Løsninger til eksamensopgaver på A-niveau 2016

24. maj 2016: Delprøven UDEN hjælpemidler

<u>*Opgave 1:*</u> Da trekanterne er ensvinklede, er forholdene mellem korresponderende linjestykker i de to trekanter det samme, dvs.

$$\frac{|EF|}{|BC|}=\frac{|AF|}{|AC|} \Leftrightarrow |EF|=\frac{|AF|}{|AC|}\cdot|BC|$$

$$|EF|=\frac{3}{9}\cdot 12=\frac{36}{9}=\underline{\underline{4}}$$

Da trekant *ABC* er retvinklet, kan man anvende Pythagoras' Læresætning til at bestemme længden af hypotenusen:

$$|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$$

$$|AB|=\sqrt{9^2+12^2}=\sqrt{81+144}=\sqrt{225}=\underline{\underline{15}}$$

Man kan også komme frem til dette ved at bemærke, at den lille trekant er den velkendte 3-4-5-kant og skalafaktoren ved forstørrelsen er 3.

Opgave 2: Ligningssystem kan løses ved at isolere *y* i den øverste ligning og indsætte det tilsvarende udtryk på *y*'s plads i den nederste (substitutionsmetoden), eller man kan som her anvende lige store koefficienters metode. Her vælges at få numerisk lige store koefficienter foran *y* ved at forlænge den øverste ligning med 3, og da fortegnene er forskellige, skal ligningerne lægges sammen i stedet for at trækkes fra hinanden:

$$3x+y-11=0 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 9x+3y-33=0 \\ 2x-3y+11=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 11x-22=0 \Leftrightarrow 11x=22 \Leftrightarrow x=2$$

Dette indsættes i den første ligning for at bestemme y:

$$3\cdot 2+y-11=0 \Leftrightarrow y=5$$

Dvs. $\underline{\underline{(x,y)=(2,5)}}$

Opgave 3: $\frac{dy}{dx}=y\cdot(x-1) \quad P(3,5)$

For at kunne bestemme en ligning for tangenten i *P* skal man kende røringspunktets koordinater og tangentens hældning. Vi kender allerede koordinaterne, da røringspunktet er *P*.
Da *f* er en løsning til differentialligningen, kan vi finde tangentens hældning ved at indsætte *P*'s koordinater i differentialligningen:

$$\frac{dy}{dx}=5\cdot(3-1)=10$$

Værdierne indsættes i tangentens ligning:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

$$y-5=10\cdot(x-3) \Leftrightarrow \underline{\underline{y=10x-25}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 4: Da det årlige antal myg faldt med 70% om året, dvs. en fast procentdel, er der tale om en eksponentiel udvikling, så denne information i opgaven er overflødig.

Vi indfører nu følgende variable:

N: Antal årlige indsamlede malariamyg. Begyndelsesværdien er 5382.

t: Tiden målt i antal år efter 2004.

Da vækstraten er $r = -70\%$, er fremskrivningsfaktoren $a = 1 + r = 1 - 0,70 = 0,3$, så modellen er:

$$\underline{\underline{N(t) = 5382 \cdot 0,3^t}}$$

Opgave 5: $f(x) = (2x+1)\cdot \ln(x)\ ;\ x > 0 \qquad g(x) = \frac{1}{x} + 2\cdot \ln(x)\ ;\ x > 0$

Integrationsprøven anvendes til at se, om *f* er en stamfunktion til *g*, dvs. *f* differentieres, og det tjekkes, om $f'(x) = g(x)$:

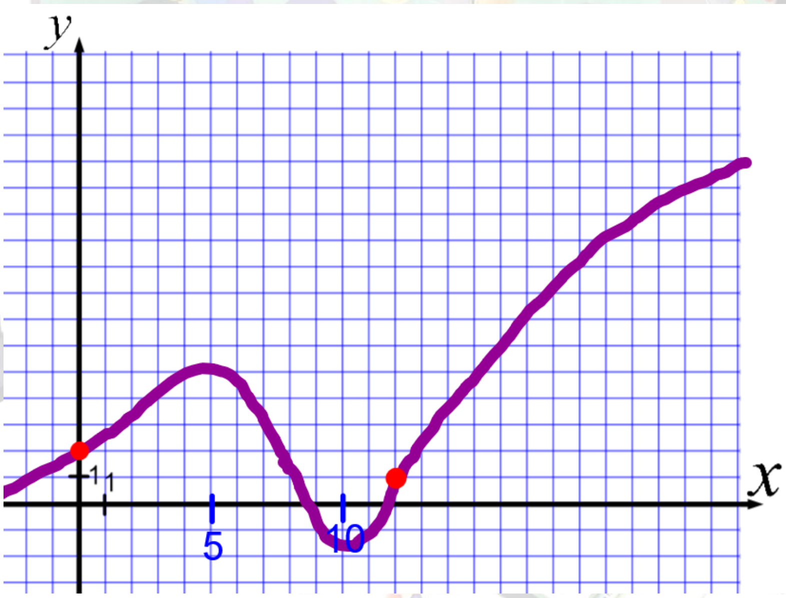
f er en produktfunktion, så produktreglen anvendes ved differentiation:

$$f'(x) = 2\cdot \ln(x) + (2x+1)\cdot \frac{1}{x} = 2\cdot \ln(x) + 2 + \frac{1}{x} \neq g(x)$$

Den afledede funktion af *f* afviger med konstanten 2 fra *g*, dvs. <u>*f* er IKKE en stamfunktion til *g*</u>

Opgave 6: $f(0) = 2$ og $f(12) = 1$

Der er ikke oplyst noget om *f* 's definitionsmængde, men da fortegnsskemaet ikke er begrænset, må man antage at $Dm(f) = \mathbb{R}$. Fortegnsskemaet for *f* ' fortæller os, at *f* er voksende i $]-\infty, 5]$ og i $[10, \infty[$, og at *f* er aftagende i $[5, 10]$. Da *f* er differentiabel, skal kurven være glat, og den skal gå gennem punkterne $(0, 2)$ og $(12, 1)$.



Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

24. maj 2016: Delprøven MED hjælpemidler

Opgavesættet regnes i Maple:

restart

with(*Gym*) :

Opgave 7: $f(t) = b \cdot a^t$

a) Det ses ud fra funktionsforskriften, at modellen er en eksponentiel udvikling, og man kender mere end to punkter, skal der laves regression. Det bemærkes, at *t* angiver tiden målt i antal år EFTER 2011:

$Tid := [0, 1, 2, 3]$:

$Omsætning := [0.3, 0.8, 1.6, 4.9]$:

$f(t) := ExpReg(Tid, Omsætning, t)$:

$f(t) = 0.300326500419849\ 2.47756722422762^t$

Dvs. at $\underline{\underline{a = 2.478}}$ og $\underline{\underline{b = 0.3003}}$

b) År 2015 svarer til $t = 4$:

$f(4) = 11.3160652726945$

Dvs. at i 2015 er ifølge modellen omsætningen af certifikater på fondsbørsen $\underline{\underline{\text{11.32 mia. kr.}}}$

a-værdien er fremskrivningsfaktoren, dvs. vækstraten er:

$r = a - 1 = 2.47756722422762 - 1 = 1.47756722422762$

Dvs. den årlige vækstrate er $\underline{\underline{148\ \%}}$

c) Da man kender fremskrivningsfaktoren *a*, kan man bestemme fordoblingstiden:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(2.47756722422762)} = 1.102199071 \ln(2) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 0.76399$$

Dvs. der går $\underline{\underline{9\ \textit{måneder}}}$ før omsætningen er fordoblet.

Opgave 8:

a) Da alle 12 ligebenene trekanter er ens, og der 12 ens vinkler *v*, der tilsammen skal være 360°, så:

$$v = \frac{360°}{12} = \underline{\underline{30°}}$$

b) Da alle 12 trekanter er ens, og det samlede areal er 22 m^2, er arealet af en enkelt trekant:

$$T := \frac{22\ m^2}{12} = \frac{11}{6}\ m^2$$

I den ligebenede trekant kaldes længden af de to lige lange sider for *y* , og $\frac{1}{2}$ –appelsinformlen giver:

$$T = \frac{1}{2} \cdot y \cdot y \cdot Sin(30) \xrightarrow{\text{solve for y}} [[y = -2.708012802\ m], [y = 2.708012802\ m]]$$

Da det er en sidelængde, forkastes den negative længde.

Da vi nu kender to sider og den mellemliggende vinkel, kan vi benytte en cosinusrelation til at bestemme den sidste sidelængde:

$$\cos(v) = \frac{y^2 + y^2 - x^2}{2 \cdot y \cdot y}$$

$$Cos(30) = \frac{(2.708012802\ m)^2 + (2.708012802\ m)^2 - x^2}{2 \cdot 2.708012802\ m \cdot 2.708012802\ m} \xrightarrow{\text{solve for x}}$$

$[[x = -1.401770574\ m], [x = 1.401770574\ m]]$

Da det er en sidelængde, forkastes den negative løsning, dvs. $\underline{\underline{x = 1.40\text{ m}}}$

Opgave 9: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x$

For at gøre det nemmere med udregningerne gemmes funktionen i Maple: $f(x) := x^3 - 5x^2 + 4x$:

a) f er et tredjegradspolynomium uden konstantled, og man kan ret nemt faktorisere det:

$f(x) = x \cdot \left(x^2 - 5x + 4\right) = x \cdot (x - 4) \cdot (x - 1)$

Dvs. nulpunkterne bestemmes ved nulreglen:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x - 4) \cdot (x - 1) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0 \vee x = 1 \vee x = 4}}$

Man kunne selvfølgelig også blot have ladet Maple bestemme nulpunkterne:

$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 0\}, \{x = 4\}, \{x = 1\}$

b) For at bestemme monotoniforholdene bestemmes først de lokale ekstremumssteder (og evt. vandrette vendetangenter). Da det er et tredjegradspolynomium med positiv tredjegradskoefficient, der skærer x-aksen tre steder, kan man dog med det samme forudsige, at man vil få et "voksende-aftagende-voksende"-forløb.

Først bestemmes de steder, hvor der er vandret tangent (den afledede funktion har værdien 0):

$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{x = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{13}\right\}, \left\{x = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{13}\right\}$

Fortegnet for den anden afledede bestemmes de to steder for at afgøre, om der er tale om maksimum- eller minimumsteder:

$f''\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{13}\right) = -2\sqrt{13} < 0$ dvs. lokalt maksimumssted

$f''\left(\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{13}\right) = 2\sqrt{13} > 0$ dvs. lokalt minimumssted

Man har dermed:

f er voksende i $\left]-\infty, \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{13}\right]$, aftagende i $\left[\frac{5}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{13}, \frac{5}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{13}\right]$ og voksende i $\left[\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{13}, \infty\right[$

c) Tangenten l har ligningen $y = x - 9$, dvs. den har hældningen 1.

Da linjen m er parallel med l, har den også hældningen 1.

