Løsninger til eksamensopgaver på A-niveau 2017

18. maj 2017: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: Alle funktionerne *f*, *g* og *h* er lineære funktioner (og ingen er mere lineære end andre) og kan skrives på formen $x \mapsto a \cdot x + b$, hvor *a* er grafens hældning og *b* er skæringen med andenaksen.
Alle tre grafer skærer andenaksen i 1, hvilket passer med, at $b = 1$ aflæses i alle tre forskrifter.
Graf *A* har hældningen -1, hvilket passer med funktionen *g*.
Graf *B* har hældningen 1, hvilket passer med funktionen *f*.
Graf *C* har hældningen 0, hvilket passer med funktionen *h*.

Opgave 2: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Arealet af parallelogrammet, der udspændes af de to vektorer, er lig den numeriske værdi af determinanten af vektorparret:

$$A_{parallelogram} = \left|\det\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right| = \left\|\begin{matrix} -1 & 6 \\ 5 & 2 \end{matrix}\right\| = |-1 \cdot 2 - 5 \cdot 6| = |-32| = \underline{\underline{32}}$$

Opgave 3: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 4$

At bestemme monotoniforholdene vil sige at opdele *f* 's definitionsmængde i intervaller, hvor *f* er monoton, samt at angive om *f* er voksende eller aftagende (eller konstant) i de enkelte intervaller.
Først bestemmes ved at løse ligningen $f'(x) = 0$ de steder, hvor der kan være ekstremumssteder:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x - 3$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 + 2x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = (x+3) \cdot (x-1) \quad \Leftrightarrow \quad x = -3 \ \vee \ x = 1$$

(Andengradsligningen blev løst ved faktorisering og anvendelse af nulreglen, men man kan også anvende diskriminantmetoden).
Med værdien af den anden afledede af *f* undersøges det, hvilken slags steder der er tale om:

$$f''(x) = 2x + 2$$

$f''(-3) = 2 \cdot (-3) + 2 = -4 < 0$ dvs. lokalt maksimumssted

$f''(1) = 2 \cdot 1 + 2 = 4 > 0$ dvs. lokalt minimumssted

Dermed har man:
***f* er voksende i intervallerne]-∞,-3] og [1,∞[, og *f* er aftagende i intervallet [-3,1].**

Opgave 4: Ved reduktionen af det første udtryk anvendes første kvadratsætning på sidste led:

$$a^2 + 2ab - (a+b)^2 = a^2 + 2ab - \left(a^2 + b^2 + 2ab\right) = a^2 + 2ab - a^2 - b^2 - 2ab = \underline{\underline{-b^2}}$$

I det andet udtryk bemærkes det, at tælleren kan faktoriseres, hvorefter brøken kan forkortes:

$$\frac{x^2 + 2x}{x+2} = \frac{x(x+2)}{(x+2)} = \underline{\underline{x}}$$

<u>*Opgave 5:*</u> $P(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + 4 \quad (2,0) \quad (4,0)$

Da parablen går gennem de to angivne punkter, kan man danne to sande udsagn ved indsættelse af punkternes koordinater i forskriften:

$$0 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 4a + 2b + 4$$

$$0 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 16a + 4b + 4$$

For at få fjernet *b* fra ligningerne dannes lige store koefficienter foran *b* (den øverste ligning forlænges med 2), hvorefter den øverste ligning trækkes fra den nederste:

$$\left.\begin{matrix} 0 = 8a + 4b + 8 \\ 0 = 16a + 4b + 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 - 0 = (16a + 4b + 4) - (8a + 4b + 8) \quad \Leftrightarrow \quad 8a - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{a = \frac{1}{2}}}$$

Dette indsættes i den øverste ligning for at finde *b*-værdien:

$$a = \frac{1}{2}: \quad 0 = 4 \cdot \frac{1}{2} + 2b + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 6 + 2b \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{b = -3}}$$

<u>*Opgave 6:*</u> $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

Man kan udregne dette bestemte integral ved substitutionsmetoden (eller integrationsvariabelskift).

