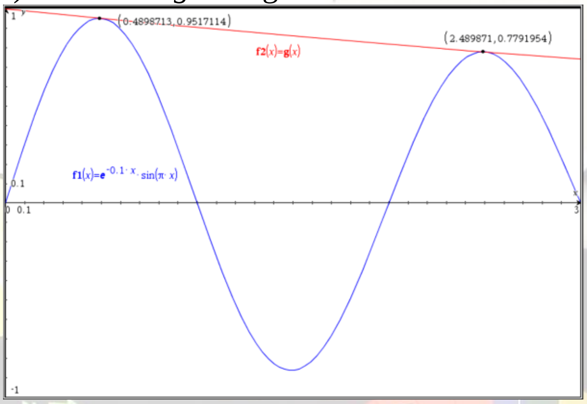
b) En forskrift for den eksponentialfunktion, der går gennem de to punkter, kan bestemmes ved at lave eksponentiel regression, men man kan også lade lommeregneren løse to ligninger med to ubekendte:

$$\text{solve}\left(0.9517114=b\cdot a^{0.4898713} \text{ and } 0.7791954=b\cdot a^{2.489871}, a, b\right)$$
$$a=0.904837409553 \text{ and } b=0.999493821334$$

Dvs. at den søgte forskrift er:

$g(x) = 0{,}9994938 \cdot 0{,}9048374^x$

c) Grafen for g indtegnes sammen med den tidligere graf:



I det pågældende område er det altså grafen for g , der ligger øverst, dvs. det søgte areal er:

$$A_M = \int_{0,4898713}^{2,489871} \left(g(x) - f(x)\right) dx = \underline{\underline{1,7216677}}$$

Da den første funktion er gemt som f1(x) på lommeregneren, er udregnet foretaget ved:

$$g(x) := 0.999493821334 \cdot (0.904837409553)^x \qquad \textit{Udført}$$

$$\int_{0.4898713}^{2.489871} (g(x) - f1(x))\,dx \qquad 1.72166770515$$

(Der er fejl i opgaveformuleringen. Faktisk skærer de to grafer fire steder og danner således tre områder, så egentlig skulle den nedre grænse ikke være x_1, men et tal en anelse større, hvis man vil finde arealet af det største af disse.)

<u>*Opgave 15:*</u> Der var fejl i opgaven. Den rigtige forskrift skulle være: $\frac{dM}{dt} = -k \cdot M$

a) Man kan enten udnytte, at det er en standarddifferentialligning med den fuldstændige løsning $M(t) = c \cdot e^{-k \cdot t}$, eller man kan lade TI n'spire om at bestemme den fuldstændige løsning:

$$\text{deSolve}(m' = -k \cdot m, t, m) \qquad m = c1 \cdot e^{-k \cdot t}$$

Da M(0)=70 har man: $70 = c \cdot e^{-k \cdot 0} = c \cdot 1 = c$

For at bestemme k udnyttes det andet punkt:

$$M(60) = 20 \Leftrightarrow \quad 20 = 70 \cdot e^{-k \cdot 60} \Leftrightarrow e^{-k \cdot 60} = \frac{20}{70} \Leftrightarrow -k \cdot 60 = \ln\left(\frac{2}{7}\right) \Leftrightarrow$$

$$k = \frac{-\ln\left(\frac{2}{7}\right)}{60} = \underline{\underline{0,020879382808}}$$

Så forskriften er: $\underline{\underline{M(t) = 70 \cdot e^{-0,020879382808 \cdot t}}}$

b) Differentialkvotienten i 60 bestemmes på lommeregneren ved:

$$m(t) := 70 \cdot e^{-0.020879382808257 \cdot t} \qquad \textit{Udført}$$

$$\frac{d}{dt}(m(t))|t=60 \qquad -0.417587656165$$

Dvs. <u>M'(60) = -0,41759</u> hvilket fortæller, at
<u>mængden af stof efter 60 minutter aftager med 0,42 mg i minuttet.</u>

14. august 2013: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: $l:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; $t\in\mathbb{R}$

En retningsvektor for linjen *l* er $\vec{r_l}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

Denne vektor er en normalvektor for linjen *m*, da *m* står vinkelret på *l*.
Da linjen *m* går gennem punktet (3,4), er en ligning for denne linje:

$$a\left(x-x_0\right)+b\left(y-y_0\right)=0$$

$$2\cdot\left(x-3\right)+1\cdot\left(y-4\right)=0 \Leftrightarrow 2x-6+y-4=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{2x+y-10=0}}$$

Opgave 2: Tre eksponentialfunktioner er givet ved:

$$f\left(x\right)=2^x$$

$$g\left(x\right)=3^x$$

$$h\left(x\right)=\frac{g\left(x\right)}{f\left(x\right)}$$

Funktionsudtrykket for *h(x)* bliver altså:

$$h\left(x\right)=\frac{3^x}{2^x}=\left(\frac{3}{2}\right)^x$$

Det generelle udtryk for en eksponentialfunktion er $f_1\left(x\right)=a^x$, hvor *a* er fremskrivningsfaktoren, så funktionen *h* har fremskrivningsfaktoren $\underline{\underline{\frac{3}{2}}}$

Opgave 3: $f\left(x\right)=e^x+2$

Funktionen er ikke negativ (i det pågældende interval), så det bestemte integral angiver arealet under grafen:

$$A_M=\int_0^1\left(e^x+2\right)=\left[e^x+2x\right]_0^1=\left(e^1+2\cdot 1\right)-\left(e^0+2\cdot 0\right)=e+2-1=\underline{\underline{e+1}}$$

Opgave 4: $V=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$

Når rumfanget er $\frac{32}{3}\cdot\pi$, er radius:

$$\frac{32}{3}\cdot\pi=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3 \Leftrightarrow \frac{32}{3}=\frac{4}{3}\cdot r^3 \Leftrightarrow \frac{32\cdot 3}{3\cdot 4}=r^3 \Leftrightarrow r^3=8 \Leftrightarrow \underline{\underline{r=2}}$$

<u>Opgave 5:</u> $f(x) = x^3 - \frac{3}{2} \cdot x^2 - 6x + 7$

For at kunne bestemme monotoniforholdene for *f*, skal man kende fortegnet for den afledede funktion i forskellige intervaller. Så først bestemmes den afledede funktion og nulpunkterne for denne:

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{2} \cdot 2x - 6 = 3x^2 - 3x - 6$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$d = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0 \quad dvs.\ 2\ \text{løsninger}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

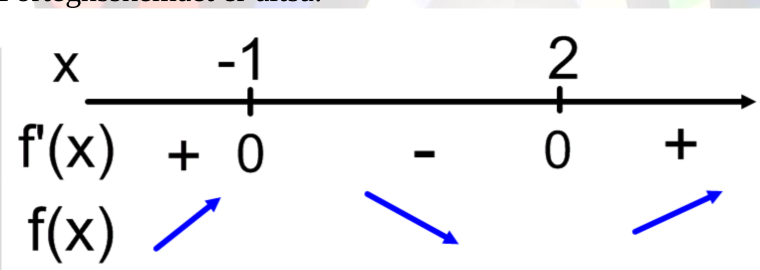
Disse to nulpunkter opdeler x-aksen i tre intervaller, og den afledede funktions fortegn i disse intervaller bestemmes ved at bestemme værdien i et punkt i hvert interval:

$$f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 3 \cdot (-2) - 6 = 3 \cdot 4 + 6 - 6 = 12 > 0$$

$$f(0) = 3 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 - 6 = -6 < 0$$

$$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - 6 = 27 - 9 - 6 = 12 > 0$$

Fortegnsskemaet er altså:



Dvs.