Man skal altså finde de to steder, hvor den afledede funktion antager værdien 1, og det ene af disse steder skal så vise sig at være $x = 3$, mens det andet sted vil være førstekoordinaten til Q:

$f'(x) = 1 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 3\}, \left\{x = \frac{1}{3}\right\}$

Dvs. at førstekoordinaten til Q er $\underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

Opgave 10.

a) Først bestemmes "i alt" i begge rækker og begge søjler og samlet set:

	Bor sammen med begge forældre	Bor sammen med én forælder	I alt
BMI under 25	120	201	321
BMI over 25	75	173	248
I alt	195	374	569

Ifølge nulhypotesen er familietype og BMI uafhængige, så hvis det er $\frac{321}{569}$ af børnene, der har BMI under 25, og der er 195 børn, der bor sammen med begge forældre, må man forvente $\frac{321}{569} \cdot 195 =$

$\frac{62595}{569} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 110.01$ dvs. 110 børn, der bor sammen med begge forældre og har BMI under 25.

På samme måde findes de andre forventede værdier ved at multiplicere "i alt" fra række og søjle og dividere med det samlede i alt:

FORVENTET	Bor sammen med begge forældre	Bor sammen med én forælder	I alt
BMI under 25	$\frac{195 \cdot 321.}{569} = 110.0087873 \xrightarrow{\text{round}} 110$	$\frac{374 \cdot 321}{569.} = 210.9912127 \xrightarrow{\text{round}} 211$	321
BMI over 25	$\frac{195 \cdot 248}{569.} = 84.99121265 \xrightarrow{\text{round}} 85$	$\frac{374 \cdot 248.}{569} = 163.0087873 \xrightarrow{\text{round}} 163$	248
I alt	195	374	569

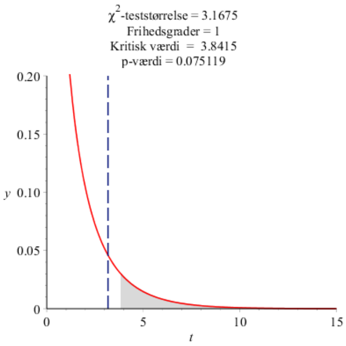
Dette kunne dog også have været bestemt med Gym-pakkens *forventet*:

$$M := \begin{bmatrix} 120 & 201 \\ 75 & 173 \end{bmatrix}:$$

$$forventet(M) = \begin{bmatrix} 110.01 & 210.99 \\ 84.991 & 163.01 \end{bmatrix}$$

Der skal foretages et χ^2-uafhængighedstest med signifikansniveauet 5%:

$ChiKvadratUtest(M, level = 0.05) =$



Da p-værdien er over 5% (0,075 > 0,05), skal **nulhypotesen IKKE forkastes**.
Der er altså ikke signifikant forskel på børnenes BMI afhængigt af, om de bor sammen med begge forældre eller én forælder.

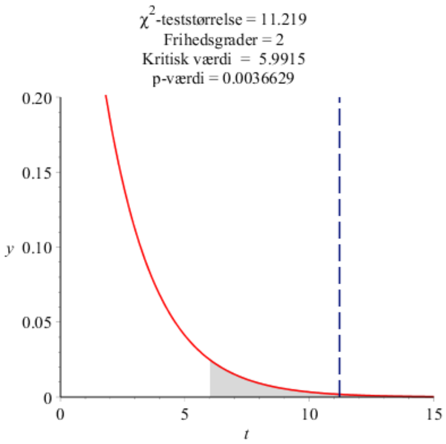
b) Der skal være samme "i alt" som før, så man får:

OBSERVERET	Bor sammen med begge forældre	Bor på skift mellem forældre	Bor udelukkende med den ene forælder	I alt
BMI under 25	120	100	321 − 120 − 100 = 101	321
BMI over 25	75	61	248 − 75 − 61 = 112	248
I alt	195	161	213	569

Der foretages igen et χ^2-uafhængighedstest med signifikansniveauet 5%:

$$N := \begin{bmatrix} 120 & 100 & 101 \\ 75 & 61 & 112 \end{bmatrix} :$$

$ChiKvadratUtest(N) =$



Da p-værdien er under 5% (0,0037 < 0,05) **forkastes nulhypotesen**.
Dvs. der er signifikant forskel på BMI afhængigt af familietype.

Bemærkning: Det er strengt ulovligt inden for statistik at ændre kategoriseringen efter et test. Man skal inden testet have lagt sig fast på en kategorisering. Men opgaven kan bruges til at illustrere, hvordan kategoriseringen har betydning for konklusionen.

Opgave 11.
Punkterne lægges ind i Maple som de tilsvarende stedvektorer:

$\overrightarrow{OA} := \langle 22, 0, 0\rangle : \overrightarrow{OB} := \langle 22, 62, 0\rangle : \overrightarrow{OC} := \langle 18, 68, 32\rangle : \overrightarrow{OD} := \langle 18, 0, 32\rangle : \overrightarrow{OE} := \langle 27, 0, 43\rangle :$

a) Arealet af den trekantede glasflade CDE kan bestemmes ved hjælp af to vektorer, der udspænder trekanten:

$$\overrightarrow{DE} := \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC} := \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \begin{bmatrix} 0 \\ 68 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Man har så $T_{CDE} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{DC}\right|$. Dette kan beregnes med Gym-pakken ved:

$$T_{CDE} = \frac{1}{2} \cdot len\left(\overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{DC}\right) = 34\sqrt{202} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 483.2307936$$

Dvs. at arealet af glasfladen er $\underline{\underline{483.23\ \text{m}^2}}$

b) Vinklen mellem plader bestemmes som vinklen mellem deres normalvektorer (der er to vinkler - en spids og en stump - og da det ikke oplyses, hvilken af disse man søger, kan begge bruges).

Da et gulvplan er parallelt med *xy*-planen, er en normalvektor for gulvplanen:

$\overrightarrow{n_{gulv}} := \langle 0, 0, 1 \rangle$:

Som normalvektor for glasfladen *CDE* anvendes krydsproduktet mellem to retningsvektorer:

$$\overrightarrow{n_{glas}} := \overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{DC} = \begin{bmatrix} -748 \\ 0 \\ 612 \end{bmatrix}$$

Vinklen *v* mellem disse vektorer bestemmes ved $\cos(v) = \dfrac{\overrightarrow{n_{gulv}} \cdot \overrightarrow{n_{glas}}}{\left|\overrightarrow{n_{gulv}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_{glas}}\right|}$.

Dette gøres med Gym-pakken ved:

$$Cos(v) = \frac{\overrightarrow{n_{gulv}} \cdot \overrightarrow{n_{glas}}}{len\left(\overrightarrow{n_{gulv}}\right) \cdot len\left(\overrightarrow{n_{glas}}\right)} \xrightarrow{\text{solve for v}} [[v = 50.71059314]]$$

Dvs. $\underline{\underline{v = 50.7°}}$

c) Der skal først bestemmes parameterfremstillinger for de to linjer, som stålwirerne er en del af.

Man bruger vektoren mellem de to punkter som retningsvektor og det ene punkt som begyndelsespunkt og får så:

$$\overrightarrow{AC} := \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} -4 \\ 68 \\ 32 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{BD} := \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} -4 \\ -62 \\ 32 \end{bmatrix}$$

$$l_{AC} := \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -4\,t + 22 \\ 68\,t \\ 32\,t \end{bmatrix} \qquad l_{BD} := \overrightarrow{OB} + s \cdot \overrightarrow{BD} = \begin{bmatrix} -4\,s + 22 \\ -62\,s + 62 \\ 32\,s \end{bmatrix}$$

Når man ser på de to parameterfremstillinger, kan man se ud fra 1. og 3.-koordinaterne se, at der skal gælde $s = t$, hvis de skal være ens, og så kan 2. koordinaten benyttes til at bestemme værdien, hvor hvis de to 2. koordinater skal være ens, har man $68 \cdot t = -62 \cdot t + 62 \Leftrightarrow 130 \cdot t = 62 \Leftrightarrow t = \frac{62}{130}$.

Dette giver følgende skæringspunkt: $\left(-\frac{4 \cdot 62}{130} + 22, \frac{68 \cdot 62}{130}, \frac{32 \cdot 62}{130} \right) = \frac{1306}{65}, \frac{2108}{65}, \frac{992}{65}$

Dvs. skæringspunktet er $\underline{\underline{\left(\frac{1306}{65}, \frac{2108}{65}, \frac{992}{65} \right)}}$

Man kunne også bestemme skæringspunktet ved at lade Maple løse de 6 ligninger med 5 ubekendte, der fremkommer, når man opstiller parameterfremstillingerne som ligninger:

$x = -4\,t + 22$

$y = 68\,t$

$z = 32\,t$

$x = -4\,s + 22$

$y = -62\,s + 62$

$z = 32\,s$

$$[x = -4\,t + 22, y = 68\,t, z = 32\,t, x = -4\,s + 22, y = -62\,s + 62, z = 32\,s] \xrightarrow{\text{solve (specified)}}$$

$$\left\{ s = \frac{31}{65}, t = \frac{31}{65}, x = \frac{1306}{65}, y = \frac{2108}{65}, z = \frac{992}{65} \right\}$$

Opgave 12.

a) Differentialligningen fortæller os direkte, hvad vksthastigheden er, når vi kender koncentrationen, så vi indsætter i denne:

$y'(t) = -0.03 \cdot 1.2 = -0.036$

Dvs. at **klorkoncentrationen aftager med 0,036 mg/liter pr. time** , når klorkoncentrationen er på 1,2 mg/liter

b) Det er en standarddifferentialligning af typen $y'(t) = k \cdot y(t)$, hvor den fuldstændige løsning er $y(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$.

Da vi kender begyndelsesbetingelsen, kan dette bruges til at finde konstanten c:

$1.8 = c \cdot e^{-0.03 \cdot 0} \Leftrightarrow 1.8 = c \cdot 1 \Leftrightarrow c = 1.8$

Dvs. at klorkoncentrationen kan beskrives ved funktionen $\underline{\underline{y(t) = 1.8 \cdot e^{-0.03 \cdot t}}}$

Man kunne også have bedt Maple om at løse differentialligningen med begyndelsesbetingelsen:

$$[y'(t) = -0.03 \cdot y(t), y(0) = 1.8] \xrightarrow{\text{solve DE}} y(t) = \frac{9}{5}\, e^{-\frac{3}{100} t}$$

Klorkoncentrationen til tiden $t = 24$ (dvs. efter et døgn) bestemmes ved:

$y(24) = 1.8 \cdot e^{-0.03 \cdot 24} = 0.8761540608$

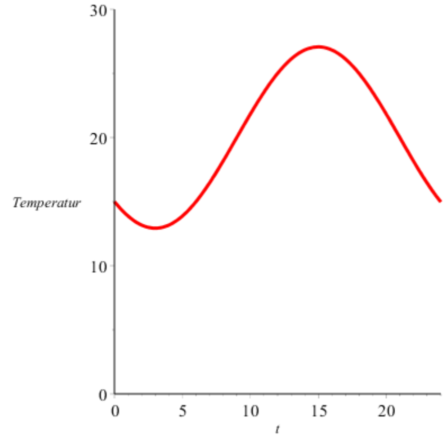
Dvs. til tidspunktet $t = 24$ er klorkoncentrationen $\underline{\underline{0.88 \ \frac{\text{mg}}{\text{liter}}}}$

Opgave 13.

a) $f(t) := 20 - 5 \cdot (\sin(0.262 \cdot t) + \cos(0.262 \cdot t))$:

Når grafen skal tegnes, skal det være i intervallet $0 \leq t \leq 24$, og man skal kunne se bølgen tydeligt:

$plot(f(t), t = 0..24, y = 0..30)$



For at bestemme den laveste og den højeste temperatur findes de steder, hvor der er lokale ekstrema. Da det er en trigonometrisk funktion anvendes *intervalsolve*:

$intervalsolve(f'(t) = 0, t = 0..24) = [2.997702914, 14.98851457]$

Man kan selvfølgelig godt se på grafen, at det første er et lokalt minimumssted og det andet et lokalt maksimumssted, men det bør vises med differentialregning, så fortegnet for den anden afledede bestemmes de to steder:

$f''(2.997702914) = 0.4853863789 > 0$ dvs. lokalt minimum.

