Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Løsninger til eksamensopgaver på A-niveau 2015

22. maj 2015: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: Det antages, at der ikke også opstår pengeinstitutter efter 2001, dvs. antallet af pengeinstitutter falder med en fast størrelse 8 om året. Altså er der tale om lineær vækst med hældningen -8. Da der i 2001 var 190 pengeinstitutter, er begyndelsesværdien 190.

Når $N(t)$ angiver antal pengeinstitutter til tiden *t* målt i antal år efter 2001, har man:

$$\underline{\underline{N(t) = -8 \cdot t + 190}}$$

Opgave 2: En tilstrækkelig argumentation er:

Da grafen for en lineær funktion er en ret linje, hører grafen *C* til funktionen *f*.
Da en potensfunktion kun er defineret for positive *x*-værdier,
hører grafen *B* til eksponentialfunktionen *h*.
Og dermed hører grafen *A* til funktionen *g*.

Andre argumenter er:
1) Grafen *A* svarer til en voksende funktion med aftagende væksthastighed. Ingen eksponentialfunktioner har den egenskab, da alle voksende eksponentialfunktioner også har voksende væksthastighed.
2) Eksponentialfunktioner er defineret for alle reelle tal.
3) Grafer for eksponentialfunktioner går gennem punktet (0,1).
4) Grafer for potensfunktioner går gennem punkter (1,1), og de voksende potensfunktioners grafer vil se ud, som om de begynder i (0,0), selvom dette punkt ikke er en del af grafen.

Opgave 3: Det undersøges, om en *x*-værdi er en løsning til en ligningen $x^3 - 9\cdot x^2 + 23\cdot x - 15 = 0$ ved at se, om værdien indsat på *x*'s plads i ligningen giver et sandt udsagn:

$$3^3 - 9\cdot 3^2 + 23\cdot 3 - 15 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$27 - 9\cdot 9 + 69 - 15 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$27 - 81 + 69 - 15 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$0 = 0$$

Da dette er et sandt udsagn, er *x* = 3 en løsning til ligningen.

Opgave 4: $f(x) = 5\cdot e^x + 4 \quad ; \quad P(0, f(0))$

For at kunne bestemme ligningen for tangenten til grafen for *f* i *P*, skal man kende *P*'s koordinater og hældningskoefficienten for tangenten.

Først bestemmes andenkoordinaten for røringspunktet:

$$f(0) = 5\cdot e^0 + 4 = 5\cdot 1 + 4 = 9$$

Så bestemmes tangentens hældning (der differentieres ledvist):

$$f'(x) = 5\cdot e^x + 0 = 5\cdot e^x$$

$$f'(0) = 5\cdot e^0 = 5\cdot 1 = 5$$

Tangentens ligning bestemmes så ved indsættelse i den rette linjes ligning $y - y_0 = a\cdot(x - x_0)$:

$$y - 9 = 5\cdot(x - 0) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = 5x + 9}}$$

Opgave 5: $f(x) = \dfrac{5}{x} + 2x \quad ; \quad x > 0$

Opgaven kan løses på 2 forskellige måder. Enten integreres f, hvorefter udtrykket sammenlignes med de tre muligheder for stamfunktioner. Eller også anvendes integrationsprøven, hvor man differentierer de tre funktioner *g, h* og *k* og ser, hvilken der differentieret giver *f*.

1. metode (der integreres ledvist):

$$F(x) = \int \left(5 \cdot \frac{1}{x} + 2x\right) = 5 \cdot \ln|x| + x^2 + k = 5 \cdot \ln(x) + x^2 + k$$

Numerisktegnet kan fjernes, da definitionsmængden består af de positive tal.
Det ses altså, at <u>*h(x)* er en stamfunktion til *f(x)*.</u>

2. metode (der differentieres ledvist, og det bemærkes, at *k* indeholder en sammensat funktion:

$$g'(x) = \left(-5 \cdot x^{-2} + 2\right)' = -5 \cdot (-2) \cdot x^{-3} + 0 = \frac{10}{x^3}$$

$$h'(x) = 5 \cdot \frac{1}{x} + 2x = \frac{5}{x} + 2x$$

$$k'(x) = 5 \cdot \frac{1}{5x} + 2x = \frac{1}{x} + 2x$$

Det ses altså, at <u>*h(x)* er en stamfunktion til *f(x)*.</u>

Opgave 6: Først ses på monotoniforholdene for funktionen *g*. Disse bestemmes ved at se på fortegnene for den afledede funktion *g'*. Det er oplyst, at *g'* er en lineær funktion (dvs. dens graf er en ret linje), der derfor kun kan have ét nulpunkt. Da grafen går gennem punktet $P\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, er nulpunktet $-\frac{1}{2}$ og ud fra grafen ser man altså, at:

g'(x) er negativ i $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$ og *g'(x)* er positiv i $\left]-\frac{1}{2}, \infty\right[$.

<u>Dermed er *g(x)* er aftagende i</u> $\underline{\underline{\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]}}$ <u>og *g(x)* er voksende i</u> $\underline{\underline{\left[-\frac{1}{2}, \infty\right[}}$.

Tangenthældninger svarer til funktionsværdier for de afledede funktioner, så hvis de to grafer et sted skal have ens tangenthældninger, skal deres afledede funktioner have den samme funktionsværdi. Og da $f'(x) = 5$ er en konstantfunktion, skal denne funktionsværdi altså være 5.

En forskrift for $g'(x)$ bestemmes: Det er en lineær funktion, der går gennem (0,1), så man har:

$g'(x) = a \cdot x + 1$.

Punktet *P*'s koordinater indsættes:

$$0 = a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2$$

Dvs: $g'(x) = 2 \cdot x + 1$, og da funktionsværdien skal være 5, har man:

$$5 = 2 \cdot x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4 = 2x \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 2}}$$

22. maj 2015: Delprøven MED hjælpemidler

Opgave 7: $P(5,4)$; $l: x-y+2=0$

a) Afstanden fra punkt til linje kan bestemmes ved formlen:

$$dist(P,l)=\frac{|a\cdot x_0+b\cdot y_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Så man får: $dist(P,l)=\frac{|1\cdot 5-1\cdot 4+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|3|}{\sqrt{2}}=\underline{\underline{\frac{3}{\sqrt{2}}}}$

b) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$; $t\in\mathbb{R}$

Skæringspunktet er det punkt *(x,y)*, der ligger på begge linjer. Koordinatfunktionerne indsættes i linjen *l*'s ligning, hvorefter parameteren *t* isoleres:

$$(1+3t)-(1+t)+2=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2t+2=0 \quad\Leftrightarrow\quad t=-1$$

Denne værdi indsættes i parameterfremstillingen:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$$

Dette er koordinaterne for en stedvektor, men den har samme koordinater som punktet, der derfor er $\underline{\underline{(-2,0)}}$

Opgave 8: Det er oplyst, at modellen har forskriften $f(x)=b\cdot a^x$, og da der er mere end to målepunkter, skal der altså laves eksponentiel regression:

a) Det bemærkes, at årstallene er antal år EFTER 2006:

with(*Gym*) :
År := [0, 1, 2, 3, 4, 5] :
Omsætning := [329, 434, 607, 909, 1502, 2030] :
$f(x)$:= *ExpReg*(*År*, *Omsætning*, *x*) :
$f(x) = 306.515116560128\ 1.45923818526932^x$
Dvs. $\underline{\underline{a = 1.45924}}$ og $\underline{\underline{b = 306.5}}$

b) Hvis omsætningen skal nå op på 10000 mio. USD, skal $f(x)=10000$.

Da funktionen allerede er gemt i Maple, får man:

$f(x) = 10000 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 9.221856315\}$
Da $x = 9$ svarer til år $2006 + 9 = 2015$, har man, at det er i $\underline{\underline{\text{år } 2015}}$ at omsætningen er oppe på 10000 mio. USD.

c) Fremskrivningfaktoren *a* er 1,46, og da $a=1+r$, er den årlige gennemsnitlige vækstrate altså: $r=0,46=\underline{\underline{46\%}}$

Fordoblingstiden bestemmes ud fra formlen for fordoblingskonstanten:

$$T_2=\frac{\ln(2)}{\ln(a)}=\frac{\ln(2.)}{\ln(1.45923818526932)}=1.834137524$$

Fordoblingstiden er altså $\underline{\underline{1.8 \text{ år}}}$

Opgave 9: $f(x) = b \cdot x^a$; $A(3{,}100)$; $B(15{,}50)$

a) For at bestemme en forskrift for *f*, skal man finde konstanterne *a* og *b*. Dette gøres ved at indsætte koordinatsættene for de to punkter i funktionsforskriften og lade Maple løse disse to ligninger med to ubekendte:

$$\left[100 = b \cdot 3^a,\ 50 = b \cdot 15^a\right] \xrightarrow{\text{solve}} \{a = -0.4306765581,\ b = 160.5036599\}$$

Dvs. at funktionsforskriften er $\underline{\underline{f(x) = 160.5 \cdot x^{-0.43068}}}$

b) Først defineres funktionen *f*:

$$f(x) := 160.5036599 \cdot x^{-0.4306765581}:$$

Så kan Maple foretage udregningen:

$$f(20) = 44.17350084$$

Dvs. $\underline{\underline{f(20) = 44.1735}}$

Det bemærkes, at det er en potensfunktion, så der gælder:

$$(1 + r_y) = (1 + r_x)^a$$

Den procentvise ændring i $f(x)$, når x vokser med 70% er altså:

$$(1 + r_y) = (1 + 0.7)^{-0.4306765581} \xrightarrow{\text{solve}} \{r_y = -0.2042968967\}$$

Dvs. at $f(x)$ falder med $\underline{\underline{20.4\ \%}}$, når x vokser med 70%.

Opgave 10: $f(x) = x^6 - 5x^3 + 4$

a) Skæringspunkterne med førsteaksen er de steder, hvor funktionsværdien er nul, så Maple sættes til at finde disse steder:

$$f(x) := x^6 - 5 \cdot x^3 + 4:$$

$$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} 1.,\ 1.587401052$$

(der anvendes numerisk 'solve', da man ikke er interesseret i de komplekse løsninger. Som angivet er der to reelle løsninger.

Dvs. koordinatsættene for skæringspunkterne er $\underline{\underline{(1, 0)\ og\ (1.5874, 0)}}$

b) For at bestemme monotoniforholdene findes først nulpunkterne for den afledede funktion samt fortegnet for den anden afledede funktion de pågældende steder:

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} 0., 0., 1.357208808$

Det bemærkes, at 0 er en dobbeltrod, så den anden afledede forventes at være 0 dette sted, og man skal derfor også udregne værdien af den tredje afledede og tjekke, at den ikke er 0:

$f''(0) = 0$

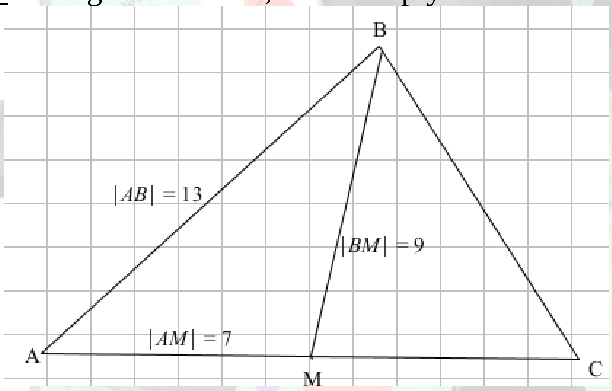
$f'''(0) = -30$ Der er altså vandret vendetangent i $x = 0$

$f''(1.357208808) = 61.07439628 > 0$ dvs. her er lokalt minimum.

