Løsninger til eksamensopgaver på A-niveau 2014

22. maj 2014

22. maj 2014: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$

Koordinatsættet til parablens toppunkt bestemmes ved først at udregne diskriminanten for den tilsvarende andengradsligning og derefter indsætte i toppunktsformlen:

$d = b^2 - 4ac = 4^2 - 4\cdot 2\cdot(-6) = 16 + 48 = 64$

$$T\left(\frac{-b}{2a};\frac{-d}{4a}\right) = T\left(\frac{-4}{2\cdot 2};\frac{-64}{4\cdot 2}\right) = \underline{\underline{T(-1;-8)}}$$

Opgave 2: Trekanterne ABC og ADE er ensvinklede, da de deler vinkel A, og da det som angivet på figuren gælder, at $\angle ACB = \angle AED$, hvilket følger af, at linjerne DE og BC er parallelle og vinklerne dannes af den samme rette linje, der skærer de to parallelle linjer.
Da trekanterne er ensvinklede, er forholdene mellem ensliggende sider i de to trekanter konstant (og dette forhold kaldes skalafaktoren):

$$\frac{|DE|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|AC|} \quad\Leftrightarrow\quad |DE| = \frac{|AE|}{|AC|}\cdot|BC| = \frac{10}{4}\cdot 2 = \frac{20}{4} = \underline{\underline{5}}$$

Opgave 3: Man kan både løse ligningssystemet med lige store koefficienters metode og ved substitutionsmetoden:

Substitutionsmetoden:

$x + y = 11 \;\Leftrightarrow\; x = 11 - y$ Indsættes i den anden ligning:

$6x + 2y = 42 \;\Leftrightarrow\; 6\cdot(11 - y) + 2y = 42 \;\Leftrightarrow\; -4y + 66 = 42 \;\Leftrightarrow\; 4y = 24 \;\Leftrightarrow\; y = 6$

Dette indsættes i den første ligning:

$x = 11 - 6 = 5$

Dvs. løsningen til ligningssystemet er $\underline{\underline{(x,y) = (5,6)}}$

Lige store koefficienters metode:

$$\left.\begin{matrix} x + y = 11 \\ 6x + 2y = 42 \end{matrix}\right\} \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{matrix} 2x + 2y = 22 \\ 6x + 2y = 42 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (6x + 2y) - (2x + 2y) = 42 - 22 \;\Leftrightarrow\; 4x = 20 \;\Leftrightarrow\; x = 5$$

Dette indsættes i den øverste ligning:

$5 + y = 11 \;\Leftrightarrow\; y = 6$

Dvs. løsningen til ligningssystemet er $\underline{\underline{(x,y) = (5,6)}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 4: Ligningen skal omskrives til formen $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, hvor radius *r* og centrum *C(a,b)* så direkte kan aflæses:

$$x^2-6x+y^2+2y-26=0 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+1)^2=9+1+26=36 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+1)^2=6^2$$

Dvs. $\underline{\underline{r=6 \text{ og } C(3,-1)}}$

Opgave 5: $f(x)=ax^3+5x^2+2x+1$

Først bestemmes den afledede funktion ved af differentiere ledvist, og derefter udnyttes kendskabet til differentialkvotienten i 1: $f'(1)=-3$ til at bestemme *a*:

$$f'(x)=3ax^2+5\cdot 2x+2=3ax^2+10x+2$$

$$\text{Da } f'(1)=-3 \text{ har man}:$$

$$-3=3a\cdot 1^2+10\cdot 1+2 \Leftrightarrow -3=3a+10+2 \Leftrightarrow 3a=-15 \Leftrightarrow \underline{\underline{a=-5}}$$

Opgave 6: Der skal integreres ved substitution, da udtrykket består af en sammensat funktion $\frac{1}{x^2+7}$ multipliceret med den afledede af den inderste funktion $(x^2+7)'=2x$

Dette kan gøres på flere måder:

Metode 1: Der integreres med hensyn til nævneren:

$$\int \frac{2x}{x^2+7}\,dx=\int \frac{2x}{x^2+7}\frac{d(x^2+7)}{2x}=\int \frac{1}{x^2+7}\,d(x^2+7)=\ln|x^2+7|+k=\underline{\underline{\ln(x^2+7)+k}}$$

I sidste skridt er det benyttet, at argumentet x^2+7 altid er positivt, så numerisktegnet er overflødigt.

Metode 2: Man indfører substitutionen $t=x^2+7$

Så har man:

$$\frac{dt}{dx}=\frac{d(x^2+7)}{dx}=2x$$

$$dx=\frac{dt}{2x}$$

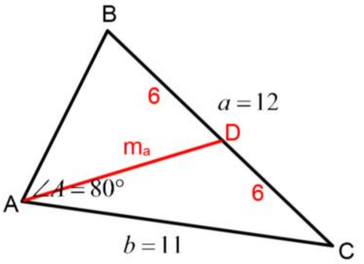
Hermed bliver udregningerne:

$$\int \frac{2x}{x^2+7}\,dx=\int \frac{2x}{t}\frac{dt}{2x}=\int \frac{1}{t}\,dt=\ln|t|+k=\ln|x^2+7|+k=\underline{\underline{\ln(x^2+7)+k}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 7: $\Delta ABC: \ \angle A = 80° \ , \ a = 12 \ , \ b = 11$

a) Først tegnes en skitse af trekanten:



Umiddelbart er der tale om det dobbelttydige trekantstilfælde, men som det ses ved udregningerne, er der kun én mulig trekant med de opgivne mål. Hvis man anvender cosinusrelationerne, slipper man for overvejelser angående stumpe og spidse vinkler, men sinusrelationerne er hurtigere at regne på:

Cosinusrelationerne: Udregningerne foretages i Maple:

$restart$

$with(Gym):$

$a := 12:$

$b := 11:$

$A := 80:$

Først bestemmes længden af siden c

$$solve\left(Cos(A) = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2 \cdot c \cdot b}, c\right) = -3.252097905, 7.072357805$$

Da længden skal være positiv, forkastes den negative løsning.

Nu kendes alle trekanten sidelængder, og dermed kan vinklerne beregnes:

$c := 7.072357805 : 7.072357805 :$

$$B = invCos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}\right) = 64.52065713$$

$$C = invCos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}\right) = 35.47934276$$

Dvs. at $\underline{\underline{\angle B = 64,52065713°}}$ og $\underline{\underline{\angle C = 35,47934276°}}$

Sinusrelationerne:

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \Leftrightarrow \quad \sin B = \frac{\sin(80°)}{12} \cdot 11 \Leftrightarrow$$

$$B = \sin^{-1}\left(\frac{\sin(80°)}{12} \cdot 11\right) \vee \ B = 180° - \sin^{-1}\left(\frac{\sin(80°)}{12} \cdot 11\right) \Leftrightarrow$$

$$B = 64{,}52065713° \ \vee \ B = 115{,}4793429°$$

Da længden af siden *a* er større end længden af siden *b*, kan vinkel *B* ikke være større end vinkel *A*, og dermed må den stumpe vinkel forkastes.

Vinkel C kan så bestemmes ved at udnytte, at vinkelsummen i en trekant er 180°.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

b) Da medianen fra *A* deler siden BC i to lige store dele, får man ved at regne på trekant ACD:

$restart$

$with(Gym):$

$a := 6:$

$b := 11:$

$C := 35.47934276:$

Medianens længde kan så bestemmes med en cosinusrelation:

$m_a{}^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot Cos(C) \xrightarrow{\text{solve for m\_\_a}} [[m_a = 7.036271911], [m_a = -7.036271911]]$

Da det er en sidelængde, man har bestemt, kastes den negative løsning bort.

Man har altså:

$\underline{\underline{m_a = 7.03627}}$

Opgave 8: $M(t) = b\cdot a^t$ M er det årlige antal møder og *t* er tiden målt i antal år efter 1963.

a) Der er tale om en eksponentiel udvikling, og da man kender mere end to sæt sammenhørende værdier, skal der laves regression. Udregningerne foretages i Maple:

$with(Gym):$

$År := [0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45]:$

$Møder := [359, 539, 811, 1195, 1717, 2452, 3372, 5107, 8164, 10969]:$

$M(t) := ExpReg(År, Møder, t):$

$M(t) = 370.375804440862\ 1.07866034161698^t$

Dvs. man kan aflæse:

$\underline{\underline{a = 1,07866034161698}}$ og $\underline{\underline{b = 370,375804440862}}$

b) År 2010 svarer til *t = 47*, så antallet af årlige møder i 2010 beregnes ved:

$M(47) = 13008.4051150551$

Dvs. at i 2010 var der ifølge modellen $\underline{\underline{13008}}$ møder.

Fordoblingskonstanten kan beregnes, da man kender fremskrivningsfaktoren:

$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2.)}{\ln(1.07866034161698)} = 9.154101694$

Dvs. at for hver $\underline{\underline{9\ år}}$ bliver det årlige antal møder fordoblet.

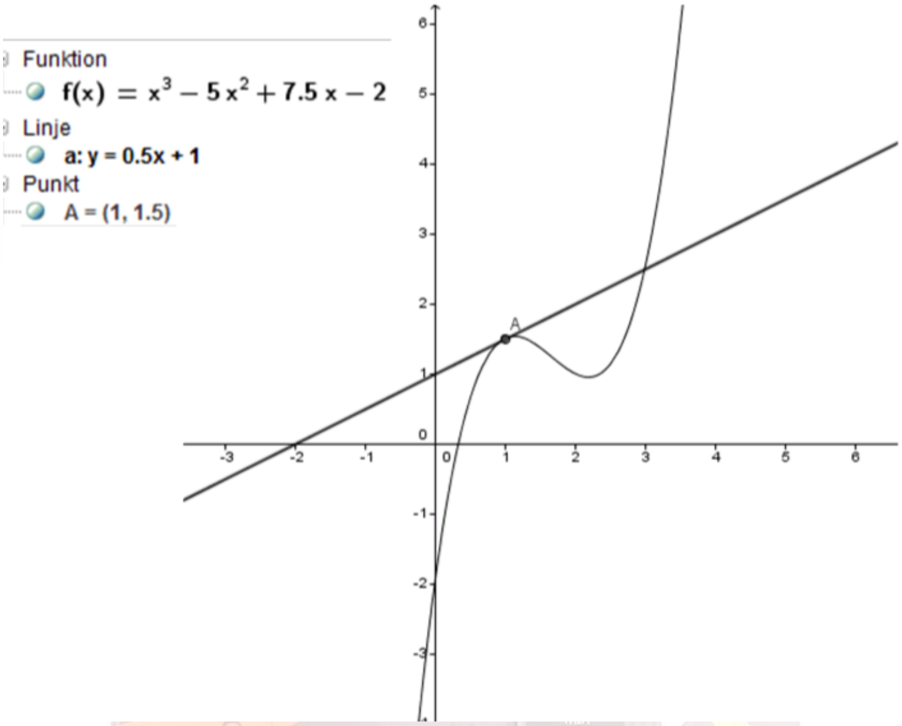
c) Differentialkvotienten i 37 (svarende til år 2000) beregnes:

$M'(37) = 461.941163282120 = \underline{\underline{462}}$

Dvs. at i år <u>2000 voksende det årlige antal møder med 462 møder om året</u>

Opgave 9: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7{,}5 \cdot x - 2$

a) Grafen for *f* indtegnes i Geogebra (hvor man også kan placere et punkt og få Geogebra til at finde tangentens ligning):



Ligningen for tangenten til grafen i (1,f(1)) udregnes ved først at finde y-koordinaten for røringspunktet og derefter tangentens hældning:

$f(1) = 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 7{,}5 \cdot 1 - 2 = 1 - 5 + 7{,}5 - 2 = 1{,}5$

Tangentens hældning:

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7{,}5$

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 + 7{,}5 = 0{,}5$

Dette indsættes så i ligningen for den rette linje: $y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$

$y - 1{,}5 = 0{,}5 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 0{,}5 \cdot x + 1}}$

b) Skæringspunktet mellem tangenten og grafen beregnes i Maple, og da man kan se, at tangenten ligger øverst i det pågældende interval, kan man efterfølgende beregne arealet af området M.