Det bemærkes, at nævneren differentieret giver tælleren, så nævneren substitueres med *t*.

$$t = x^2 + 1$$

$$x = 0: t = 0^2 + 1 = 1$$

$$x = 1: t = 1^2 + 1 = 2$$

$$\frac{dt}{dx} = 2x$$

$$dt = 2x \cdot dx$$

Ovenstående anvendes, så integrationsvariablen ændres fra *x* til *t* (bemærk også skiftet af grænserne i integralet, så de passer til variablen *t*):

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt = \left[\ln|t|\right]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2) - 0 = \underline{\underline{\ln(2)}}$$

Man kan også slippe for indførslen af variablen *t* ved:

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} \frac{d\left(x^2+1\right)}{2x} = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,d\left(x^2+1\right) =$$

$$\left[\ln\left|x^2+1\right|\right]_0^1 = \ln\left|1^2+1\right| - \ln\left|0^2+1\right| = \ln(2) - \ln(1) = \underline{\underline{\ln(2)}}$$

18. maj 2017: Delprøven MED hjælpemidler

Opgave 7:

a) Da forskriften er på formen $f(x) = b \cdot x^a$, er der tale om potensvækst, og da man har mere end to par af sammenhørende værdier, skal der foretages regression:

$Nedslagsenergi := [26, 33, 37, 46, 55, 65]:$

$Kraterradius := [47, 51, 54, 57, 61, 65]:$

$f(x) := PowReg(Nedslagsenergi, Kraterradius, x):$

$f(x) = 15.1390265406370\, x^{0.348393566894605}$

Dvs. $\underline{\underline{a = 0.348}}$ og $\underline{\underline{b = 15.1}}$

b) Et nedslagskrater med en radius på 48 mm svarer til $f(x) = 48$, så med 'solve' løses ligningen:

$f(x) = 48 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 27.44353981]]$

Dvs. **nedslagsenergien skal være 27,4 mJ.**

c) Da det er en potensfunktion gælder sammenhængen $(1 + r_y) = (1 + r_x)^a$, hvor r er vækstraten.

Da nedslagsenergien øges med 40%, er $r_x = 0.40$. Hermed kan r_y beregnes:

$1 + r_y = (1 + 0.4)^{0.348393566894605} \xrightarrow{\text{solve for r\_\_y}} [[r_y = 0.1243721180]]$

Dvs. at **radius i nedslagskrateret øges med 12,4%**

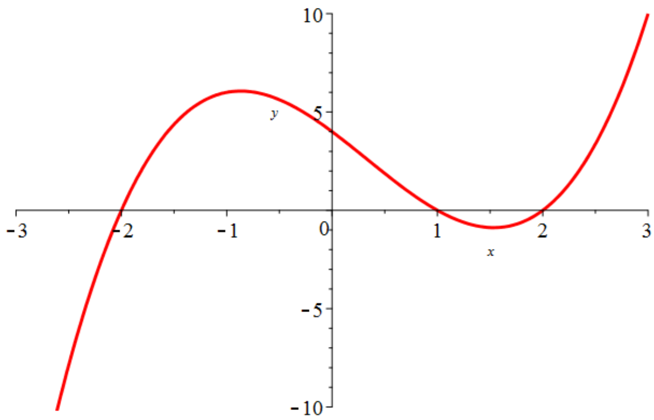
Opgave 8:

Opgave 8:

a) $f(x) := x^3 - x^2 - 4x + 4:$

Det er et tredjegradspolynomium, der højst kan vende to steder, så hvis man får disse steder samt nulpunkterne med på grafen, og hvis disse fremgår tydeligt, er grafen fin. Husk, at du både skal styre intervallerne på første- og andenaksen:

$plot(f(x), x = -3..3, y = -10..10, thickness = 3, color = red)$



Der kan højst være tre nulpunkter i et tredjegradspolynomium, og på grafen ses det, er der er tre. Desuden ser det ud til, at det er -2, 1 og 2, men hvis du vælger at aflæse dette, **skal** du kontrollere det ved indsættelse i forskriften: $f(-2) = 0 \quad f(1) = 0 \quad f(2) = 0$

Standardmetoden er at bestemme nulpunkterne med 'solve':

$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 1], [x = 2], [x = -2]]$

Så koordinatsættene til nulpunkterne er:

$\underline{\underline{(-2, 0), (1, 0) \text{ og } (2, 0)}}$

b) En ligning for tangenten til grafen i $(3, f(3))$ bestemmes ud fra ligningen $y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$:

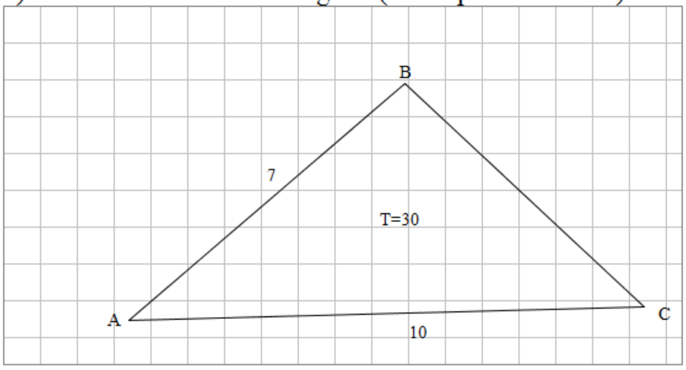
$y - f(3) = f'(3) \cdot (x - 3) \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = 17x - 41$

Dvs. tangentligningen er $\underline{\underline{y = 17x - 41}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 9:

a) En skitse af trekanten tegnes (med spids vinkel A):



$T_{ABC} := 30 : AB := 7 : AC := 10 :$

Arealet kan bestemmes med $\frac{1}{2}$-appelsinformlen, og da det er oplyst, at vinkel A er spids, har man:

$$intervalsolve\left(T_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot Sin(A), A = 0..90\right) = [58.99728087]$$

Dvs. $\underline{\underline{\angle A = 59.0°}}$

b) For at kunne bestemmes omkredsen mangler man længden af BC. Den kan bestemmes ved en cosinusrelation:

$A := 58.99728087 :$

$$Cos(A) = \frac{(AB^2 + AC^2 - BC^2)}{2\cdot AB\cdot AC} \xrightarrow{\text{solve for BC}} [[BC = 8.768635841], [BC = -8.768635841]]$$

Da en sidelængde ikke kan være negativ, er $|BC| = 8.8$

Hermed er omkredsen af trekanten:

$O_{ABC} = |AB| + |BC| + |AC| = AB + 8.768635841 + AC = 25.76863584$

Dvs. $\underline{\underline{O_{ABC} = 25.8}}$

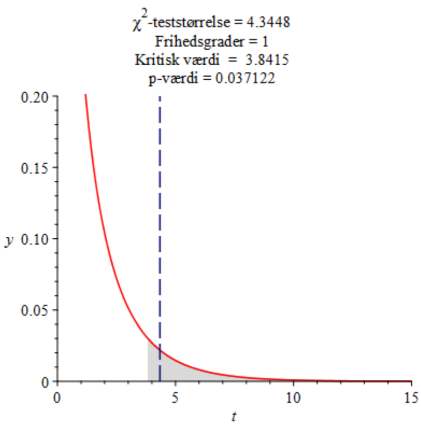
Opgave 10:

a) Nulhypotesen er, at **der er uafhængighed mellem artsfordelingen og de to habitater.**

Det er et χ^2-uafhængighedstest, der skal udføres (med et signifikansniveau på 5%):

$$M := \begin{bmatrix} 345 & 112 \\ 410 & 96 \end{bmatrix} :$$

$ChiKvadratUtest(M, level = 0.05)$



Da p-værdien er 0,037 = 3,7% og dermed **mindre end** signifikansniveauet på 5%, **skal nulhypotesen forkastes.**

Der er altså signifikant forskel på artsfordelingen i de to habitater.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 11:

a) Punkterne angives ved deres stedvektorer $\overrightarrow{OO} := \langle 0, 0, 0\rangle : \overrightarrow{OA} := \langle 14, 0, 24\rangle : \overrightarrow{OB} := \langle 0, 10, 20\rangle :$
Glasfladen er en trekant, så arealet bestemmes som halvdelen af længden af krydsproduktet af to vektorer, der udspænder trekanten, hvilket $\overrightarrow{OA}$ og $\overrightarrow{OB}$ gør:

$$T_{OAB} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right| = \frac{1}{2}\cdot len\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right) = 10\sqrt{389} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 197.2308292$$