Dette fortæller os, at:

$\underline{\underline{f \text{ er aftagende i }]-\infty, 1.357208808] \text{ og voksende i } [1.357208808, \infty[}}$

Opgave 11: Der tegnes en skitse, hvor de oplyste værdier indtegnes:



a) Da M er midtpunktet af siden AC, kan man definere følgende størrelser:

$with(Gym):$

$AB := 13:$

$AM := 7:$

$BM := 9:$

$AC := 14:$

Da man kender alle tre sider i trekant ABM anvendes cosinusrelationen:

$$Cos(A) = \frac{AB^2 + AM^2 - BM^2}{2 \cdot AB \cdot AM} \xrightarrow{\text{solve for A}} [[A = 41.17108290]]$$

Dvs. at $\underline{\underline{A = 41.17°}}$

Man mangler længden af siden BC for at kunne beregne omkredsen. Den kan bestemmes ved en cosinusrelation, da man nu kender en vinkel og længden af de to hosliggende sider:

$A := 41.17108290 :$

$$Cos(A) = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2 \cdot AC \cdot AB} \xrightarrow{\text{solve for BC}}$$

$[[BC = 9.539392015], [BC = -9.539392015]]$

Da det er en sidelængde, smides den negative løsning væk, så man har:

$BC := 9.539392015 :$

Så er omkredsen:

$O_{ABC} = AB + BC + AC = 36.53939202$

Dvs. omkredsen af trekant ABC er $\underline{\underline{36.539392}}$

b) Fodpunktet for højden fra B danner sammen med A og B en retvinklet trekant, hvor højden optræder som den modstående katete i forhold til vinkel A. Desuden er AB hypotenusen i denne trekant, og derfor har man:

$$Sin(A) = \frac{h_b}{AB} \xrightarrow{\text{solve for h\_\_b}} [[h_b = 8.558025236]]$$

Dvs. længden af højden fra B er $\underline{\underline{8.558}}$

Opgave 12: a) Først omregnes procentfordelingen i populationen til en forventet tabel for de 300 forbrugere i stikprøven, og derefter udføres et χ^2-GOF-test:

$with(Gym) :$

$Procent := \langle 0.15, 0.16, 0.19, 0.17, 0.17, 0.10, 0.06 \rangle :$

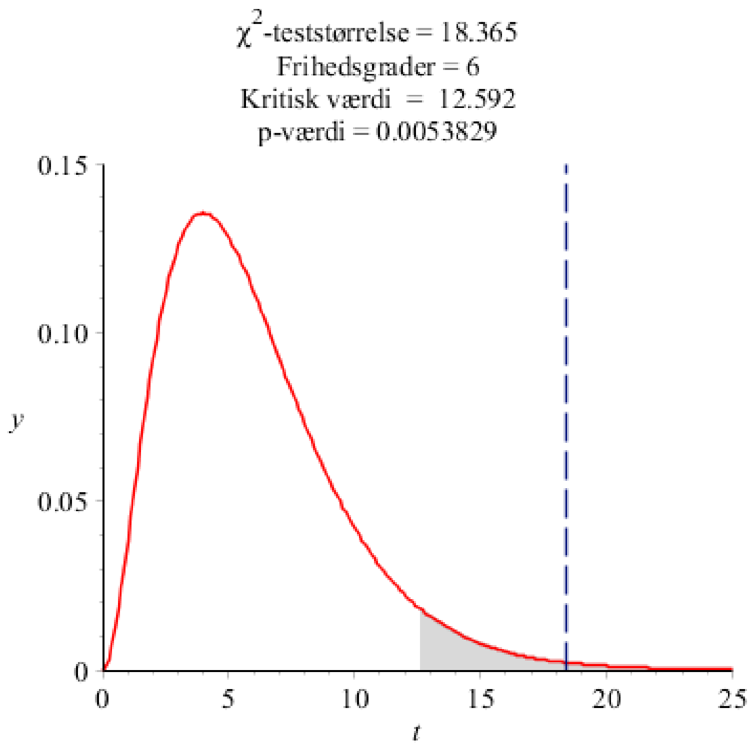
$$Forventet := 300 \cdot Procent = \begin{bmatrix} 45. \\ 48. \\ 57. \\ 51.0000000000000 \\ 51.0000000000000 \\ 30. \\ 18. \end{bmatrix}$$

Den observerede tabel er:

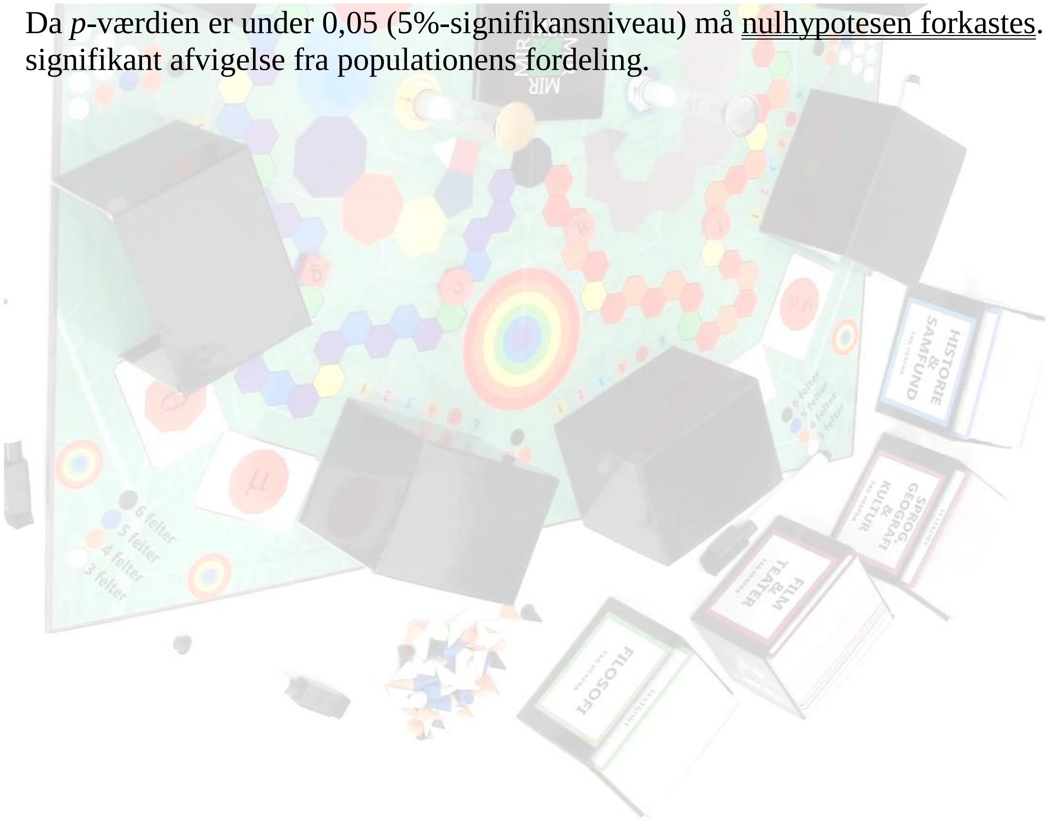
$Observeret := \langle 39, 42, 83, 54, 49, 21, 12 \rangle :$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

ChiKvadratGOFtest(*Observeret*, *Forventet*)



Da *p*-værdien er under 0,05 (5%-signifikansniveau) må <u>nulhypotesen forkastes</u>. Der er en signifikant afvigelse fra populationens fordeling.



b) Teststørrelsen kan aflæses ovenfor, men da man alligevel skal bruge en beregning i anden del af spørgsmålet, udregnes den her:

$$Q = \sum_{i=1}^{7} \frac{\left(Observeret_i - Forventet_i\right)^2}{Forventet_i}$$

$$Q_1 := \frac{(39-45)^2}{45.} = 0.8000000000$$

$$Q_2 := \frac{(42-48)^2}{48.} = 0.7500000000$$

$$Q_3 := \frac{(83-57)^2}{57.} = 11.85964912 \quad \text{(allerede her ses det største bidrag)}$$

$$Q_4 := \frac{(54-51)^2}{51.} = 0.1764705882$$

$$Q_5 := \frac{(49-51)^2}{51.} = 0.07843137255$$

$$Q_6 := \frac{(21-30)^2}{30.} = 2.700000000$$

$$Q_7 := \frac{(12-18)^2}{18.} = 2.000000000$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6 + Q_7 = 18.36455108$$

Dvs. teststørrelsen er $\underline{\underline{18,36}}$

Og det største bidrag kommer fra de 40-49-årige, der er klart overrepræsenteret.

Opgave 13: Som pyramiden er beskrevet i opgaveteksten, er det ikke en skæv pyramide, og derfor danner alle sider den samme vinkel med underlaget.
Toppunktets koordinater er (3,3,6), og underlaget ligger i *xy*-planen, der har ligningen $z = 0$.
Vinklen mellem planer svarer til vinklen mellem deres normalvektorer. Der er både en spids og en stump vinkel, og i dette tilfælde er der vist nok lagt op til, at det er den spidse, man skal finde, selvom begge vinkler kan bruges.
For at gøre notationen korrekt og overskuelig angives punkterne i Maple ved deres stedvektorer:

$with(Gym)$:

$\overrightarrow{OO} := \langle 0, 0, 0 \rangle : \overrightarrow{OA} := \langle 6, 0, 0 \rangle : \overrightarrow{OT} := \langle 3, 3, 6 \rangle :$

For at bestemme en ligning for den plan, som fladen OAT er en del af, skal man finde en normalvektor for denne plan.
Denne kan vælges som krydsproduktet mellem
to vektorer, der udspænder planen. Her har man allerede to vektorer, der udspænder planen, så man tager:

$$\vec{n} := \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OT} = \begin{bmatrix} 0 \\ -36 \\ 18 \end{bmatrix}$$

En normalvektor for xy-planen er:

$\overrightarrow{n_{bund}} := \langle 0, 0, 1 \rangle :$

Vinklen mellem disse to vektorer bestemmes ved:

$$\cos(v) = \frac{\vec{n} \bullet \overrightarrow{n_{bund}}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{n_{bund}}|}$$

$$Cos(v) = \frac{\vec{n} \bullet \overrightarrow{n_{bund}}}{\operatorname{len}(\vec{n}) \cdot len(\overrightarrow{n_{bund}})} \xrightarrow{\text{solve for v}} [[v = 63.43494882]]$$

Dvs. at siderne danner vinklen $\underline{\underline{63.4°}}$ med bunden.

b) Pyramiden har fire ens sideflader, hvis areal hver især kan bestemmes som det halve af længden af krydsproduktet mellem to vektorer, der udspænder den trekantede sideflade. Vi har allerede fundet vores vektor $\vec{n}$, der er sådan et krydsprodukt, så vi har:

$$A_{siderne} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot |\vec{n}| \right) = 2 \cdot |\vec{n}|$$

$$A_{siderne} := 2 \cdot len(\vec{n}) = 36\sqrt{5}$$

Bunden er et kvadrat, så dets areal er: $A_{bund} := 6 \cdot 6 = 36$

Dvs. $A_{samlet} = A_{siderne} + A_{bund} = 36\sqrt{5} + 36 \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 116.4984472$

Da der regnes i cm har man altså: $\underline{\underline{A_{samlet} = 116.5\ cm^2}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 14: $f(x) = a^x$; $g(x) = x+1$; $1 < a < 2$

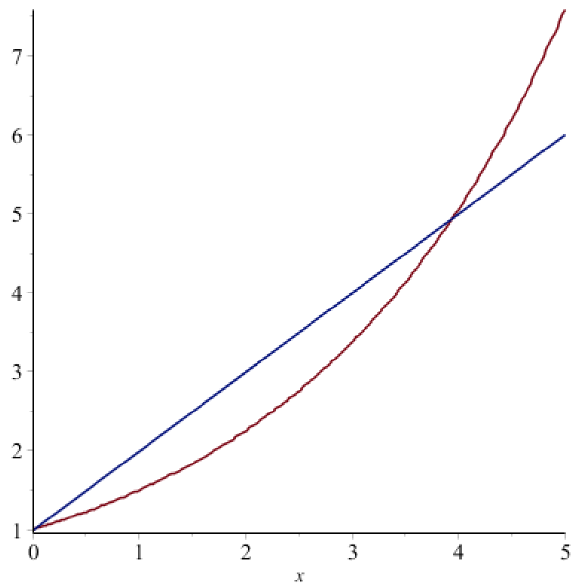
a) Når a = 1,5 har man:

$f(x) := 1.5^x :$

$g(x) := x + 1 :$

$f(x) = g(x) \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 0.\}, \{x = 3.939176458\}$

$plot([f(x), g(x)], x = 0..5)$



Når man kigger på grafen, kan man se, at oplysningen om, at graferne sammen med linjen x =1 afgrænser en punktmængde i første kvadrant, er forkert. Der er to punktmængder.
Og det blev senere oplyst, at der var en mangel i opgavebeskrivelsen, hvor der også skulle have stået, at definitionsmængden for funktionerne er $Dm(f) = Dm(g) = [0,1]$.