$solve\left(x^3 - 5x^2 + 7.5x - 2 = 0.5x + 1\right) = 3.,\ 1.,\ 1.$

Der er to løsninger (den ene løsning optræder to gange), men den ene svarer til røringspunktet. Så førstekoordinaten til punktet B er $\underline{\underline{3}}$.

Så kan arealet af M beregnes:

$$A_M = \int_1^3 \left((0.5x + 1) - \left(x^3 - 5x^2 + 7.5x - 2\right) \right) dx = 1.333333333$$

Dvs. $\underline{\underline{A_M = \frac{4}{3}}}$

Opgave 10: $A(1,5)\quad B(9,17)$

a) For at bestemme en parameterfremstilling har man brug for et punkt, som linjen går igennem, og en retningsvektor for linjen. Her vælges punktet *A* som punkt, og som retningsvektor skal man bruge en vektor, der er parallel med vektoren fra A til B:

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}9-1\\17-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\12\end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_l=\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}8\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

En parameterfremstilling med parameteren *t* er så: $\underline{\underline{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}}}$

b) Projektionen af $P(-10,21)$ på linjen *l*, svarer til skæringspunktet mellem linjen *l* og linjen *m*, der går gennem *P* og står vinkelret på *l*.

Retningsvektoren for *l* svarer til en normalvektor for *m*: $\vec{n}_m=\vec{r}_l$

Så en ligning for linjen *m* bliver:

$$a\cdot(x-x_0)+b\cdot(y-y_0)=0$$

$$2\cdot(x+10)+3\cdot(y-21)=0 \Leftrightarrow 2x+3y-43=0$$

Skæringen mellem de to linjer bestemmes ved at indsætte koordinaterne for linjen *l* i ligningen for linjen *m*:

$$2\cdot(1+2t)+3\cdot(5+3t)-43=0 \Leftrightarrow 13t-26=0 \Leftrightarrow t=2$$

Dette indsættes i parameterfremstillingen for linjen *l* for at finde koordinatsættet:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\11\end{pmatrix}$$

Dvs. koordinatsættet til projektionen er: $\underline{\underline{(5,11)}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 11: I Maple defineres punkterne som stedvektorer, så de er nemmere at regne med:

$with(Gym):$

$\overrightarrow{OA} := \langle 24, -9, 16\rangle :$

$\overrightarrow{OB} := \langle 15, 20, 16\rangle :$

$\overrightarrow{OC} := \langle -15, 20, 16\rangle :$

$\overrightarrow{OD} := \langle 0, 0, 44\rangle :$

$\overrightarrow{OE} := \langle 0, -25, 0\rangle :$

a) For at bestemme en ligning for den plan α, der indeholder tagfladen ABD, skal man have en normalvektor.
Derfor bestemmes først to vektorer, der udspænder planen, hvorefter krydsproduktet mellem disse bestemmes:

$$\overrightarrow{AB} := \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} -9 \\ 29 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} := \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} -24 \\ 9 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_\alpha} := \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} 812 \\ 252 \\ 615 \end{bmatrix}$$

Hermed bliver en ligning for α:

$$\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \left(\langle x, y, z\rangle - \overrightarrow{OA}\right) = 0$$

$$812\,x - 27060 + 252\,y + 615\,z = 0$$

Det undersøges, om ligningen kan angives på en simplere form ved at se på primfaktorerne:

$ifactor(812) = (2)^2\,(7)\,(29)$

$ifactor(27060) = (2)^2\,(3)\,(5)\,(11)\,(41)$

$ifactor(252) = (2)^2\,(3)^2\,(7)$

$ifactor(615) = (3)\,(5)\,(41)$

Der er ingen primfaktor, der indgår i alle tal, så ligningen kan ikke skrives simplere:

α: $\underline{\underline{812 \cdot x + 252 \cdot y + 615 \cdot z - 27060 = 0}}$

b) En normalvektor for planen β er:

$\overrightarrow{n_\beta} := \langle 0, 7, 5\rangle :$

En vinkel mellem de to normalvektorer kan bestemmes ved formlen $\cos(v) = \dfrac{\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta}}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_\beta}\right|}$, der beregnes ved:

$$v = invCos\left(\frac{\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta}}{\left\|\overrightarrow{n_\alpha}\right\|_2 \cdot \left\|\overrightarrow{n_\beta}\right\|_2}\right) = 57.58263999$$

Dette er en spids vinkel, og den søgte stumpe vinkel er så:

$v_{stump} = 180 - 57.58263999 = 122.4173600$

Dvs. at $v_{stump} = \underline{\underline{122,4173600^{\circ}}}$

c) Afstanden fra punkt til plan bestemmes ved: $dist(E, \beta) = \dfrac{\left|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c \cdot z_0 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

$$dist(E, \beta) = \frac{\left|0 \cdot 0 + 7 \cdot (-25) + 5 \cdot 0 - 220.\right|}{\sqrt{0^2 + 7^2 + 5.^2}} = 45.91781730$$

$dist(E, \beta) = \underline{\underline{45{,}92\,\text{cm}}}$

Opgave 12: a) Stikprøven er - som det også ret tydeligt fremgår af opgaveteksten - de 1005 familier med bil, der har fordelt sig som angivet i den nederste tabel.
Populationen er samtlige familier i Danmark med bil.

Nulhypotesen er, at fordelingen på de fem regioner i Danmark ikke har ændret sig.

b) Der skal laves et χ^2-GOF-test. Det gøres i Maple.

with(Gym) :

Den observerede liste indskrives, og den forventede liste udregnes:

observeret := [271, 161, 250, 201, 122] :

forventet% := [0.26, 0.15, 0.24, 0.24, 0.11] :

forventetliste := 1005 · *forventet%* :

Så undersøges nulhypotesen med signifikansniveau på 5%=0,05:

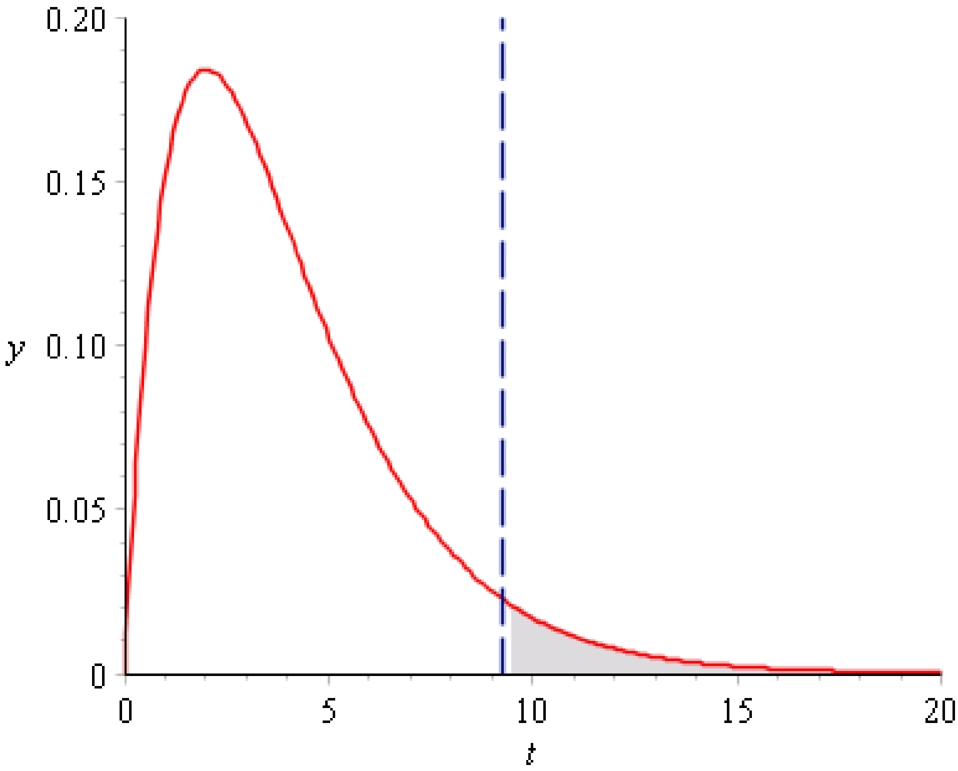
ChiKvadratGOFtest(*observeret*, *forventetliste*)

χ^2-teststørrelse = 9.2640

Frihedsgrader = 4

Kritisk værdi = 9.4877

p-værdi = 0.054829



Da *p*-værdien er 0,054829=5,4829% dvs. større end 5%, *kan nulhypotesen ikke forkastes.*

<u>*Opgave 13:*</u> $\frac{dU}{dx} = 0{,}1518 \cdot U$ U er skibets CO_2-udledning målt i g/ton/km. x er skibets fart målt i knob.

a) I Maple bestemme den partikulære løsning til differentialligningen, der går gennem punktet (25 ; 6,25).

restart

$$dsolve\left(\left[\frac{dU}{dx} = 0.1518 \cdot U,\ U(25) = 6.25\right]\right) = U(x) = \frac{25}{4} \frac{e^{\frac{759}{5000}x}}{e^{\frac{759}{200}}}$$

$$evalf\left(U(x) = \frac{25}{4} \frac{e^{\frac{759}{5000}x}}{e^{\frac{759}{200}}}\right) = U(x) = 0.1405181613\, e^{0.1518000000\, x}$$

Dvs. $\underline{\underline{U(x) = 0,\ 1405181613 \cdot e^{0,\ 1518 \cdot x}}}$

For at kunne arbejde videre med funktionen defineres den:

$U(x) := 0.1405181613\, e^{0.1518000000\, x}$:

Når udledningen er 4 g/ton/km kan farten bestemmes ved:

$fsolve(U(x) = 4) = 22.06003226$

Dvs. farten er $\underline{\underline{22,\ 1\ knob}}$

b) Hvis man tager udgangspunkt i, at 6,25g/ton/km er 100%, kan man regne procenterne ud for de forskellige hastigheder:

$$\frac{U(22.5)}{6.25} = 0.6842034253 = 68,\ 4\ \%$$

$$\frac{U(20)}{6.25} = 0.4681343272 = 46,\ 8\ \%$$

$$\frac{U(17.5)}{6.25} = 0.3202991102 = 32\ \%$$

Modellen følger altså nogenlunde påstanden, dog med små afvigelser ved 22,5 og 20 knob.