$f''(14.98851457) = -0.4853863788 < 0$ dvs. lokalt maksimum.

Den mindste og den største temperatur bestemmes så ved indsættelse i funktionsforskriften:

$f(2.997702914) = 12.92893218$

$f(14.98851457) = 27.07106782$

Dvs. **den laveste temperatur dette døgn er 12,9°C og den højeste er 27,1°C**

b) $f'(8) = 1.790260511$

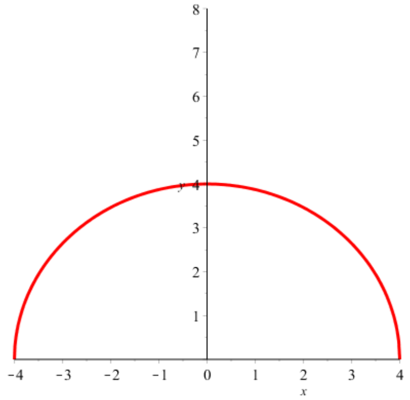
Da t er tiden målt i timer efter midnat, fortæller dette , at **kl. 8 stiger temperaturen med 1,8°C i timen.**

Opgave 14

$f(x) := \sqrt{4^2 - x^2} : -4 \le x \le 4$

a) Grafen skal tegnes i det interval, hvor funktionen er defineret:

$plot(f(x), x=-4..4, y=0..8)$



Da det er funktionsforskriften for en halvcirkel med radius 4 og centrum i origo, kan man beregne det bestemte integral som arealet af halvcirklen:

$$\int_{-4}^{4} f(x)\,dx = A_{halvcirkel} = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r^2 = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 4^2 = \underline{\underline{8\,\pi}}$$

Men man kan også lade Maple foretage udregningen:

$$\int_{-4}^{4} f(x)\,dx = 8\,\pi$$

b) $g(x) := \sqrt{a^2 - x^2}$:

Arealet af punktmængden M svarer til: $A_M = \int_{-a}^{a} g(x)\,dx$, da grafen er en halvcirkel placeret i 1. og 2. kvadrant.

Da arealet skal være 4, har man:

$$4 = \int_{-a}^{a} g(x)\,dx \xrightarrow{\text{solve for a}} \left[\left[a = -\frac{2\,I\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right], \left[a = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right]\right]$$

Den ene løsning er et imaginært tal, så det er den anden løsning, der er svaret:

$$\underline{\underline{a = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}}} \qquad \text{(eller som afrundet decimalbrøk } a = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 1.595769121 = a$$

27. maj 2016: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: Udtrykket reduceres ved at anvende en kvadratsætning på første led:

$$(x+5)^2-25=x^2+10x+25-25=x^2+10x=\underline{\underline{x\cdot(x+10)}}$$

Opgave 2: $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-7\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix}$

$$\det\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\begin{vmatrix}3 & 8\\-7 & 5\end{vmatrix}=3\cdot5-(-7)\cdot8=15+56=\underline{\underline{71}}$$

Opgave 3: Da indtægten er vokset med en fast procentdel, er der tale om en eksponentiel udvikling, og da vækstraten *r* er 11,8%, er fremskrivningsfaktoren $a=1+r=1+0{,}118=1{,}118$.

Med *I* betegnes indtægten (målt i mio. kr.) fra parkering det pågældende år.

Hvis man lader *t* betegne tiden angivet i antal år efter 2010, bliver begyndelsesværdien derfor 15.

Og så er modellen:

$$\underline{\underline{I(t)=15\cdot1{,}118^t}}$$

Opgave 4: $f(x)=x^3+10x$ $\quad P(2,20)$

Først bestemmes den form samtlige stamfunktioner til *f* er på:

$$F_k(x)=\int f(x)\,dx=\frac{1}{4}x^4+5x^2+k$$

k-værdien bestemmes ved at udnytte, at grafen skal gå gennem *P*, da punktets koordinater indsat i funktionsudtrykket skal give et sandt udsagn:

$$20=\frac{1}{4}\cdot2^4+5\cdot2^2+k \Leftrightarrow 20=4+20+k \Leftrightarrow k=-4$$

Dette indsættes i den generelle forskrift:

$$\underline{\underline{F(x)=\frac{1}{4}x^4+5x^2-4}}$$

Opgave 5: $f(x)=5e^x+x$ $\qquad \frac{dy}{dx}=y-x+1$

Først bestemmes den afledede funktion til *f*:

$$f'(x)=5e^x+1$$

Sammen med funktionsudtrykket indsættes dette i differentialligningen for at se, om der fremkommer en identitet:

$$5e^x+1=5e^x+x-x+1 \Leftrightarrow 0=0$$

Da der fremkommer en identitet, <u>er *f* en løsning til differentialligningen.</u>

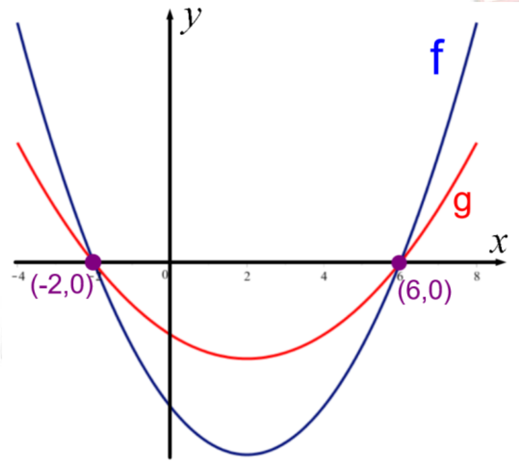
Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 6: $f(x) = k \cdot (x+2) \cdot (x-6)$ $\quad g(x) = m \cdot (x+2) \cdot (x-6)$ $\quad 0 < m < k$

Man kan ud fra forskrifterne se, at rødderne i polynomierne er -2 og 6 (nulreglen), dvs. begge grafer skal gå gennem punkterne (-2,0) og (6,0).

k og *m* svarer til *a*-værdien for parablerne, og da den er positiv for begge parabler, skal benene vende opad på begge parabler.

Da *k* > *m*, er parablen for *f* smallere end for *g*, så *f* ’s parabel skal ligge under *g* ’s mellem rødderne.



27. maj 2016: Delprøven MED hjælpemidler

Opgavesættet regnes i Maple

restart

with(*Gym*) :

Opgave 7:

a) Det er oplyst, at der er tale om en lineær funktion, og da man kender mere end to målepunkter, skal der laves regression. Det bemærkes, at tiden måles i antal år EFTER 2000:

$År := [0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14]$:

$Gennemsnitslevealder := [74.3, 74.7, 75.2, 75.9, 76.3, 77.1, 77.9, 78.5]$:

$f(x) := LinReg(År, Gennemsnitslevealder, x)$:

$f(x) = 0.306547619047621\, x + 74.0916666666666$

Dvs. forskriften er:

$\underline{\underline{f(x) = 0.31 \cdot x + 74.1}}$

b) 79 er begyndelsesværdien, og det fortæller, at

i 2000 var gennemsnitslevealderen for kvinder 79 år.

0,26 er hældningen, og den fortæller, at **siden 2000 er kvindernes gennemsnitlige levealder hvert år vokset med 0,26 år.**

c) Først bestemmes det tidspunkt, hvor kvindernes gennemsnitlige levealder er 81 år, dvs. hvor $g(x) = 81$:

$81 = 0.26 \cdot x + 79 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 7.692307692]]$

Dette tidspunkt indsættes i f for at bestemme mændenes gennemsnitlige levealder:

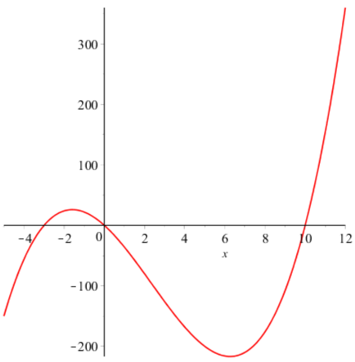
$f(7.692307692) = 76.4497252746309$

Dvs., at da kvindernes gennemsnitlige levealder var 81 år, var mændenes $\underline{\underline{76.4 \text{ år}}}$

Opgave 8: $f(x) := x^3 - 7x^2 - 30x$:

a) Først laves et plot af grafen for f:

$plot(f(x), x = -5..12)$



Ligningen $f(x) = 0$ kan løses ved at faktorisere polynomiet og anvende nulreglen:

$0 = x^3 - 7x^2 - 30x = x \cdot (x + 3) \cdot (x - 10) \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -3 \vee x = 0 \vee x = 10}}$

Man kunne selvfølgelig også have anvendt 'solve':

$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 0], [x = 10], [x = -3]]$

Da der er tale om et tredjegradspolynomium, kan der højst være tre rødder, så vi ved, at vi har fundet alle sammen.

b) For at kunne bestemme en ligning for tangenten i $Q(3, f(3))$, skal vi kende røringspunktets koordinater samt tangentens hældning.
Røringspunktets andenkoordinat bestemmes ved at indsætte i forskriften:
$f(3) = -126$
Tangentens hældning bestemmes ved at indsætte i den afledede funktion:
$f'(3) = -45$
Hermed kan tangentens ligning bestemmes ved at indsætte i $y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$:
$y - (-126) = -45 \cdot (x - 3) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = -45\,x + 9}}$

Dette kunne også have været bestemt direkte i Maple ved:
$y - f(3) = f'(3) \cdot (x - 3) \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = -45\,x + 9$

c) Monotoniforholdene kan bestemmes ved at lave et fortegnsskema for den afledede funktion, men det kan også gøres ved først at bestemme maksimums- og minimumssteder og ud fra dette angive monotoniforholdene (og vi ved allerede, da det er et tredjegradspolynomium med tre rødder og positivt tredjegradskoefficient, at det bliver *voksende*, *aftagende*, *voksende*).
Først bestemmes de steder, hvor der er vandret tangent:
$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} \left[\left[x = \frac{7}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{139}\right], \left[x = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{139}\right]\right]$
Fortegnet for den anden afledede bestemmes de to steder for at afgøre, om det er maks eller min:
$f''\left(\frac{7}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{139}\right) = -2\sqrt{139} < 0$ dvs. lokalt maksimum
$f''\left(\frac{7}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{139}\right) = 2\sqrt{139} > 0$ dvs. lokalt minimum
Altså er monotoniforholdene:
***f* er voksende i** $\left]-\infty, \frac{7}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{139}\right]$**, aftagende i** $\left[\frac{7}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{139}, \frac{7}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{139}\right]$ **og voksende i** $\left[\frac{7}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{139}, \infty\right[$

Opgave 9:
a) Der skal udføres et χ^2-uafhængighedstest, så nulhypotesen er:
H_0: **Uddannelsesvalg og gymnasievalg er uafhængige af hinanden.**
Først laves en tabel over de observerede data og "i alt" udregnes for søjler, rækker og samlet.