Når man ved dette, kan man bestemme arealet, da man kan se, at grænserne i det bestemte integral skal være 0 og 1 (da det er vist, at de to grafer ikke skærer hinanden før i 0.
I dette område ligger den rette linje øverst, så g skal stå først:

$$A_M = \int_0^1 (g(x) - f(x))\, dx = 0.2668482688$$

Dvs. at punktmængden har arealet $\underline{\underline{0.2668}}$

b) Hvis arealet skal være 0,4, har man:

$f(x) := a^x :$

$solve\left(\int_0^1 (g(x) - f(x))\, dx = 0.4, a\right) = 1.206454299$

Man skal lige huske at sikre sig, at dette stadigvæk fører
til én punktmængde, og at grænserne ikke afhænger af a-værdien.
Da alle eksponentialfunktioner går gennem (0,1), og da denne a-værdi
er mindre end 1,5 og større end 1, er det en "rigtig" punktmængde, der
dannes (det kan også ses ved at tegne en graf).
Dvs. den søgte værdi er $\underline{\underline{a = 1.2065}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 15: a) Man lader N være antallet af smittede. Hastigheden, hvormed antallet af smittede vokser, er så $\frac{dN}{dt}$. Da denne størrelse er proportional med antallet af smittede N, og da proportionalitetskonstanten er 0,022, har man differentialligningen:

$$\underline{\underline{\frac{dN(t)}{dt} = 0,022 \cdot N(t)}}$$

Da der er 3800 smittede til tidspunktet $t = 162$, er væksthastigheden her:

$$\frac{d}{dt} N = 0.022 \cdot 3800 = 83.600$$

Dvs. væksthastigheden er <u>84 *ekstra smittede pr. døgn*</u>

b) For at kunne skelne de to modeller, vælges her at bruge M som antal smittede:

$$\frac{dM}{dt} = 3 \cdot 10^{-6} \cdot M \cdot (13382 - M).$$

Væksthastigheden bliver:

$$\frac{d}{dt} M = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 3800 \cdot (13382 - 3800.) = 109.2348000$$

Dvs. væksthastigheden er <u>109 *ekstra smittede pr. døgn*</u>

Hvis man skal sammenligne udviklingen af hastigheden, skal man ud og se på den anden afledede det pågældende sted, da den angiver accelerationen.
Så differentialligningerne løses først, hvorefter værdierne for den anden afledede bestemmes:

$$dsolve\left(\left[\frac{d}{dt} N(t) = 0.022 \cdot N(t), N(162) = 3800\right]\right) = N(t) = \frac{3800\, e^{\frac{11}{500} t}}{e^{\frac{891}{250}}}$$

$$N(t) := \frac{3800\, e^{\frac{11}{500} t}}{e^{\frac{891}{250}}} :$$

$$N''(162) = \frac{2299}{1250} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 1.8392$$

$$dsolve\left(\left[\frac{d}{dt} M(t) = 3 \cdot 10^{-6} \cdot M(t) \cdot (13382 - M(t)), M(162) = 3800\right]\right) =$$

$$M(t) = \frac{25425800\, e^{-\frac{1625913}{250000}}}{4791\, e^{-\frac{20073}{500000} t} + 1900\, e^{-\frac{1625913}{250000}}}$$

$$M(t) := \frac{25425800\, e^{-\frac{1625913}{250000}}}{4791\, e^{-\frac{20073}{500000} t} + 1900\, e^{-\frac{1625913}{250000}}} :$$

$$M''(162) = \frac{2368483551}{1250000000} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 1.8948$$

Dvs. <u>hastigheden vokser en anelse hurtigere efter 162 døgn i den sidste model.</u>

28. maj 2015: Delprøven UDEN hjælpemidler

<u>Opgave 1:</u> Da det er et fast antal slædehunde, der forsvinder hvert år, er der tale om en lineær model. Her vælges N som angivelse for antal slædehunde, og t er tiden målt i antal år efter 2001.

Da der var 21365 slædehunde i 2001, er begyndelsesværdien 21365, og da der forsvinder 1135 slædehunde om året, er hældningskoefficienten -1135.

Dvs. modellen bliver:

$$\underline{\underline{N(t) = -1135 \cdot t + 21365 \quad ; \quad 0 \le t \le 10}}$$

<u>Opgave 2:</u> $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 3 \end{pmatrix}$

Begge vektorer er egentlig vektorer (uanset værdien af t), så man har:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5 \cdot t - 1 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow 5t = 3 \Leftrightarrow \underline{\underline{t = \frac{3}{5}}}$$

<u>Opgave 3:</u> $f(x) = x^{-1} \quad ; \quad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad ; \quad h(x) = x^{\frac{1}{2}}$

En tilstrækkelig argumentation er:

f og h er potensfunktioner med definitionsmængden $\mathbb{R}_+$ (positive reelle tal) og g er en eksponentiel udvikling med definitionsmængden $\mathbb{R}$ (alle reelle tal), så <u>C er grafen for g.</u>

f har en negativ eksponent og er derfor en aftagende funktion, så <u>A er grafen for f.</u>

h har en positiv eksponent og er derfor en voksende funktion, så <u>B er grafen for h.</u>

Man kan også benytte, at B er grafen for en funktion, der er voksende med aftagende hastighed (hvilket ikke er muligt for en eksponentiel udvikling), og grafen ser ud til at begynde i (0,0), hvilket er tilfældet for potensfunktioner med positiv eksponent.

Grafen A ser ud til at have y-aksen som lodret asymptote, hvilket gælder for potensfunktioner med negativ eksponent.

<u>Opgave 4:</u> $f(x) = (2x+1) \cdot \ln(x) \; ; \; x > 0$

Det er vigtigt at bemærke, at det er en produktfunktion, der skal differentieres:

$$f'(x) = (2x+1)' \cdot \ln(x) + (2x+1) \cdot (\ln(x))' = 2 \cdot \ln(x) + (2x+1) \cdot \frac{1}{x} = 2 \cdot \ln(x) + 2 + \frac{1}{x}$$

Og nu kan differentialkvotienten i 1 bestemmes:

$$f'(1) = 2 \cdot \ln(1) + 2 + \frac{1}{1} = 2 \cdot 0 + 2 + 1 = \underline{\underline{3}}$$

<u>Opgave 5:</u> $\frac{dy}{dx} = e^x + 2y \quad ; \quad P(0,3)$

Da *f* er løsning til differentialligningen, kan hældningen for tangenten til grafen for *f* i punktet *P* findes ved at indsætte koordinaterne i differentialligningen:

$$a = \frac{dy}{dx} = e^0 + 2 \cdot 3 = 1 + 6 = 7$$

Da man nu kender både tangentens hældning og et punkt – nemlig *P* – på tangenten, bestemmes ligningen ved indsættelse i $y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$:

$$y - 3 = 7 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 7x + 3}}$$

<u>Opgave 6:</u> $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + 21 \quad ; \quad T(5,-4) \quad ; \quad A(3,0)$

Toppunktets førstekoordinat ligger midt mellem de to nulpunkter (når der som i dette tilfælde ER to nulpunkter), så koordinatsættet for *B* er:

$$\underline{\underline{B(7,0)}}$$

Da man nu kender de to nulpunkter (rødder), kan polynomiet faktoriseres ved $f(x) = a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2)$.

Man får:

$$f(x) = a \cdot (x-3) \cdot (x-7) = a \cdot \left(x^2 - 10x + 21\right) = a \cdot x^2 - 10 \cdot a \cdot x + 21 \cdot a$$

Hvis to polynomier skal være ens, skal samtlige koefficienter være ens. Dvs. vi har:

$$a = a$$

$$b = -10 \cdot a$$

$$21 = 21 \cdot a$$

Heraf ses med det samme, at $\underline{\underline{a = 1}}$, og dermed er $\underline{\underline{b = -10}}$

28. maj 2015: Delprøven MED hjælpemidler

<u>*Opgave 7:*</u> $f(x) = 2 \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot x^2 - x + 7$

$f(x) := 2 \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot x^2 - x + 7 :$

a) Nulpunktet er det sted, hvor funktionsværdien er 0, så Maple skal løse følgende ligning (der anvendes numerisk 'solve', så kun den ikke-komplekse løsning findes):

$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} -1.543355693$

Det er oplyst, at der er netop ét nulpunkt, så man har $\underline{\underline{P(-1.543355693, 0)}}$

b) Man kan differentiere udtrykket ledvist, men da funktionen allerede er defineret, kan man også lade Maple gøre det:

$f'(x) = 6x^2 - x - 1$

Dvs. $\underline{\underline{f'(x) = 6x^2 - x - 1}}$

Man kan indsætte i tangentens ligning og lade Maple isolere y:

$y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = 21x - 23$

Dvs. tangentens ligning er $\underline{\underline{y = 21 \cdot x - 23}}$

c) Monotoniforholdene bestemmes ved først at finde lokale minima og maksima. Dette gøres ved at finde de steder, hvor den afledede funktion er nul, hvorefter fortegnet for den anden afledede disse steder fortæller os, om det er et maksimum eller minimum:

$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{x = \frac{1}{2}\right\}, \left\{x = -\frac{1}{3}\right\}$

$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 5 > 0$ Dvs. der er lokalt minimum i $x = \frac{1}{2}$.

$f''\left(-\frac{1}{3}\right) = -5 < 0$ Dvs. der er lokalt maksimum i $x = -\frac{1}{3}$

Hermed ses det, at $\underline{\underline{f \textit{ er voksende i } \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right] \textit{ og i } \left[\frac{1}{2}, \infty\right[}}$.

$\underline{\underline{\text{Og } f \textit{ er aftagende i } \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

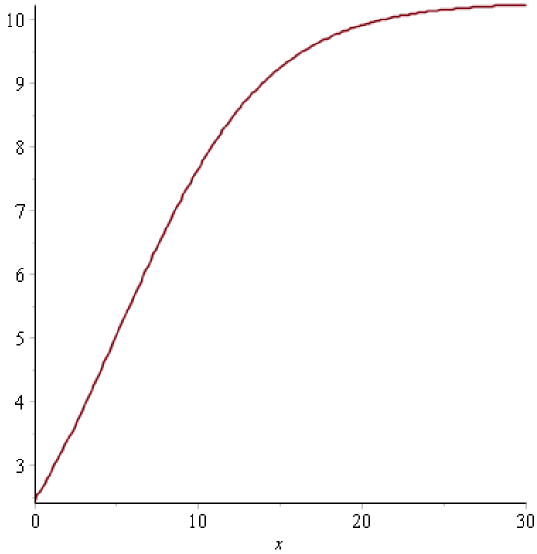
Opgave 8: $v(x) = \dfrac{10,28}{1+3,177\cdot e^{-0,224\cdot x}}$, hvor *x* er alderen af en torsk målt i år, og *v(x)* er vægten målt i kg.

a) Først defineres funktionen i Maple:

$$v(x) := \frac{10.28}{1+3.177\cdot e^{-0.224\cdot x}}:$$

Først tegnes grafen i intervallet [0,30] (kan en torsk blive 30 år?)

$plot(v(x), x = 0..30) =$



Hvis en torsk vejer 8,5 kg, er $v(x) = 8.5$, så man skal løse:

$v(x) = 8.5 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 12.14013462]]$

Dvs. at torsken er $\underline{\underline{12.1\ \text{år}}}$

b) Som det fremgår af forskriften, er det logistisk vækst, og der ved man, at der er størst vækshastighed, når funktionsværdien er halvdelen af sit maksimum. Så tidspunktet *x* bestemmes ved at løse:

$v(x) = \dfrac{10.28}{2} \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 5.160434622]]$

Dvs. vækshastigheden er størst, når torsken er $\underline{\underline{5.2\ \text{år}}}$

Hvis man ikke kan huske eller kender ovenstående egenskab, kan man finde den største vækshastighed ved at finde det sted, hvor den anden afledede er nul og med den tredje afledede tjekke, at det faktisk er et lokalt maksimumssted:

$v''(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 5.160434621]]$

$v'''(5.160434621) = -0.01444265987 < 0$ Dvs. dette er et lokalt maksimum.

Opgave 9: a) Da man skal undersøge, om der er uafhængighed mellem uddannelse og holdning til spørgsmålet, opstilles nulhypotesen:

<u>H_0: Holdningen til spørgsmålet er uafhængig af uddannelse.</u>

Baseret på denne nulhypotese kan man nu bestemme et skema med de forventede værdier.
Først bestemmes en masse "i alt"-værdier:

INDSAMLET DATA	Ja	Nej	**I alt**
Erhvervsuddannelse	102	132	**234**
Videregående uddannelse af kort varighed	43	63	**106**
Videregående uddannelse af mellemlang varighed	80	157	**237**
Videregående uddannelse af lang varighed	30	84	**114**
Grundskoleuddannelse	72	99	**171**
I alt	**327**	**535**	**862**

Da der er 327 ud af 862, der svarer ja, vil man – under forudsætning af at nulhypotesen er sand – have en sandsynlighed på $p_{ja} = \frac{327}{862}$ for at svare "ja", og da der er 234 med erhvervsuddannelse, vil man forvente, at antallet af erhversuddannede, der svarer ja, er:

$N_{Erhv,ja} = \frac{327}{862} \cdot 234 = 88,77$.

På tilsvarende måde findes f.eks. det forventede antal med lang videregående uddannelse, der svarer "nej": $N_{Lang,nej} = \frac{535}{862} \cdot 114 = 70,75$.

Tilsvarende udregninger foretages for at bestemme de resterende forventede værdier:

FORVENTEDE VÆRDIER	Ja	Nej	**I alt**
Erhvervsuddannelse	**88,77**	**145,23**	**234**
Videregående uddannelse af kort varighed	**40,21**	**65,79**	**106**
Videregående uddannelse af mellemlang varighed	**89,91**	**147,09**	**237**
Videregående uddannelse af lang varighed	**43,25**	**70,75**	**114**
Grundskoleuddannelse	**64,87**	**106,13**	**171**
I alt	**327**	**535**	**862**

b) Der skal foretages et χ^2-uafhængighedstest med 4 frihedsgrader, da antallet af rækker *r* er 5 og antallet af søjler *s* er 2, og da antal frihedsgrader *f* er $f = (r-1)\cdot(s-1)$.

Teststørrelsen beregnes:

$$Q = \sum \frac{(Observeret - Forventet)^2}{Forventet} = \frac{(102-88,77)^2}{88,77} + \ldots + \frac{(99-106,13)^2}{106,13} = 13,05$$

Med 4 frihedsgrader og et signifikansniveau på 5% er grænseværdien $Q_{grænse} = 9,49$.

Og da $Q > Q_{grænse}$, må <u>nulhypotesen forkastes.</u>

Dvs. der er en signifikant sammenhæng mellem uddannelse og holdning til spørgsmålet.