(Muligvis skal man kun teste de 32%, men opgaveformuleringen er ikke helt klar)

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 14: a) Omkredsen beregnes ved at tage tre sider fra rektanglet og 2 sider fra trekanten.

$$O = y + x + y + x + x = 3x + 2y$$

Når $x = 50$ og $y = 100$ får man:

$$O = 3\cdot 50 + 2\cdot 100 = 150 + 200 = 350$$

Dvs. omkredsen er <u>350m</u>

Arealet kan beregnes ved lægge arealerne for de to figurer sammen, hvor arealet af trekanten bestemmes med ½-appelsinformlen:

$$A = A_{rektangel} + A_{trekant} = x\cdot y + \frac{1}{2}\cdot x\cdot x\cdot \sin(60°) = 50\cdot 100 + \frac{1}{2}\cdot 50^2\cdot \sin(60°) = 6082{,}5317547306$$

Dvs. at <u>arealet er 6082,53m^2</u>

b) Hvis omkredsen skal være 200m, har man:

$$200 = 3x + 2y \Leftrightarrow 2y = 200 - 3x \Leftrightarrow y = \frac{200-3x}{2} = \underline{\underline{100 - \frac{3}{2}\cdot x}}$$

Da $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, får man:

$$A(x) = x\cdot y + \frac{x^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = x\cdot\left(100 - \frac{3}{2}\cdot x\right) + \frac{\sqrt{3}\cdot x^2}{4} = 100x - \frac{3}{2}\cdot x^2 + \frac{\sqrt{3}\cdot x^2}{4} = \underline{\underline{\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\right)\cdot x^2 + 100x}}$$

c) Det største areal i området $20 \le x \le 60$ bestemmes ved at finde nulpunkter for den afledede funktion og fortegn for den anden afledede de pågældende steder for at afgøre, om det er maksimum, minimum eller vandrette vendetangenter:

$$T(x) := \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\right)\cdot x^2 + 100\cdot x :$$

$fsolve(T'(x) = 0) = 46.86091399$

$evalf(T''(46.86091399)) = -2.133974596 < 0$ dvs. her er lokalt maksimum.

Byggegrunden bliver altså størst, når $\underline{\underline{x = 46,86\ m}}$

Den tilsvarende y-værdi er:

$$y = 100 - \frac{3}{2}\cdot 46.86091399 = y = 29.70862902$$

Dvs. $\underline{\underline{y = 29,71\ m}}$

27. maj 2014: Delprøven UDEN hjælpemidler

<u>*Opgave 1:*</u> Udtrykket reduceres ved at anvende en kvadratsætning på første led:

$$(p-q)^2+2pq-q^2=p^2+q^2-2pq+2pq-q^2=\underline{\underline{p^2}}$$

<u>*Opgave 2:*</u> $2x^2+x-15=0$

Ligningen løses med diskriminantmetoden:

$d=b^2-4ac=1^2-4\cdot2\cdot(-15)=1+120=121>0$ dvs. 2 løsninger.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{d}}{2\cdot a}=\frac{-1\pm\sqrt{121}}{2\cdot2}=\frac{-1\pm11}{4}=\begin{cases}\frac{5}{2}\\-3\end{cases}\qquad \underline{\underline{x=-3\ \vee\ x=\frac{5}{2}}}$$

<u>*Opgave 3:*</u> $C(t)=1{,}5\cdot0{,}64^t$, hvor *C(t)* er koncentrationen af medicinen i blodet målt i mg/mL og *t* er tiden målt i timer efter indsprøjtningen.

Det er en eksponentiel udvikling, og 1,5 er begyndelsesværdien, så <u>lige efter indsprøjtningen i blodet er koncentrationen af medicinen i blodet 1,5 mg/mL</u>.

0,64 er fremskrivningsfaktoren, så vækstraten bliver $r=a-1=0{,}64-1=-0{,}36=-36\%$, dvs. at <u>koncentrationen aftager med 36% i timen.</u>

<u>*Opgave 4:*</u> Væksthastigheden svarer til hældningen for tangenten i det pågældende punkt, så det afgørende er, om hældningen er positiv eller negativ.

På den røde og på den grønne graf har tangenterne i *x = 0* negative hældningen, så <u>væksthastighederne er negative for *f* og *h*.</u>

På den blå graf har tangenten i *x = 0* positiv hældning, så <u>væksthastigheden er positiv for *g*.</u>

<u>*Opgave 5:*</u> $f(x)=e^x-x^2-2x-2 \qquad \frac{dy}{dx}=x^2+y$

Det undersøges, om funktionen er en løsning til differentialligningen, ved at indsætte i differentialligningen og se, om man får en identitet:

$f'(x)=e^x-2x-2$

Indsættes:

$$\frac{dy}{dx}=x^2+y$$

$$e^x-2x-2=x^2+\left(e^x-x^2-2x-2\right)\Leftrightarrow$$

$$e^x-2x-2=e^x-2x-2\ \Leftrightarrow\quad 0=0$$

<u>Da dette er en identitet, er funktionen en løsning til differentielligningen</u>.

<u>*Opgave 6:*</u> I intervallet]0,2[ligger *f* over *g*, så arealet af *M* kan bestemmes ved:

$$A_M=\int_0^2\left(f(x)-g(x)\right)dx=\left[F(x)-G(x)\right]_0^2=$$

$$F(2)-G(2)-\left(F(0)-G(0)\right)=66-(-62)-(0-0)=\underline{\underline{128}}$$

27. maj 2014: Delprøven MED hjælpemidler

Opgave 7: Man har $\vec{a}=\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}t\\6\end{pmatrix}$, og første spørgsmål løses i Maple:

a) $with(Gym)$:
$\vec{a} := \langle 7, 3\rangle$:
$\vec{b} := \langle t, 6\rangle$:
$t := 2$:

Vinklen mellem vektorerne bestemmes ved formlen $\cos(v) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$:

$v = invCos\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|_2 \cdot \|\vec{b}\|_2}\right) = 48.36646064$

Dvs. $\underline{\underline{v = 48,36646064^o}}$

b) Hvis determinanten skal være 30, får man:

$$\det\left(\vec{a},\vec{b}\right)=30 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}7 & t\\ 3 & 6\end{vmatrix}=30 \Leftrightarrow 7\cdot6-3\cdot t=30 \Leftrightarrow 3t=42-30 \Leftrightarrow t=\frac{12}{3}=\underline{\underline{4}}$$

Opgave 8: $f(h)=b\cdot h^a$ *f(h)* er belastningsevnen målt i 10^3mm^3 og *h* er højden målt i mm.

a) Der er tale om en potensfunktion, så man skal lave potensregression.

$restart$
$with(Gym)$:
$højde := [359, 395, 432, 478, 524, 572, 620, 716]$:
$belastningsevne := [3800, 4300, 4820, 5500, 6180, 6920, 7660, 9200]$:
$f(h) := PowReg(højde, belastningsevne, h)$:
$f(h) = 2.02498637749824\ h^{1.28131459885991}$
Dvs. at $\underline{\underline{a = 1,28131459885991}}$ og $\underline{\underline{b = 2,02498637749824}}$

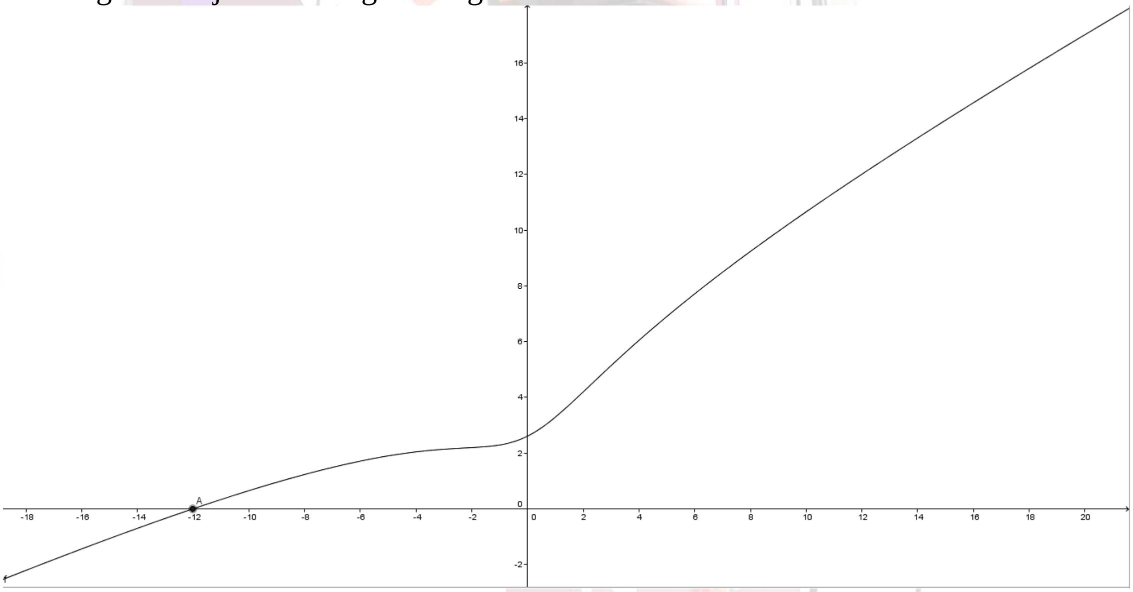
b) Når højden er 668mm får man:
$f(668) = 8430.42416041302$
Dvs. belastningsevnen er $\underline{\underline{8430,4\cdot10^3 mm^3}}$

c) Da det er en potensfunktion, er sammenhængen mellem vækstraterne $(1+r_f)=(1+r_h)^a$:
Det er oplyst, at $r_h = 15\ \% = 0,15$.
$r_f = (1+0.15)^{1.28131459885991} - 1 = 0.196115254$
Dvs. at belastningsevnen øges med $\underline{\underline{19,6\ \%}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 9: $f(x) = \ln\left(x^2+5\right) + 0,5 \cdot x + 1$

a) I Geogebra indtegnes grafen, og man kan finde skæringspunktet ved at vælge 'Punkt' --> 'Skæringsværktøj' hvorefter grafen og 1. aksen markeres.



Funktion
$f(x) = \ln\left(x^2+5\right) + 0.5\,x + 1$
Punkt
A = (-12.01, 0)

Dvs. førstekoordinaten er grafisk bestemt til -12,01. Men man kan også lade Maple finde stedet ved at udnytte, at $f(x) = 0$, når grafen skærer 1. aksen i x:

$fsolve\left(0 = \ln\left(x^2+5\right) + 0.5 \cdot x + 1\right) = -12.01164105$

Dvs. førstekoordinaten til grafens skæringspunkt er <u>-12,01164105</u>

b) Arealet af området M, der ligger i 2. kvadrat, kan beregnes som det bestemme integral med nedre grænse -12,01164 og øvre grænse 0:

$f(x) := \ln\left(x^2+5\right) + 0.5 \cdot x + 1 :$

$A_M = \int_{-12.01164105}^{0} f(x)\,dx = 18.24830902$

Dvs. at arealet af M er <u>18, 24830902</u>

Opgave 10: a) Nulhypotesen er: Der er ikke forskel på, hvilke opholdssteder de to ålearter foretrækker. (Denne nulhypotese er ækvivalent med at sige, at ålenes opholdssteder er uafhængige af ålenes art).

with(*Gym*) :

Stikprøvens værdier indskrives i matricen A:

$$A := \begin{bmatrix} 127 & 99 & 264 \\ 116 & 67 & 161 \end{bmatrix} :$$

Maple sættes til at udregne en forventet tabel med udgangspunkt i nulhypotesen.

$$forventet(A) = \begin{bmatrix} 142.77 & 97.530 & 249.70 \\ 100.23 & 68.470 & 175.30 \end{bmatrix}$$