OBSERVERET	Ingeniør eller naturvidenskab	Anden mellemlang videregående uddannelse	Anden lang videregående uddannelse	**i alt**
Gymnasium 1	9	20	71	$9 + 20 + + 71 = 100$
Gymnasium 2	5	41	50	$5 + 41 + 50 = 96$
Gymnasium 3	22	51	89	$22 + 51 + 89 = 162$
i alt	$9 + 5 + 22 = 36$	$20 + 41 + 51 = 112$	$71 + 50 + 89 = 210$	$100 + 96 + 162 = 358$ $36 + 112 + 210 = 358$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

På baggrund af nulhypotesen bestemmes en forventet tabel. Hertil bruges produktet af søjlens og rækken "i alt" divideret med det samlede "i alt"

FORVENTET	Ingeniør eller naturvidenskab	Anden mellemlang videregående uddannelse	Anden lang videregående uddannelse	**i alt**
Gymnasium 1	$\frac{36\cdot 100.}{358} =$ 10.05586592	$\frac{112\cdot 100}{358.} =$ 31.28491620	$\frac{210\cdot 100}{358.} =$ 58.65921788	100
Gymnasium 2	$\frac{36\cdot 96}{358.} =$ 9.653631285	$\frac{112\cdot 96}{358.} =$ 30.03351955	$\frac{210\cdot 96}{358.} =$ 56.31284916	96
Gymnasium 3	$\frac{36\cdot 162.}{358} =$ 16.29050279	$\frac{112\cdot 162}{358.} =$ 50.68156425	$\frac{210\cdot 162}{358.} =$ 95.02793296	162
i alt	36	112	210	358

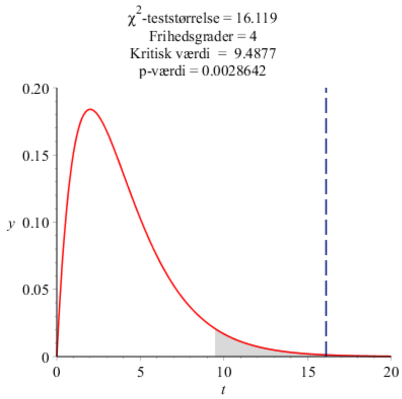
Man kan også anvende Gym-pakkens *forventet*:

$$M := \begin{bmatrix} 9 & 20 & 71 \\ 5 & 41 & 50 \\ 22 & 51 & 89 \end{bmatrix}:$$

$$forventet(M) = \begin{bmatrix} 10.056 & 31.285 & 58.659 \\ 9.6536 & 30.034 & 56.313 \\ 16.291 & 50.682 & 95.028 \end{bmatrix}$$

b) χ^2 −uafhængighedstestet udføres med signifikansniveauet 5%:

$ChiKvadratUtest(M, level = 0.05) =$



Da p-værdien er mindre end signifikansniveauet (0,00286 < 0,05), **skal nulhypotesen forkastes**.
Der er signifikant forskel på uddannelsesvalg på de tre gymnasier.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

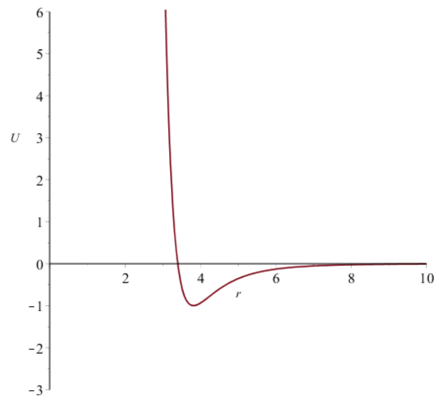
Opgave 10: $U(r) := 3.988 \cdot \left(\left(\frac{3.4}{r} \right)^{12} - \left(\frac{3.4}{r} \right)^{6} \right):$

a) Man kan godt udregne $U(3.4)$ med Maple, men lige netop dette tal kan også bestemmes ved udregning i hånden:

$$U(3.4) = 3.988 \cdot \left(\left(\frac{3.4}{3.4} \right)^{12} - \left(\frac{3.4}{3.4} \right)^{6} \right) = 3.988 \cdot \left(1^{12} - 1^{6}\right) = 3.988 \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

Når grafen skal tegnes, skal $r > 0$, og vi ved, at vi skal længere ud end 3.4 for at få det væsentlige med. Vi kan se, at U måles i størrelsesordner omkring 3.988, så dette område skal vises:

$plot(U(r), r = 0..10, y = -3..6)$



b) Først bestemmes de steder, hvor der er vandret tangent:

$U'(r) = 0 \xrightarrow{\text{solve for r}}$

$[[r = 3.816370965], [r = 1.908185482 + 3.305074206\,I], [r = -1.908185482 + 3.305074206\,I], [r = -3.816370965], [r = -1.908185482 - 3.305074206\,I], [r = 1.908185482 - 3.305074206\,I]]$

Det bemærkes, at 4 af de 6 løsninger er komplekse, og den ene reelle er negativ, så den eneste løsning er $\underline{\underline{r = 3.816}}$

Man kan selvfølgelig godt se på grafen, at der er tale om et minimum dette sted, men det skal vises med differentialregning, så fortegnet for den anden afledede tjekkes dette sted:

$U''(3.816370965) = 4.928633076 > 0$ dvs. lokalt minimumssted.

Minimumsværdien er:

$U(3.816370965) = -0.9969999996$

Dvs. den mindste potentielle energi er $\underline{\underline{-0.997 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}}}}$

Opgave 11:

Punkterne indlæses som de tilsvarende stedvektorer:

$\overrightarrow{OA} := \langle 50,\ 0,\ 0\rangle : \overrightarrow{OB} := \langle 0,\ 10,\ 0\rangle : \overrightarrow{OC} := \langle 10,\ 0,\ 10\rangle : \overrightarrow{OD} := \langle 0,\ 0,\ 50\rangle :$

a) Trekant ABC udspændes af vektorerne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$, så først bestemmes disse:

$$\overrightarrow{AB} := \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} -50 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} := \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} -40 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Først bestemmes krydsproduktet af de to vektorer, der udspænder trekanten:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 100 \\ 500 \\ 400 \end{bmatrix}$$

Man kan godt anvende denne vektor som normalvektor for planen α, men man kan også vælge den vektor, der fremkommer ved at skalere denne vektor ned med en faktor 100:

$$\overrightarrow{n_\alpha} := \frac{1}{100} \cdot \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Punktet A anvendes som punkt i planen, og en ligning for denne bliver så:

$a \cdot \left(x - x_0\right) + b \cdot \left(y - y_0\right) + c \cdot \left(z - z_0\right) = 0$

$1 \cdot (x - 50) + 5 \cdot (y - 0) + 4 \cdot (z - 0) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x + 5\,y + 4\,z - 50 = 0}}$

b) β: $4\,x + 5\,y + z = 50$

Den stumpe vinkel mellem trekanterne bestemmes som den stumpe vinkel mellem normalvektorerne for de to planer, som trekanterne ligger i. Vi har allerede defineret normalvektoren for planen α, mens normalvektoren for β aflæses ud fra ligningen:

$\overrightarrow{n_\beta} := \langle 4,\ 5,\ 1\rangle :$

Vinklen mellem vektorerne bestemmes ved:

$$\cos(v) = \frac{\overrightarrow{n_\alpha} \bullet \overrightarrow{n_\beta}}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_\beta}\right|}$$

Med Gym-pakken udregnes det ved:

$$Cos(v) = \frac{\overrightarrow{n_\alpha} \bullet \overrightarrow{n_\beta}}{len\left(\overrightarrow{n_\alpha}\right) \cdot len\left(\overrightarrow{n_\beta}\right)} \xrightarrow{\text{solve for v}} [[v = 38.21321070]]$$

Det er den spidse vinkel, der er fundet. Den stumpe vinkel er supplementvinklen:

$v_{stump} = 180 - 38.21321070 = 141.7867893$

Dvs. $\underline{\underline{v_{stump} = 141.8°}}$

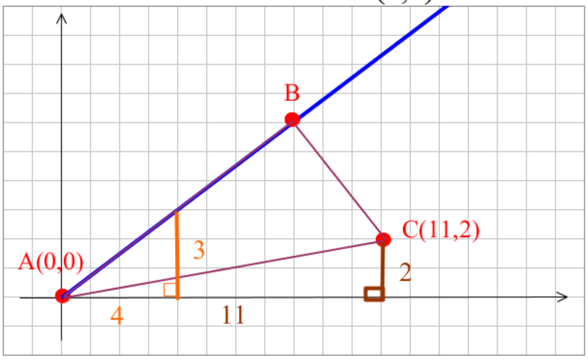
c) Stjernen består af 16 trekanter, og hvert trekantareal bestemmes som det halve af længden af krydsproduktet mellem to vektorer, der udspænder trekanten. Dvs. man har:

$$A_{stjerne} = 16 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 8 \cdot len\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) = 800\,\sqrt{42} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 5184.592558$$

Dvs. $\underline{\underline{A_{stjerne} = 5184.6\text{cm}^2}}$

Opgave 12:

a) En skitse af trekanten tegnes. Linjen l tegnes med blåt ved hjælp af dens retningsvektor: Punktet B får koordinatsættet (8,6) svarende til $t = 2$.



Vinkel A bestemmes ved at trække vinkel A i den brune retvinklede trekant fra vinkel A i den orange retvinklede trekant:

$$\tan(v) = \frac{mod}{hos}$$

$$A := invTan\left(\frac{3}{4}\right) - invTan\left(\frac{2}{11}\right) = 26.56505118$$

Dvs. $\underline{\underline{\angle BAC = 26.6°}}$

b) Hvis man ikke vidste, at B(8,6), kunne man bestemme koordinatsættet ved at udnytte, at B skal ligge på l, og at afstanden fra A til B skal være 10:

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = \sqrt{(4t - 0)^2 + (3t - 0)^2} = \sqrt{16t^2 + 9t^2} = \sqrt{25t^2}$$

$$10 = \sqrt{25t^2} \Leftrightarrow 10 = 5 \cdot t \Leftrightarrow t = 2$$

Ved uddragning af kvadratroden blev det udnyttet, at man ved, at t er positiv, da B ligger i første kvadrant. Da $t = 2$ har man altså:

$\underline{\underline{B(4 \cdot 2,\ 3 \cdot 2) = B(8,\ 6)}}$

Arealet af trekanten bestemmes som det halve af den numeriske værdi af determinanten af to vektorer, der udspænder trekanten (eller man kan bruge ½-appelsinformlen).

$$\overrightarrow{AC} := \langle 11, 2\rangle : \overrightarrow{AB} := \langle 8, 6\rangle :$$

$$T_{ABC} = \frac{\left|det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right|}{2} = 25$$

Dvs. $\underline{\underline{T_{ABC} = 25}}$

Med ½-appelsinformlen:

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin(A) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \sqrt{11^2 + 2^2} \cdot Sin(26.56505118) = 11.18033989\sqrt{5}$$

$$\xrightarrow{\text{at 5 digits}} 25.000$$

Opgave 13:

a) Differentialligningen løses med den opløste begyndelsesbetingelse:

$$[N'(t) = 0.01 \cdot \sin(0.017 \cdot t - 1.03) \cdot N(t), N(0) = 100] \xrightarrow{\text{solve DE}}$$

$$N(t) = \frac{100\, \mathrm{e}^{-\frac{10}{17}\cos\left(\frac{17}{1000}t - \frac{103}{100}\right)}}{\mathrm{e}^{-\frac{10}{17}\cos\left(\frac{103}{100}\right)}} \xrightarrow{\text{assuming positive}} N(t)$$

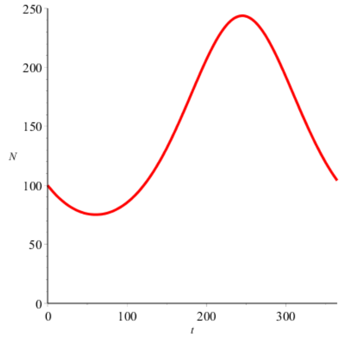
$$= 100\, \mathrm{e}^{\frac{10}{17}\cos\left(\frac{103}{100}\right) - \frac{10}{17}\cos\left(\frac{17}{1000}t - \frac{103}{100}\right)}$$

$$N(t) := 100\, \mathrm{e}^{\frac{10}{17}\cos\left(\frac{103}{100}\right) - \frac{10}{17}\cos\left(\frac{17}{1000}t - \frac{103}{100}\right)}:$$

Dvs. forskriften er $\boldsymbol{N(t) = 100\, \mathrm{e}^{\frac{10}{17}\cos\left(\frac{103}{100}\right) - \frac{10}{17}\cos\left(\frac{17}{1000}t - \frac{103}{100}\right)}}$

Når grafen tegnes, skal det være i intervallet $0 \le t \le 365$:

$plot(N(t), t = 0..365, y = 0..250)$



b) Væksthastigheden svarer til $N'(t)$, så der hvor den er størst eller mindst, skal $N''(t) = 0$. Da det er en trigonometrisk funktion anvendes intervalsolve (og for at få et pænt tal sættes f foran):

$fintervalsolve(N''(t) = 0., t = 0..365) = [181.2671778, 309.5084285]$

For at afgøre om det er lokalt maksimum, lokalt minimum eller vandret vendetangent udregnes fortegnes for den tredje afledede:

$$N'''(181.2671778) = -0.0003956497654\, \mathrm{e}^{\frac{10}{17}\cos\left(\frac{103}{100}\right) + 0.2720238093}$$ < 0 dvs. lokalt maksimum.

$$N'''(309.5084285) = 0.0003956497654\, \mathrm{e}^{\frac{10}{17}\cos\left(\frac{103}{100}\right) + 0.2720238094}$$ > 0 dvs. lokalt minimum.

For at tjekke, om det lokale maksimum også svarer til et globalt maksimum, udregnes væksthastigheden i dette sted og sammenlignes med væksthastigheden i yderpunkterne:

$$N'(0) = -\sin\left(\frac{103}{100}\right) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} -0.85730$$

$$N'(181.2671778) = 0.8866503292\, \mathrm{e}^{\frac{10}{17}\cos\left(\frac{103}{100}\right) + 0.2720238093} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 1.5755$$

$$N'(365) = \sin\left(\frac{207}{40}\right) \mathrm{e}^{\frac{10}{17}\cos\left(\frac{103}{100}\right) - \frac{10}{17}\cos\left(\frac{207}{40}\right)} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} -0.93167$$

Dvs. **væksthastigheden er størst efter 181 døgn**

Opgave 14

restart

a) $f(x) := a \cdot \sqrt{x \cdot (16 - x)}$:

Rumfanget af et omdrejningslegeme er givet ved $V = \pi \cdot \int_{start}^{slut} f(x)^2 \, dx$.

Da rumfanget skal være 260 cm^3, får man:

$$fsolve\left(260 = \pi \cdot \int_0^{10} f(x)^2 \, dx, a\right) = -0.4211224043, 0.4211224043$$

Da a er positiv, er det altså den anden løsning, der er den rigtige:

$\underline{\underline{a = 0.421}}$

b) a fastsættes: $a := 0.3$:

Vi skal nu finde den øvre grænse i det bestemte integral, der giver rumfanget 100 cm^3.

$$100 = \pi \cdot \int_0^{x_0} f(x)^2 \, dx \xrightarrow{\text{solve for x\_\_0}}$$

$$[[x_0 = 8.192917363], [x_0 = 21.75894052], [x_0 = -5.951857888]]$$

Da x skal ligge mellem 0 og 10, er det den første løsning, der er den rigtige.

Dvs. markeringen på glasset skal sættes 8,2 cm oppe på glasset.

15. august 2016: Delprøven UDEN hjælpemidler

<u>Opgave 1:</u> $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 16 \\ k \end{pmatrix}$

To egentlige vektorer er parallelle, netop når deres determinant er 0:

$$\det\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0 \iff \begin{vmatrix} 4 & 16 \\ 5 & k \end{vmatrix} = 0 \iff 4\cdot k - 5\cdot 16 = 0 \iff 4k = 80 \iff k = \underline{\underline{20}}$$

<u>Opgave 2:</u> Med *t* betegnes tiden målt i antal år efter 1990.
Med *V* betegnes mængden af solgt vin på årsbasis angivet i enheden 1000 L.
Det er oplyst, at modellen er lineært aftagende med 22000 L om året, så hældningskoefficienten er -22. Da der i 1990 blev solgt 334000 L vin fra producenten, er begyndelsesværdien 334.
Hermed bliver modellen:

$$\underline{\underline{V(t) = -22\cdot t + 334 \;\; ; \; 0 \le t \le 24}}$$

<u>Opgave 3:</u> For at reducere udtrykket anvendes tredje kvadratsætning på første led, mens der ganges ind i parentesen i sidste led:

$$(a+b)\cdot(a-b) + b\cdot(b+2a) = a^2 - b^2 + b^2 + 2ab = a^2 + 2ab = \underline{\underline{a\cdot(a+2b)}}$$

Udtrykket før sidste lighedstegn må gerne angives som facit.

<u>Opgave 4:</u> $f(x) = x^2\cdot\ln(x) + 5x^4 + 1 \;\; ; \; x > 0$

Først bestemmes den afledede funktion ved ledvis differentiation og ved anvendelse af produktreglen på første led:

$$f'(x) = 2x\cdot\ln(x) + x^2\cdot\frac{1}{x} + 5\cdot 4x^3 + 0 = 2x\cdot\ln(x) + x + 20x^3$$

Så bestemmes differentialkvotienten i 1:

$$f'(1) = 2\cdot 1\cdot\ln(1) + 1 + 20\cdot 1^3 = 0 + 1 + 20 = \underline{\underline{21}}$$

<u>Opgave 5:</u> $f(x) = -x + 7 \qquad g(x) = x^2 + 1$

Skæringspunkterne findes ved først at bestemme de steder, hvor funktionsværdierne er ens:

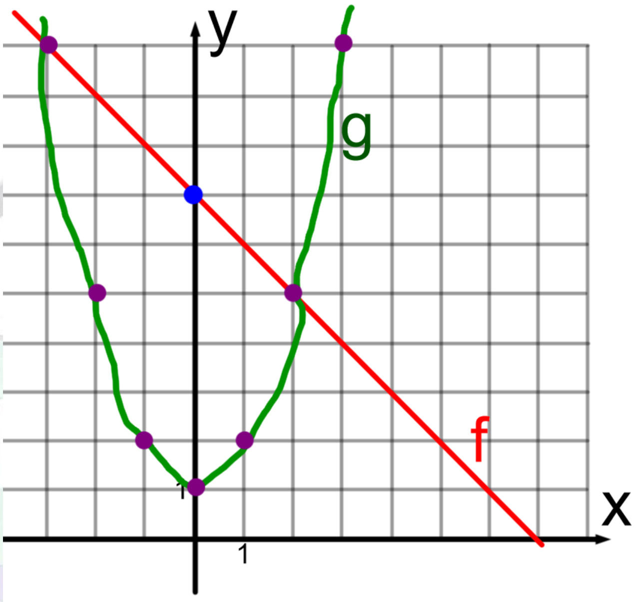
$$f(x) = g(x) \iff -x + 7 = x^2 + 1 \iff 0 = x^2 + x - 6 \iff 0 = (x+3)\cdot(x-2) \iff x = -3 \;\vee\; x = 2$$

(Man kunne også have løst den fremkomne andengradsligning med diskriminantmetoden)
Skæringspunkternes andenkoordinater bestemmes ved at indsætte *x*-værdierne i en af de to forskrifter (frit valg):

$$f(-3) = -(-3) + 7 = 3 + 7 = 10 \qquad f(2) = -2 + 7 = 5$$

Dvs. skæringspunkterne har koordinatsættene $\underline{\underline{(-3,10) \text{ og } (2,5)}}$

Grafen for *f* er en ret linje, der skærer andenaksen i 7 og har hældningen -1. Begge disse ting skal tydeligt fremgå af figuren.
Grafen for *g* er en parabel, der skærer andenaksen i 1 og har samme form som parablen, der er graf for polynomiet x^2.
Når parablen tegnes, skal de to fundne koordinatsæt klart fremgå:



<u>*Opgave 6:*</u> $\frac{dy}{dx} = \frac{y - y^2}{x} \quad ; \; x > 0 \qquad\qquad P(2,4)$

Man kender allerede røringspunktets koordinatsæt, så for at bestemme en ligning for tangenten mangler man kun at bestemme tangentens hældning. Dette gøres ved at udnytte, at *f* er en løsning til differentialligningen, således at hældningen kan bestemmes ved indsættelse i differentialligningen:

$$a_t = \frac{dy}{dx} = \frac{4-4^2}{2} = \frac{4-16}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

Hermed bliver tangentens ligning:

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

$$y - 4 = -6 \cdot (x - 2) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = -6x + 16}}$$

15. august 2016: Delprøven MED hjælpemidler

Opgave 7:

restart

with(*Gym*) :

Det bemærkes, at modellen er en eksponentiel udvikling $\left(f(t) = b \cdot a^t\right)$. Da der er oplyst mere end to sæt sammenhørende værdier, skal der anvendes regression:

$Tid := [1, 2, 3, 4, 5]$:

$Temperatur := [14.9, 15.8, 16.9, 18.4, 20.3]$:

$f(t) := ExpReg(Tid, Temperatur, t)$:

$f(t) = 13.6136537850563\ 1.08013497167424^t$

Dvs. at $\underline{\underline{a = 1.080 \ \ og \ \ b = 13.6}}$

.

b) 6 timer efter støbningen svarer til $t = 6$:

$f(6) = 21.6193616635505$

Dvs. **temperaturen i betongulvet er ifølge modellen 21,6 °C** 6 timer efter støbningen.

c) En temperatur på 25 °C svarer til $f(t) = 25$:

$f(t) = 25 \xrightarrow{\text{solve}} \{t = 7.884732960\}$

Dvs. temperaturen i betongulvet er ifølge modellen 25 °C **7,9 timer efter støbningen.**

Tallet a er fremskrivningsfaktoren, og da den er knyttet til vækstraten r ved $a = 1 + r$, fortæller tallet a, at **temperaturen i betongulvet efter støbningen vokser med 8% pr. time.**

Opgave 8: $f(x) := x^3 - 7x^2 + 8x + 16$:

a) Nulpunkterne bestemmes med Maples 'solve':