Man kan også lade Maple foretage alle beregningerne:

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

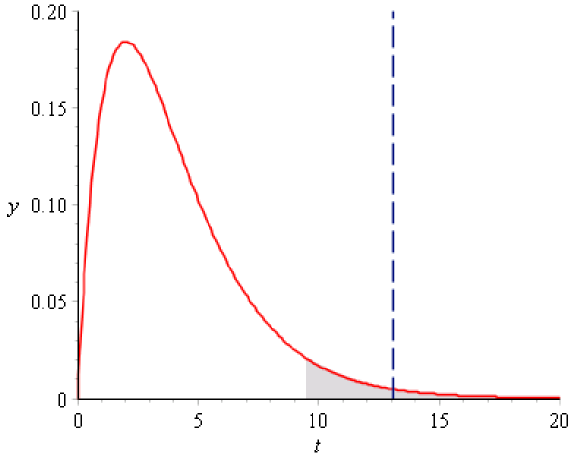
restart

with(*Gym*) :

$$obs := \langle 102, 43, 80, 30, 72 | 132, 63, 157, 84, 99 \rangle = \begin{bmatrix} 102 & 132 \\ 43 & 63 \\ 80 & 157 \\ 30 & 84 \\ 72 & 99 \end{bmatrix}$$

ChiKvadratUtest(*obs*, *level* = 0.05) =

χ^2-teststørrelse = 13.048
Frihedsgrader = 4
Kritisk værdi = 9.4877
p-værdi = 0.011043



Opgave 10: a) Da de tre trekanter *ABD*, *BCD* og *ACD* er kongruente, og da der er 360° hele vejen rundt i en cirkel, er $\underline{\underline{\angle ADB = 120°}}$

Da radius er 50 cm, kender man nu en vinkel og de to hosliggende sider i trekant *ABD*, og dermed giver ½-appelsinformlen arealet:

$$T_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |BD| \cdot \sin(\angle ADB) = \frac{1}{2} \cdot 50cm \cdot 50cm \cdot \sin(120°) = 1082{,}531754\,\text{cm}^2$$

Og da de tre små trekanter er kongruente, er:

$$T_{ABC} = 3 \cdot T_{ABD} = 3 \cdot 1082{,}531754\,\text{cm}^2 = 3247{,}595262\ \text{cm}^2 \approx \underline{\underline{3247{,}6\,\text{cm}^2}}$$

b) Da trekant *ABC* er ligesidet, behøver vi bare at finde den ene sidelængde i trekant *ABC*, hvorefter omkredsen kan findes ved at multiplicere med 3.
I trekant *ABD* kender vi en vinkel og de to hosliggende sider, så den sidste side kan bestemmes med cosinusrelationerne:

$$|AB|^2 = |AD|^2 + |BD|^2 - 2 \cdot |AD| \cdot |BD| \cdot \cos(\angle ADB)$$

$$|AB| = \sqrt{50^2 + 50^2 - 2 \cdot 50 \cdot 50 \cdot \cos(120°)}\ \text{cm} = 86{,}60254039\ \text{cm}$$

$$O_{ABC} = 3 \cdot |AB| = 3 \cdot 86{,}60254039\ \text{cm} = 259{,}8076212\ \text{cm} \approx \underline{\underline{259{,}8\ \text{cm}}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 11: $f(t) = b \cdot a^t$; t er antal år EFTER 2001 ; $f(t)$ er den relative væksthastighed i år^{-1}

a) Da man har fået oplyst mere end to målinger, og da modellen er en eksponentiel udvikling, skal der anvendes eksponentiel regression. Det foretages i Maple:

$with(Gym)$:

$År := [0, 1, 2, 3, 4, 5]$:

$Vækst := [0.398, 0.302, 0.259, 0.221, 0.158, 0.124]$:

$f(t) := ExpReg(År, Vækst, t)$:

$f(t) = 0.399055918186501\ 0.797193751434736^t$

Dvs. man har:

$\underline{\underline{a = 0.7972}}$ og $\underline{\underline{b = 0.3991}}$

b) Hvis den relative væksthastighed skal være 0,1 $år^{-1}$, skal $f(t) = 0.1$:

$f(t) = 0.1 \xrightarrow{\text{solve}} \{t = 6.105825711\}$

Da t er antal år efter 2001, er det altså i år $\underline{\underline{2007}}$, at den relative væksthastighed er 0,1 $år^{-1}$.

Halveringstiden kan bestemmes ud fra formlen $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(a)}$.

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2.}\right)}{\ln(0.797193751434736)} = 3.058125552$$

Dvs. halveringstiden er $\underline{\underline{3.1\ år}}$

c) $\frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dt} = f(t)$.

Da N er antal fisk, og der er 520 i år 2001, er $N(0) = 520$

I Maple kan differentialligningen løses:

$$\left[\frac{1}{N(t)} \cdot \frac{d}{dt} N(t) = f(t), N(0) = 520.\right] \xrightarrow{\text{solve DE}} N(t) = \frac{520\ e^{\frac{99763979546625331}{250000000000000000} \frac{199298437858684091^t\ 500000000^{-2t}}{\ln(199298437858684091) - 2\ln(500000000)}}}{e^{\frac{99763979546625331}{250000000000000000\ (\ln(199298437858684091) - 2\ln(500000000))}}}$$

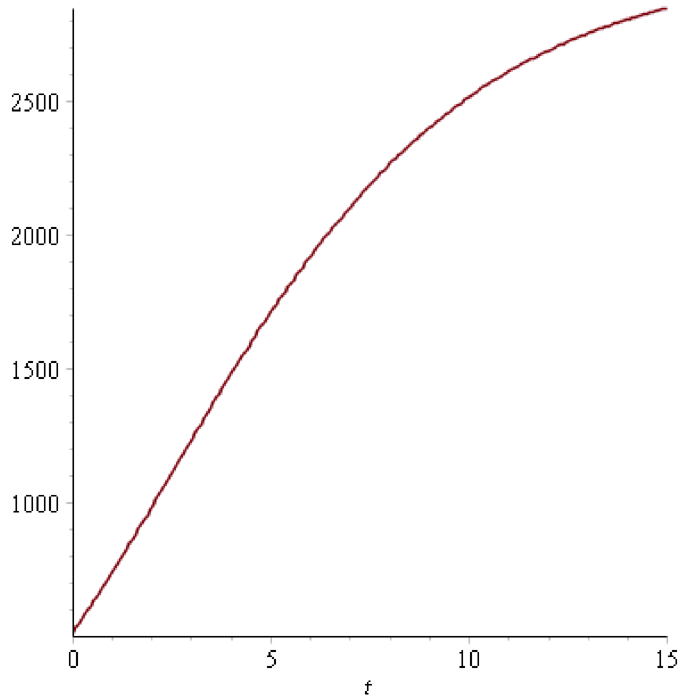
$$evalf(\%) = N(t) = 3024.316873\ e^{-1.760611706\ 1.992984379\ 10^{17^t}\ 5.00000000\ 10^{8^{-2.\,t}}}$$

Dvs. at forskriften for N er: $\underline{\underline{N(t) = 3024 \cdot e^{-1.76 \cdot 1.993 \cdot 10^{17^t} \cdot 5 \cdot 10^{8^{-2 \cdot t}}}}}$

Funktionen tegnes:

$$N(t) := \frac{520\, e^{\frac{99763979546625331}{25000000000000000}\,\frac{1992984378586840 91^{t}\, 500000000^{-2t}}{\ln(1992984378586840 91) - 2\ln(500000000)}}}{e^{\frac{99763979546625331}{25000000000000000\,(\ln(1992984378586840 91) - 2\ln(500000000))}}}:$$

$plot(N(t), t = 0..15) =$



Hvis antallet af fisk skal overstige 2000, skal $N(t) > 2000$:

$N(t) = 2000. \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t = 6.391435068]]$

Som det ses på grafen og løsningen af ligningen, vil populationen overstige 2000 i løbet af år $\underline{\underline{2007}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 12: a) Punkterne defineres i Maple som stedvektorer, så de er nemmere at regne med. Hvis man skal finde ligningen for en plan, skal man kende en normalvektor og et punkt, som planen går igennem. Man kan frit vælge punktet blandt punkterne *A*, *B* og *D*, mens man som normalvektor kan anvende krydsproduktet af to vektorer, der udspænder planen, eller en vektor parallel med dette krydsprodukt:

restart

with(*Gym*) :

$\overrightarrow{OA} := \langle 75, 0, 0\rangle : \overrightarrow{OB} := \langle 0, 140, 0\rangle : \overrightarrow{OC} := \langle 0, 175, 75\rangle : \overrightarrow{OD} := \langle 0, 35, 175\rangle :$

Planen, der indeholder sejlet, udspændes af $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AB} := \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} : \overrightarrow{AD} := \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} :$

$$\overrightarrow{n_\alpha} := \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} 24500 \\ 13125 \\ 7875 \end{bmatrix}$$

Som punkt anvendes *A*, og man finder så planens ligning ved $a \cdot (x - x_1) + b \cdot (y - y_1) + c \cdot (z - z_1) = 0$:

$\overrightarrow{n_\alpha} \cdot (\langle x, y, z\rangle - \overrightarrow{OA}) = 0$

$$24500\,x - 1837500 + 13125\,y + 7875\,z = 0$$

Det undersøges, om planen kan udtrykkes simplere, ved at se, om koefficienterne har en største fælles divisor over 1:

$gcd(7875, gcd(13125, gcd(24500, 1837500))) = 875$

Dvs. ligningen kan forkortes med 875 (man kunne også tidligere have skaleret normalvektoren ned):

$\dfrac{\overrightarrow{n_\alpha} \cdot (\langle x, y, z\rangle - \overrightarrow{OA})}{875} = 0$

$$28\,x - 2100 + 15\,y + 9\,z = 0$$

Dvs. at en ligning for den plan, som sejlet er en del af, er $\underline{\underline{28\,x + 15\,y + 9\,z - 2100 = 0}}$

Arealet af sejlskibets sejl bestemmes ved $A_{sejl} = T_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$

$$\frac{1}{2} \cdot len\left(\overrightarrow{n_\alpha}\right) = \frac{875}{2}\sqrt{1090} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 14444.12727$$

Dvs. arealet af sejlet er $\underline{\underline{14444\ mm^2}}$

b) Vinklen mellem to planer bestemmes som vinklen mellem to normalvektorer for planerne, og man har altså:

$$\frac{1}{2} \cdot len\left(\overrightarrow{n_\alpha}\right) = \frac{875}{2}\sqrt{1090} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 14444.12727$$

Dvs. arealet af sejlet er $\underline{\underline{14444\ mm^2}}$

$$\cos\left(v_{plan}\right) = \frac{\overrightarrow{n_\alpha} \bullet \overrightarrow{n_\beta}}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_\beta}\right|}$$

Normalvektoren for β aflæses ud fra ligningen:

$\overrightarrow{n_\beta} := \langle 28, 15, -7 \rangle :$

Så kan vinklen bestemmes:

$$Cos(v) = \frac{\overrightarrow{n_\alpha} \bullet \overrightarrow{n_\beta}}{len\left(\overrightarrow{n_\alpha}\right) \cdot len\left(\overrightarrow{n_\beta}\right)} \xrightarrow{\text{solve for v}} [[v = 28.24680548]]$$

Dvs. den spidse vinkel er $\underline{\underline{28.2°}}$

Opgave 13: a) Faskinens ydre udgøres af 6 rektangulære flader, der parvis er lige store:

$$O_{ydre} = 2 \cdot A_{top} + 2 \cdot A_{side1} + 2 \cdot A_{side2} =$$

$$2 \cdot h \cdot b + 2 \cdot h \cdot l + 2 \cdot b \cdot l = 2 \cdot h \cdot b + 2 \cdot h \cdot 10 + 2 \cdot b \cdot 10 = \underline{\underline{2 \cdot h \cdot b + 20 \cdot h + 20 \cdot b}}$$

b) Da det er oplyst, at $V = \frac{20 \cdot b \cdot h}{3}$ og $V = 100$, har man:

$$100 = \frac{20 \cdot b \cdot h}{3} \Leftrightarrow 300 = 20 \cdot b \cdot h \Leftrightarrow h = \frac{300}{20 \cdot b} \Leftrightarrow \underline{\underline{h = \frac{15}{b}}}$$

Nu kan det ydre areal udtrykt ved b bestemmes ved:

$$O(b) = 2 \cdot b \cdot \frac{15}{b} + 20 \cdot b + 20 \cdot \frac{15}{b} = 30 + 20b + \frac{300}{b}$$

Vi skal nu bestemme den b-værdi, der gør overfladearealet mindst muligt, og det gøres ved at finde nulpunkter for den afledede funktion og samtidig bestemme værdien af den anden afledede det pågældende sted og ud fra fortegnet tjekke, at det er lokalt minimum:

local O :

$$O(b) := 30 + 20\,b + \frac{300}{b} :$$

$$O'(b) = 0 \xrightarrow{\text{solve for b}} [[b = \sqrt{15}], [b = -\sqrt{15}]]$$

Kun den positive løsning benyttes, da $0 < b < 10$ (og $\sqrt{15} < 10$):

$O''\left(\sqrt{15}\right) = \frac{8}{3}\sqrt{15} > 0$ dvs. det er et lokalt minimum.