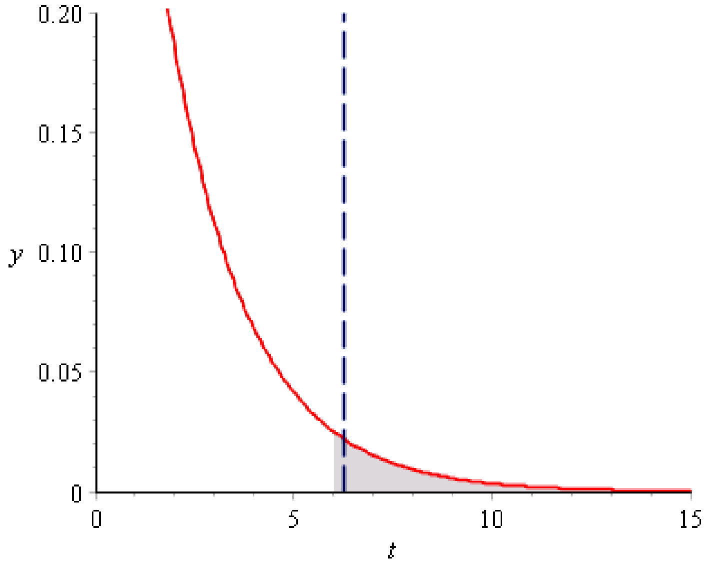
Dvs. at den forventede tabel er:

	Græs	*Sand*	*Mellemting*
G. moringa	143	98	250
G. vicinus	100	68	175

b) Nulhypotesen undersøges ved:

χ^2-teststørrelse = 6.2621
Frihedsgrader = 2
Kritisk værdi = 5.9915
p-værdi = 0.043671

$ChiKvadratUtest(A, level = 0.05) =$



Da $p = 0,043671 < 0,05$ må *nulhypotesen forkastes*. Dvs. at der er signifikant forskel på ålenes opholdssteder.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 11: a) Når x = 4, kender man længderne af de to kateter i den retvinklede trekant ABC, og dermed kan hypotenusen beregnes ved Pythagoras:

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2} = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17} \approx 4{,}123105626$$

Da siderne måles i enheden meter, har man $|AB| = \underline{\underline{4{,}12m}}$

Når man nu kender $|AB|$, har man alle tre sidelængder i trekant ABD, og dermed kan en vinkel bestemmes med en cosinusrelation:

$$\cos(v) = \frac{|AD|^2 + |BD|^2 - |AB|^2}{2 \cdot |AD| \cdot |BD|}$$

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{3^2 + 2^2 - \sqrt{17}^2}{2 \cdot 3 \cdot 2}\right) = \underline{\underline{109{,}47122063449°}}$$

b) Arealet af den retvinklede trekant ABC kan bestemmes ved $T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$, hvor den ene katete fungerer som højde og den anden som grundlinje, mens arealet af den skævvinklede trekant kan bestemmes med ½-appelsinformlen. Man får så:

$$A = T_{ret} + T_{skæv} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g + \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |BD| \cdot \sin(v) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \sin(109{,}47122°) = 4{,}8284271247462$$

Dvs. arealet af området er $\underline{4{,}83\text{m}^2}$

c) $T(x) = \frac{1}{4} \cdot x \cdot \sqrt{24 - x^2} + \frac{1}{2} \cdot x \quad ; \quad \sqrt{8} < x < \sqrt{24}$

For at finde den x-værdi, der giver sandkassen det størst mulige areal, defineres funktionen først, hvorefter man med de afledede funktion finder mulige ekstremumssteder og med den anden afledede afgør, hvilken slags sted, der er tale om:

$T(x) := \frac{1}{4} \cdot x \cdot \sqrt{24 - x^2} + \frac{1}{2} \cdot x :$

$solve\left(\left[T'(x) = 0, \sqrt{8} < x < \sqrt{24}\right]\right) = \{x = \sqrt{15}\}$

$T''(\sqrt{15.}) = -1.506160190 < 0$

Da den anden afledede er negativ, er der maksimum, når $x = \sqrt{15.} = 3.872983346$

Dvs. at sandkassen bliver størst mulig, når $\underline{\underline{x = 3{,}87\,m}}$

.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 12: Stedvektorerne for de opgivne punkter defineres i Maple, så man kan regne videre med dem:

$with(Gym):$

$\overrightarrow{OA} := \langle 33, 0, 15\rangle:$

$\overrightarrow{OB} := \langle 33, 35, 15\rangle:$

$\overrightarrow{OC} := \langle 22, 35, 18\rangle:$

$\overrightarrow{OD} := \langle 22, 0, 18\rangle:$

For at kunne bestemme en ligning for en plan, skal man have en normalvektor for planen og et punkt, som planen går igennem. Man har 4 punkter at vælge imellem, men der mangler stadig en normalvektor. For at finde en normalvektor bestemmes først to vektorer, der udspænder planen, hvorefter disse krydses:

$$\overrightarrow{AD} := \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} -11 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} := \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 35 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} 105 \\ 0 \\ 385 \end{bmatrix}$$

Denne vektor kunne godt anvendes som normalvektor, men det undersøges, om man kan finde en kortere vektor parallel med denne:

$gcd(105, 385) = 35$

Dvs. som normalvektor vælges:

$$\overrightarrow{n_\alpha} := \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}}{35} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Med punktet A som udgangspunkt er ligningen for planen α så:

$$3\cdot(x-33) + 0\cdot(y-0) + 11\cdot(z-15) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{3x + 11z - 264 = 0}}$$

b) En normalvektor for planen β givet ved ligningen $-210x + 770z - 9240 = 0$ aflæses ud fra ligningen til:

$\overrightarrow{n_\beta} := \langle -210, 0, 770\rangle:$

En vinkel mellem de to normalvektorer - og dermed mellem planerne - bestemmes ved formlen $\cos(v) = \dfrac{\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta}}{|\overrightarrow{n_\alpha}| \cdot |\overrightarrow{n_\beta}|}$:

$$v = invCos\left(\frac{\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta}}{\left\|\overrightarrow{n_\alpha}\right\|_2 \cdot \left\|\overrightarrow{n_\beta}\right\|_2}\right) = 30.51023740$$

Dette er den spidse vinkel mellem planerne, så den stumpe vinkel er:

$$v_{stump} = 180^o - 30,51023740^o = \underline{\underline{149,48976260^o}}$$

c) Firkanten ABCD er et parallelogram netop hvis $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ og $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$:
Man kender allerede fra tidligere to af vektorerne, og de to andre bestemmes nu:

$$\overrightarrow{BC} := \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} -11 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ Og dermed gælder } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{DC} := \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \begin{bmatrix} 0 \\ 35 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Og dermed gælder } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}:$$

Det er dermed vist, at der er tale om et parallelogram.

Arealet kan beregnes som længden af krydsproduktet af to vektorer, der udspænder parallelogrammet, dvs.:

$$A = \left|\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|\right|_2 = 35\sqrt{130} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 399.0613988$$

Da der måles i enheden dm, er arealet af tagfladen $\underline{\underline{399,06\ dm^2}}$

Opgave 13: $f(x) = 3 \cdot \sin(2x + 0,7) + 1 \quad ; \quad P(3, f(3))$

a) For at bestemme en ligning for tangenten til grafen for f i P skal man kende røringspunktets andenkoordinat samt tangentens hældning.
Røringspunktets andenkoordinat bestemmes først:

$with(Gym):$
$f(x) := 3 \cdot \sin(2 \cdot x + 0.7) + 1:$
$f(3) = 2.214549762$
Tangentens hældning bestemmes:
$f'(3) = 5.486298889$
Tangentens ligning bestemmes ved $y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$:
$solve(y - 2.214549762 = 5.486298889 \cdot (x - 3), y) = 5.486298889\ x - 14.24434691$
Dvs. at tangentens ligning er $\underline{\underline{y = 5,486298889 \cdot x - 14,24434691}}$

b) Da sinusfunktionen højst kan antage værdien 1 og mindst værdien -1, får man:

$$f_{\max} = 3 \cdot 1 + 1 = \underline{\underline{4}}$$

$$f_{\min} = 3 \cdot (-1) + 1 = -3 + 1 = \underline{\underline{-2}}$$

Perioden T er den værdi, der skal lægges til x-værdien, for at sinusfunktionen har foretaget én bølge. Dette sker, når argumentet (udtrykket inde i parentesen) øges med 2π.
Dvs. at:

$$2 \cdot (x + T) + 0,7 = 2x + 0,7 + 2 \cdot \pi \Leftrightarrow 2x + 2T + 0,7 = 2x + 0,7 + 2 \cdot \pi \Leftrightarrow 2T = 2 \cdot \pi \Leftrightarrow \underline{\underline{T = \pi}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>*Opgave 14:*</u> $\frac{dy}{dt} = a \cdot (20 + 5t - y)$

a) Da det vides, at temperaturen i beholderen til t = 0 er 20°C, kan differentialligningen løses, når a sættes til 0,07:

restart

$$dsolve\left(\left[\frac{dy}{dt} = 0.07 \cdot (20 + 5 \cdot t - y), y(0) = 20\right]\right) = y(t) = 5\,t - \frac{360}{7} + \frac{500}{7}\,e^{-\frac{7}{100}\,t}$$

Dvs. at løsningen er $\underline{\underline{y(t) = 5 \cdot t - \frac{360}{7} + \frac{500}{7} \cdot e^{-\frac{7}{100} \cdot t}}}$

$$y(t) := 5 \cdot t - \frac{360}{7} + \frac{500}{7} \cdot e^{-\frac{7}{100} \cdot t}:$$

$y(16.) = 51.87712818$

Dvs. at efter 16 minutter giver modellen en temperatur på $\underline{\underline{51,877^{o}}}$

b) Konstanten a kan bestemmes, når man kender temperaturen efter 16 minutter:

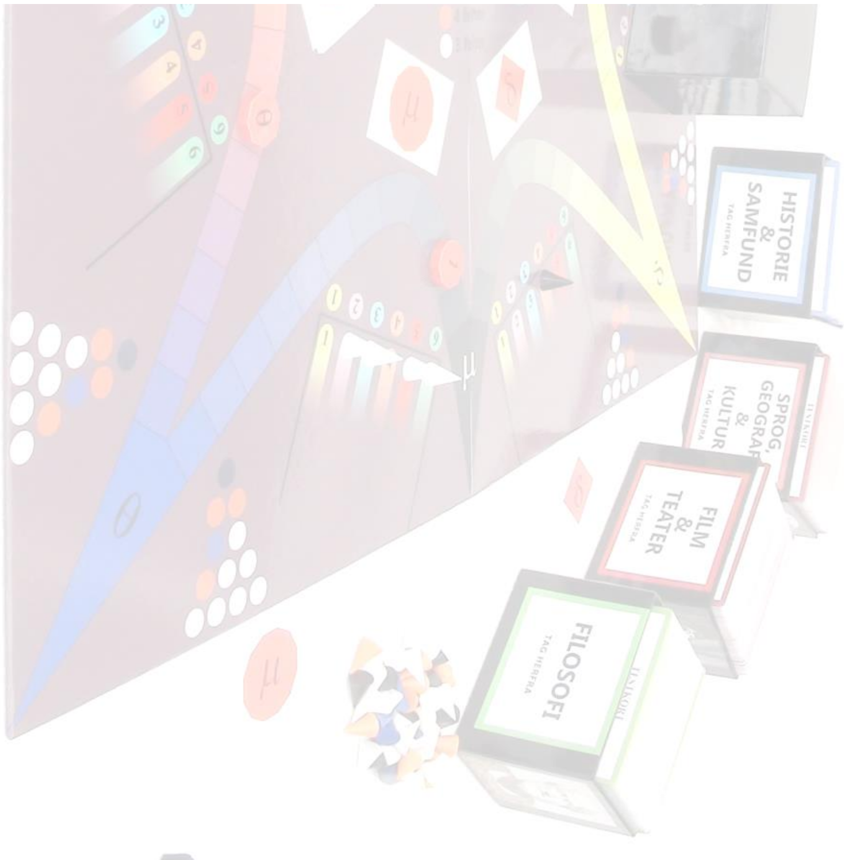
Først løses differentialligningen med a som ukendt:

$$dsolve\left(\left[\frac{dy}{dt} = a \cdot (20 + 5 \cdot t - y), y(0) = 20\right]\right) = y(t) = 5\,t + 20 - \frac{5}{a} + \frac{5\,e^{-a\,t}}{a}$$