$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = -1\}, \{x = 4\}, \{x = 4\}$ Det bemærkes, at 4 er en dobbeltrod. Da det er et tredjegradspolynomium, er der tre løsninger, når disse regnes med multiplicitet, og når komplekse rødder regnes med, så Maple har fundet alle nulpunkterne:

$\underline{\underline{x = -1 \ \vee \ x = 4}}$

b) For at bestemme monotoniforholdene bestemmes først de steder, hvor der er vandrette tangenter:

$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 4\}, \left\{x = \frac{2}{3}\right\}$

Hvilken type disse steder er, bestemmes ved at se på fortegnet for den anden afledede funktion disse steder:

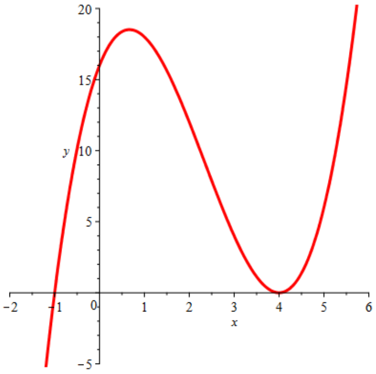
$f''\left(\frac{2}{3}\right) = -10 < 0$ dvs. lokalt maksimumssted

$f''(4) = 10 > 0$ dvs. lokalt minimumssted

Hermed er monotoniforholdene:

***f* er voksende i intervallerne]-∞,$\frac{2}{3}$] og [4,∞[og aftagende i intervallet [$\frac{2}{3}$,4].**

c) Man kan allerede ud fra a) og b) se, at punktmængden M må ligge mellem grafen for f og førsteaksen i intervallet [-1,4], da dette er nulpunkterne, og da grafen i -1 er på vej mod et maksimum, mens 4 er et minimumssted.
Men man kan også tegne en skitse, så man kan se punktmængden:
$plot(f(x), x=-2..6, y=-5..20, thickness=3, color=red)$



Rumfanget V af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° omkring førsteaksen, kan så bestemmes:

$$V=\pi\cdot\int_{-1}^{4} f(x)^2\,dx = \frac{15625}{21}\pi \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 2337.494534$$

Dvs. $\underline{\underline{V=2337.5}}$

Opgave 9: $C := (x+2)^2+(y-5)^2=25 : l := 4x-3y+k=0 : k := 23 :$

a) Skæringspunkterne mellem cirkel og linje bestemmes ved at løse ligningssystemet bestående af de to ligninger, der er defineret i Maple:
$solve([C, l], \{x, y\}) = \{x=-5, y=1\}, \{x=1, y=9\}$
Skæringspunkterne er altså $\underline{\underline{(-5, 1) \text{ og } (1, 9)}}$

b) Først skal k frigives igen: $unassign('k')$:
Linjen er tangent til cirklen, når afstanden fra cirklens centrum $(-2, 5)$ til linjen svarer til cirklens radius, der aflæses til $r=\sqrt{25}=5$:

$$dist(P, l) = \frac{|a\cdot x+b\cdot y+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$5 = \frac{|4\cdot(-2)-3\cdot(5)+k|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} \xrightarrow{\text{solve for k}} [[k=48], [k=-2]]$$

Dvs. $\underline{\underline{k=-2 \lor k=48}}$

Opgave 10: $\frac{dM}{dt} = 0.195\cdot e^{-0.0426\cdot t}\cdot M$

a) Venstresiden i differentialligningen angiver væksthastigheden, og da det er oplyst, at når $t=5$ er $M=0.125$, får man:

$$\frac{dM}{dt} = 0.195\cdot e^{-0.0426\cdot 5}\cdot 0.125 = 0.01969880584$$

Dvs. at de 5 døgn gamle kyllinger **vokser med hastigheden 19,7 g pr. døgn.**

b) Forskriften for den partikulære løsning bestemmes:

$$[M'(t)=0.195\cdot e^{-0.0426\cdot t}\cdot M(t), M(5)=0.125] \xrightarrow{\text{solve DE}} M(t) = \frac{1}{8}\,\frac{e^{-\frac{325}{71}e^{-\frac{213}{5000}t}}}{e^{-\frac{325}{71}e^{-\frac{213}{1000}}}} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} M(t) = 5.0530\,e^{-4.5775\,e^{-0.042600\,t}}$$

Dvs. $\underline{\underline{M(t) = 5.0530\cdot e^{-4.5775\cdot e^{-0.042600\cdot t}}}}$

En kylling vejer 2 kg, når $M(t)=2$:

$$2 = 5.0530\,e^{-4.5775\,e^{-0.042600\,t}} \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t=37.49137979]]$$

Dvs. når en kylling er **37,5 døgn gammel,** vejer den 2 kg.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 11: $P(1, 0, -2)$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) Da linjen l er parallel med $\vec{v}$, kan denne vektor anvendes som retningsvektor, og da linjen går gennem punktet P, bliver en parameterfremstilling:

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

En normalvektor for xy-planen er $n := \langle 0, 0, 1 \rangle$: Den valgte retningsvektor for linjen er $r := \langle 1, 1, 2 \rangle$:
Først bestemmes vinklen mellem ovennævnte retningsvektor og normalvektor:

$$\cos(v) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{r}|}$$

$$Cos(v) = \frac{dotP(n, r)}{len(n) \cdot len(r)} \xrightarrow{\text{solve for v}} [[v = 35.26438968]]$$

Den spidse vinkel, som linjen danner med planen, er komplementvinklen til ovenstående, dvs:

$v_{spids} = 90 - 35.26438968 = 54.73561032$

$\underline{\underline{v_{spids} = 54.7°}}$

b) De to linjer skærer hinanden, hvis der findes (s, t), hvor alle $x-$, $y-$ og $z-$værdier er ens i de to linjer.
Først findes (s, t), så y og z er ens:

$[0 + 1 \cdot t = 0 + 2 \cdot s, -2 + 2 \cdot t = 0 + 3 \cdot s] \xrightarrow{\text{solve}} \{s = 2, t = 4\}$

Den fundne værdi for parameteren t indsættes i parameterfremstillingen for l, hvilket giver x-værdien:

$x = 1 + 4 \cdot 1 = 5$

Linjen m skal altså give samme x-værdi:

$5 = 4 + 2 \cdot k \Leftrightarrow 2 \cdot k = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{k = \frac{1}{2}}}$

Opgave 12:

a) Der er i alt $760 + 640 = 1400$ personer, der er spurgt.
Antallet af Nej-svarere er derfor: $0.115 \cdot 1400 = 161.000$
Antallet af Ja-svarere er: $0.885 \cdot 1400 = 1239.000$
Dermed bliver skemaet:

	Kvinder	Mænd	I alt
Ja			1239
Nej			161
I alt	760	640	1400

b) Nulhypotesen er: **Om man selv synes, at man får tilstrækkeligt med søvn til at føle sig udhvilet, afhænger ikke af, om man er mand eller kvinde.**

De forventede værdier i ovennævnte skema kan så bestemmes med udgangspunkt i nulhypotesen:

	Kvinder	Mænd	I alt
Ja	$\frac{760 \cdot 1239.}{1400} = 672.6000000 \xrightarrow{\text{round}} 673$	$\frac{640 \cdot 1239}{1400.} = 566.4000000 \xrightarrow{\text{round}} 566$	1239
Nej	$\frac{760 \cdot 161}{1400.} = 87.40000000 \xrightarrow{\text{round}} 87$	$\frac{640 \cdot 161}{1400.} = 73.60000000 \xrightarrow{\text{round}} 74$	161
I alt	760	640	1400

Opgave 13:

restart

$with(Gym)$:

$A := 30 : C := 90 : AC := 10 :$

a) Vinkel B kan bestemmes ud fra, at vinkelsummen i en trekant er 180°.

$\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 180° - 30° - 90° = \underline{\underline{60°}}$

Da ΔABC er retvinklet, kan de resterende sidelængder bestemmes med $\cos(v) = \frac{hos}{hyp}$ og $\tan(v) = \frac{mod}{hos}$:

$Cos(A) = \frac{AC}{AB} \xrightarrow{\text{solve for AB}} [[AB = 11.54700538]]$

$Tan(A) = \frac{BC}{AC} \xrightarrow{\text{solve for BC}} [[BC = 5.773502693]]$

Dvs. $\underline{\underline{|BC| = 5.77 \text{ og } |AB| = 11.55}}$

b) Trekanterne ABC og ADF er ensvinklede, da de deler vinklen A og begge indeholder en ret vinkel. Dermed er forholdene mellem korresponderende sider konstant.

$BC := 5.773502693 :$

$\frac{|DF|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|AC|}$

De kendte størrelser indsættes, og desuden udnyttes det, at man ved, at $|AD| + x = |AC|$:

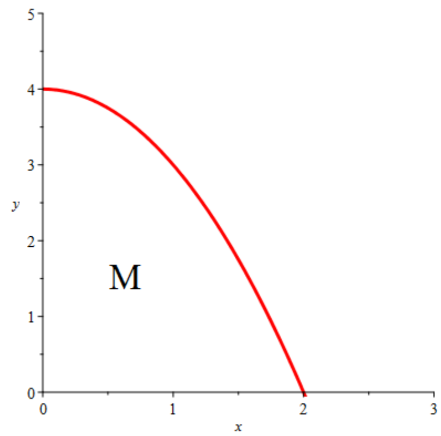
$\frac{x}{BC} = \frac{AD}{10}, AD + x = 10 \xrightarrow{\text{solve}} \{AD = 6.339745961, x = 3.660254039\}$

Dvs. $\underline{\underline{|DF| = 3.66}}$

Opgave 14: $f(x) := -x^2 + 4 :$

a) Først skal punktmængden M identificeres. Den ligger i første kvadrant:

$plot(f(x), x = 0..3, y = 0..5, thickness = 3, color = red)$



Man skal bruge nulpunktet som øvre grænse i det bestemte integral, så det bestemmes:

$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = -2\}, \{x = 2\}$

Dvs. arealet af M bliver:

$A_M = \int_0^2 f(x)\, dx = \frac{16}{3}$

$\underline{\underline{A_M = \frac{16}{3}}}$

b) $T(a) := \dfrac{(a^2+4)^2}{4 \cdot a}$:

Først bestemmes de steder, hvor T har vandret tangent:

$T'(a) = 0 \xrightarrow{\text{solve for a}} \left[[a = 2\,\mathrm{I}], [a = -2\,\mathrm{I}], \left[a = \frac{2}{3}\sqrt{3}\right], \left[a = -\frac{2}{3}\sqrt{3}\right] \right]$

Kun den tredje af disse løsninger er både reel og ligger i intervallet $0 < a < 2$.

Ved at se på fortegnet for den anden afledede funktion undersøges det, om det er et minimumssted:

$T''\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3} > 0$ dvs. det er et lokalt minimumssted.