$\sqrt{15.} = 3.872983346$

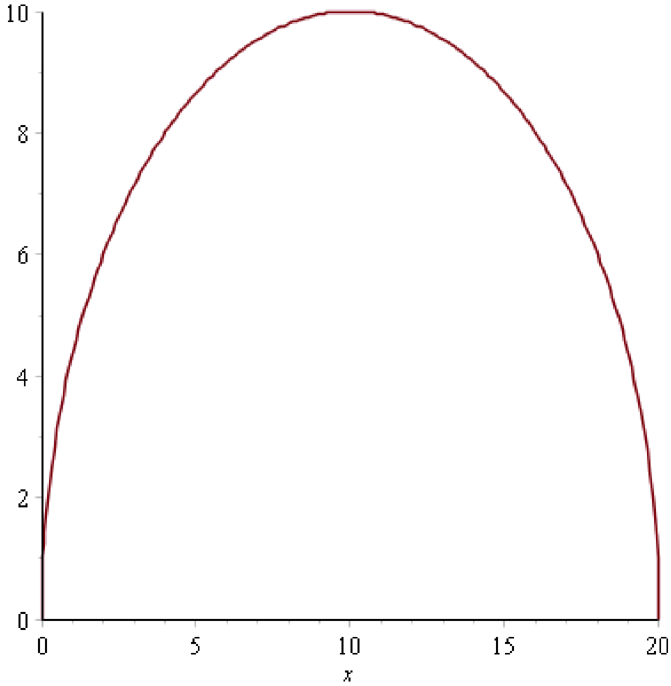
Dvs. for at faskinens ydre areal skal være mindst muligt, skal $\underline{\underline{b = 3.9\ m}}$

Opgave 14: a) $f(x)=\sqrt{-x^2+20x}$; $0 \le x \le 20$

$$f(x) := \sqrt{-x^2+20x} :$$

Grafen tegnes i det angivne interval ($Dm = [0, 20]$):

$plot(f(x), x = 0..20) =$



Når man kigger på forskriften, kan man se, at man har med en cirkel at gøre (radius 10 cm), og omdrejningslegemet er så en kugle. Dermed kan man med det samme se, at diameteren det bredeste sted er 20 cm. Men hvis man ikke opdager dette, kan man løse opgaven på den sædvanlige måde med at bestemme maksimumsstedet ud fra den afledede funktion:

$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 10]]$

$f''(10) = -\frac{1}{100}\sqrt{100} < 0$ Dvs. det er et lokalt maksimum.

Da $f(10) = 10$ angiver radius, er diameteren på det bredeste sted $\underline{\underline{20\ cm}}$

Hvis $h = 18$ har man:

$f(18) = 6$

Dvs. her er diameteren $\underline{\underline{12\ cm}}$

b) $O = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^h f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$

Hvis overfladearealet skal være 1005 (og her må man gå ud fra, at der menes 1005 cm^2), skal man løse ligningen:

$$1005 = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^h f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

$$1005 = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^h f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \xrightarrow{\text{solve}}$$

Warning, unable to determine if 20 is between 0 and h; try to use assumptions or use the AllSolutions option

$$15.99507178$$

Denne ligning volder problemer i Maple, men her findes løsningen med 'Numerically Solve from point' og begynde ved 10.
Man kan tjekke, at resultatet passer:

$$1005 = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{15.99507178} f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = 1005 = 319.9014356\, \pi$$

Dvs $\underline{\underline{h = 16.0}}$

En anden mulighed er at udnytte, at det er oplyst, at 10 < h < 20:

$$solve\left(1005 = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^h f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx\right) \text{ assuming } 10 < h < 20 = \frac{201}{4\,\pi} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 15.99507178$$

c) For at bestemme ligningen for kuglen, skal man kende radius og centrums koordinater. Radius er som allerede vist 10 cm.

Da centrum ligger 10 enheder henne - og PÅ – x-aksen, er $C(10,0,0)$

Hermed bliver kuglens ligning:

$$(x-10)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 10^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 100 - 20x + y^2 + z^2 = 100 \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{x^2 - 20x + y^2 + z^2 = 0}}$$

13. august 2015: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: $y = 3x + 4$

Når $x = 7$, har man $y = 3 \cdot 7 + 4 = 21 + 4 = \underline{\underline{25}}$

Hældningskoefficienten 3 fortæller os, at *y*-værdien øges med 3, hver gang *x*-værdien øges med 1. Så når *x*-værdien øges med 5, øges *y*-værdien med $3 \cdot 5 = \underline{\underline{15}}$.

Den matematiske måde at vise dette er:

$y_1 = 3x_1 + 4$

$y_2 = 3 \cdot (x_1 + 5) + 4 = 3 \cdot x_1 + 15 + 4 = 3 \cdot x_1 + 4 + 15 = y_1 + 15$

Dette viser, at hvis man lægger 5 til en given *x*-værdi, så øges *y*-værdien med 15.

Opgave 2: Når noget vokser med en fast procentdel, er det en eksponentiel udvikling, så vi skal kende begyndelsesværdien og fremskrivningsfaktoren for at angive modellen. Desuden skal vi have indført symboler for uafhængig og afhængig variabel.
Vi lader *t* være tiden målt i år efter 2015.
Vi lader *p* være prisen for varen målt i kr.
Da prisen for varen i 2015 var 213 kr., er begyndelsesværdien 213.
Da vækstraten er 4,5% pr. år, har man fremskrivningsfaktoren $a = 1 + 0{,}045 = 1{,}045$
Dermed bliver modellen:

$\underline{\underline{p(t) = 213 \cdot 1{,}045^t}}$

Opgave 3: Da det er en glad parabel (grenene peger opad), er $\underline{\underline{a > 0}}$

Toppunktets førstekoordinat er givet ved $\frac{-b}{2a}$. Da toppunktet ligger til højre for *y*-aksen, skal denne brøk altså være positiv, dvs. *a* og *b* skal have forskellige fortegn. Altså må $\underline{\underline{b < 0}}$.

Dette kan også ses ved at kigge på hældningen for den tangent til parablen, der rører parablen på *y*-aksen. *b* svarer til denne tangents hældning, og da hældningen ses at være negativ, er *b* negativ.

Da parablen skærer *y*-aksen på dennes positive del, er $\underline{\underline{c > 0}}$.

Da parablen ikke skærer *x*-aksen, er $\underline{\underline{d < 0}}$

Opgave 4: $l = 3 \cdot h + 4 \qquad b = 2 \cdot l + 1$

Ved i den anden ligning at substituere *l* med udtrykket på højresiden i den første ligning, får man bredden udtrykt ved højden:

$b = 2 \cdot (3 \cdot h + 4) + 1 = 6 \cdot h + 8 + 1 = 6 \cdot h + 9$

Da man nu både kender længden og bredden udtrykt ved højden, kan man finde rumfanget udtrykt alene ved højden:

$V = l \cdot b \cdot h = \underline{\underline{(3 \cdot h + 4) \cdot (6h + 9) \cdot h}}$

Opgave 5: Det undersøges, om f er en løsning til differentialligningen, ved at indsætte i denne og se, om man får en identitet. For at kunne indsætte skal man først have differentieret f, hvilket sker med produktreglen:

$$f'(x) = 1 \cdot \mathbf{e}^x + x \cdot \mathbf{e}^x = \mathbf{e}^x + x \cdot \mathbf{e}^x$$

Dette indsættes sammen med funktionsudtrykket i differentialligningen:

$$\mathbf{e}^x + x \cdot \mathbf{e}^x = \frac{x \cdot \mathbf{e}^x + x \cdot x \cdot \mathbf{e}^x}{x} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{e}^x + x \cdot \mathbf{e}^x = \mathbf{e}^x + x \cdot \mathbf{e}^x$$

<u>Da vi ender med en identitet, er *f* en løsning til differentialligningen.</u>

Opgave 6: Det bestemte integral bestemmes ved substitutionsmetoden. Man kan se, at kvadratrodens argument differentieret giver brøkens tæller, så det er dette argument, vi skal substituere:

$$t = x^3 + 2x + 4$$

$$\frac{dt}{dx} = 3x^2 + 2$$

$$dt = \left(3x^2 + 2\right) \cdot dx$$

$$x = 0 : t = 0^3 + 2 \cdot 0 + 4 = 4$$

$$x = 2 : t = 2^3 + 2 \cdot 2 + 4 = 16$$

Vi kan nu udregne integralet:

$$\int_0^2 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt{x^3 + 2x + 4}} dx = \int_4^{16} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \left[2 \cdot \sqrt{t}\right]_4^{16} = 2 \cdot \sqrt{16} - 2 \cdot \sqrt{4} = 2 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = \underline{\underline{4}}$$

13. august 2015: Delprøven MED hjælpemidler

Opgave 7: Det bemærkes, at uanset *t*-værdien er ingen af vektorerne nulvektoren.

restart

with(Gym) :

Først defineres vektorerne:

$\vec{a} := \langle 2, 5\rangle : \vec{b} := \langle t, 3\rangle :$

a) Da begge vektorer er egentlige vektorer, gælder:

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \bullet \vec{b} = 0.$

$solve\left(dotP\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0\right) = -\frac{15}{2}$

Dvs. $\underline{\underline{t = -\frac{15}{2}}}$

b) Vinklen v mellem to vektorer bestemmes ved $\cos(v) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Vi husker, at vinklen er i grader, så vi anvender Cos og ikke cos:

$solve\left(Cos(45) = \frac{dotP\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{len\left(\vec{a}\right) \cdot len\left(\vec{b}\right)}, t\right) = 7.000000005, \ -1.285714287$

Dvs. $\underline{\underline{t = -1.285714}} \vee \underline{\underline{t = 7}}$

Opgave 8: Funktionen er af typen $f(t) = a \cdot t + b$, så det er en lineær model.

a) Det bemærkes, at tiden måles i antal år EFTER 2007, og der laves så lineær regression:

$År := [0, 2, 4, 6] :$

$Antalfamilier := [244643, 263039, 281634, 298329] :$

$f(t) := LinReg(År, Antalfamilier, t) :$

$f(t) = 8982.64999999999\, t + 2.44963300000000\, 10^{5}$

Vi har altså:

$\underline{\underline{a = 8982.65}}$ og $\underline{\underline{b = 244963}}$

b) *a*-værdien fortæller os, at for hvert år øges antallet af danske familier med to personbiler med ca. 8983.

År 2020 svarer til $t = 13$, så man indtaster:

$f(13) = 3.61737750000000\, 10^{5}$

Dvs. ifølge modellen vil der i 2020 være $\underline{\underline{361738}}$ danske familier med to personbiler.

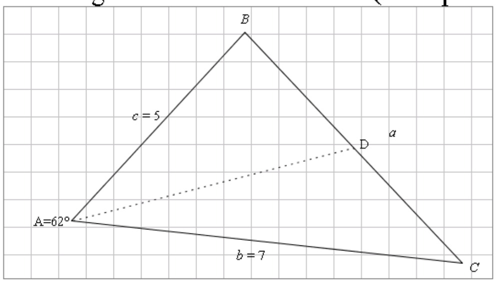
Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 9: I trekant ABC er oplyst $\angle A = 62°$, $c = 5$ og $b = 7$.

$restart$

$with(Gym):$

Først tegnes en skitse af trekant (inkl. punktet D, der kommer senere i opgaven):



De kendte størrelse defineres: $A := 62 : b := 7 : c := 5 :$

Da man kender en vinkel og de to sider, der danner denne vinkel, kan den sidste sidelængde bestemmes med en cosinusrelation:

$$Cos(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \xrightarrow{\text{solve for a}} [[a = 6.413812485], [a = -6.413812485]]$$

Da det er en sidelængde, forkastes den negative løsning, så man har:

$\underline{\underline{a = 6.4138}}$

Da man nu kender længden af siden a og dermed alle tre sidelængder, kan vinkel C bestemmes med en cosinusrelation.

$a := 6.413812485 :$

$$Cos(C) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} \xrightarrow{\text{solve for C}} [[C = 43.49705416]]$$

Dvs. $\underline{\underline{\angle C = 43.4971°}}$

b) Da arealerne af trekanterne ABD og ACD er lige store, må de hver være halvt så store som arealet af den store trekant ABC.

Arealet af denne kan bestemmes med ½-appelsinformlen, da man kender en vinkel og de to hosliggende siders længde:

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot Sin(A) = 15.45158287$$

Og dermed er $T_{ABD} = T_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 15.45158287 = 7.725791435 \approx \underline{\underline{7.7258}}$

Da linjestykket AD deler trekant ABC i to lige store arealer, er det en median (det er en af egenskaberne ved en median), og punktet D ligger derfor midt mellem B og C.