<u>*f* er voksende i $\left]-\infty;-1\right]$; *f* er aftagende i $[-1;2]$; *f* er voksende i $[2;\infty[$</u>

<u>Opgave 6:</u> $\frac{dy}{dx} = 3y + 5$; $P(1,4)$

Man kan bestemme en ligning for tangenten til grafen for *f* i punktet P, når man har fundet linjens hældning, da man allerede kender et punkt, tangenten går gennem.
Hældningen bestemmes ved at indsætte punktets koordinater i differentialligningen:

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot 4 + 5 = 12 + 5 = 17$$

Så tangentens ligning er:

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

$$y - 4 = 17 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 17x - 13}}$$

14. august 2013: Delprøven MED hjælpemidler

Opgave 7: $f(t) = b \cdot a^t$ Dvs. modellen er en eksponentiel udvikling.

f(t) er det årlige antal reklametimer på de danske tv-kanaler. *t* er antal år efter 2000.

År	2000	2005	2008	2009	2010
År efter 2000	0	5	8	9	10
Reklametimer	4963	8249	10296	12459	13661

a) Da man kender en hel række af sammenhørende værdier, skal der anvendes regression til at bestemme *a* og *b*. Det er en eksponentiel udvikling, så på TI n'spire gøres følgende:
Under 'Lister og regneark' indtastes år EFTER 2000 i liste A og reklametimer i liste B.
Der vælges 'statistik' --> 'Statistiske beregninger' --> 'Eksponentiel regression'.
Så indskrives:
X-liste: a[]
Y-liste: b[]
Gem RegEqn i: f1
Frekvensliste: 1

	A	B	C	D
◆				=ExpReg(a[],b[]
1	0	4963	Titel	Eksponentiel r...
2	5	8249	RegEqn	a*b^x
3	8	10296	a	4946.44699572
4	9	12459	b	1.10473924176
5	10	13661	r²	0.9917291886...
6			r	0.9958560079...
7			Resid	{16.553004277...

B7

Lommeregneren anvender *a* og *b* omvendt, så man har:

$\underline{\underline{a = 1{,}104739 \ og \ b = 4946}}$

b) Da det er en voksende eksponentiel udvikling findes en fordoblingstid, der kan beregnes ved:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}10473924176)} = 6{,}9586574142$$

Da funktionen er gemt under f1(x), kan det også beregnes ved:

$$\text{solve}\left(f1(x+t)=2\cdot f1(x),t\right) \qquad t=6.95865741446$$

Dvs. <u>antallet af reklametimer fordobles for hver 7 år</u>

c) Differentialkvotienten i *t=6* bestemmes på TI n'spire:

$$\frac{d}{dx}\left(f1(x)\right)|x=6 \qquad 895.678296083$$

Da *t = 6* svarer til år 2006, fortæller dette tal, at
<u>i år 2006 voksende det årlige antal reklametimer på de danske tv-kanaler med 896 timer om året.</u>

Opgave 8: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

a) Vinklen mellem de to vektorer kan bestemmes med formlen: $\cos v = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Dette gøres på TI n'spire ved først at definere vektorerne og derefter udregne længder (norm) og prikprodukt (dotp):

$a := \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix}$
$b := \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$
$\cos^{-1}\left(\dfrac{\text{dotP}(a,b)}{\text{norm}(a) \cdot \text{norm}(b)}\right)$	170.837652954

Dvs. at vinklen mellem de to vektorer er $\underline{\underline{v = 170{,}837652954°}}$

b) Arealet af trekanten udspændt af de to vektorer kan bestemmes som det halve af den numeriske værdi af determinanten af vektorerne:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \left|\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} -3 & 1 \\ 7 & -4 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |(-3) \cdot (-4) - 7 \cdot 1| = \frac{1}{2} \cdot |12 - 7| = \frac{1}{2} \cdot |5| = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$$

<u>*Opgave 9:*</u> $w(t)=\dfrac{519,9}{1+0,098\cdot e^{-0,434\cdot t}}$

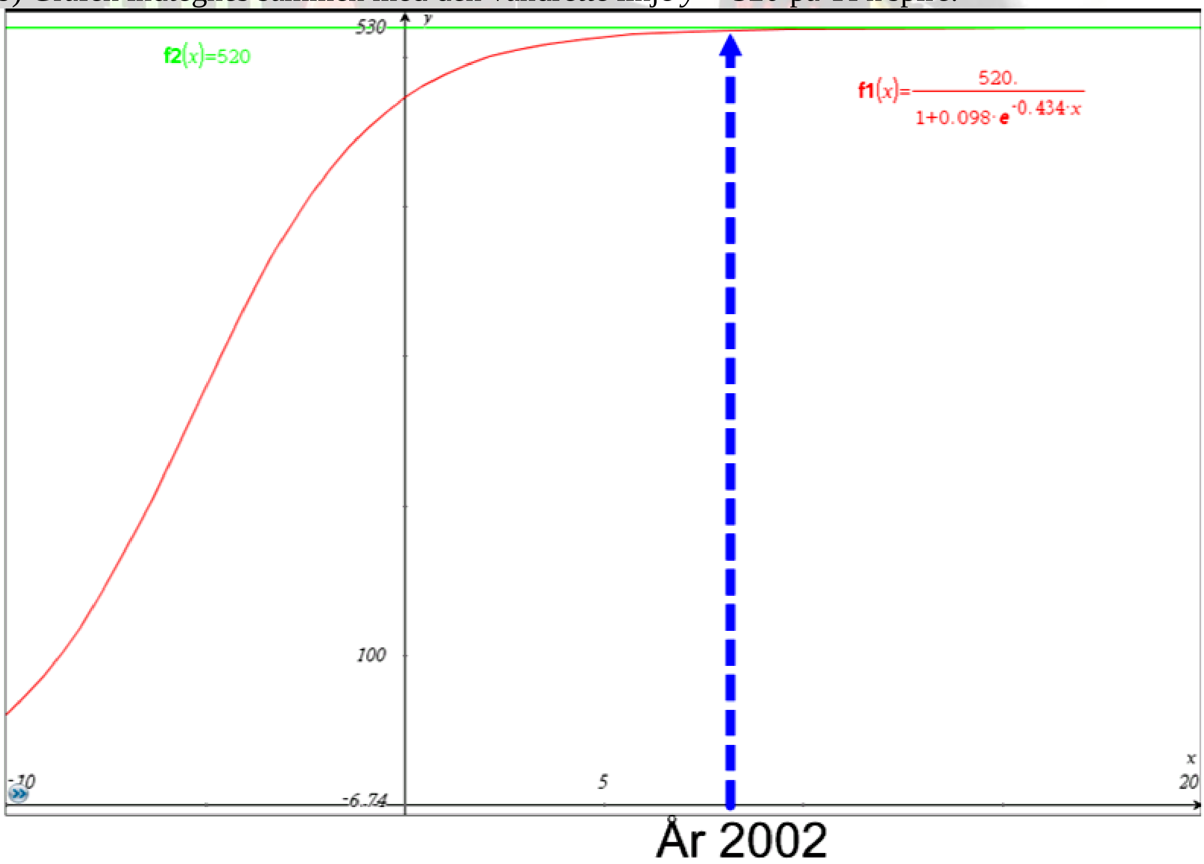
w er den årlige affaldsproduktion pr. indbygger målt i kg, og *t* er tiden målt i antal år efter 1994.

a) År 1994 svarer til *t = 0*, så affaldsproduktionen beregnes ved:

$$w(t)=\frac{519,9}{1+0,098\cdot e^{-0,434\cdot 0}}=\frac{519,9}{1+0,098\cdot e^{0}}=\frac{519,9}{1+0,098\cdot 1}=\frac{519,9}{1,098}=473,497$$

Dvs. <u>i 1994 producerede en EU-borger i gennemsnit 473,5kg affald</u>

b) Grafen indtegnes sammen med den vandrette linje *y = 520* på TI n'spire:



År 2002 svarer til *t* = 8, og man ser på figuren, hvor den røde graf (modellen) efter 2002 ligger meget tæt på den grønne (konstant 520).
Dermed understøtter modellen påstanden om, at affaldsproduktionen er stabiliseret på omkring 520 kg. affald pr. EU-borger.