Dvs. **arealet af glasfladen er 197,2 dm^2**

b) For at bestemme en parameterfremstilling skal man kende et punkt, som linjen går igennem (her vælges O, men B kan også bruges) samt en retningsvektor for linjen. Som retningsvektor kan vælges $\overrightarrow{OB}$, men man kan også vælge en nedskaleret vektor (samme retning, men kortere) ved at nedskalere med en faktor 10. Så er parameterfremstillingen:

$$\langle x, y, z\rangle = \langle 0, 0, 0\rangle + t\cdot\left(\frac{1}{10}\right)\cdot\overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 2\,t \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

c) Enhver vektor parallel med z-aksen er en normalvektor for xy-planen, så her vælges $\vec{n} := \langle 0, 0, 1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Først bestemmes vinklen mellem planens normalvektor og linjens retningsvektor $\vec{r} := \langle 0, 1, 2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\cos(w) = \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{r}|}$$

$$Cos(w) = \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{len(\vec{n})\cdot len(\vec{r})} \xrightarrow{\text{solve for w}} [[w = 26.56505118]]$$

Dermed er den spidse vinkel mellem planen og linjen: $v = 90 - w = 90 - 26.56505118 = 63.43494882$
Dvs. $\underline{\underline{v_{spids} = 63.4°}}$

Opgave 12:

$$\frac{dT}{dx} = 1.54 - 0.259\cdot(T - 22)$$

a) Da $\frac{dT}{dx}$ netop er væksthastigheden, bestemmes denne ved direkte indsættelse i differentialligningen:

$$\frac{dT}{dx} = 1.54 - 0.259\cdot(26 - 22) = 0.504$$

Dvs. **når temperaturen i akvariet er 26 °C vokser temperaturen med 0,5 °C i timen.**

b) Man skal finde ud af, hvornår temperaturen når 27 °C, så først bestemmes den partikulære løsning til differentialligningen:

$$[T'(x) = 1.54 - 0.259\cdot(T(x) - 22), T(0) = 22] \xrightarrow{\text{solve DE}} T(x) = \frac{1034}{37} - \frac{220}{37}\,e^{-\frac{259}{1000}x}$$

En temperatur på 27 °C svarer til $T(x) = 27$, så man har:

$$27. = \frac{1034}{37} - \frac{220}{37}\,e^{-\frac{259}{1000}x} \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 7.097604189]]$$

Dvs. **der skal gå 7,1 time fra opvarmningens start, til det er sikkert at slippe fisken ned i akvariet.**
(man kan evt. bemærke, at temperaturen er en voksende funktion, men en fysiker vil sige, at det fremgår af sammenhængen)

Opgave 13:

a) $f(x) := 2\cdot 0.5^x : g(x) := 4 :$

Arealet bestemmes ved udregning af et bestemt integral. Man ved, at den øvre grænse i integralet er 0, men for at finde den nedre grænse, skal man have fundet det sted i 2. kvadrant, hvor de to grafer skærer hinanden:

$f(x) = g(x) \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = -1.]]$

Man kan se på figuren, at grafen for *g* ligger øverst i intervallet [-1,0], men det kan også tjekkes ved at udregne funktionsværdier et sted i intervallet:

$g(-0.5) = 4$ (ikke det mest overraskende resultat, da det er en konstantfunktion).

$f(-0.5) = 2.828427124$

Da $g(-0.5) > f(-0.5)$ ligger grafen for *g* øverst, og dermed er arealet af punktmængden *M*:

$$A_M = \int_{-1}^{0} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = 1.114609918$$

Dvs. $\underline{\underline{A_M = 1.115}}$

b) Nu er det den øvre grænse, der er ukendt, og da arealerne skal være lige store, har man:

$$\int_{-1}^{0} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{solve for k}} [[k = 0.7043812553]]$$

Dvs. $\underline{\underline{k = 0.7044}}$

Opgave 14:

a) ***R* indføres som den variabel, der angiver antallet af rygere (målt i mio.) som funktion af tiden *t* målt i antal år efter 1980.**

Da det er oplyst, at man skal arbejde med en eksponentiel udvikling, og med den indførte variabel t, har man:

$R(t) = 721\cdot a^t$ (721 er begyndelsesværdien, da der var 721 mio. rygere i startåret 1980).

a-værdien kan beregnes ved at udnytte, at der i 2012 ($t = 32$) var 967 mio. rygere:

$967 = 721\cdot a^{32} \xrightarrow{\text{solve}} -1.009215938, 1.009215938$ (der anvendes numerisk solve for at undgå de 30 komplekse løsninger).