I trekant ACD kender vi derfor vinkel C og de to hosliggende siders længder. Den sidste sides længde kan så bestemmes ved en cosinusrelation:

$C := 43.49705416 :$

$$Cos(C) = \frac{b^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot a\right)^2 - AD^2}{2 \cdot b \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a\right)} \xrightarrow{\text{solve for AD}} [[AD = 5.168728311], [AD = -5.168728311]]$$

Da vi søger en sidelængde, forkastes den negative løsning, så vi har:

$\underline{\underline{|AD| = 5.1687}}$

Hvis man ikke opdager, at AD er en median, kan man stadig bestemme dens længde ved første at finde længden af CD ud fra arealformlen $T_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |CD| \cdot \sin(C)$:

$$7.725791435 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot CD \cdot Sin(C) \xrightarrow{\text{solve for CD}} [[CD = 3.206906242]]$$

Og så kan sidelængden $|AD|$ bestemmes med en cosinusrelation.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

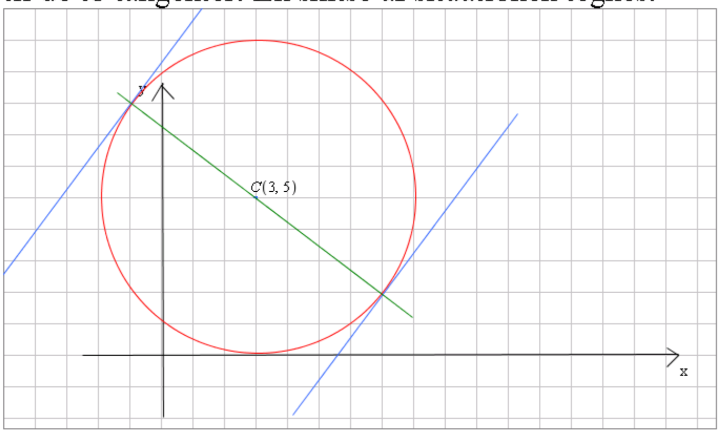
Opgave 10: Cirkel med ligningen $(x-3)^2+(y-5)^2=25$. Linje *m* med ligningen $y=\frac{4}{3}\cdot x$.

a) Der er flere måder at vise, at førsteaksen er tangent til cirklen.
Metode 1: Det vises, at førsteaksen og cirklen kun har ét punkt fælles.
Førsteaksen er karakteriseret ved $y=0$, dvs. den består af samtlige punkter, hvor andenkoordinaten er 0. Vi finder samtlige punkter på cirklen med andenkoordinaten 0 ved at indsætte i cirklens ligning:
$$(x-3)^2+(0-5)^2=25 \Leftrightarrow (x-3)^2+25=25 \Leftrightarrow (x-3)^2=0 \Leftrightarrow x=3$$
Cirklen og førsteaksen har derfor kun ét punkt fælles - nemlig $(3,0)$ - og dermed er førsteaksen tangent til cirklen.
Metode 2: Det vises, at afstanden fra førsteaksen til cirklens centrum er lig cirklens radius.
Ud fra cirklens ligning aflæses centrum til $C(3,5)$ og radius til $r=\sqrt{25}=5$.
Førsteaksen er en vandret linje, så afstanden mellem et punkt og førsteaksen er den numeriske værdi af punktets andenkoordinat. Da centrum har andenkoordinaten 5, er afstanden mellem centrum og førsteaksen altså 5, hvilket svarer til radius, dvs. førsteaksen er tangent til cirklen.

b) Ligningen for linjen m omskrives til formen: $3\cdot y=4\cdot x \Leftrightarrow 4\cdot x-3\cdot y=0$.

Dvs. vi kan aflæse, at en normalvektor til linjen m er $\overrightarrow{n_m}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$.

De to tangenter skal være parallelle med m, så m's normalvektor er også normalvektor til de to tangenter. En skitse af situationen tegnes:



De blå linjer er tangenterne. Da disse står vinkelret på den radius, der går fra centrum til til tangentens røringspunkt og dermed forlængelsen af denne (den grønne linje), er tværvektoren til m's normalvektor en normalvektor til den grønne linje. Så man har:

$$\overrightarrow{n_{grøn}}=\widehat{n_m}=\begin{pmatrix}-(-3)\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}.$$

Da man desuden kender et punkt på den grønne linje, nemlig C, kan vi finde ligningen for denne ud fra $a\cdot(x-x_0)+b\cdot(y-y_0)=0$:

$$3\cdot(x-3)+4\cdot(y-5)=0 \xrightarrow{\text{isolate for y}} y=-\frac{3}{4}x+\frac{29}{4}$$

Da vi kender cirklens ligning og ligningen for den grønne linje, kan de to røringspunkter bestemmes:

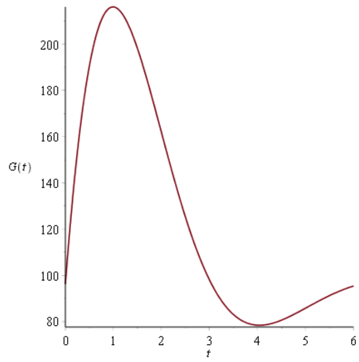
$$\left[(x-3)^2+(y-5)^2=25,\ y=-\frac{3}{4}x+\frac{29}{4}\right] \xrightarrow{\text{solve (specified)}} \{x=7, y=2\}, \{x=-1, y=8\}$$

Dvs. røringspunkterne er $\underline{\underline{(7,2) \text{ og } (-1,8)}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 11: $G(t) = 96 + 263 \cdot \mathbf{e}^{-0,63 \cdot t} \cdot \cos(1,03 \cdot t - 1,57)$; $0 \le t \le 6$

a) Funktionen defineres: $G(t) := 96 + 263 \cdot e^{-0.63 \cdot t} \cdot \cos(1.03 \cdot t - 1.57)$:
Det bemærkes, at tiden måles i radianer.
Det væsentlige ved skitsen er, at den tegnes i det angivne interval:
$plot(G(t), t = 0..6)$



2 timer svarer til $t = 2$, så man indtaster:
$G(2) = 161.8229215$

Dvs. at 2 timer efter indtagelsen af glukosen er glukosekoncentrationen i blodet $\underline{\underline{161.82\ \frac{mg}{dl}}}$

b) Da vi har et begrænset interval, kan vi bede Maple om at finde de største og mindste værdier:
$maximize(G(t), t = 0..6, location) = 216.1472413, \{[\{t = 0.9913184260\}, 216.1472413]\}$
$minimize(G(t), t = 0..6, location) = 78.41297649, \{[\{t = 4.041408381\}, 78.41297649]\}$

Dvs. den mindste værdi er $\underline{\underline{78.41\ \frac{mg}{dl}}}$ og den største værdi er $\underline{\underline{216.15\ \frac{mg}{dl}}}$.

Men vi kan også bruge differentialregning til at bestemme dette, og vi får så samtidig svaret på spørgsmål c).
Vi finder først ekstremumssteder ved at finde de steder, hvor den afledede funktion er 0.
Fortegnet for den anden afledede funktion disse steder fortæller os, om det er maksimum eller minimum.
Da en trigonometrisk funktion indgår, benyttes Gym-pakkens *intervalsolve*:
$intervalsolve(G'(t) = 0, t = 0..6) = [0.9913184260, 4.041408381]$
$G''(0.9913184260) = -175.1506482 < 0$ dvs. dette er et maksimumssted.
$G''(4.041408381) = 25.63836288 > 0$ dvs. dette er et minimumssted.
Vi har altså:
G er voksende i intervallerne $[0;0.99]$ og $[4.04; 6]$.
$\underline{\underline{G \text{ er aftagende i intervallet } [0.99\ t\,;\ 4.04\ t]}}$ (svaret på spørgsmål c)).

Vi mangler stadig at finde de maksimale og minimale værdier for glukosekoncentrationen i blodet
(hvis vi regner med, at vi ikke har anvendt maximize og minimize).
Den maksimale værdi kan enten findes i det fundne lokale maksimumssted eller i det højre intervalendepunkt, da dette afslutter et interval, hvor G er voksende.
Den minimale værdi kan enten findes i det fundne lokale minimumssted eller i det venstre intervalendepunkt, da det er begyndelsen på et interval, hvor G er voksende.
Vi finder derfor funktionsværdierne i endepunkterne og de lokale ekstremumssteder:
$G(0) = 96.20943392$
$G(0.9913184260) = 216.1472412$
$G(4.041408381) = 78.41297650$
$G(6) = 95.38649693$

Dvs. den mindste værdi er $\underline{\underline{78.41\ \frac{mg}{dl}}}$ og den største værdi er $\underline{\underline{216.15\ \frac{mg}{dl}}}$.


Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 12: Anvendelse af Benfords lov til evt. at afsløre valgfusk.

a) Vores nulhypotese er, at første ciffer på de tilfældigt udtrukne valgsteder følger den angivne fordeling. Da der er 4430 udtrukne valgsteder, kan den på baggrund af nulhypotesen forventede tabel bestemmes:

$a := 4430$:

Første ciffer	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Forventet antal	$0.301 \cdot a =$ 1333.430	$0.176 \cdot a =$ 779.680	$0.125 \cdot a =$ 553.750	$0.097 \cdot a =$ 429.710	$0.079 \cdot a =$ 349.970	$0.067 \cdot a =$ 296.810	$0.058 \cdot a =$ 256.940	$0.051 \cdot a =$ 225.930	$0.046 \cdot a =$ 203.780

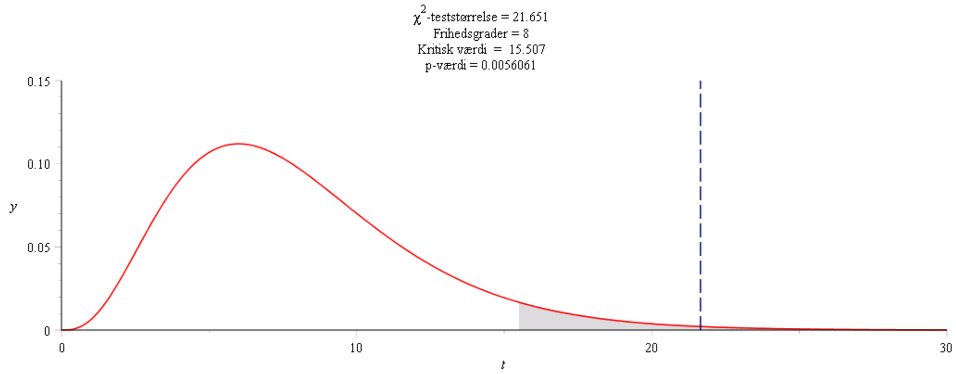
Naturligvis kan man ikke have et decimaltal i virkeligheden, men vi kan godt regne videre med decimaltallene.

b) Vi skal teste nulhypotesen med et χ^2 –Goodness-of-fit-test, da vi skal sammenligne det forventede antal med det faktisk observerede med et signifikansniveau på 5%.

$observeret := [1261, 784, 577, 454, 359, 350, 223, 232, 190]$:

$forventede := [1333.430, 779.680, 553.750, 429.71, 349.97, 296.81, 256.94, 225.93, 203.78]$:

$ChiKvadratGOFtest(observeret, forventede, level = 0.05)$



Som det ses, er p-værdien på 0,56%, og da den er mindre end vores signifikansniveau, må vi <u>forkaste nulhypotesen.</u>

Der er nemlig signifikant forskel mellem de forventede og de observerede værdier, og det tyder altså på, at der har været fusk ved valget.

Opgave 13:

$restart$

$with(Gym)$:

Først defineres de stedvektorer, der fører ud til punkterne A, B og C.

$\overrightarrow{OA} := \langle 10, 0, 0 \rangle : \overrightarrow{OB} := \langle 0, 30, 0 \rangle : \overrightarrow{OC} := \langle 0, 0, 20 \rangle$:

a) For at kunne bestemme en ligning for planen α skal man kende en normalvektor for planen samt et punkt, som ligger i planen. Vi kan benytte punktet A som punkt i planen. For at finde en normalvektor ses først på krydsproduktet mellem to ikke-parallelle vektorer, der ligger i planen:

$$\overrightarrow{AB} := \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} -10 \\ 30 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} := \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 600 \\ 200 \\ 300 \end{bmatrix}$$

Vi kunne godt anvende denne vektor som normalvektorer, men vi kan også vælge en vektor parallel med denne ved at skalere den ned med en faktor 100:

$\overrightarrow{n_\alpha} := \langle 6, 2, 3 \rangle$:

Nu benyttes ligningen for en plan: $a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + c \cdot (z - z_0) = 0$, hvor A er vores punkt:

$6 \cdot (x - 10) + 2 \cdot (y - 0) + 3 \cdot (z - 0) = 0 = 6\,x - 60 + 2\,y + 3\,z = 0$

Dvs. at planens ligning er $\underline{\underline{6\,x + 2\,y + 3\,z - 60 = 0}}$

Sejlet er trekantformet og har derfor et areal, der er halvt så stort som arealet af det rektangel, der udspændes af vektorerne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$, dvs. $T_{sejl} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$:

$$T_{sejl} = \frac{1}{2} \cdot len\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) = 350$$

Da man måler i enheden meter, har sejlet altså arealet $\underline{\underline{350 \text{ m}^2}}$

b) Vi har brug for en retningsvektor og et punkt på linjen for at bestemme parameterfremstillingen for en ret linje. Vi bruger D som punkt og $\overrightarrow{DE}$ som retningsvektor.

$\overrightarrow{OD} := \langle 6, -2, 9 \rangle : \overrightarrow{OE} := \langle 7, -7, 10 \rangle$:

$$\overrightarrow{DE} := \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En parameterfremstillingen for linjen l er dermed: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$

Skudhullet svarer til skæringen mellem linjen og planen, og denne skæring findes ved at indsætte linjens koordinatfunktioner i planens ligning:

$$6 \cdot (6 + t) + 2 \cdot (-2 - 5 \cdot t) + 3 \cdot (9 + t) - 60 = 0 \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t = -1]]$$

Denne værdi indsættes i parameterfremstillingen for at finde skudhullet:

$S(6 + (-1) \cdot 1, -2 + (-1) \cdot (-5), 9 + (-1) \cdot 1) = \underline{\underline{S(5, 3, 8)}}$

Vi ved, at dette punkt ligger i planen, men egentlig har vi ikke vist, at det også ligger på sejlet, så der må man henvise til opgaveformuleringen, hvor det er formuleret, som om dette skudhul findes (og ellers skal man bevise, at punktet ligger på sejlet).