Opgave 10: $A(3,0,0)\ \ B(3,3,0)\ \ C(0,3,0)\ \ D(0,0,3)$

a) For at bestemme ligningen for en plan, skal man bruge en normalvektor til planen og et punkt, der ligger i planen. Da fladen ABD skal ligge i planen, kan man anvende ethvert af disse tre punkter som punkt, og to af vektorerne mellem punkterne anvendes som retningsvektorer for planen (så man kan finde en normalvektor ved at tage krydsproduktet af disse).
To retningsvektorer er:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-3 \\ 3-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 0-0 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Krydsproduktet af retningsvektorerne bestemmes: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 3 - 0\cdot 0 \\ 0\cdot(-3) - 0\cdot 3 \\ 0\cdot 0 - 3\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$

Man kunne også have bestemt krydsproduktet i n'spire ved:

$ab:=[0\ \ 3\ \ 0]$	$[0\ \ 3\ \ 0]$
$ad:=[-3\ \ 0\ \ 3]$	$[-3\ \ 0\ \ 3]$
crossP(ab,ad)	$[9\ \ 0\ \ 9]$

Som normalvektor til planen vælges en vektor, der er ensrettet, men kun en niendedel så lang som ovenstående:

$$\overrightarrow{n_\alpha} = \frac{1}{9}\cdot \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \frac{1}{9}\cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Som punkt vælges *A(3,0,0)*, og planens ligning kan så bestemmes:

$$\alpha: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$1\cdot(x-3)+0\cdot(y-0)+1(z-0)=0 \Leftrightarrow x-3+z=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x+z-3=0}}$$

b) $\beta:\ y+z=3$

En normalvektor for β aflæses ud fra planen til $\overrightarrow{n_\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vinklen mellem de to flader (der ligger i de to planer) bestemmes som vinklen mellem planernes normalvektorer:

$$\cos v = \frac{\overrightarrow{n_\alpha}\cdot \overrightarrow{n_\beta}}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_\beta}\right|}$$

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot 1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2+1^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{60^\circ}}$$

Opgave 11: a) Forskerens nulhypotese vil være:

H_0 : Efterlønsalderen er uafhængig af, om personen lever sammen med en partner eller ej.

De forventede værdier i tabellen kan bestemmes ved først at finde ud af, hvor mange personer der i alt er inden for de enkelte kategorier:
I alt "Ja": 28 + 62 = 90
I alt "Nej": 73 + 90 = 163
Lagt sammen giver dette 253, hvilket passer med stikprøvens størrelse.

I alt "60 år": 28 + 73 = 101
I alt "61-65 år": 62 + 90 = 152
Lagt sammen giver dette 253, hvilket passer med stikprøvens størrelse.

"60 år" udgør $\frac{101}{253}$ af det samlede antal.
Da det samlede antal "Ja" er 90, skulle antallet at "Ja og 60 år" ifølge nulhypotesen være:

$$Ja_{60år} = \frac{101}{253} \cdot 90 = 35{,}929$$

Efter samme princip findes de andre værdier:

$$Ja_{61-65år} = \frac{152}{253} \cdot 90 = 54{,}071$$

$$Nej_{60år} = \frac{101}{253} \cdot 163 = 65{,}071$$

$$Nej_{61-65år} = \frac{152}{253} \cdot 163 = 97{,}929$$

Dvs. tabellen med forventede værdier bliver:

FORVENTET TABEL

Efterlønsalder / Lever sammen med partner	60 år	61-65 år
Ja	36	54
Nej	65	98

Dette kunne også have været bestemt på n'spire ved:

$$a:=\begin{bmatrix}28 & 62\\ 73 & 90\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}28 & 62\\ 73 & 90\end{bmatrix}$$

$\chi^2$2way *a* — *Udført*

$$stat.ExpMatrix \qquad \begin{bmatrix}35.9289 & 54.0711\\ 65.0711 & 97.9289\end{bmatrix}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

b) Hypotesen undersøges på n'spire med et chi-i-anden-uafhængighedstest:

$a:=\begin{bmatrix}28 & 62\\73 & 90\end{bmatrix}$ $\quad\begin{bmatrix}28 & 62\\73 & 90\end{bmatrix}$

$\chi^2$2way a *Udført*

stat.results

"Titel"	"χ^2 2–vejstest"
"χ^2"	4.52051
"PVal"	0.033491
"df"	1.
"ExpMatrix"	"[...]"
"CompMatrix"	"[...]"

Da *p*-værdien er 0,033491<0,05, <u>må nulhypotesen altså forkastes.</u>
Dvs. der er signifikant forskel på efterlønsalderen afhængigt af, om man lever sammen med en partner eller ej.

<u>*Opgave 12:*</u> $f(x)=ax^2+bx+c$

a) Da monteringspunktet ligger 220*m* over vandoverfladen, skærer grafen for *f* - der er en parabel - *y*-aksen i 220, dvs. man har:

$c=220$

Det laveste punkt må ligge under punktet midt mellem de to pyloner, og da det ligger 80m over vandoverfladen, må parablen altså have toppunkt i $\left(\frac{1}{2}\cdot 1280,80\right)=(640,80)$

Toppunktsformlen lyder $T\left(\frac{-b}{2a};\frac{-d}{4a}\right)=T\left(\frac{-b}{2a};\frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$

Så man har følgende ligninger: $\frac{-b}{2a}=640 \quad og \quad \frac{-b^2+4ac}{4a}=80$

Disse løses på n'spire ved:

$\text{solve}\left(\frac{-b}{2\cdot a}=640 \text{ and } \frac{-b^2+4\cdot a\cdot c}{4\cdot a}=80 \text{ and } c=220,a,b\right)$ $\quad a=\frac{7}{20480} \text{ and } b=\frac{-7}{16} \text{ and } c=220$

$\text{solve}\left(\frac{-b}{2\cdot a}=640 \text{ and } \frac{-b^2+4\cdot a\cdot c}{4\cdot a}=80 \text{ and } c=220,a,b\right)$ $\quad a=0.000342 \text{ and } b=-0.4375 \text{ and } c=220.$

Dvs. at forskriften er: $\underline{\underline{f(x)=\frac{7}{20480}\cdot x^2-\frac{7}{16}\cdot x+220}}$

b) Ved at definere funktionen på n'spire, kan man beregne udtrykket $\int_0^{1280}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$:

$f(x):=\frac{7}{20480}\cdot x^2+\frac{-7}{16}\cdot x+220$ *Udført*

$\int_0^{1280}\left(\sqrt{1+\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^2}\right)dx$ $\quad 1319.73$