Da der ikke er andre lokale ekstremumssteder i intervallet, er arealet af trekant OQR er mindst, når $\underline{\underline{a = \dfrac{2}{\sqrt{3}}}}$

c) Andenkoordinaten for tangentens røringspunkt bestemmes ved indsættelse i funktionsforskriften:

$f(a) = -a^2 + 4$

Tangentens hældning bestemmes ved at indsætte i den afledede funktion:

$f'(x) = -2x$

$f'(a) = -2 \cdot a$

Så tangentens ligning bliver:

$y + a^2 - 4 = -2 \cdot a \cdot (x - a) \Leftrightarrow y = -2\,a \cdot x + a^2 + 4$

Dette kunne også være fundet ved at lade Maple regne det hele ud:

$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a) \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = -2\,a\,(x - a) - a^2 + 4 \overset{\text{simplify}}{=} y = a^2 - 2\,a\,x + 4$

Skæringen med andenaksen findes ved at sætte x til 0: $y = a^2 + 4$:

Skæringen med førsteaksen findes ved at sætte y til 0: $0 = a^2 - 2\,a \cdot x + 4 \Leftrightarrow 2\,a \cdot x = a^2 + 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2} + \dfrac{2}{a}$

Dvs. $\underline{\underline{R(0, a^2+4) \text{ og } Q\left(\frac{a}{2} + \frac{2}{a}, 0\right)}}$

Trekantens areal bestemmes med $T = \dfrac{1}{2} \cdot h \cdot g$

$$T(a) = \frac{1}{2} \cdot (a^2+4) \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{2}{a}\right) = \frac{1}{2} \cdot (a^2+4) \cdot \left(\frac{a^2}{2\,a} + \frac{4}{2\,a}\right) = \frac{1}{2} \cdot (a^2+4) \cdot \frac{(a^2+4)}{2\,a} = \underline{\underline{\frac{(a^2+4)^2}{4\,a}}}$$

7. december 2016: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: $P(8,9)\quad Q(14,12)$

Først bestemmes hældningskoefficienten:

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{12-9}{14-8}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Skæringen med andenaksen bestemmes ved indsættelse i funktionsforskriften $f(x)=a\cdot x+b$

Punktet P anvendes (man kan også anvende punktet Q):

$$9=\frac{1}{2}\cdot 8+b \quad\Leftrightarrow\quad 9=4+b \quad\Leftrightarrow\quad b=5$$

Dvs. $\underline{\underline{f(x)=\frac{1}{2}x+5}}$

Opgave 2: $y=2x^2-4x+3$

Hvis man kan huske toppunktsformlen, kan man indsætte i denne.
Først bestemmes diskriminanten:

$$d=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot 2\cdot 3=16-24=-8$$

$$T=\left(\frac{-b}{2a},\frac{-d}{4a}\right)=\left(\frac{-(-4)}{2\cdot 2},\frac{-(-8)}{4\cdot 2}\right)=\left(\frac{4}{4},\frac{8}{8}\right)=\underline{\underline{(1,1)}}$$

Hvis man ikke kan huske formlen, må man anvende differentialregning og finde det sted, hvor grafen har en vandret tangent:

$$\left(2x^2-4x+3\right)'=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4x-4=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4x=4 \quad\Leftrightarrow\quad x=1$$

Herefter kan andenkoordinaten bestemmes ved at indsætte i parablens ligning.

Opgave 3: $f(x)=\ln(x)+2x \qquad P(1,f(1))$

For at kunne bestemme ligningen for tangenten skal man kende røringspunktets andenkoordinat samt tangentens hældning.
Andenkoordinaten bestemmes ved indsættelse i funktionsforskriften:

$$f(1)=\ln(1)+2\cdot 1=0+2=2$$

Hældningen bestemmes ved indsættelse i den afledede funktion:

$$f'(x)=\frac{1}{x}+2$$

$$f'(1)=\frac{1}{1}+2=3$$

Hermed bliver tangentens ligning:

$$y-y_0=a\cdot(x-x_0)$$

$$y-2=3\cdot(x-1) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{y=3x-1}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 4: Nævneren genkendes (forhåbentlig!) som højresiden i tredje kvadratsætning:

$$\frac{2\cdot(a+b)}{a^2-b^2}=\frac{2\cdot(a+b)}{(a+b)\cdot(a-b)}=\underline{\underline{\frac{2}{a-b}}}$$

Opgave 5: Da de to trekanter *ACB* og *BDA* er ensvinklede med lige store korresponderende sider, er de kongruente, og dermed ligger punktet *E* som midtpunkt på både *AC* og *BD*, og dermed vil højden fra *E* i trekant *ABE* have længden 3 (halvdelen af både *BC* og *AD*).
Så arealet af trekant *ABE* er:

$$T_{ABE}=\frac{1}{2}\cdot h\cdot g=\frac{1}{2}\cdot h_E\cdot|AB|=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 8=\underline{\underline{12}}$$

Opgave 6: Det ses, at grafen for *g* ligger over grafen for *f* i intervallet, og da det er oplyst, at de to grafer skærer hinanden i $x=0$ og $x=4$, får man:

$$A_M=\int_0^4\left(g(x)-f(x)\right)dx=\left[G(x)-F(x)\right]_0^4=$$

$$\left(G(4)-F(4)\right)-\left(G(0)-F(0)\right)=5-3-(-1)+1=\underline{\underline{4}}$$

7. december 2016: Delprøven MED hjælpemidler

Opgave 7: $N(t) = b \cdot a^t$

restart

with(*Gym*) :

a) Forskriften fortæller os, at modellen er en eksponentiel udvikling, og da der er mere end to sæt målepunkter opgivet, skal der anvendes regression:

$År := [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]$:

$Salg := [46, 70, 516, 1128, 1743, 3318, 11970]$:

$N(t) := ExpReg(År, Salg, t)$:

$N(t) = 47.9957992488190\ 2.49669080419034^t$

Dvs. $\underline{\underline{a = 2.50 \text{ og } b = 48.0}}$

b) a er fremskrivningsfaktoren, og den er forbundet til vækstraten r ved $a = 1 + r$, så a-værdien fortæller, at **det samlede salg af elbiler siden 2009 er vokset med 150% om året.**

Fordoblingskonstanten beregnes ved $T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}$

$T_2 = \frac{\ln(2.)}{\ln(2.49669080419034)} = 0.7575659061$

Dvs. **det samlede salg af elbiler fordobles for hver 9 måneder.**

c) $N'(7) = 26555.9351731678$

Da $t = 7$ svarer til år 2016 fortæller dette, at

ifølge modellen vokser antallet af solgte elbiler i 2016 med 26556 biler om året.

Opgave 8: $\vec{a} := \langle 3t + 20, 2 \rangle : \vec{b} := \langle 2, -1 \rangle$:

a) Først sættes t til 1: $t := 1$:

Projektionen $\vec{a}_b$ af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er en vektor givet ved: $\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$

$$\vec{a}_b = \frac{dotP(\vec{a}, \vec{b})}{(len(\vec{b}))^2} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} \frac{88}{5} \\ -\frac{44}{5} \end{bmatrix}$$

Dvs. $\underline{\underline{\vec{a}_b = \begin{pmatrix} \frac{88}{5} \\ -\frac{44}{5} \end{pmatrix}}}$

b) t skal igen fungere som variabel, så *unassign*('*t*') :

Med Gym-pakkens *len*, der angiver længden af en vektor, opskrives ligningen $|\vec{a}| = |\vec{b}|$:

$$len(\vec{a}) = len(\vec{b}) \overset{\text{simplify constant}}{=} \sqrt{4 + (3t + 20)^2} = \sqrt{5} \xrightarrow{\text{solve for t}} \left[\left[t = -\frac{19}{3}\right], [t = -7]\right]$$

Dvs. $\underline{\underline{t = -\frac{19}{3} \vee t = -7}}$

Opgave 9: $y = 10 \cdot x^{-0.8}$

a) Der er tale om potensvækst, så sammenhængen mellem vækstraterne for x og y er givet ved:

$(1 + r_y) = (1 + r_x)^a$

Når x vokser med 20%, er $r_x = 0.20$, så man får:

$(1 + r_y) = (1 + 0.2)^{-0.8} \xrightarrow{\text{solve for r\_y}} [[r_y = -0.1357189257]]$

Dvs. **y falder med 13,6%**, når x vokser med 20%.

Opgave 10: Punkterne opskrives som stedvektorer, men kanterne angives ved deres længder:

$\overrightarrow{OA} := \langle 0, 0, 0\rangle : \overrightarrow{OB} := \langle 0, 8, 6\rangle : \overrightarrow{OC} := \langle 0, 16, 0\rangle : AB := 10 : BC := 10 : CD := 12.2 : AD := 12.2 : AC := 16 :$

a) Man kan godt bestemme $\angle B$ ved at regne på vektorer, men da man kender længden af alle tre sider i trekant ABC, kan man også bestemme den søgte vinkel ved en cosinusrelation:

$$Cos(B) = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} \xrightarrow{\text{solve for B}} [[B = 106.2602047]]$$

Dvs. $\underline{\underline{\angle B = 106.3°}}$

$B := 106.2602047 :$

Diagonalen BD deler firkanten $ABCD$ i to kongruente trekanter ABD og BCD (da disse har ens sidelængder - jf. Euklids sætning 8 i bog 1). Derfor er $\angle ABD = \frac{1}{2} \cdot \angle B$. Og da man i trekant ABD derfor kender længden af to sider og størrelsen af en vinkel, kan man bestemme den sidste side ved en cosinusrelation:

$$Cos\left(\frac{B}{2}\right) = \frac{AB^2 + BD^2 - AD^2}{2 \cdot AB \cdot BD} \xrightarrow{\text{solve for BD}} [[BD = -3.210863151], [BD = 15.21086316]]$$

Da det er en sidelængde, forkastes det negative resultat:

$\underline{\underline{|BD| = 15.2 \text{ cm}}}$

b) $BD := 15.21086316 :$

Arealet af firkant $ABCD$ bestemmes ved at opdele firkanten i de to kongruente trekanter ABD og BCD, hvis areal kan bestemmes med ½-appelsin-formlen:

$$A_{ABCD} = 2 \cdot T_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BD \cdot Sin\left(\frac{B}{2}\right) = 121.6869053$$

Dvs. $\underline{\underline{A_{ABCD} = 121.7 \text{ cm}^2}}$

c) $\alpha : 85.6 \cdot x - 51.6 \cdot y + 68.8 \cdot z = 0$, dvs. en normalvektor for denne plan er $m := \langle 85.6, -51.6, 68.8\rangle :$

Først bestemmes en normalvektor til den plan, der indeholder firkant $ABCD$. Dette gøres ved først at finde krydsproduktet mellem to retningsvektorer $\overrightarrow{BA}$ og $\overrightarrow{BC}$ for planen:

$$\overrightarrow{BA} := \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ -6 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{BC} := \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} 96 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Denne vektorer nedskaleres, så man som normalvektor vælger: $n := \langle 1, 0, 0\rangle : \underline{\underline{\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}$

Dette er i overensstemmelse med, at det er oplyst, at firkant $ABCD$ ligger i yz-planen, og man kan spare udregningerne, hvis man henviser til denne oplysning.