Opgave 14:

a) $\frac{dS}{dt} = 1.2 - \frac{6 \cdot S}{100 - 2 \cdot t} \quad ; \; 0 \leq t < 50$

Det er oplyst, at der intet salt er i karret fra start, dvs. $S(0) = 0$.
Med denne begyndelsesbetingelse kan differentialligningen løses:

$$\left[S'(t) = 1.2 - \frac{6 \cdot S(t)}{100 - 2 \cdot t}, S(0) = 0 \right] \xrightarrow{\text{solve DE}} S(t) = 30 - \frac{3}{5}\, t + \frac{3}{12500}\, (-50 + t)^3$$

Dvs. at vores partikulære løsning er: $\underline{\underline{S(t) = 30 - \frac{3}{5} \cdot t + \frac{3}{12500} \cdot (t - 50)^3 \quad ; \; 0 \leq t < 50}}$

b) Først defineres funktionen:

$$S(t) := 30 - \frac{3}{5}\, t + \frac{3}{12500}\, (-50 + t)^3 :$$

Da vi kender definitionsmængden, kan vi anvende *maximize* til at finde det tidspunkt, hvor der er mest salt i karret:

$$maximize(S(t),\, t = 0..50,\, location) = \frac{20}{3}\sqrt{3},\, \left\{ \left[\left\{ t = 50 - \frac{50}{3}\sqrt{3} \right\}, \frac{20}{3}\sqrt{3} \right] \right\}$$

$$evalf\left(50 - \frac{50}{3}\sqrt{3}\right) = 21.13248653$$

Dvs. der er mest salt i karret efter <u>21.1 timer</u> efter start.
Det kan også bestemmes med differentialregning, hvor vi først finder ekstremumssteder som de steder, hvor den afledede funktion er nul, og efterfølgende bestemmes typen af sted ud fra den anden afledededes fortegn:

$$intervalsolve(S'(t) = 0,\, t = 0..50) = \left[50 - \frac{50}{3}\sqrt{3} \right]$$

$S''\left(50 - \frac{50}{3}\sqrt{3}\right) = -\frac{3}{125}\sqrt{3} < 0$ dvs. det er et lokalt maksimumssted.

Hermed har man fundet det søgte sted, da der ikke er andre ekstremumssteder.

Opgave 15:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

Området M kan deles op i en høj aflang til venstre og en del under grafen for f. Vi har brug for at kende det sted, hvor grafen skærer den øvre del af kvadratet, der udgøres af en del af linjen med ligningen $y = 5$.

Vi har: $f(x) = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$.

Så man har:

$$A_M = A_{aflang} + A_{under\ graf} = h \cdot b + \int_{\frac{1}{5}}^{5} f(x)\, dx = 5 \cdot \frac{1}{5} + \int_{\frac{1}{5}}^{5} \frac{1}{x}\, dx = 1 + 2\ln(5) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 4.2188$$

Dvs. at $\underline{\underline{A_M = 4.2188}}$

b) Når M drejes 360° om x-aksen, vil vores aflang danne en cylinder med radius 5 og højden $\frac{1}{5}$.

Så vores rumfang bliver:

$$V_{omdr} = V_{cylinder} + V_{grafdel} = \pi \cdot r^2 \cdot h + \pi \cdot \int_{\frac{1}{5}}^{5} f(x)^2\, dx = \pi \cdot 5^2 \cdot \frac{1}{5} + \pi \cdot \int_{\frac{1}{5}}^{5} \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{49}{5}\pi \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 30.788$$

Dvs. at $\underline{\underline{V_{omdr} = 30.788}}$

7. december 2015: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: $x^2+2x-35=0$

Da koefficienten *a* i andengradsleddet er 1, kan man faktorisere polynomiet ved at finde to hele tal, hvis produkt er -35 og sum 2. Disse to tal er 7 og -5.

$x^2+2x-35=0 \Leftrightarrow (x+7)\cdot(x-5)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=-7 \vee x=5}}$ (nulreglen benyttes i sidste trin)

Man kan også bruge diskriminantmetoden:

$d=b^2-4ac=2^2-4\cdot1\cdot(-35)=4+140=144>0$ dvs. 2 løsninger

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{d}}{2a}=\dfrac{-2\pm\sqrt{144}}{2\cdot1}=\dfrac{-2\pm12}{2}=\begin{cases}5\\-7\end{cases}$ Så man har $\underline{\underline{x=-7 \vee x=5}}$

Opgave 2: Vi lader *t* være tiden målt i antal år efter 2010.

N er antallet af klubmedlemmer.

Da man forventer en fast forøgelse med 25 om året, er modellen en lineær vækst med hældningen 25.

Da der er år 2010 (svarende til *t* = 0) er 420 medlemmer, er begyndelsesværdien 420.

Dvs. modellen er:

$\underline{\underline{N(t)=25\cdot t+420 \;\; ; \;\; t\geq 0}}$

Opgave 3: $f(x)=(x^2+7)\cdot\ln(x) \;\; ; \;\; x>0$

Funktionen skal differentieres med produktreglen $((g(x)\cdot h(x))'=g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h'(x)$:

$f'(x)=2x\cdot\ln(x)+(x^2+7)\cdot\dfrac{1}{x}$

Så kan differentialkvotienten i 1 findes:

$f'(1)=2\cdot1\cdot\ln(1)+(1^2+7)\cdot\dfrac{1}{1}=2\cdot0+8\cdot1=\underline{\underline{8}}$

Opgave 4: Da de to trekanter er ensvinklede, er forholdet mellem korresponderende sider konstant:

$\dfrac{|AB|}{|DE|}=\dfrac{|BC|}{|CE|} \Leftrightarrow |BC|=\dfrac{|AB|}{|DE|}\cdot|CE|$

$|BC|=\dfrac{6}{4}\cdot3=\dfrac{18}{4}=\dfrac{9}{2}$

Hermed er:

$|BE|=|BC|-|CE|=\dfrac{9}{2}-3=\dfrac{9}{2}-\dfrac{6}{2}=\underline{\underline{\dfrac{3}{2}}}$

Opgave 5: $f(x) = 8x^3 - 6x + 1 \quad P(2,-6)$

Først findes ved ledvis integration den form, som samtlige stamfunktioner er på:

$F_k(x) = \int f(x)\,dx = 2x^4 - 3x^2 + x + k$

Så findes *k*-værdien, der får grafen til at gå gennem *P*:

$-6 = 2\cdot 2^4 - 3\cdot 2^2 + 2 + k \Leftrightarrow -6 = 32 - 12 + 2 + k \Leftrightarrow -6 = 22 + k \Leftrightarrow k = -28$

Dvs. den søgte stamfunktion er:

$\underline{\underline{F(x) = 2x^4 - 3x^2 + x - 28}}$

Opgave 6: Parablen skal have toppunkt i $P(4,3)$.

1. metode:
   Parablen givet ved ligningen $y = x^2$ har toppunkt i origo.
   Den parallelforskydes med 4 langs *x*-aksen og 3 langs *y*-aksen ved:
   $(y-3) = (x-4)^2 \Leftrightarrow y = x^2 + 16 - 8x + 3 \Leftrightarrow \underline{\underline{y = x^2 - 8x + 19}}$

2. metode:
   Man tager udgangspunkt i en parabel med ligningen $y = -3x^2 + bx + c$. Dette er en parallelforskydning af parablen med ligningen $y = -3x^2$. Den vil have nulpunkterne $x = 3$ og $x = 5$, da de ligger lige langt på hver side af toppunktet, og da *y*-værdien bliver 3 mindre, når man går ændrer *x*-værdien med 1 til hver side for toppunktet.
   Ifølge faktoriseringsformlen for polynomier, har man derfor:
   $y = -3\cdot(x-3)\cdot(x-5) = -3\cdot\left(x^2 - 8x + 15\right) = \underline{\underline{-3x^2 + 24x - 45}}$

3. metode:
   Toppunktsformlen siger: $T\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{d}{4a}\right)$; $d = b^2 - 4ac$.
   Vi kan frit vælge *a*-værdien, og for nemheds skyld sættes den til $a = 1$.
   Vores førstekoordinat fra toppunktet giver så:
   $-\frac{b}{2} = 4 \Leftrightarrow b = -8$
   Andenkoordinaten for toppunktsformlen giver:

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 3 \Leftrightarrow -\frac{(-8)^2 - 4\cdot 1\cdot c}{4\cdot 1} = 3 \Leftrightarrow -\frac{64 - 4c}{4} = 3 \Leftrightarrow 64 - 4c = -12 \Leftrightarrow 76 = 4c \Leftrightarrow c = 19$$

Dvs. at ligningen er $\underline{\underline{y = x^2 - 8x + 19}}$

7. december 2015: Delprøven MED hjælpemidler

restart
with(Gym) :

Opgave 7: To vektorer er givet: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) To egentlige vektorer (og begge vektorer er egentlige, da ingen af dem er nulvektoren) er ortogonale, netop hvis deres prikprodukt er nul. Så prikproduktet skal udregnes:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) = -4 \neq 0$

Da prikproduktet ikke er 0, er de to vektorer $\underline{\underline{\text{ikke ortogonale}}}$

b) Linjen l er parallel med $\vec{a}$ og går gennem punktet $P(-8, 10)$.

<u>1. metode:</u> At linjen er parallel med $\vec{a}$, er det samme som at sige, at $\vec{a}$ er en retningsvektor for linjen. Da førstekoordinaten er 1 (man går 1 ud langs x-aksen) og andenkoordinaten 3 (man går 3 op ad y-aksen), er hældningen for linjen 3.
Da man nu kender hældningen og et punkt på linjen, kan ligningen bestemmes:

$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$

$y - 10 = 3 \cdot (x - (-8)) \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = 3x + 34$

Dvs. at ligningen er $\underline{\underline{y = 3x + 34}}$

<u>2. metode:</u> Når linjen er parallel med $\vec{a}$, er tværvektoren til $\vec{a}$ en normalvektor til linjen.

$\vec{n}_l = \hat{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Da man nu kender en normalvektor for linjen og et punkt på linjen, kan dens ligning bestemmes:

$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0$

$-3 \cdot (x - (-8)) + 1 \cdot (y - 10) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{-3x + y - 34 = 0}}$

<u>3. metode (omvejen)</u>: Man kan også anvende $\vec{a}$ som retningvektor for linjen og opskrive en parameterfremstilling, der skal omskrives til en ligning.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

restart

with(*Gym*) :

Opgave 8: De oplyste stykker defineres: $A := 40 : AH := 8 : HC := 12 :$

a) Da $\triangle ABH$ er retvinklet, har man: $\cos(A) = \dfrac{|AH|}{|AB|}$. Dette udregnes i Maple:

$$Cos(A) = \frac{AH}{AB} \xrightarrow{\text{solve for AB}} [[AB = 10.44325831]]$$

Dvs. at $\underline{\underline{|AB| = 10.44}}$

Dette stykke defineres nu, så det kan anvendes i næste udregning: $AB := 10.44325831 :$

Desuden har man $AC := AH + HC = 20$

Da vi kender en vinkel og de to hosliggende stykker i $\triangle ABC$, anvendes en cosinusrelation:

$$\cos(A) = \frac{|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2}{2 \cdot |AB| \cdot |AC|}$$

Det udregnes i Maple:

$$Cos(A) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \xrightarrow{\text{solve for BC}} [[BC = 13.74996888], [BC = -13.74996888]]$$

Da man søger en sidelængde, forkastes den negative løsning, og hermed er:

$\underline{\underline{|BC| = 13.75}}$

b) Vi kender alle tre sider i $\triangle ABC$ $(BC := 13.74996888 :)$, så $\angle B$ kan bestemmes ved:

$$\cos(B) = \frac{|AB|^2 + |BC|^2 - |AC|^2}{2 \cdot |AB| \cdot |BC|} :$$

$$Cos(B) = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} \xrightarrow{\text{solve for B}} [[B = 110.7773616]]$$

Dvs. $\underline{\underline{\angle B = 110.78°}}$

Metode 1 $(B := 110.7773616)$ den direkte udregning:

Arealerne af begge trekanter kan bestemmes med $\frac{1}{2}$ – appelsinformlen:

$$T_{ABH} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AH| \cdot \sin(A) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AH \cdot Sin(A) = 26.85118818$$

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \sin(B) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot Sin(B) = 67.12797040$$

Da $\dfrac{67.12797040}{26.85118818} = 2.499999998 \approx 2.5$ er $\underline{\underline{\text{arealet af } \triangle \text{ ABC 2, 5 gange større end arealet af } \triangle \text{ ABH}}}$

Metode 2 (den hurtige metode): Trekanterne ABH og BCH er retvinklede og deler den ene katete, nemlig $|BH|$. Arealet af en retvinklet trekant er $T_{retvinklet} = \frac{1}{2} \cdot kat_1 \cdot kat_2$, og man har altså:

$$\frac{T_{BCH}}{T_{ABH}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |BH| \cdot |AH|}{\frac{1}{2} \cdot |BH| \cdot |CH|} = \frac{|AH|}{|AC|} = \frac{12}{8} = 1.5$$

Og da $\triangle ABC$ er opbygget af ovenstående to trekanter, har man:

$$\frac{T_{ABC}}{T_{ABH}} = \frac{T_{ABH} + T_{BCH}}{T_{ABH}} = 1 + \frac{T_{BCH}}{T_{ABH}} = 1.5 + 1 = 2.5$$

$restart$

$with(Gym):$

Opgave 9: Modellen for udviklingen af aktiekursen for en virksomhed er $y = b \cdot a^x$.

a) Det bemærkes, at antal år måles i antal år EFTER 2000. Så listerne bliver:

$År := [0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14]:$

$Aktiekurs := [13.9, 27.0, 31.9, 40.9, 66.3, 99.9, 171.1, 271.8]:$

Da det er oplyst, at modellen er eksponentiel, og da man har mere end to observationer, skal der laves eksponentiel regression:

$y(x) := ExpReg(År, Aktiekurs, x):$

$y(x) = 14.3855353333004\ 1.22396494269302^x$

Dvs. at $\underline{\underline{a = 1.224 \text{ og } b = 14.39}}$

b) Da det er en eksponentiel model, er a fremskrivningsfaktoren, der er knyttet til vækstraten r ved $a = 1 + r$.