<u>Dvs. at længden af bærekablet er 1319,73*m*</u>

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>*Opgave 13*</u>: $c' = -0,035 \cdot c$; c er koncentrationen (i µg/L), og den uafhængige variabel er tiden t (i timer).

a) Når koncentrationen er 1,5µg/L, har man:

$c' = -0,035 \cdot 1,5 = -0,0525$

Da c' netop er hastigheden, fortæller dette, at <u>koncentrationen aftager med 0,0525µg/L pr. time</u>

b) Det er en standard differentialligning af typen $y' = k \cdot y$ med den fuldstændige løsning $y = c_0 \cdot e^{k \cdot x}$, så den fuldstændige løsning til vores ligning er: $c(t) = c_0 \cdot e^{-0,035 \cdot t}$

Da det er oplyst, at koncentrationen fra start (t = 0) er 2,0µg/L har man:

$2,0 = c_0 \cdot e^{-0,035 \cdot 0} \Leftrightarrow 2,0 = c_0 \cdot e^0 \Leftrightarrow c_0 = 2,0$

Dvs. forskriften er:

$$\underline{\underline{c(t) = 2,0 \cdot e^{-0,035 \cdot t} \quad ; \; t \geq 0}}$$

Man kunne også have fundet løsningen på n'spire ved:

deSolve$(c'=-0.035 \cdot c$ and $c(0)=2,t,c)$ $\quad c=2. \cdot (0.965605)^t$

De to løsninger er (selvfølgelig) ens, da $e^{-0,035} = 0,965605$

I Maple er indstastningen:

$dsolve([n'=-0.035 \cdot n, n(0)=2])$

$$n(x) = 2\, e^{-\frac{7}{200}x}$$

<u>*Opgave 14:*</u> $|AC| = 20$; $|BC| = 20$; $\angle C = 82°$

a) Da man i trekant ABC kender en vinkel og de to hosliggende sider, kan den sidste sides længde bestemmes med en cosinusrelation:

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \cos C$$

$$|AB| = \sqrt{20^2 + 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 20 \cdot \cos(82°)} = \underline{\underline{26,24236115962}}$$

Da det er en ligebenet trekant, kan man udnytte, at vinklerne A og B, der ligger over for de lige lange sider, også er lige store, og vinkelsummen giver så:

$$180° = A + B + C$$

$$180° = 2 \cdot A + C$$

$$A = \frac{180° - C}{2} = \frac{180° - 82°}{2} = \frac{98°}{2} = \underline{\underline{49°}}$$

Alternativt kan man regne på det. For da man nu kender alle tre sider, kan man bestemme vinkel A med en cosinusrelation, men man kan også anvende sinusrelationerne, hvor man kan udnytte, at man ved, at vinkel A er spids, da den ikke ligger over for den længste side (der er AB).

$$\frac{\sin A}{|BC|} = \frac{\sin C}{|AB|} \Leftrightarrow A = \sin^{-1}\left(\frac{\sin C}{|AB|} \cdot |BC|\right) \qquad \text{(da A er spids)}$$

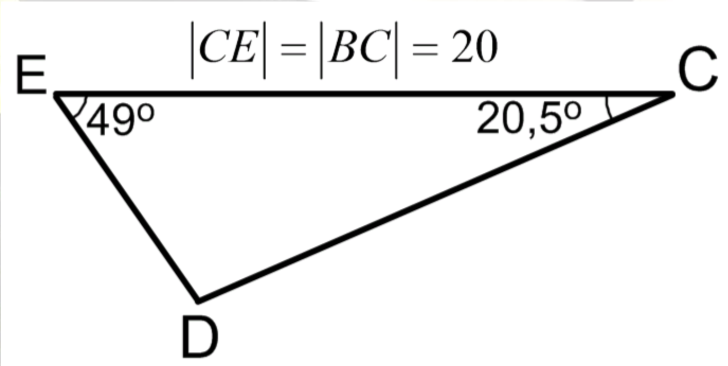
$$A = \sin^{-1}\left(\frac{\sin(82°)}{26,24236115962} \cdot 20\right) = \underline{\underline{49°}}$$

b) Man kender flere størrelser i trekant CDE:

Vinkel E svarer til den oprindelige vinkel B, dvs. $\angle E = \angle B = 49°$

Siden CE svarer til den oprindelige side BC, dvs. $|CE| = |BC| = 20$

Vinkel DCE er en fjerdedel af vinkel ACB, fordi vinkel ACB halveres to gange ved foldningen. Dvs. $\angle DEC = \frac{1}{4} \cdot \angle ACB = \frac{1}{4} \cdot 82° = 20,5°$



Så kan vinkel D bestemmes til: $\angle D = 180° - \angle E - \angle DCE = 180° - 49° - 20,5° = 110,5°$

Nu har man nok informationer til, at sinusrelationerne kan anvendes:

$$\frac{|CD|}{\sin E} = \frac{|EC|}{\sin D} \Leftrightarrow |CD| = \frac{|EC|}{\sin D} \cdot \sin E$$

$$|CD| = \frac{20}{\sin 110,5°} \cdot \sin 49° = \underline{\underline{16,114700295059}}$$

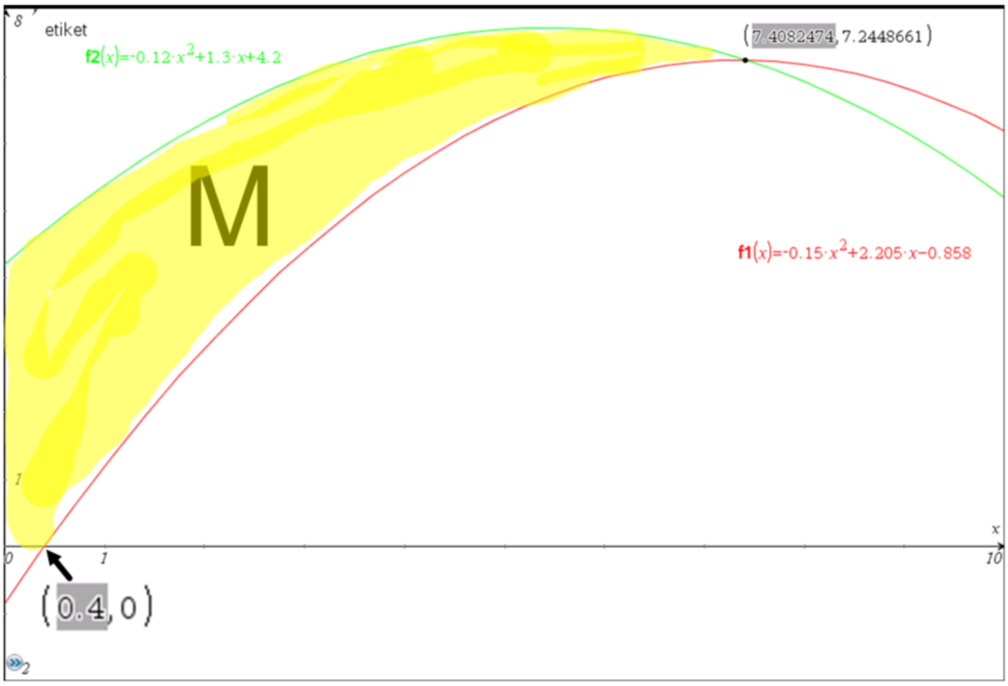
Arealet kan bestemmes med ½-appelsinformlen:

$$T = \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot |CE| \cdot \sin \angle DCE = \frac{1}{2} \cdot 16,114700295059 \cdot 20 \cdot \sin(20,5°) = \underline{\underline{56,434869901138}}$$


Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 15: $f(x) = -0{,}15 \cdot x^2 + 2{,}205 \cdot x - 0{,}858$; $g(x) = -0{,}12 \cdot x^2 + 1{,}3 \cdot x + 4{,}2$

a) På TI n'spire indtegnes graferne og området M markeres (bemærk at det lille stykke under *x*-aksen IKKE er med, da opgaveteksten siger, at begge akser er med i afgrænsningen:



Skæringspunktet er bestemt ved under værktøjerne at vælge 'Undersøg grafer' og 'Skæringspunkt'. Skæringen med x-aksen er bestemt ved under værktøjerne at vælge 'Undersøg grafer' og 'nulpunkt'.
Man kunne også have bestemt skæringspunktet ved:

solve$(f1(x)=f2(x),x)$	$x=7.40825$ or $x=22.7584$

Her ses det, at der også ligger et skæringspunkt længere ude, men det skal ikke benyttes.
Skålens højde er netop det interval på *x*-aksen, hvor området M ligger, dvs. skålens højde er 7,41cm

b) Det er det gule område, der drejes omkring *x*-aksen, og her skal man altså være opmærksom på, at det lille område under *x*-aksen mellem 0 og 0,4 ikke er med.
Rumfanget af det træ, der udgør skålen, bestemmes derfor ved:

$$V = \pi \cdot \int_0^{7{,}40825} (g(x))^2\,dx - \pi \cdot \int_{0{,}4}^{7{,}40825} \left(f(x)\right)^2\,dx$$

Dette bestemmes ved:

$f(x):=-0.15\cdot x^2+2.205\cdot x-0.858$	*Udført*
$g(x):=-0.12\cdot x^2+1.3\cdot x+4.2$	*Udført*
solve$(f(x)=0,x)$	$x=0.4$ or $x=14.3$
$\pi\cdot\int_0^{7.40824737652}\left((g(x))^2\right)dx-\pi\cdot\int_{0.4}^{7.40824737652}\left((f(x))^2\right)dx$	485.222119695

Dvs. at rumfanget af træet er 485,22cm^3

6. december 2013: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: Det er en lineær funktion, så hvis man kan huske formlerne til bestemmelse af a og b, kan man indsætte koordinaterne for (-3,1) og (5,17) i disse:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{17-1}{5-(-3)} = \frac{16}{8} = 2$$

$$b = y_2 - a \cdot x_2 = 17 - 2 \cdot 5 = 17 - 10 = 7$$

Dvs. forskriften er: $\underline{\underline{f(x) = 2x + 7}}$

Hvis man ikke kan huske formlerne, kan man indsætte punkternes koordinater i forskriften $f(x) = a \cdot x + b$ (hvis man kan huske denne) og løse to ligninger med to ubekendte:

$$\left.\begin{matrix} 1 = a \cdot (-3) + b \\ 17 = a \cdot 5 + b \end{matrix}\right\} \Rightarrow 17 - 1 = (5a + b) - (-3a + b) \Leftrightarrow 16 = 8a \Leftrightarrow a = 2$$

Dette indsættes i den nederste ligning for at bestemme b: $17 = 2 \cdot 5 + b \Leftrightarrow b = 17 - 10 = 7$

Opgave 2: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Arealet af parallelogrammet udspændt af disse to vektorer beregnes som den numeriske værdi af determinanten af vektorparret:

$$A = \left|\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right| = \left\|\begin{matrix} 5 & 1 \\ 2 & -4 \end{matrix}\right\| = |5 \cdot (-4) - 2 \cdot 1| = |-20 - 2| = |-22| = \underline{\underline{22}}$$

Opgave 3: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

<u>Da grafen skærer y-aksen på den positive del, er c > 0.</u>
<u>Da parablens grene vender opad, er a > 0.</u>

Førstekoordinaten til parablens toppunkt er givet ved $T_x = \frac{-b}{2 \cdot a}$.

Da grafens toppunkt ligger til venstre for y-aksen, er førstekoordinaten negativ, dvs. brøken $\frac{-b}{2a}$ er negativ. Det er allerede afgjort, at a er positiv, så det må være tælleren, der er negativ.
<u>Da $-b$ er negativ, er $b > 0$</u>

Diskriminanten bruges til at bestemme antallet af rødder, og da grafen ikke skærer x-aksen nogen steder, er der ingen rødder, dvs. $\underline{\underline{d < 0}}$

Opgave 4: $f(x) = 4 - 3 \cdot x^2 \quad P(2,5)$

For at bestemme den form, samtlige stamfunktioner er på, integreres funktionen ledvist:

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(4 - 3 \cdot x^2\right) dx = 4x - x^3 + k$$

Konstanten bestemmes at indsætte punktets koordinater i forskriften for F:

$$5 = 4 \cdot 2 - 2^3 + k \Leftrightarrow 5 = 8 - 8 + k \Leftrightarrow k = 5$$

Dvs. den søgte stamfunktion er: $\underline{\underline{F(x) = 4x - x^3 + 5}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 5: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 16$

For at bestemme monotoniforholdene findes først den afledede funktion ved at differentiere ledvist:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$$

Nulpunkterne for den afledede funktion bestemmes ved at løse en andengradsligning:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$d = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0 \text{ dvs. 2 løsninger}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$$

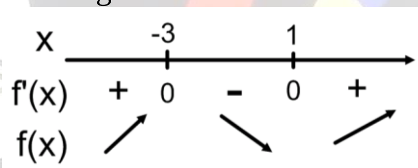
Der er altså to steder, hvor den afledede funktion er 0, og fortegnet for den afledede funktion bestemmes nu i de tre intervaller, der adskilles af disse to steder:

$$f'(-4) = 3 \cdot (-4)^2 + 6 \cdot (-4) - 9 = 48 - 24 - 9 = 15 > 0$$

$$f'(0) = -9 < 0$$

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 9 = 12 + 12 - 9 = 15 > 0$$

Et fortegnsskema bliver så:



Dvs. *f* er voksende i intervallerne]-∞;-3] og [1,∞[
f er aftagende i intervallet [-3,1]

Opgave 6: $l: y = 4 - x$

Arealet af en retvinklet trekant kan udtrykkes ved de to kateter ved $T = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot k_2$, da den ene katete fungerer som en højde svarende til den anden som grundlinje.
Kateternes længder er henholdsvis den vandrette afstand fra punktet *C* til *y*-aksen og den lodrette afstand fra punktet *C* til *x*-aksen.
Den vandrette afstand svarer til førstekoordinaten for *C*, mens den lodrette afstand er *C*'s andenkoordinat. Da *C* ligger på *l*, giver ligningen sammenhængen mellem *x* og *y*.
Man har altså:

$$T = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y = \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot x \cdot (4 - x)}}$$

Arealet som funktion af *x* kan skrives som:

$$T(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + 2x$$

Grafen for denne funktion er en parabel med grenene pegende nedad, så toppunktets førstekoordinat svarer til det sted, hvor arealet bliver størst muligt:

$$x_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-2}{-1} = \underline{\underline{2}}$$

6. december 2013: Delprøven MED hjælpemidler

<u>*Opgave 7:*</u> $N(t) = b \cdot a^t$. Dette er en eksponentiel udvikling, så Maple anvendes til eksp. regression:

a) Man skal være opmærksom på, at årstallene er angivet i antal år EFTER 2004.
Gym-pakken anvendes til at lave eksponentiel regression.