Nu kan konstanten a bestemmes, da man kender temperaturen 50 grader efter 16 minutter.

$$fsolve\left(50 = 5 \cdot 16 + 20 - \frac{5}{a} + \frac{5 \cdot e^{-a \cdot 16}}{a}\right) = 0.06419813173$$

Dvs. at værdien af a er: $\underline{\underline{a = 0,06419813173}}$



14. august 2014

14. august 2014: Delprøven UDEN hjælpemidler

<u>*Opgave 1:*</u> $x^2+2x-15=0$

Da koefficienten for andengradsleddet er 1 $(a=1)$, kan man løse andengradsligningen ved først at faktorisere, hvis man kan finde to tal, hvis produkt er -15 og sum er 2. Dette gælder for 5 og -3, så man har:

$$x^2+2x-15=0 \Leftrightarrow (x+5)\cdot(x-3)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=-5 \ \vee \ x=3}}$$

Man kunne også have anvendt diskriminantmetoden:

$$d=b^2-4ac=2^2-4\cdot 1\cdot(-15)=4+60=64>0 \text{ dvs. 2 løsninger}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{d}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{64}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm 8}{2}=\begin{cases}3\\-5\end{cases} \quad \text{Dvs. } \underline{\underline{x=-5 \ \vee \ x=3}}$$

<u>*Opgave 2:*</u> $f(x)=-2,5\cdot x+125$

Det er en lineær model, og hældningen -2,5 fortæller derfor, at <u>for hver krone prisen sættes op</u> (x-værdien øges med 1), <u>vil antallet af solgte is falde med 2,5</u> (y-værdiens tilvækst er -2,5).

Ingen solgte is svarer til $f(x)=0$, så for at finde den pris, der ikke giver nogen solgte is, skal man løse følgende ligning:

$$0=-2,5\cdot x+125 \Leftrightarrow$$

$$2,5\cdot x=125 \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{125}{2,5}=50$$

Dvs. at <u>hvis prisen sættes til 50 kroner, vil der ikke længere sælges nogle is.</u>

<u>*Opgave 3:*</u> Da trekant *ABC* er retvinklet, kan man bruge Pythagoras til at finde længden af siden BC.

$$|AC|^2+|BC|^2=|AB|^2$$

$$4^2+|BC|^2=5^2 \Leftrightarrow |BC|^2=25-16=9 \Leftrightarrow \underline{\underline{|BC|=3}}$$

(Ved sidste biimplikation er det underforstået, at længden nødvendigvis må være positiv)

Da de to trekanter er ensvinklede, er forholdene mellem ensliggende sider ens, så man har:

$$\frac{|DE|}{|AB|}=\frac{|DF|}{|AC|} \Leftrightarrow |DE|=\frac{|DF|}{|AC|}\cdot|AB|$$

$$|DE|=\frac{6}{4}\cdot 5=\frac{3}{2}\cdot 5=\underline{\underline{\frac{15}{2}}}$$

Opgave 4: For at kunne aflæse cirklens centrum (a,b) og radius *r*, skal ligningen omskrives til formen

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Man får:

$$x^2-4x+y^2+6y-3=0 \;\Leftrightarrow\; (x-2)^2-2^2+(y+3)^2-3^2-3=0 \;\Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2=4+9+3=16=4^2$$

$$Dvs. \quad \underline{\underline{C=(2,-3)}} \;\; og \;\; \underline{\underline{r=4}}$$

Opgave 5: $f(x)=x\cdot e^x \qquad \dfrac{dy}{dx}=y+e^x$

Det undersøges om funktionen er en løsning til differentialligning ved at indsætte funktionsudtrykket samt udtrykket for den afledede funktion i differentialligningen og se, om det giver en identitet:

Den afledede funktion bestemmes ved produktreglen: $f'(x)=1\cdot e^x+x\cdot e^x=e^x+x\cdot e^x$

Indsættelse i differentialligningen giver:

$$e^x+x\cdot e^x=x\cdot e^x+e^x$$

Da udtrykkene på begge sider er ens, er det en identitet,
dvs. <u>funktionen er en løsning til differentialligningen.</u>

Opgave 6: $\displaystyle\int_2^3 \frac{3x^2}{x^3-7}\,dx$

Man kan bestemme værdien af dette bestemte integral ved at integrere med hensyn til x^3-7:

$$\int_2^3 \frac{3x^2}{x^3-7}\,dx=\int_2^3 \frac{3x^2}{x^3-7}\cdot\frac{d\left(x^3-7\right)}{\left(x^3-7\right)'}=\int_2^3 \frac{3x^2}{x^3-7}\cdot\frac{d\left(x^3-7\right)}{3x^2}=\int_2^3 \frac{1}{x^3-7}\,d\left(x^3-7\right)=$$

$$\left[\ln\left|x^3-7\right|\right]_2^3=\ln\left|3^3-7\right|-\ln\left|2^3-7\right|=\ln(20)-\ln(1)=\underline{\underline{\ln(20)}}$$

Man kan også udregne det ved at lave substitutionen:

$$t=x^3-7$$

$$\frac{dt}{dx}=3x^2$$

$$dt=3x^2\cdot dx$$

$$x=2:\; t=2^3-7=1$$

$$x=3:\; t=3^3-7=20$$

$$\int_2^3 \frac{3x^2}{x^3-7}\,dx=\int_1^{20}\frac{1}{t}\,dt=\left[\ln|t|\right]_1^{20}=\ln(20)-\ln(1)=\underline{\underline{\ln(20)}}$$

14. august 2014: Delprøven MED hjælpemidler

<u>*Opgave 7:*</u> $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

a) Vinklen mellem de to vektorer bestemmes ved formlen $\cos(v) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Udregninger foretages i Maple:

$restart$

$with(Gym):$

$a := \langle -1, 3 \rangle :$

$b := \langle 2, 5 \rangle :$

$$Cos(v) = \frac{a \cdot b}{len(a) \cdot len(b)} \xrightarrow{\text{solve for v}} [[v = 40.23635831]]$$

Dvs. at vinklen mellem vektorerne er $\underline{\underline{40,23635831°}}$

b) Projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ beregnes ved $\vec{a_b} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$

$$\frac{a \cdot b}{(len(b))^2} \cdot b = \begin{bmatrix} \frac{26}{29} \\ \frac{65}{29} \end{bmatrix}$$

Dvs. at $\underline{\underline{\vec{a_b} = \begin{pmatrix} \frac{26}{29} \\ \frac{65}{29} \end{pmatrix}}}$

Opgave 8: a) Modellen er $d = b \cdot a^h$, hvor *h* er den uafhængige variabel, og da den står som eksponent, er modellen en eksponentiel udvikling.

Da man har en hel tabel med værdier, skal der anvendes regression. Dette gøres i Maple:

```
restart
with(Gym) :
Højde := [0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5] :
Diameter := [20.5, 21.0, 21.4, 22.0, 22.3, 23.0, 23.5] :
d(h) := ExpReg(Højde, Diameter, h) :
```

$d(h) = 20.0385232881545\ 1.04624201247211^h$

Dvs. at $\underline{\underline{b = 20,03852}}$ og $\underline{\underline{a = 1,046242}}$

b) Hvis modellen holder, vil diameter i højden 6km (*h=6)* være:

$d(6) = 26.2820142240095$

Dvs. diameteren vil være $\underline{\underline{26,3\ m}}$

c) Tallet *a* er fremskrivningsfaktoren, der er forbundet med vækstraten ved $a = 1 + r$, dvs.:

$r = a - 1 = 1,046242 - 1 = 0,046242 = 4,6242\%$

Tallet *a* fortæller altså, at <u>diameteren vokser med 4,6% for hver km vejrballonen stiger op</u>.

En forøgelse på 50% svarer til en fremskrivningsfaktor på 1,5. Så man har:

$$\left.\begin{aligned} d_{start} &= b \cdot a^{h_{start}} \\ 1,5 \cdot d_{start} &= b \cdot a^{h_{start}+\Delta h} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1,5 \cdot d_{start}}{d_{start}} = \frac{b \cdot a^{h_{start}+\Delta h}}{b \cdot a^{h_{start}}} \Leftrightarrow 1,5 = a^{\Delta h}$$

Hermed bliver:

$$\ln(1,5) = \Delta h \cdot \ln(a) \Leftrightarrow \Delta h = \frac{\ln(1,5)}{\ln(1,04624201)} = 8,969533132$$

Dvs. højden skal øges med <u>9,0km</u>

Opgave 9: $f(x)=\ln(x)-2x+5 \; ; \; x>0$

a) For at kunne bestemme tangentens ligning skal man kende røringspunktets koordinater og tangentens hældning.

Røringspunktets andenkoordinat bestemmes:

$$f(2)=\ln(2)-2\cdot 2+5=\ln(2)+1\approx 1,6931472$$

Hældningen bestemmes ved først at finde den afledede funktion ved ledvis differentiation:

$$f'(x)=\frac{1}{x}-2$$

$$f'(2)=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$$

Tangentens ligning bliver så: $y-(\ln(2)+1)=-\frac{3}{2}\cdot(x-2) \Leftrightarrow \underline{\underline{y=-\frac{3}{2}\cdot x+4+\ln(2)}}$

b) Først bestemmes nulpunkter for den afledede funktion:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 0=\frac{1}{x}-2 \Leftrightarrow 2=\frac{1}{x} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

Fortegnet for den anden afledede af f i $x=\frac{1}{2}$ bestemmes:

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=-4<0$$

Da den anden afledede er negativ, er der lokalt maksimum i $x=\frac{1}{2}$.