Da *a*-værdien skal være positiv, har man:

$\underline{\underline{R(t) = 721\cdot 1.0092^t}}$

b) $R(t) := 721\cdot 1.009215938^t : N(t) := \dfrac{12245}{1 + 1.74\cdot \mathrm{e}^{-0.0273\cdot t}} :$

Da man er så heldig, at de valgte variable i spørgsmål a) måles i samme enhed som den nye funktion *N*, kan man finde en forskrift for funktionen *g*, der angiver andelen af rygere, ved at danne kvotientfunktionen:

$g(t) := \dfrac{R(t)}{N(t)} :$

$g(t) = \dfrac{721}{12245}\,1.009215938^t\left(1 + 1.74\,\mathrm{e}^{-0.0273\,t}\right) \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 0.05888117599\,1.009215938^t\left(1. + 1.74\,\mathrm{e}^{-0.0273\,t}\right)$

Dvs. $\underline{\underline{g(t) = 0.0589\cdot 1.00922^t\cdot\left(1 + 1.74\cdot \mathrm{e}^{-0.0273\cdot t}\right)}}$

Ved hjælp af den afledede funktion bestemmes det eller de steder, der kan være ekstremumssteder:

$g'(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t = 45.23455515]]$

Med den anden afledede funktions fortegn dette sted undersøges det, hvilken slags sted, der er tale om:

$g''(45.23455515) = 0.00002233079096 > 0$ dvs. lokalt minimum

Da der ikke er andre ekstremumssteder, har man altså, at i denne model er **andelen af rygere mindst i år 2025.**

Opgave 15:

a) *restart* : *with*(*Gym*) :

$AC := 340 : CF := 340 : AB := 210 : BG := 210 : DF := 210 : C := 33 :$

I trekant ACF kan længden af siden AF bestemmes med en cosinusrelation:

$$Cos(C) = \frac{(AC^2 + CF^2 - AF^2)}{2 \cdot AC \cdot CF} \xrightarrow{\text{solve for AF}} [[AF = 193.1304344], [AF = -193.1304344]]$$

Da sidelængden ikke kan være negativ, har man $\underline{\underline{|AF| = 193.1}}$

I trekant ABG kan længden af AG ligeledes bestemmes med en cosinusrelation:

$B := C :$

$$Cos(B) = \frac{(AB^2 + BG^2 - AG^2)}{2 \cdot AB \cdot BG} \xrightarrow{\text{solve for AG}} [[AG = 119.2864448], [AG = -119.2864448]]$$

Igen kan sidelængden ikke være negativ, så man har $\underline{\underline{|AG| = 119.3}}$

Med de to udregnede værdier har man:

$$\frac{|AF|}{|AG|} = \frac{193.1304344}{119.2864448} = 1.619047619$$

Det gyldne forhold er:

$$\frac{(1 + \sqrt{5.})}{2} = 1.618033988$$

Der er altså ikke fuld overensstemmelse, men det passer med 2 decimaler, og det er nok til praktiske formål.

b) Da $\angle ABG = \angle ACF$, og da trekanterne ABG og ACF deler $\angle A$, er de ensvinklede, dvs. forholdet mellem alle par af korresponderende sider er det samme, dvs. $\frac{|AF|}{|AG|} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|CF|}{|DF|} = \frac{340\text{mm}}{210\text{mm}} = \frac{34}{21} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 1.619047619$

Man genkender værdien fra før, men **pointen er, at forholdet som vist ikke afhænger af vinkel C, men udelukkende af længderne på linjestykkerne (der er konstante), og dermed er forholdet uafhængigt af indstillingen af værktøjet.**

23. maj 2017: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: $y = 2x^2 - 4x + 3$

Koordinatsættet for parablens toppunkt bestemmes ved toppunktsformlen. Hvis man ikke kan huske denne, må man klare sig med differentialregning.

$$d = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot 2\cdot 3 = 16 - 24 = -8$$

$$T = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right) = \left(\frac{-(-4)}{2\cdot 2}, \frac{-(-8)}{4\cdot 2}\right) = \left(\frac{4}{4}, \frac{8}{8}\right) = \underline{\underline{(1,1)}}$$