$with(Gym):$
$år := [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]:$
$næsehornsdrab := [10, 13, 24, 13, 83, 122, 333, 448, 668]:$
$N(t) := ExpReg(år, næsehornsdrab, t):$
$N(t)$

$$6.83253922049917\ 1.78978091042321^t$$

Forskriften for $N(t)$ er altså: $\underline{\underline{N(t) = 6,83254 \cdot 1,78978^t}}$

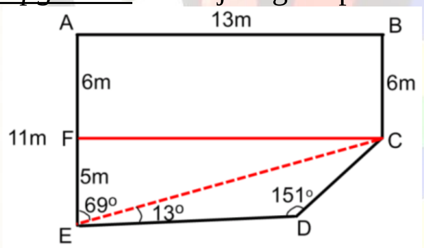
b) a er fremskrivningsfaktoren, og da den er knyttet til vækstraten r ved $a = 1 + r$, er vækstraten 0,78978.
Dvs. at <u>antallet af dræbte næsehorn ifølge modellen vokser med 79% om året.</u>

c) År 2013 svarer til $t = 9$, så antallet af dræbte næsehorn i 2013 bliver ifølge modellen:
$N(9)$

$$1287.60002989065$$

Dvs. at ifølge modellen vil der i 2013 blive dræbt $\underline{\underline{1288\ næsehorn}}$

<u>*Opgave 8:*</u> En linje tegnes parallelt med linjen AB med C som udgangspunkt. Det dannede punkt kaldes F:



a) Da vinklerne A og B er rette, gælder $|AF| = |BC| = 6m$ og dermed $|EF| = |AE| - |AF| = 11m - 6m = 5m$.
Da trekant CEF er retvinklet (med den rette vinkel F), har man:

$$\cos \angle CEF = \frac{|EF|}{|CE|} \Leftrightarrow |CE| = \frac{|EF|}{\cos \angle CEF}$$

$$|CE| = \frac{5m}{\cos(69°)} = \underline{\underline{13,9521405481m}}$$

b) For at kunne bestemme arealet af trekant CDE, skal man kende længden af siden DE. Denne kan bestemmes ved sinusrelationerne, hvis man kender vinkel C.
Så først bestemmes ved vinkelsummen i trekanten: $\angle DCE = 180° - D - \angle CED = 180° - 151° - 13° = 16°$
Nu kan længden af siden DE beregnes:

$$\frac{|DE|}{\sin \angle DCE} = \frac{|CE|}{\sin \angle D} \Leftrightarrow |DE| = \frac{|CE|}{\sin \angle D} \cdot \sin \angle DCE$$

$$|DE| = \frac{13,9521405481m}{\sin(151°)} \cdot \sin(16°) = 7,93245630464m$$

Og arealet er så:

$$T_{CDE} = \frac{1}{2} \cdot |CE| \cdot |DE| \cdot \sin(\angle CED) = \frac{1}{2} \cdot 13,9521405481m \cdot 7,93245630464m \cdot \sin(13°) = \underline{\underline{12,4482003171m^2}}$$

<u>*Opgave 9:*</u> $A(5,3,3) \quad B(3,5,3) \quad C(0,0,6) \quad D(5,0,3) \quad E(0,5,3)$

a) For at kunne bestemme ligningen for en plan, skal man kende et punkt i planen og en normalvektor til planen. Som punkt kan man anvende et af punkterne A, B og C, så man mangler kun at kende en normalvektor. Denne kan bestemmes som krydsproduktet af to ikke-parallelle retningsvektorer, så først bestemmes to sådanne retningsvektorer:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-5 \\ 5-3 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0-5 \\ 0-3 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Krydsproduktet udregnes:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 - 0\cdot(-3) \\ 0\cdot(-5) - (-2)\cdot 3 \\ -2\cdot(-3) - 2\cdot(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Som normalvektor for planen, der kaldes α, vælges en vektor med samme retning, men kun halvt så lang som ovenstående:

$$\vec{n} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Punktet C anvendes som et punkt i planen, og med den valgte normalvektor har man så:

$$\alpha:\ 3\cdot(x-0) + 3\cdot(y-0) + 8\cdot(z-6) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{3x + 3y + 8z - 48 = 0}}$$

På n'spire kunne en del af udregningerne være foretaget ved:

$ab := \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$
$ac := \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$
$\mathrm{crossP}(ab, ac)$	$\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 16 \end{bmatrix}$
$n := 0.5 \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 16 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3. \\ 3. \\ 8. \end{bmatrix}$
$\mathrm{expand}\left(\mathrm{dotP}\left(n, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z-6 \end{bmatrix}\right) = 0\right)$	$3.\cdot x + 3.\cdot y + 8.\cdot z - 48. = 0$

b) Den anden plan har ligningen: $\beta: \ 9x + 15z - 90 = 0$

En normal til denne plan aflæses ud fra koefficienterne i ligningen.
Vinklen mellem to planer bestemmes som vinklen mellem deres normalvektorer, så man har:

$$\cos v = \frac{\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta}}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_\beta}\right|}$$

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix}3\\3\\8\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}9\\0\\15\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}3\\3\\8\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}9\\0\\15\end{pmatrix}\right|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{3\cdot 9 + 3\cdot 0 + 8\cdot 15}{\sqrt{3^2+3^2+8^2}\cdot\sqrt{9^2+0^2+15^2}}\right) = 21{,}8742678145°$$

Dette er den spidse vinkel, og den stumpe bestemmes så ved:

$$v_{stump} = 180° - v = 180° - 21{,}8742678145° = \underline{\underline{158{,}125732186°}}$$

På n'spire, hvor man allerede har defineret normalvektoren til den første plan, kunne udregningerne foretages ved:

$nb := \begin{bmatrix}9\\0\\15\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}9\\0\\15\end{bmatrix}$
$\cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{dotP}(n,nb)}{\mathrm{norm}(n)\cdot \mathrm{norm}(nb)}\right)$	21.8742678145
180−21.874267814478	158.125732186

c) Det samlede glasareal findes ved at udregne arealerne af de to sider og de tre tagflader.
Arealerne af tagfladerne findes ved at beregne det halve af længderne af krydsprodukterne mellem to vektorer, der udspænder den pågældende trekant:

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}5-0\\0-0\\3-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\0\\-3\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix}5-0\\3-0\\3-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\\-3\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix}3-0\\5-0\\3-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\-3\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix}0-0\\5-0\\3-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\\-3\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix}5\\0\\-3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}5\\3\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\0\\15\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix}5\\3\\-3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\5\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\6\\16\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix}3\\5\\-3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\5\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\9\\15\end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{9^2+0^2+15^2} = \sqrt{306} \quad \left|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{6^2+6^2+16^2} = \sqrt{328}$$

$$\left|\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CE}\right| = \sqrt{0^2+9^2+15^2} = \sqrt{306}$$

Så kan arealet bestemmes:

$$A_{glas} = 2\cdot A_{side} + A_{tre\ tagflader} = 2\cdot 3m\cdot 3m + \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{CD}\times\overrightarrow{CA}\right| m^2 + \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}\right| m^2 + \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CE}\right| m^2 =$$

$$18m^2 + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{306}m^2 + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{328}m^2 + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{306}m^2 = 44{,}54824082\,\mathrm{m}^2 \approx \underline{\underline{44{,}5\,\mathrm{m}^2}}$$

<u>*Opgave 10:*</u> $\frac{dP}{dt} = 0{,}0015 \cdot P \cdot (150 - P)$ P er antallet af guppyer til tiden t målt i uger.
Fra start (dvs. t = 0) er der 12 guppyer i akvariet.