Og da definitionsmængden kun består af de positive tal, har man:

<u>f er voksende i intervallet</u> $\underline{\underline{\left]0;\frac{1}{2}\right]}}$ <u>og aftagende i intervallet</u> $\underline{\underline{\left[\frac{1}{2};\infty\right[}}$

Opgave 10: $C(1,2,-1) \quad P(1,0,5) \qquad \alpha: \; y+6z-40=0$

a) Ligningen for kuglen kan opskrives, når man kender radius og centrums koordinatsæt. Centrum kendes allerede, og radius svarer til afstanden mellem C og P:

$$r=|CP|=\sqrt{(1-1)^2+(0-2)^2+(5-(-1))^2}=\sqrt{0+4+36}=\sqrt{40}$$

Da kuglens ligning er $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$, har man:

$$\underline{\underline{(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=40}}$$

b) Afstanden fra centrum til planen bestemmes:

$$dist(C,\alpha)=\frac{|0\cdot 1+1\cdot 2+6\cdot(-1)-40|}{\sqrt{0^2+1^2+6^2}}=\frac{|-44|}{\sqrt{37}}=\frac{44}{\sqrt{37}}\neq\sqrt{40}=r$$

Da afstanden fra centrum til planen ikke svarer til radius, er det <u>ikke en tangentplan.</u>

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 11: a) $y = -0,034 \cdot \left(1 + a^2\right) \cdot x^2 + a \cdot x + 2,1$

I Maple gemmes ligningen, og den plottes i intervallet $0 \le x \le 10$

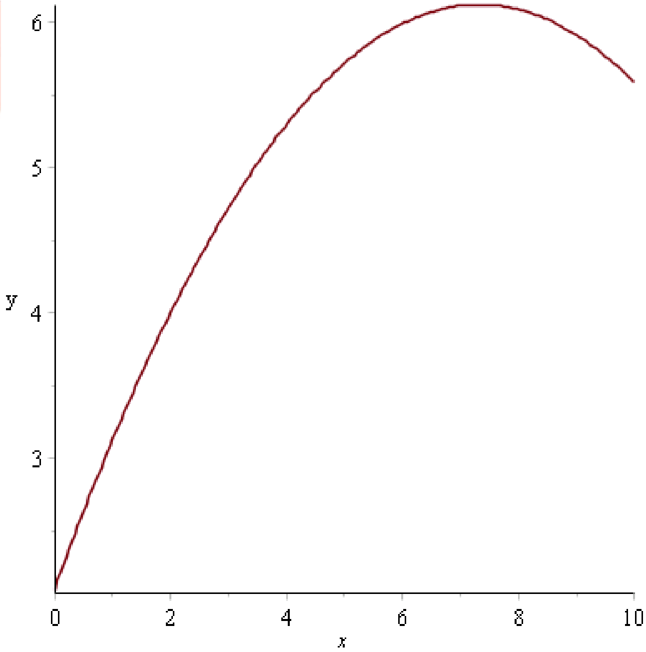
$restart$

$with(Gym):$

$y := -0.034 \cdot \left(1 + a^2\right) \cdot x^2 + a \cdot x + 2.1:$

$a := 1.1:$

$plot(y, x = 0..10)$



b) Hvis bolden skal gå midt gennem kurven, skal punktet $(10;3,05)$ ligge på kurven:

$$3.05 = -0.034 \cdot \left(1 + a^2\right) \cdot 10^2 + a \cdot 10 + 2.1 \xrightarrow{\text{solve for a}} [[a = 2.410385018], [a = 0.5307914524]]$$

Dvs. at $a = \underline{\underline{0,5308}} \vee a = \underline{\underline{2,4104}}$

Opgave 12: a) Nulhypotesen er, at terningen er ærlig.

Da der er 6 udfald med lige store sandsynlighed, er sandsynligheden for et bestemt øjeantal $\frac{1}{6}$.

Med 1000 kast skulle et bestemt øjeantal altså fremkomme $1000 \cdot \frac{1}{6} = 166,\overline{6}$ gange.

Den forventede tabel på baggrund af nulhypotesen er derfor:

Antal øjne	1	2	3	4	5	6
Hyppighed	167	167	167	167	167	167

b) Man undersøger fordelingen med et χ^2-Goodness of Fit-test:

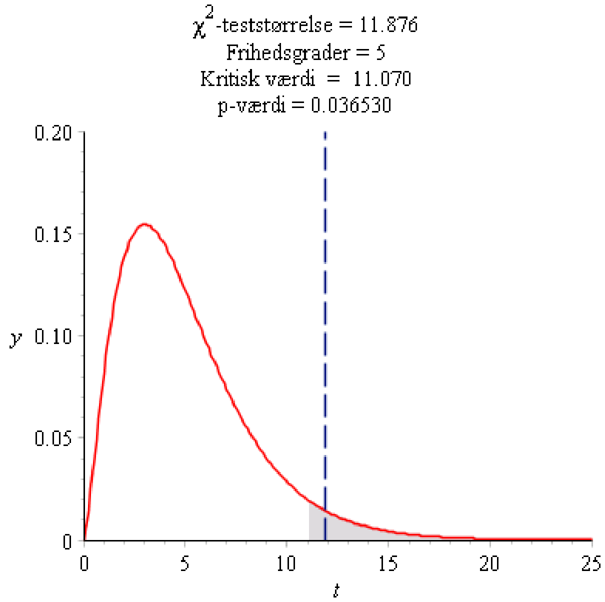
$restart$

$with(Gym):$

$observeret := [172, 168, 150, 188, 185, 137]:$

$forv := [166.67, 166.67, 166.67, 166.67, 166.67, 166.67]:$

$ChiKvadratGOFtest(observeret, forv)$



Da $p = 0,0365 < 0,05$, er der signifikant forskel på den observerede og den forventede tabel, og dermed må *nulhypotesen forkastes*.

Opgave 13: $f(x) = -0{,}00105 \cdot x^3 + 0{,}0467 \cdot x^2 - 0{,}452 \cdot x + 4{,}78$

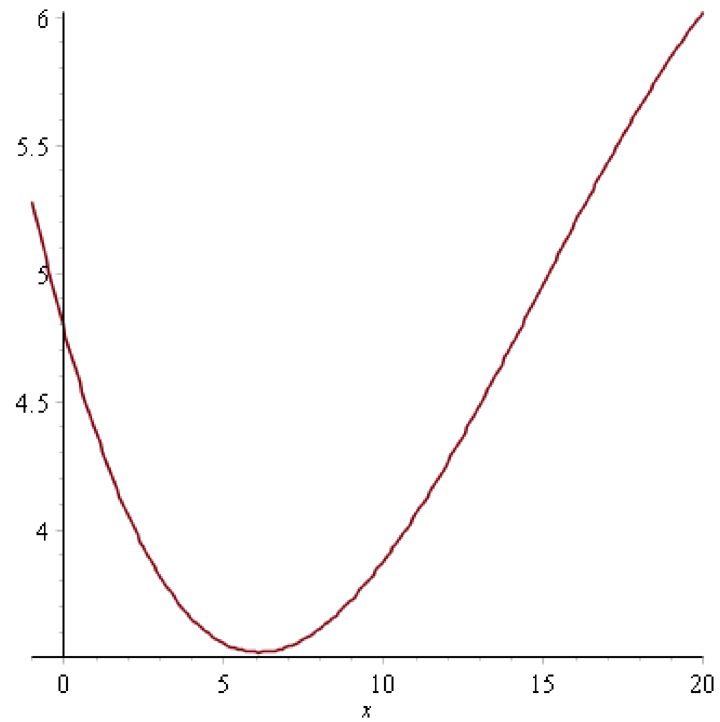
restart

with(*Gym*) :

$f(x) := -0.00105 \cdot x^3 + 0.0467 \cdot x^2 - 0.452 \cdot x + 4.78$:

Grafen plottes for at se punktmængden M:

plot($f(x)$, $x = -1\,..20$)



Da grafen ikke kommer under *y*-aksen i det pågældende interval, bestemmes arealet ved:

$$A_M = \int_0^{20} f(x)\, dx = 87.73333333$$

Dvs. $A_M = \underline{\underline{87{,}73}}$

b) Rumfanget af omdrejningslegemet beregnes ved:

$$V_M = \pi \cdot \int_0^{20} f(x)^2\, dx = 396.6789333\,\pi \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 1246.203623$$

Dvs. vasens rumfang er $\underline{\underline{1246{,}2cm^3}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>*Opgave 14:*</u> $\frac{dN}{dt} = a \cdot N \cdot (90 - N)$

a) Da tiden *t* regnes i antal år efter 1996, har man $N(0) = 3$ og $N(11) = 43$.

Differentialligningen løses med betingelserne:

$restart$

$with(Gym):$

$$dsolve\left(\left[\frac{d}{dt}N(t) = a \cdot N(t) \cdot (90 - N(t)), N(0) = 3\right]\right)$$

$$N(t) = \frac{90}{1 + 29\,e^{-90\,a\,t}}$$

Ved også at anvende betingelsen $N(11) = 43$ får man:

$$fsolve\left(43 = \frac{90}{1 + 29\,e^{-90 \cdot a \cdot 11}}, a\right) = 0.003311462974$$

Da $-90 \cdot 0.003311462974 = -0.2980316677$ har man:

$$\underline{\underline{N(t) = \frac{90}{1 + 29\,e^{-0,2980316677 \cdot t}}}}$$

b) I logistisk vækst angiver tælleren (der er aflæst som tallet i parentesen i differentialligningen) den øvre grænse for funktionsværdien.
Dvs. den øvre grænse for antallet af fødedygtige ulvepar er <u>90</u>

Da det er logistisk vækst, ved man, at væksthastigheden er størst, når halvdelen af den øvre grænse er nået, dvs. når der er 45 ulvepar.
Så man udregner:

$$N(t) := \frac{90}{1 + 29\,e^{-0.2980316677 \cdot t}}:$$

$$N(t) = 45 \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t = 11.29844978]]$$

Dette svarer til år 1996+11,298 = 2007,298, dvs. væksthastigheden er størst i år $\underline{\underline{2007}}$

Man kunne også have løst det ved at finde det eller de steder, hvor den anden afledede er 0, og hvor den tredje afledede er negativ (svarende til lokalt maksimum for den første afledede funktion, der angiver væksthastigheden):

$$N''(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t = 11.29844978]]$$

$$N'''(11.29844978) = -0.2978103319 < 0$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 15: $|AB|=6$; $|BC|=5$; $|AC|=7$

a) Man kender alle tre sider i trekanten, så vinkler man bestemmes med cosinusrelationerne:

$$\cos A=\frac{|AC|^2+|AB|^2-|BC|^2}{2\cdot|AC|\cdot|AB|}$$

$$A=\cos^{-1}\left(\frac{7^2+6^2-5^2}{2\cdot 7\cdot 6}\right)=\underline{\underline{44{,}41530859°}}$$

b) Arealet af trekant *ADE* kan udregnes med ½-appelsinformlen:

$$T_{ADE}=\frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|AE|\cdot\sin(A)=\frac{1}{2}\cdot x\cdot(6-y)\cdot\sin A$$

$$\underline{\underline{T_{ADE}(x)=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\left(6-\frac{-7x^2+60x-252}{10x-84}\right)\cdot\sin(44{,}41530859°)}}$$

For at bestemme den værdi for *x*, der giver trekant *ADE* det største areal, findes først nulpunkter for den afledede funktion (Maple anvendes):

$with(Gym):$

$$T(x):=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\left(6-\frac{-7x^2+60x-252}{10x-84}\right)\cdot Sin(44.41530859):$$

$solve(T'(x)=0)=4.257146384, 11.44587185, -3.103018238$

Af disse tre steder er det kun det første, der ligger i definitionsmængden $(0<x<6)$.
Ved hjælp af værdien af den anden afledede funktion afgøres det, om der er tale om et maksimum eller et minimum (eller om der er vandret vendetangent):

$T''(4.257146384)=-1.510239661<0.$

Da den anden afledede er negativ det pågældende sted, er det er lokalt maksimumssted, og da der ikke er andre ekstremumssteder i intervallet, har man:

Trekant *ADE* får det største areal, når $\underline{\underline{x=4,257146384}}$

5. december 2014: Delprøven UDEN hjælpemidler

<u>*Opgave 1:*</u> $x^2+5x-14=0$

Det er en andengradsligning, og da andengradsleddets koefficient er 1, kan man faktorisere ved at finde to tal, hvis produkt er -14 og sum er 5, dvs. 7 og -2:

$$x^2+5x-14=0 \Leftrightarrow (x+7)\cdot(x-2)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=-7 \ \vee \ x=2}}$$

Man kan også anvende diskriminantmetoden:

$d=b^2-4ac=5^2-4\cdot1\cdot(-14)=25+56=81>0 \ \ dvs.\,2$ løsninger.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{d}}{2\cdot a}=\frac{-5\pm\sqrt{81}}{2\cdot1}=\frac{-5\pm9}{2}=\begin{cases}2\\-7\end{cases}$$

<u>*Opgave 2:*</u> Lad *A* være arealet af havisen målt i millioner km^2.