Opgave 2: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ t \end{pmatrix}$

Da begge vektorer er egentlige vektorer, gælder:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a}\bullet\vec{b} = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 6 \\ t \end{pmatrix} = 0 \iff 2\cdot 6 + 3\cdot t = 0 \iff 12 + 3t = 0 \iff$$

$$3t = -12 \iff t = \frac{-12}{3} = \underline{\underline{-4}}$$

Opgave 3: Først bestemmes længden af siden BC i trekant ABC. Da trekanten er retvinklet, kan Pythagoras' Sætning benyttes (eller også kan man genkende den retvinklede (6,8,10)-kant):

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2 \iff |BC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2$$

$$|BC| = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$$

Da trekanterne ABC og DEF er ensvinklede, er forholdene mellem korresponderende sider ens:

$$\frac{|EF|}{|BC|} = \frac{|DF|}{|AC|} \iff |EF| = \frac{|DF|}{|AC|}\cdot|BC|$$

$$|EF| = \frac{10}{8}\cdot 6 = \frac{60}{8} = \underline{\underline{\frac{15}{2}}}$$

Opgave 4: $f(x) = 3x^2 + 4x \qquad P(2,4)$

Først bestemmes ved ledvis integration den form samtlige stamfunktioner er på:

$$F_k(x) = 3\cdot\frac{1}{3}x^3 + 4\cdot\frac{1}{2}x^2 + k = x^3 + 2x^2 + k$$

Da grafen skal gå gennem P, indsættes punktets koordinater for at bestemme k:

$$4 = 2^3 + 2\cdot 2^2 + k \iff 4 = 8 + 8 + k \iff k = -12$$

Hermed er den søgte stamfunktion:

$$\underline{\underline{F(x) = x^3 + 2x^2 - 12}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 5: Cirklens ligning omskrives ved kvadratkomplettering til formen $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, så radius og centrums koordinater kan aflæses:

$$x^2-4x+y^2+6y+12=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2=-12+2^2+3^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2=1^2$$

Dvs. $\underline{\underline{r=1 \text{ og } C=(2,-3)}}$

Opgave 6: $\frac{dy}{dx}=3x+2y$

For at kunne bestemme en ligning for tangenten til grafen for *f* i punktet *P*, skal man kende punktets koordinater og tangentens hældning. Man kender allerede hældningen og punktets førstekoordinat. Differentialligningen kan anvendes til at bestemme punktets andenkoordinat, da differentialkvotienten $\frac{dy}{dx}$ netop svarer til tangenthældningen:

$$9=3\cdot 1+2y \quad \Leftrightarrow \quad 2y=6 \quad \Leftrightarrow \quad y=3$$

Da man nu kender punktets andenkoordinat, kan tangentens ligning bestemmes:

$$y-y_0=a\cdot(x-x_0)$$

$$y-3=9\cdot(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y=9x-6}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

23. maj 2017: Delprøven MED hjælpemidler

Opgave 7:

a) Da modellen $C(t) = b \cdot a^t$ er en eksponentiel udvikling, og da man kender mere end to sæt punkter, skal der anvendes regression:

$Tid := [0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28]:$

$Koncentration := [278, 206, 138, 110, 81, 58, 49, 32]:$

$C(t) := ExpReg(Tid, Koncentration, t):$

$C(t) = 270.505047229079\ 0.927688433385637^t$

Dvs. $\underline{\underline{a = 0.9277}}$ og $\underline{\underline{b = 270.5}}$

b) Det undersøges, hvornår koncentrationen er under 5 ppm:

$C(t) < 5 \xrightarrow{\text{solve for t}} [[53.16930197 < t]]$

Dvs. **det er sundhedsmæssigt forsvarligt at bade i søen 54 døgn efter første måling**