Dette er en differentialligning for logistisk vækst, og på formen $y' = a \cdot y \cdot (M - y)$ er den fuldstændige løsning $y = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-a \cdot M \cdot x}}$, og man ved, at den øvre grænse er M, mens den maksimale væksthastighed opnås, når $x = \frac{\ln c}{a \cdot M}$. Alt dette kan anvendes til besvarelsen af opgaven:

a) Den fuldstændige løsning er: $P(t) = \frac{150}{1 + c \cdot e^{-0{,}0015 \cdot 150 \cdot t}} = \frac{150}{1 + c \cdot e^{-0{,}225 \cdot t}}$

Startværdien anvendes for at bestemme konstanten c:

$$12 = \frac{150}{1 + c \cdot e^{-0{,}225 \cdot 0}} \Leftrightarrow 12 = \frac{150}{1 + c} \Leftrightarrow 1 + c = \frac{150}{12} \Leftrightarrow c = \frac{25}{2} - 1 = \frac{23}{2}$$

Så den søgte løsning er: $\underline{\underline{P(t) = \frac{150}{1 + \frac{23}{2} \cdot e^{-0{,}225 \cdot t}} \quad ; \ t \geq 0}}$

Hvis akvariet skal indeholde 80 guppyer, har man: $80 = \frac{150}{1 + \frac{23}{2} \cdot e^{-0{,}225 \cdot t}}$

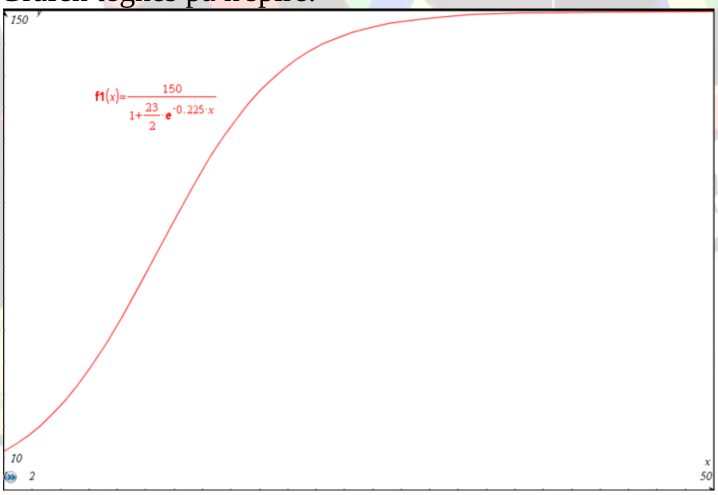
Dette løses på n'spire ved:

$\text{solve}\left(80 = \frac{150}{1 + \frac{23}{2} \cdot e^{-0.225 \cdot x}}, x\right)$ $x=11.4483485689$

<u>Dvs. efter 11,4 uger er der 80 guppyer i akvariet</u>

b) <u>Den øvre grænse er 150 guppyer</u>, da det er tallet i tælleren i løsningen.

Grafen tegnes på n'spire:



Her kan man også se, at den øvre grænse er 150.

c) Den største væksthastighed kan beregnes ud fra formlen angivet i starten:

$$t_{p'\max} = \frac{\ln\left(\frac{23}{2}\right)}{0,0015 \cdot 150} = 10,8548757128$$

Dvs. at den maksimale væksthastighed opnås efter 10,9 uger.

ANDEN METODE:
Man kunne også have anvendt n'spire til at løse det hele.
Først differentialligningen med begyndelsesbetingelsen og bestemmelsen af det tidspunkt, hvor der er 80 guppyer i akvariet:

$\text{deSolve}(p'=0.0015 \cdot p \cdot (150-p) \text{ and } p(0)=12, t, p)$ $\qquad p=\frac{150.\cdot(1.25232271619)^t}{(1.25232271619)^t+11.5}$

$p(t):=\frac{150.\cdot(1.2523227161919)^t}{(1.2523227161919)^t+11.5}$ $\qquad$ *Udført*

$\text{solve}(p(t)=80, t)$ $\qquad t=11.4483485689$

Så den øvre grænse (findes under infinitesimalredskaberne):

$\lim_{t\to\infty}(p(t))$ $\qquad 150.$

Til sidst den maksimale væksthastighed, der bestemmes som det sted, hvor den afledede funktion har et maksimum, hvilket svarer til, at den anden afledede giver 0. Der er kun ét af disse steder, når det er logistisk vækst.

$\text{solve}\left(\frac{d^2}{dt^2}(p(t))=0, t\right)$ $\qquad t=10.8548757128$

Opgave 11: $L(n) = \pi \cdot d \cdot n^2 + 2 \cdot \pi \cdot r_0 \cdot n$ $\quad L$ er længden af tape og n er antallet af viklinger.
d er tykkelsen af tapen og r_0 er radius af den tomme rulle.

a) Når $d = 0,1mm \;\; og \;\; r_0 = 25mm$ har man:
$L(75) = \pi \cdot 0,1mm \cdot 75^2 + 2 \cdot \pi \cdot 25mm \cdot 75 = \underline{\underline{13548,1183186mm}}$

b) Når længden af tape er 50000mm, har man $L(n)=50000$, så på n'spire kan beregnes:

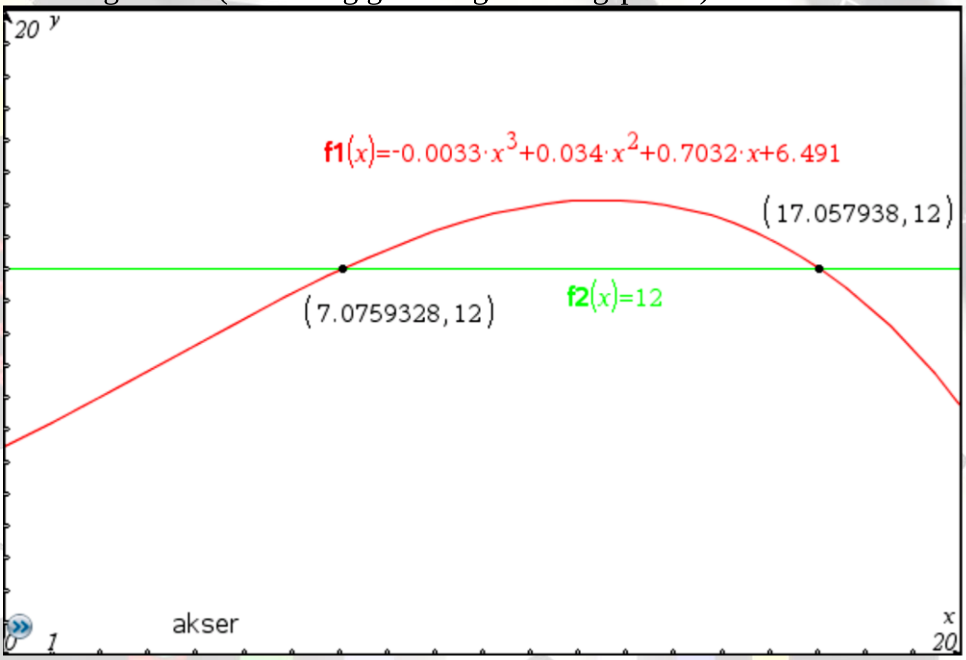
$\text{solve}(50000=\pi \cdot 0.1 \cdot n^2+2 \cdot \pi \cdot 25 \cdot n, n)$ $\qquad n=-720.802445928 \text{ or } n=220.802445928$

Man får to løsninger til ligningen, men den ene er negativ, og da det er et antal viklinger, kan denne værdi ikke bruges.
Dermed er antallet af viklinger 221

Opgave 12: $f(t) = -0,0033 \cdot t^3 + 0,0340 \cdot t^2 + 0,7032 \cdot t + 6,4910 \;;\; 0 \le t \le 20$

f er spændingsfaldet målt i V og *t* er tiden målt i sekunder efter affyring.

a) På n'spire tegnes grafen i *x*-vinduet [0;20]. De to steder, hvor spændingsfaldet er 12V bestemmes grafisk ved også at indtegne en vandret linje *y* = 12 og finde skæringspunkterne mellem graferne ('Undersøg grafer' og 'Skæringspunkt').