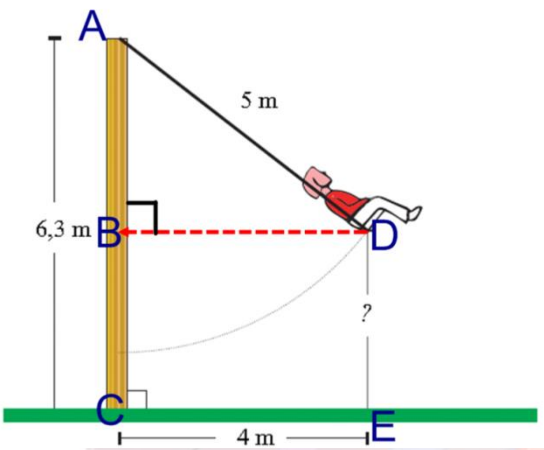
Lad *t* være antal år efter 2008.

Da arealet aftager med en fast procentdel, skal modellen være en aftagende eksponentiel udvikling, og da $r=-1{,}3\%$, er fremskrivningsfaktoren $a=1+r=1-0{,}013=0{,}987$.

Med begyndelsesværdien 6 fås altså:

$$\underline{\underline{A(t)=6\cdot0{,}987^t}}$$

<u>*Opgave 3:*</u> På figuren skal man have konstrueret en trekant, så man kan regne på situationen.



Punktet D (gyngen) projiceres ind på gyngestativet i punktet B, og punkterne A, B og D danner så en retvinklet trekant med den rette vinkel B.

Da $|BD|=|CE|=4m$, giver Pythagoras:

$$|AB|^2+|BD|^2=|AD|^2$$

$$|AB|=\sqrt{|AD|^2-|BD|^2}=\sqrt{(5m)^2-(4m)^2}=\sqrt{25m^2-15m^2}=\sqrt{9m^2}=3m$$

Man skal bestemme gyngens højde over jorden $\left(\text{dvs. } |DE|\right)$, og man har så:

$$|DE|=|BC|=|AC|-|AB|=6{,}3m-3m=\underline{\underline{3{,}3m}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>Opgave 4:</u> $f(x) = \frac{1}{x} + 6x^2 \quad , \quad x > 0 \qquad P(1,8)$

Først bestemmes ved ledvis integration den form samtlige stamfunktioner er på:

$F(x) = \ln|x| + 2x^3 + k = \ln(x) + 2x^3 + k$ (numerisktegnet fjernes, da $x > 0$)

Punktets koordinater indsættes for at finde k:

$8 = \ln(1) + 2\cdot 1^3 + k \iff 8 = 0 + 2 + k \iff k = 6$

$Dvs.\ \ \underline{\underline{F(x) = \ln(x) + 2x^3 + 6}}$

<u>Opgave 5:</u> $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+1}{y-1} \qquad P(2,3)$

For at bestemme en ligning for tangenten til grafen for f i P, skal man kende tangentens hældning samt røringspunktets koordinater. Da man allerede kender P's koordinater, mangler man kun hældningen, og den kan bestemmes ved at indsætte punktets koordinater i differentialligningen, da $\frac{dy}{dx}$ netop angiver funktionens væksthastighed - dvs. tangenthældningen - det pågældende sted.

$\frac{dy}{dx} = \frac{2^2+1}{3-1} = \frac{5}{2}$

Så tangentens ligning er:

$y - y_0 = a\cdot(x - x_0)$

$y - 3 = \frac{5}{2}\cdot(x-2) \iff \underline{\underline{y = \frac{5}{2}\cdot x - 2}}$

<u>Opgave 6</u>: $f(x) = -x^3 + 6x^2 + x$

Man skal finde det sted, hvor $f'(x)$ er maksimal, så først bestemmes den afledede funktion ved ledvis differentiation:

$f'(x) = -3x^2 + 12x + 1$

Her kan man bemærke, at grafen for den afledede funktion er en parabel med benene pegende nedad, så man skal altså bestemme førstekoordinaten for toppunktet:

$x_{max} = \frac{-b}{2\cdot a} = \frac{-12}{2\cdot(-3)} = \frac{-12}{-6} = \underline{\underline{2}}$

Hvis man ikke opdager, at det er en parabel, kan man også anvende standardmetoden, hvor man dog skal bemærke, at det ikke er funktionen, men den afledede funktion, der skal være maksimal, og derfor skal man finde det sted, hvor den anden afledede er nul og den tredje afledede negativ.

Nulpunktet for den anden afledede bestemmes:

$f''(x) = -6x + 12$

$f''(x) = 0 \iff -6x + 12 = 0 \iff 6x = 12 \iff x = 2$

Det tjekkes, om fortegnet for den tredje afledede er negativ dette sted:

$f'''(x) = -6 \quad dvs.\ \ f'''(2) = -6 < 0$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

5. december 2014: Delprøven MED hjælpemidler

Opgave 7: Kvartilsættet kan aflæses direkte ud fra tabellen, da vægten af rejerne er angivet i en ordnet tabel. Der er 25 rejer (et ulige antal), så medianen er den 13. observation (den midterste observation). Der er nu 12 observationer tilbage i de to halvdele, og da det er et lige antal, vil den nedre kvartil være gennemsnittet af 6. og 7. observation, mens den øvre kvartil vil være gennemsnittet af 19. og 20. observation.

Man får altså:

$$\text{Nedre kvartil } = \frac{8+8}{2} = \underline{\underline{8}}$$

$$\text{Median} = \underline{\underline{15}}$$

$$\text{Øvre kvartil } = \frac{22+22}{2} = \underline{\underline{22}}$$

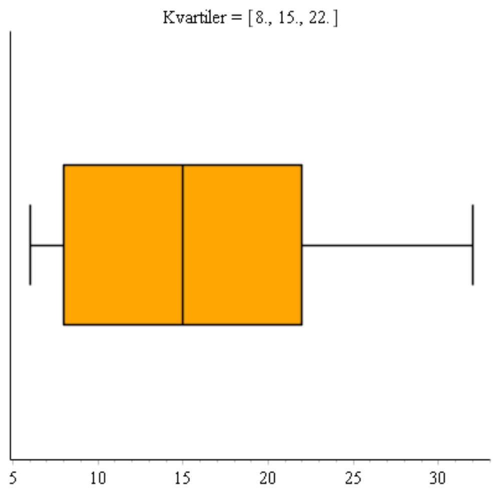
Boksplottet tegnes i Maple:

restart

with(*Gym*) :

rejer := [6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 10, 11, 11, 15, 15, 18, 19, 19, 21, 21, 22, 22, 25, 29, 30, 31, 32] :

boksplot(*rejer*)



Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 8: Cirkel med centrum i $C(1,-1)$ og radius 5.

a) Cirklens ligning $x^2-2x+y^2+2y-23=0$ omskrives til formen $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, hvor centrum og radius direkte kan aflæses:

$$x^2-2x+y^2+2y-23=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=23+1^2+1^2=25=5^2$$

Her kan centrums koordinater aflæses $C(a,b)=\underline{\underline{C(1,-1)}}$, og radius aflæses til $\underline{\underline{r=5}}$

b) $l: x-7y+17=0$

For at bestemme skæringspunkterne mellem linjen og cirklen, kan man isolere *x* i linjens ligning og indsætte den i cirklens ligning, hvorved man kan finde *y*-værdierne for de punkter, hvor linjen skærer cirklen. Ud fra *y*-værdierne kan man i linjens ligning efterfølgende bestemme de tilsvarende *x*-værdier.

Men alt dette kan også gøres i Maple, der kan løse de to ligninger med to ubekendte:

$$[x^2-2x+y^2+2y-23=0,\ x-7y+17=0] \xrightarrow{\text{solve (specified)}} \{x=-3, y=2\}, \{x=4, y=3\}$$

Dvs. koordinatsættene til skæringspunkterne er:

$\underline{\underline{(-3, 2)}}$ og $\underline{\underline{(4, 3)}}$

Opgave 9: Modellen hedder $v=b\cdot T^a$, og da variablen *T* står som rod i en potens, er det en potensfunktion.

Da man kender en hel tabel af værdier, skal der laves regression, hvilket gøres i Maple:

a)

$with(Gym)$:

$Temperatur := [288, 298, 308, 318, 328, 338, 348, 358, 368]$:

$Hastighed := [340, 346, 352, 357, 363, 369, 374, 379, 385]$:

$v(T) := PowReg(Temperatur, Hastighed, T)$:

$v(T) = 19.6249553592375\ T^{0.503669739190326}$

Dvs. man kan aflæse:

$\underline{\underline{a=0,503669739}}$ og $\underline{\underline{b=19,624955359}}$

b) Når temperaturen i gassen er 250K, er $T=250$, så man får:

$v(250) = 316.649273752712$

Dvs. lydens hastighed i gassen er $\underline{\underline{316,65\ \frac{m}{s}}}$

c) Det er en potensfunktion, der har den karakteristiske egenskab, at når den uafhængige variabel ændres med en fast procentdel, vil den afhængige variabel ændres med en (anden) fast procentdel. Derfor giver spørgsmålet mening.

Man kan benytte følgende formel, der udtrykker netop dette:

$$(1+r_v)=(1+r_T)^a$$

$$1+r_v=(1+0.05)^{0.503669739190326} \xrightarrow{\text{solve for r\_\_v}} [[r_v=0.02487856200]]$$

Dvs. hastigheden ændrer sig med $\underline{\underline{2,49\ \%}}$

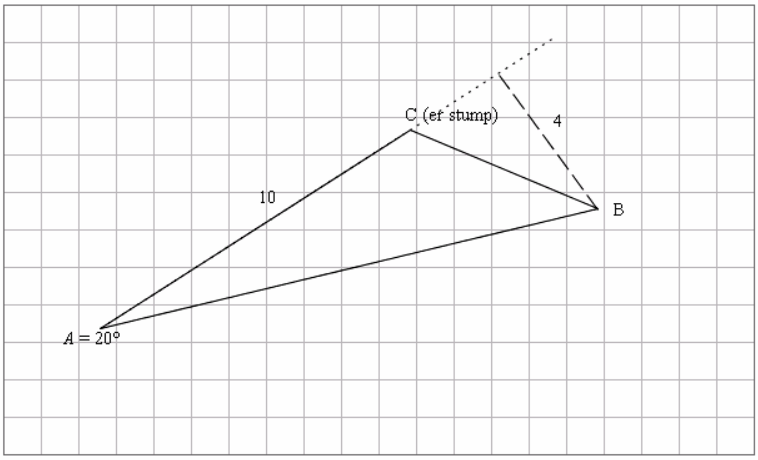
Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 10: Ud fra de angivne stykker i trekant ABC tegnes en skitse i Maple (med 'Insert' --> 'Canvas'):

restart

with(*Gym*) :

a)



Arealet af denne trekant kan beregnes meget nemt, da man kender længden af en grundlinje og den højde, der rammer på denne grundlinje. Så man har:

$$T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10 = \underline{\underline{20}}$$

b) Da man nu kender arealet af trekanten, kan $|AB|$ bestemmes ud fra ½-appelsinformlen:

$$T = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot Sin(A)$$

$$20 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot 10 \cdot Sin(20) \xrightarrow{\text{solve for AB}} [[AB = 11.69521760]]$$

Dvs. $\underline{\underline{|AB| = 11,695}}$

For at kunne bestemme vinkel C, skal man kende $|BC|$, da man så har alle tre sider og kan anvende cosinusrelationer. Man har dog så også et vinkel-side-par (A og BC), så man kan anvende sinusrelationerne.