Vækstraten er $r = 1.224 - 1 = 0.224 = 22.4$ %, dvs. at aktiekursen er vokset med 22.4 % om året.

Fordoblingstiden beregnes ved:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2.)}{\ln(1.22396494269302)} = 3.429799454$$

Dvs. at fordoblingstiden for virksomhedens aktiekurs ved årsafslutningen er 3.4 år

c) Hvis aktiekursen skal overstige 500, har man:

$y(x) > 500 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[17.55795725 < x]]$

Det vil sige, at i år 2018 vil aktiekursen ifølge modellen overstige 500 (da det er aktiekursen ved årsafslutningen, må man ikke angive årstallet som andet end et heltal).

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 10:

restart

with(*Gym*) :

a) Funktionen defineres i Maple. Det bemærkes, at tiden *t* måles i radianer.

$d(t) := 2\cdot\sin(0.52\cdot t - 3.14) + 7 :$

Da sinusfunktionen giver værdier i intervallet [-1,1], har man:

$d_{min} = 2\cdot(-1) + 7 = 5$

$d_{max} = 2\cdot 1 + 7 = 9$

Dvs. at den minimale vanddybde er 5 m, og den maksimale vanddybde er 9 m

Maple-metoden: Man kan også anvende Maple til at bestemme ekstrema. Man skal her bemærke, at da tiden måles i timer, skal man se på intervallet [0,24] for at få hele døgnet med:

$minimize(d(t), t = 0..24) = 5.$

$maximize(d(t), t = 0..24) = 9.$

Opgave 11:

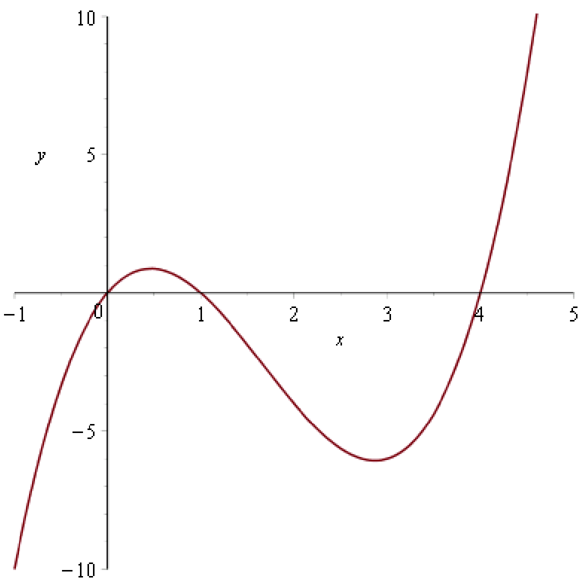
restart

with(*Gym*) :

$f(x) := x^3 - 5x^2 + 4x :$

a) Det er et tredjegradspolynomium, så når grafen tegnes, skal man være opmærksom på at få begge de omtalte punktmængder med. Desuden ved man, at grafen ikke vil kunne vende flere gange, når man har de to punktmængder med, da et tredjegradspolynomium højst kan have to lokale ekstremumssteder.

$plot(f(x), x = -1..5, y = -10..10)$



For at kunne bestemme arealerne, skal man kende de tre steder, hvor grafen skærer $x-$aksen, da disse steder fungerer som grænser for de bestemte integraler, der skal anvendes, når arealerne skal bestemmes:

$$f(x)=0 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x=0],\ [x=4],\ [x=1]]$$

De tre steder er nu fundet, og det bemærkes, at den første punktmængde ligger over x-aksen, mens den anden ligger under (hvorfor arealet bestemmes ved at skifte fortegn på det bestemte integral):

$$A_{samlet}=A_{lille}+A_{stor}=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{71}{6}$$

Dvs. at det samlede areal er: $\underline{\underline{A_{samlet}=\frac{71}{6}}}$

b) Når de to punktmængder roteres 360° om førsteaksen, er det ligegyldigt, om de ligger over eller under x-aksen, og derfor kan rumfanget bare bestemmes med grænserne 0 og 4.

$$V_{samlede}=\pi\cdot\int_0^4 f(x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{5632}{105}\pi \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 168.5090460$$

Dvs. at det samlede rumfang er $\underline{\underline{168.51}}$

Opgave 12: $A(t)$ betegner olieudslippets areal målt i m^2, og t er tiden målt i timer efter olieudslippets start.

restart

with(*Gym*) :

$A(t) := 8\cdot t^{1.5}$:

a) Differentialkvotienten i 100 beregnes:

$A'(100)=120.00$

Dvs. at 100 timer fra starten af olieudslippet, vokser olieudslippets areal med 120 m^2 pr. time.

b) $A_{\max}=10^4\cdot V^{0.75}$

Når oliemængden er 1,5 m^3, er det maksimale areal:

$$A_{\max}=10^4\cdot V^{0.75}=10^4\cdot 1.5^{0.75}=13554.03005$$

Dvs. at det *maksimale areal er* 13554 m^2

Tidspunktet for dette maksimale areal bestemmes ud fra udtrykket for $A(t)$:

$$A(t)=13554.03005 \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t=142.1190529]]$$

Dvs. at det maksimale olieudslip nås 142 timer efter starten af olieudslippet.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 13: Kugles har radius 5 og centrum i $C(2, 3, -4)$.

restart

with(Gym) :

a) Ligningen for kuglen med centrum i $C(a, b, c)$ og radius r er $(x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2 = r^2$

Så denne kugle har ligningen:

$$\underline{\underline{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 25}}$$

Punktet $P(6, 0, -4)$ ligger på linjen, netop hvis dets koordinater er en løsning til kuglens ligning, dvs. netop hvis de indsat giver et sandt udsagn:

$(6-2)^2 + (0-3)^2 + (-4+4)^2 = 25 \Leftrightarrow$

$4^2 + 3^2 + 0^2 = 25 \quad \Leftrightarrow$

$16 + 9 = 25$

<u>Da dette er et sandt udsagn, ligger P på kuglen.</u>

b) Vektoren $\overrightarrow{PC}$ er en normalvektor for tangentplanen α , der tangerer kuglen i P. Den bestemmes ud fra stedvektorerne til de to punkter:

$\overrightarrow{OC} := \langle 2, 3, -4 \rangle : \overrightarrow{OP} := \langle 6, 0, -4 \rangle :$

$$\overrightarrow{PC} := \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \overrightarrow{n_\alpha}$$

Da man kender punktet $P(x_0, y_0, z_0)$ på tangentplanen og nu har en normalvektor $\overrightarrow{n_\alpha} = (n_1, n_2, n_3)$ til tangentplanen, kan ligningen bestemmes ved $n_1 \cdot (x - x_0) + n_2 \cdot (y - y_0) + n_3 \cdot (z - z_0) = 0$:

$$-4 \cdot (x-6) + 3 \cdot (y-0) + 0 \cdot (z-(-4)) = 0 \overset{\text{simplify}}{=} -4x + 24 + 3y = 0$$

Dvs. at tangentens ligning er $\underline{\underline{-4x + 3y + 24 = 0}}$

c) Parameterfremstillingen for linjen m er

$\langle x, y, z \rangle = \langle 3, -4, 2 \rangle + t \cdot \langle 0, 0, -6 \rangle$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 - 6t \end{bmatrix}$$

Linjen m ligger i planen, netop hvis dens koordinater indsat i planens ligning giver et sandt udsagn for alle t-værdier.

$-4 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) + 24 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

<u>Da dette er et sandt udsagn, ligger linjen m i planen.</u>

Det undersøges, om linjen skærer kuglen, ved at indsætte linjens koordinater i kuglens ligning og se, om der er to værdier for t, der giver et sandt udsagn (hvis der er én værdi, tangerer linjen kuglen):

$$(3-2)^2 + (-4-3)^2 + (2-6t+4)^2 = 25 \xrightarrow{\text{solve for t}} \left[\left[t = 1 + \frac{5}{6}\,\mathrm{I}\right], \left[t = 1 - \frac{5}{6}\,\mathrm{I}\right]\right]$$

Da begge løsninger er komplekse, er der ingen reelle værdier for t, der gør udsagnet sandt,

<u>så linjen m skærer IKKE kuglen.</u>

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 14: $V = 2.6 \cdot a^2 \cdot h$ og $O = 2.6 \cdot a^2 + 6 \cdot a \cdot h$

restart

with(Gym) :

a) Hvis rumfanget skal være 1000 cm^3, har man:

$$1000 = 2.6 \cdot a^2 \cdot h \;\Leftrightarrow\; h = \frac{1000}{2.6 \cdot a^2} = \frac{10000}{26 \cdot a^2} = \underline{\underline{\frac{5000}{13 \cdot a^2}}}$$

b) Overfladearealet udtrykt ved sidelængden bliver så (først "frigives" den beskyttede variabel O):

local O :

$$O(a) := 2.6 \cdot a^2 + \frac{6 \cdot a \cdot 5000}{13 \cdot a^2} :$$

For at finde den sidelængde, der giver det mindst mulige areal, ses på de sidelængder, hvor den afledede funktion giver nul, samt fortegnet for den anden afledede disse steder:

$$O'(a) = 0 \xrightarrow{\text{solve for a}}$$

$[[a = 7.627663395], [a = -3.813831697 + 6.605750272\,I], [a = -3.813831697 - 6.605750272\,I]]$

To af løsningerne er komplekse, så dem ses der bort fra:

$O''(7.627663395) = 15.60000000 > 0$, dvs. det er et lokalt minimumssted.

Da dette lokale minimumssted er det eneste lokale ekstremumssted, er det også det globale minimumssted.

Så overfladearealet for vasen bliver mindst muligt, når $\underline{\underline{a = 7.6\ cm}}$

Opgave 15: Differentialligningen er $\frac{dA}{dt} = \frac{p \cdot A}{100} + s$, hvor A er opsparingen målt i kr., p er rentefoden angivet i procent, s er den faste årlige indbetaling i kr. og t er tiden målt i år.

restart

with(*Gym*) :

a) Da der står 50000 kr. fra start, har man $A(0) = 50000$. Dermed kan den partikulære løsning til differentialligningen bestemmes:

$$\left[A'(t) = \frac{3 \cdot A(t)}{100} + 7000, A(0) = 50000\right] \xrightarrow{\text{solve DE}} A(t) = -\frac{700000}{3} + \frac{850000}{3} e^{\frac{3}{100} t}$$

Dvs. at $\underline{\underline{A(t) = -\frac{700000}{3} + \frac{850000}{3} e^{\frac{3}{100} \cdot t}}}$

$$A(t) := -\frac{700000}{3} + \frac{850000}{3} e^{\frac{3}{100} t} :$$

Hvis opsparingen skal være 100000, har man $A(t) = 100000$:

$$A(t) = 100000 \xrightarrow{\text{solve}} 5.417297650$$

Dvs. at opsparingen når 100000 kr. efter $\underline{\underline{5.4 \text{ år}}}$

restart

b) Differentialligningen løses nu med ukendt s og begyndelsesbetingelsen $A(0) = 30000$:

$$\left[A'(t) = \frac{2.5 \cdot A(t)}{100} + s, A(0) = 30000\right] \xrightarrow{\text{solve DE}} A(t) = -40\, s + e^{\frac{1}{40} t} (30000 + 40\, s)$$

$$A(t) := -40\, s + e^{\frac{1}{40} t} (30000 + 40\, s) :$$

Hvis opsparingen skal være oppe på 70000 kr. efter 8 år, har man $A(8) = 70000$:

$$solve(A(8) = 70000, s) = -\frac{250 \left(3 e^{\frac{1}{5}} - 7\right)}{e^{\frac{1}{5}} - 1} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 3766.655570$$

Dvs. at opsparingens faste størrelse skal være $\underline{\underline{3766.66 \ kr.}}$