Dvs. at spændingsfaldet er 12V <u>7,076s og 17,058s efter affyring.</u>

Da funktionen nu er gemt som f1, kunne det også have været bestemt ved på n'spire at løse ligningen f(t)=12:

solve(*f1*(*x*)=12,*x*)

x=-13.8308409753 or *x*=7.07593283005 or *x*=17.0579384483

Den negative løsning ligger uden for definitionsmængden, så den forkastes.

b) Den afledede funktion bestemmes, hvorefter differentialkvotienten i 15 bestemmes:

$$f'(t) = -0,0033 \cdot 3t^2 + 0,0340 \cdot 2t + 0,7032 = -0,0099t^2 + 0,0680 \cdot t + 0,7032$$

$$f'(15) = -0,0099 \cdot 15^2 + 0,0680 \cdot 15 + 0,7032 = \underline{\underline{-0,5043}}$$

Dette fortæller, at <u>15 sekunder efter affyringen falder spændingsfaldet med 0,5043 V pr. sekund.</u>

På n'spire kunne det have været udregnet ved:

$\frac{d}{dx}(f1(x))|x=15$ -0.5043

Opgave 13: Man skal lave et χ^2-Goodness of Fit test, da man skal undersøge, om en stikprøve følger en forventet fordeling.

a) Nulhypotesen er så: H_0: Aldersfordelingen af de 165 tilfældigt udvalgte 20-70-årige danskere er den samme som aldersfordelingen blandt alle 20-70-årige danskere.

Der laves en tabel over det forventede antal i hvert interval ved at multiplicere procentdelen med stikprøvens størrelse:

Alder	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
Antal	30	34	37	33	31

Udregninger:

$20-30: 0{,}181 \cdot 165 = 29{,}865$

$30-40: 0{,}203 \cdot 165 = 33{,}495$

$40-50: 0{,}226 \cdot 165 = 37{,}29$

$50-60: 0{,}200 \cdot 165 = 33$

$60-70: 0{,}190 \cdot 165 = 31{,}35$

Antallet i intervallet 30-40 er afrundet til 34, selvom den matematisk korrekte afrunding ville være til 33. På denne måde opnås et samlet antal på 165. Den forkerte afrunding er foretaget i dette interval, da det var her, værdien var tættest på at skulle afrundes opad.

På TI n'spire vælges "Lister og regneark", og de observerede og forventede værdier indtastes som vist nedenfor. Der vælges menuerne 'Statistik', 'Statistiske test' og 'χ^2-GOF'.
Da der er 5 intervaller, er antallet af frihedsgrader 5-1 = 4.

A observ...	B forven...	C	D
			=χ²GOF('observeret,'
21	30	Titel	χ² GOF
39	34	χ²	10.585963849
51	37	PVal	0.031633237477
30	33	df	4.
24	31	CompLis...	{2.7,0.73529411764...

n'spire giver $p = 0{,}031633 = 3{,}1633\%$

Da p-værdien er mindre end 5%, må nulhypotesen forkastes.
Stikprøvens fordeling afviger altså signifikant fra populationens fordeling.

(Hvis der ikke var blevet afrundet til 34, så man arbejdede med 164 personer, ville p-værdien være blevet 2,7%)

Opgave 14: $f(x) = -0,015625 \cdot x^2 + 1,25 \cdot x + 200 \;;\; x \geq 0$

$g(x) = 200 - 0,000032 \cdot x^4 \;;\; x \geq 0$

a) De nulpunkter, der er positive, bestemmes på TI n'spire med 'solve':

$f(x):=-0.015625 \cdot x^2+1.25 \cdot x+200$	*Udført*
$g(x):=200-3.2\mathbf{E}\text{-}5 \cdot x^4$	*Udført*
solve($f(x)=0$ and $x\geq 0,x$)	$x=160.$
solve($g(x)=0$ and $x\geq 0,x$)	$x=50.$

Dvs. nulpunktet for *f* er $\underline{\underline{x=160}}$ og nulpunktet for *g* er $\underline{\underline{x=50}}$.

b) Arealet af *M* svarer til området i 1. kvadrant under grafen for *f* fratrukket området under grafen for *g*. Det bemærkes, at den nedre grænse for de bestemte integraler, der skal beregnes, i begge tilfælde er 0, mens de øvre grænser svarer til de udregnede nulpunkter i spørgsmål a).

Dvs. $A_M = \int_0^{160} f(x)dx - \int_0^{50} g(x)\,dx$

Dette udregnes på TI n'spire ved:

$\int_0^{160} (f(x))dx - \int_0^{50} (g(x))dx$	18666.6666667

Dvs. at <u>gavlen af busskuret har arealet 18666,67cm^2.</u>

<u>*Opgave 15:*</u> $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

a) Man søger at finde alle de rette linjer, der både opfylder, at de er tangenter til grafen for *f*, og at de går gennem (0,0). De mulige røringspunkter på grafen betegnes (x, y).

Tangentbetingelsen anvendes til at finde et udtryk for hældningen, da den svarer til differentialkvotienten til *f* det sted, hvor tangenten rører.
Så man har:

$$a = f'(x) = -2x + 3$$

En anden måde at bestemme hældningen er at udnytte de to punkter (0,0) og (x,y), som den rette linje skal gå igennem. Dette giver:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - 0}{x - 0} = \frac{y}{x} = \frac{-x^2 + 3x - 2}{x}$$

Ved sidste lighedstegn er det benyttet, at punktet ligger på grafen for *f*, hvorfor funktionsforskriften for *f* giver os sammenhængen mellem *x* og *y*.

De to udtryk for hældningerne sættes nu lig med hinanden:

$$-2x + 3 = \frac{-x^2 + 3x - +2}{x} \Leftrightarrow -2x^2 + 3 \cdot x = -x^2 + 3x - 2 \Leftrightarrow 0 = x^2 - +2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Hermed har man fundet de to steder, hvor tangenterne rører grafen, og for at finde ligningerne mangler man kun at bestemme hældningen, da man ved, at begge tangenter går gennem (0,0), dvs. at de skærer *y*-aksen i 0:

$$a_1 = f'\left(\sqrt{2}\right) = -2 \cdot \sqrt{2} + 3 \approx 0{,}1715728752538$$

$$a_2 = f'\left(-\sqrt{2}\right) = -2 \cdot \left(-\sqrt{2}\right) + 3 \approx 5{,}8284271247462$$

Dvs. de to ligninger er:

$$t_1 : \underline{\underline{y = \left(-2 \cdot \sqrt{2} + 3\right) \cdot x}} \qquad (\text{eller: } y = 0{,}17157 \cdot x)$$

$$t_2 : \underline{\underline{y = \left(2 \cdot \sqrt{2} + 3\right) \cdot x}} \qquad (\text{eller: } y = 5{,}82843 \cdot x)$$