Siden BC bestemmes med cosinusrelationerne:

$A := 20$:

$AC := 10$:

$AB := 11.69521760$:

$$Cos(A) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \xrightarrow{\text{solve for BC}} [[BC = 4.120669984], [BC = -4.120669984]]$$

Da det er en sidelængde, er det kun det positive resultat, der kan bruges:

$BC := 4.120669984$:

Så kan vinkel C bestemmes med cosinusrelationerne:

$$Cos(C) = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC} \xrightarrow{\text{solve for C}} [[C = 103.9001317]]$$

Dvs. $\underline{\underline{\angle C = 103,9001317°}}$

Hvis man anvender sinusrelationer skal man tage højde for, at vinkel C er stump:

$$intervalsolve\left(\frac{Sin(C)}{AB} = \frac{Sin(A)}{BC}, C = 90..180\right) = [103.9001313]$$

Opgave 11: $f(x) = \left(x^2 + 2x - 2\right) \cdot e^{-x}$

Monotoniforholdene bestemmes ved først at finde de steder, hvor der er lokalt maksimum, lokalt minimum eller vandret vendetangent, da det opdeler x-aksen i de områder, hvor funktionen er monoton.

For at finde disse steder bestemmes de steder, hvor den afledede funktion er nul, og fortegnet for den anden afledede funktion anvendes til at se, om det er maksimum, minimum eller vandret vendetangent:

a)

restart

with(Gym) :

$f(x) := \left(x^2 + 2x - 2\right) \cdot \mathrm{e}^{-x}$:

$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 2], [x = -2]]$

$f''(-2) = 4\,\mathrm{e}^2 > 0$ dvs. her er lokalt minimum.

$f''(2) = -4\,\mathrm{e}^{-2} < 0$ dvs. her lokalt maksimum.

Altså bliver monotoniforholdene:

$\underline{\underline{f \text{ er aftagende i intervallerne }]-\infty; -2] \text{ og } [2; \infty[}}$

$\underline{\underline{f \text{ er voksende i intervallet } [-2; 2]}}$

Opgave 12: $f(t) = 3,2 + 0,4 \cdot \sin(1,25 \cdot t) \quad ; \quad 0 \le t \le 5$

Det er en trigonometrisk funktion, så man skal huske at regne i radianer (dvs. ikke i grader).

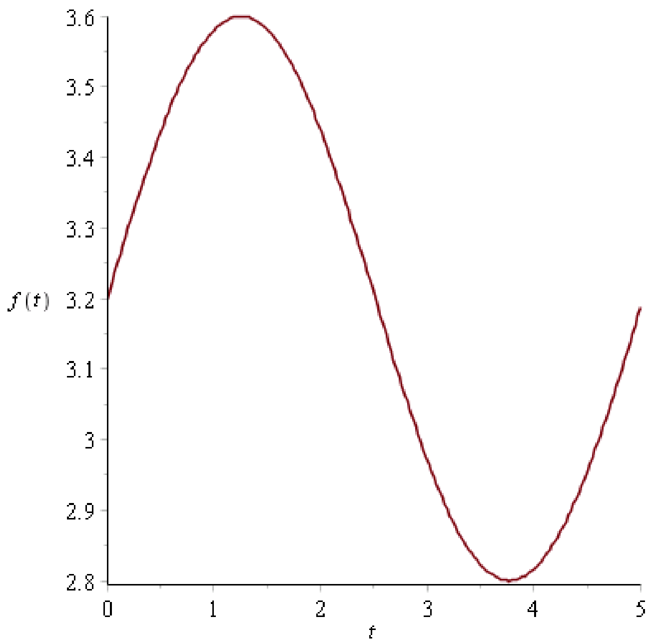
a)

$restart$

$with(Gym):$

$f(t) := 3.2 + 0.4 \cdot \sin(1.25 \cdot t):$

$plot(f(t), t = 0..5)$



Som det ses på grafen, har man en hel bølge, og den maksimale luftmængde kan så bestemmes ved udnytte, at sinus højst kan give 1.

Dvs. $f_{\max} = 3.2 + 0.4 \cdot 1 = 3.6$

Altså er den maksimale luftmængde $\underline{\underline{3,6\ L}}$

b) De tidspunkter, hvor luftmængden er 3,5L, bestemmes med intervalsolve:

$intervalsolve(f(t) = 3.5, t = 0..5) = [0.6784496632, 1.834824460]$

Dvs. luftmængden er 3,5 liter $\underline{\underline{0,68\ s}}$ og $\underline{\underline{1,83\ s}}$ efter begyndelsen af vejrtrækningen.

c) Differentialkvotienten i 2 bestemmes:

$f'(2) = -0.4005718078$

Dette fortæller, at

$\underline{\underline{\textit{2 sekunder efter begyndelsen af vejrtrækningen aftager luftmængden med } 0,40\ L \textit{ pr. sekund}}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 13: a) Nulhypotesen er, at der ikke er nogen sammenhæng mellem aktivitetsniveau og rygevaner, dvs. at de to størrelser er uafhængige.

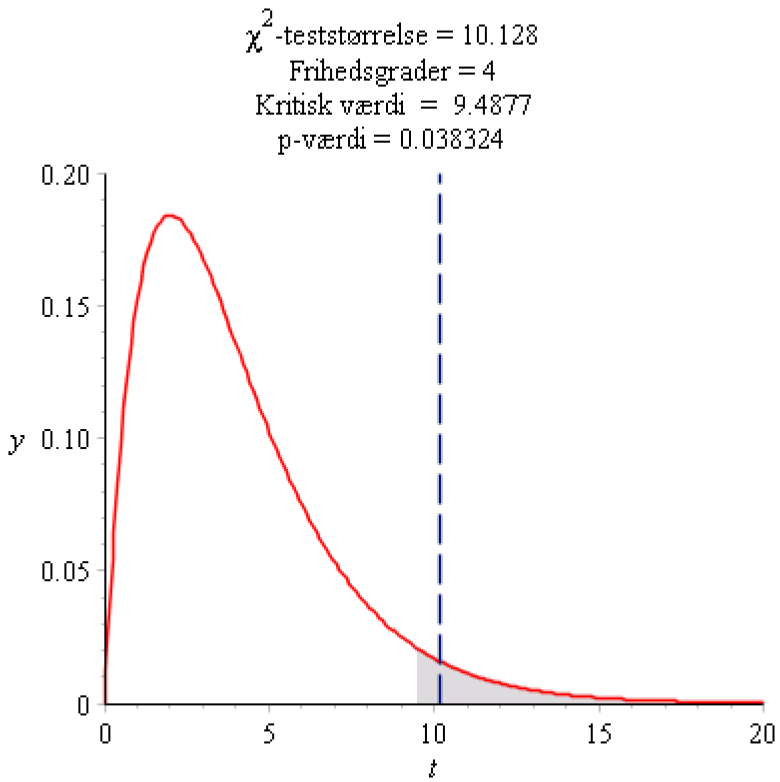
Dette undersøges med et χ^2-uafhængighedstest:

restart

with(*Gym*) :

$$M := \begin{bmatrix} 71 & 45 & 101 \\ 67 & 61 & 115 \\ 98 & 50 & 93 \end{bmatrix} :$$

ChiKvadratUtest(*M*, *level* = 0.05)



p-værdien er 0,0383=3,83% dvs. under signifikansniveauet på 5%, og der er dermed signifikant forskel på det fysiske aktivitetsniveau mellem de forskellige rygevane-kategorier. Altså må nulhypotesen forkastes, dvs. der

er IKKE uafhængighed mellem det fysiske aktivitetsniveau og rygevaner.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 14: $f(x)=\sqrt{25-\left(\frac{5\cdot x}{2,1}\right)^2}$; $-2,1\le x\le 2,1$

a) Rumfanget af omdrejningslegemet bestemmes i Maple:

restart

with(*Gym*) :

$$f(x) := \sqrt{25-\left(\frac{5\cdot x}{2.1}\right)^2} :$$

$$V=\pi\cdot\int_{-2.1}^{2.1} f(x)^2\,dx = 70.00000000\,\pi \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 219.9114858$$

Dvs. rumfanget er $\underline{\underline{219,91\ m^3}}$

b) Overfladearealet bestemmes:

$$O=2\cdot\pi\cdot\int_{-2.1}^{2.1} f(x)\cdot\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = 64.70744956\,\pi \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 203.2844482$$

Dvs. at husets overfladeareal er $\underline{\underline{203,28\ m^2}}$

Opgave 15: $\frac{dh}{dt}=0,16\cdot h$

a) Når græshøjden h er 4, har man $\frac{dh}{dt}=0,16\cdot 4=0,64$

Dvs. at græsset vokser med $\underline{\underline{0,64\frac{cm}{døgn}}}$, når græshøjden er 4cm.

b) Da græshøjden er 3cm umiddelbart efter græsslåning, har man begyndelsesbetingelsen $h(0)=3$. Med denne betingelse kan differentialligningen løses:

$$[h'(t)=0.16\cdot h(t),\ h(0)=3] \xrightarrow{\text{solve DE}} h(t)=3\,e^{\frac{4}{25}t}$$

Dvs. $\underline{\underline{h(t)=3\cdot e^{0.16\cdot t}}}$

Tiden mellem to græsslåninger bestemmes ved at finde ud af, hvordan græshøjden er 8 cm:

$$8=3\cdot e^{0.16\cdot t} \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t=6.130182831]]$$

Dvs. der går $\underline{\underline{6\ døgn}}$ mellem to græsslåninger.

Opgave 16: $A(3,0,0)$ $B(0,5,0)$ $C(0,0,t)$

a) Arealet af trekant ABC er halvdelen af arealet af det parallelogram, der udspændes af vektorerne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

Arealet af parallelogrammet svarer til længden af krydsproduktet mellem de to vektorer.

restart

$with(Gym)$:

$A := \langle 3, 0, 0 \rangle$:

$B := \langle 0, 5, 0 \rangle$:

$C := \langle 0, 0, 4 \rangle$:

$\overrightarrow{AB} := B - A$:

$\overrightarrow{AC} := C - A$:

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot len\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{769} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 13.86542462$$

Dvs. $\underline{\underline{T_{ABC} = 13{,}865}}$

b) $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix} \quad ; \quad s \in \mathbb{R}$

En retningsvektor for linjen aflæses ud fra parameterfremstillingen:

$\overrightarrow{r_l} := \langle 10, 6, 15 \rangle$:

For at linjen skal stå vinkelret på planen, skal den angivne retningsvektor være parallel med en normalvektor til planen (som normalvektor kan man anvende krydsproduktet mellem to vektorer, der udspænder planen).

Hvis to vektorer er parallelle, er deres krydsprodukt nulvektoren.

Dette udnyttes til at bestemme t (punktet C skal defineres pány):

$C := \langle 0, 0, t \rangle$:

$\overrightarrow{AC} := C - A$:

$$\vec{n} := \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 5t \\ 3t \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\vec{n} \times \overrightarrow{r_l} = \begin{bmatrix} 45t - 90 \\ -75t + 150 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$len\left(\vec{n} \times \overrightarrow{r_l}\right) = 15\sqrt{34}\sqrt{(-2+t)^2}$$

$$15\sqrt{34}\sqrt{(-2+t)^2} = 0 \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t = 2]]$$

Det bemærkes, at normalvektoren ikke bliver nulvektoren, når $t = 2$, så det er en gyldig løsning. Dvs. linjen står vinkelret på planen, når $\underline{\underline{t = 2}}$