En af de to vinkler mellem de to vinkler bestemmes så med formlen $\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$:

$$Cos(v) = \frac{dotP(n, m)}{len(n) \cdot len(m)} \xrightarrow{\text{solve for v}} [[v = 45.13355635]]$$

Det er den stumpe vinkel mellem planerne, der søges, så man skal bruge supplementvinklen:

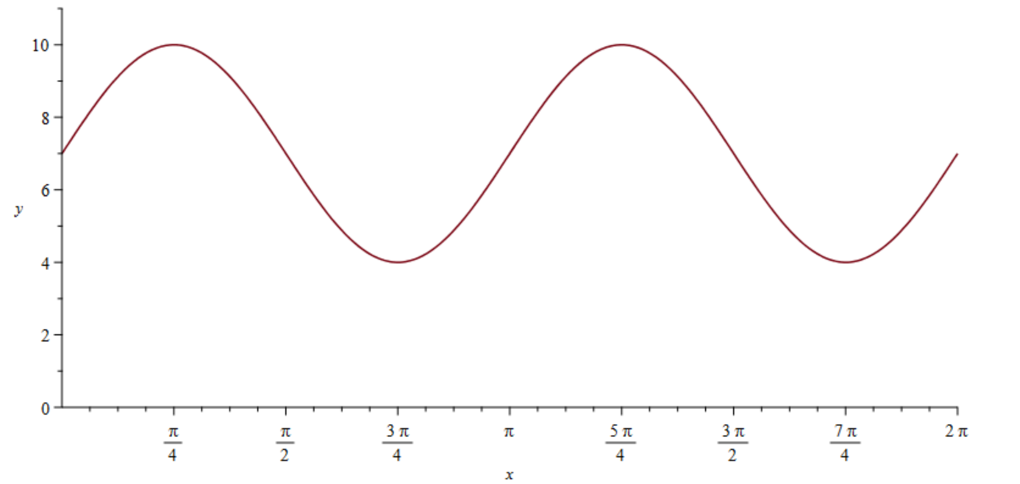
$v_{stump} = 180 - 45.13355635 = 134.8664436$

Dvs. den søgte vinkel er $\underline{\underline{v_{stump} = 134.9°}}$

Opgave 11: $f(x) := 3 \cdot \sin(2 \cdot x) + 7 :$

a) Man har fået oplyst en definitionsmængde, så grafen skal angives i dette interval:

$plot(f(x), x = 0 .. 2 \cdot \pi, y = 0 .. 11)$



Den mindste værdi en sinusfunktion kan give, er -1, og da man har to perioder med, vil denne værdi optræde to steder. Så den mindste funktionsværdi bliver:

$f_{min} = 3 \cdot (-1) + 7 = -3 + 7 = \underline{\underline{4}}$

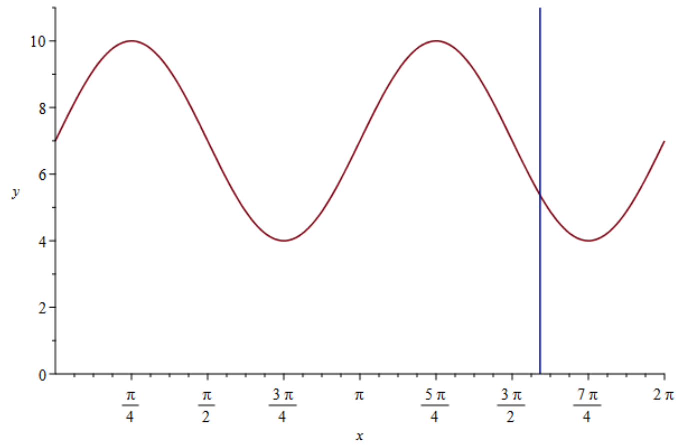
b) Da det er en trigonometrisk funktion (og da en definitionsmængde er oplyst), anvendes intervalsolve:

$intervalsolve(f(x) = 8.5, x = 0 .. 2 \cdot \pi) = [0.2617993878, 1.308996939, 3.403392041, 4.450589593]$

Dvs. $\underline{\underline{x = 0.26 \lor x = 1.31 \lor x = 3.40 \lor x = 4.45}}$

c) Grafen plottes sammen med linjen med ligningen $x = 5$, så man kan se den punktmængde, der roteres:

$plot(f(x), x = 0 .. 2 \cdot \pi, y = 0 .. 11)$



Rumfanget kan beregnes med formlen for rumfanget af omdrejningslegemet:

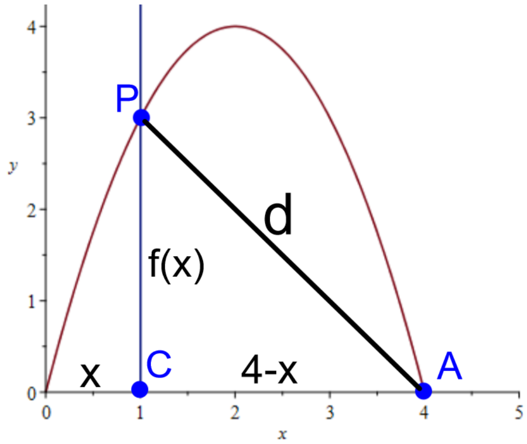
$$V = \pi \cdot \int_0^5 f(x)^2 \, dx = \pi \left(\frac{577}{2} - \frac{9}{4} \cos(10) \sin(10) - 21 \cos(10) \right) \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 958.4793058$$

Dvs. $\underline{\underline{V = 958.5}}$

Opgave 12: $f(x) := -x^2 + 4 \cdot x :$

a) Punktet P projiceres ned på x-aksen, og dermed dannes den retvinklede trekant ACP:

$plot(f(x), x = 0..5, y = 0..5)$



Da trekant ACP er retvinklet, gælder Pythagoras' Læresætning, så:

$d^2 = (4-x)^2 + f(x)^2 = (4-x)^2 + \left(-x^2 + 4x\right)^2 \overset{\text{expand}}{=} x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 8x + 16$

Dvs.

$\underline{\underline{d = \sqrt{x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 8x + 16}}}$

Da førstekoordinaten for punktet P skal ligge mellem O og A (og da udtrykket giver 4 for både $x = 0$ og $x = 4$), har man $0 \leq x \leq 4$

b) Ved hjælp af den første og anden afledede bestemmes x-koordinaten for det punkt, hvor d er størst:

$d(x) := \sqrt{x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 8x + 16} :$

$d'(x) = 0. \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 0.2928932188], [x = 1.707106781]]$

Fortegnet for den anden afledede af d fortæller, om der er tale om steder med lokalt min eller maks:

$d''(0.2928932188) = 2.714393378 > 0$ dvs. lokalt minimumssted

$d''(1.707106781) = -1.429626978 < 0$ dvs. lokalt maksimumssted

Da man fra O bevæger sig til et lokalt minimumssted, derfra til lokalt maksimumssted, og derfra til A, er der mulighed for størst afstand i det lokale maksimumssted og i O.

I O er afstanden 4, så det tjekkes, om afstanden er større i det lokale maksimumssted:

$d(1.707106781) = 4.536345128 > 4$, dvs. x−værdien for P_{maks} er 1.707106781

y − værdien bestemmes ved indsættelse i funktionsforskriften for f:

$f(1.707106781) = 3.914213562$

Dvs. $\underline{\underline{P_{maks}(1.71, 3.91)}}$

Opgave 13:

a) Antallet af personer i stikprøven kan bestemmes ved at lægge summerne sammen enten lodret eller vandret.
Her regnes begge dele ud, så man kan se, at det giver det samme:

$n = sum_{lodret} = 178 + 29 = 207$

$n = sum_{vandret} = 103 + 52 + 52 = \underline{\underline{207}}$

De forventede værdier i skemaet beregnes ved at gange række- og søjlesummerne sammen og dele med n, da man på baggrund af nulhypotesen vil forvente, at man ved f.eks. "Infektion-Placebo" må forvente, at da $\frac{103}{207} = 50\ \%$ af personerne har fået placebo, vil der være 50% af de 178 med infektion, der har fået placebo.
Man får altså:

	Placebo	**20% Echinacea**	**60% Echinacea**	**Sum**
Infektion	$\frac{103 \cdot 178}{207.} = 88.57004831$ **89**	$\frac{52 \cdot 178}{207.} = 44.71497585$ **45**	$\frac{52 \cdot 178}{207.} = 44.71497585$ **45**	**178**
Ikke infektion	$\frac{103 \cdot 29}{207.} = 14.42995169$ **14**	$\frac{52 \cdot 29}{207.} = 7.285024155$ **7**	$\frac{52 \cdot 29}{207.} = 7.285024155$ **7**	**29**
Sum	**103**	**52**	**52**	**207**

b) Der er 2 rækker og 3 søjler, så antallet f af frihedsgrader er $f = (r-1) \cdot (s-1) = (2-1) \cdot (3-1) = 2$
Med 2 frihedsgrader og et signifikansniveau på 5% er den kritiske størrelse 5,99.
Dette kan enten slås op i en tabel, eller det kan beregnes i Maple ved:

$0.05 = 1 - chicdf(2, t) \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t = 5.991464547]]$

Da 2,925 < 5,991, **kan nulhypotesen IKKE forkastes.**

Opgave 14: $\frac{dA}{dt} = k \cdot (M - A)$

a) Med $M = 300$, $k = 0.02$ og $A = 75$ (til $t = 0$), får man:

$$\frac{dA}{dt} = 0.02 \cdot (300 - 75) = 4.50$$

Dvs. **fra start vokser medarbejderens produktionsevne pr. døgn med 4,5 enheder pr. dag**

b) Differentialligningen løses med de angivne værdier for k og M:

$$[A'(t) = 0.02 \cdot (300 - A(t)), A(0) = 75] \xrightarrow{\text{solve DE}} A(t) = 300 - 225\, e^{-\frac{1}{50}t}$$

Dvs. $\underline{\underline{A(t) = 300 - 225\, e^{-\frac{1}{50}t}}}$

Hvis medarbejderen skal kunne producere 200 enheder pr. dag, skal $A(t) = 200$:

$$200. = 300 - 225\, e^{-\frac{1}{50}t} \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t = 40.54651081]]$$

Dvs. medarbejderen skal være under oplæring i **41 døgn** for at kunne producere 200 enheder pr. dag

c) Oplysningerne fortæller, at $A(0) = 50$ og $A(30) = 120$. Først løses differentialligningen løses med $M = 250$:

$$A'(t) = k \cdot (250 - A(t)) \xrightarrow{\text{solve DE}} A(t) = 250 + e^{-kt}\,\_C1$$

Dvs. $A(t) := 250 + c \cdot e^{-k \cdot t}$:

Der er altså to konstanter (k og c), men der er også to oplysninger, der gør det muligt at bestemme begge konstanter:

$solve([A(0) = 50., A(30) = 120.], \{k, c\}) = \{c = -200., k = 0.01435943054\}$

Man er kun blevet bedt om at bestemme k, og man har altså $\underline{\underline{k = 0.01436}}$

Først tjekkes det, at tallet 250 i funktionsforskriften svarer til M:

$A'(t) = k \cdot (M - A(t)) \xrightarrow{\text{solve DE}} A(t) = M + e^{-kt}\,\_C1$ Dvs. de 250 **er** M.

Forskriften for funktionen bliver:

$$A(t) := 250 - 200 \cdot e^{-0.01435943054 \cdot t}:$$

Det ses, at $A(t) \rightarrow 250$ for $t \rightarrow \infty$, da $-0.01435943054 \cdot t \rightarrow -\infty$ og dermed $e^{-0.01435943054 \cdot t} \rightarrow 0$.

Dvs. de 250 (altså M) er den øvre grænse for funktionen, dvs.

M angiver den maksimale produktionsevne, som medarbejderen kan og vil opnå over tid.