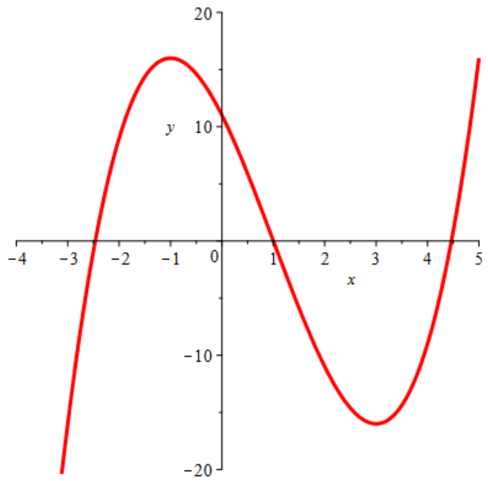
(De 54 er valgt ud fra, at koncentrationen skal være UNDER 5 ppm, men 53 døgn kan også accepteres)

Opgave 8:

$f(x) := x^3 - 3x^2 - 9x + 11:$

a) Da det er et tredjegradspolynomium, kan grafen vende 0 eller 2 steder og skære førsteaksen 1,2 eller 3 steder. Disse steder skal fremgå tydeligt af et plot, så intervallerne på begge akser skal styres:

$plot(f(x), x = -4..5, y = -20..20, thickness = 3, color = red)$



Grafens skæringspunkter bestemmes som funktionens nulpunkter:

$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 1], [x = 1 - 2\sqrt{3}], [x = 1 + 2\sqrt{3}]]$

Dvs. koordinatsættene er $\underline{\underline{(1 - 2\sqrt{3}, 0), (1, 0) \text{ og } (1 + 2\sqrt{3}, 0)}}$

b) For at bestemme monotoniforholdene findes først de steder, hvor der kan være lokale ekstrema:

$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 3], [x = -1]]$

Med fortegnet for den anden afledede disse steder undersøges det, hvilken slags steder, der er tale om:

$f''(-1) = -12 < 0$ dvs. lokalt maksimumssted

$f''(3) = 12 > 0$ dvs. lokalt minimumssted

Dvs. **f er voksende i intervallerne]-∞,-1] og [3,∞[og aftagende i intervallet [-1,3]**

Opgave 9:

$f(x) := 0.25\cdot\sqrt{9-16\cdot x^2}$: $g(x) := -0.055\cdot x + 0.75$:

a) Først skal det vises, at $f(0) = g(0)$, hvilket gøres ved at udregne de to funktionsværdier:

$f(0) = 0.75$

$g(0) = 0.75$

Dvs. $\underline{\underline{f(0) = g(0)}}$

Det er indirekte angivet, at $f(-0.75) = 0$, da det er definitionsmængdens minimum, men det kan også beregnes:

$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = -0.7500000000], [x = 0.7500000000]]$

Kun den negative løsning ligger inden for definitionsmængden.

Dermed kan arealet af M bestemmes ved at udregne de bestemte integraler:

$$A_M = \int_{-0.75}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{11} g(x)\,dx = 5.364286467$$

Dvs. $\underline{\underline{A_M = 5.36}}$

b) Rumfanget af omdrejningslegemet beregnes med bestemte integraler med de samme grænser:

$$V = \int_{-0.75}^{0} \pi\cdot f(x)^2\,dx + \int_{0}^{11} \pi\cdot g(x)^2\,dx = 8.858008466$$

Dvs. **rumfanget af skulpturen er 8,86 m^3**

Opgave 10:

a) Da spørgsmålet involverer 3 sider og en vinkel, anvendes en cosinusrelation:

$$\cos(A) = \frac{|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2}{2\cdot|AB|\cdot|AC|}$$

$$Cos(35) = \frac{x^2 + (2x)^2 - 5^2}{2\cdot x\cdot 2x} \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = -3.808710738], [x = 3.808710738]]$$

Da en sidelængde ikke kan være negativ, har man:

$\underline{\underline{x = 3.809}}$

b) Arealet kan bestemmes ved $\frac{1}{2}$-appelsinformlen, dvs:

$$T = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|AC|\cdot\sin(A)$$

$$20 = \frac{1}{2}\cdot x\cdot 2x\cdot Sin(35) \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = -5.904992457], [x = 5.904992457]]$$

Igen kan en sidelængde ikke være negativ, så:

$\underline{\underline{x = 5.905}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 11:

a) Nulhypotesen er: **Der er uafhængighed mellem kæledyr i husstanden i antallet af hjemmeboende børn i husstanden.**

Med Maples Gym-pakke kan de forventede værdier bestemmes med kommandoen *forventet*:

$$M := \begin{bmatrix} 133 & 202 \\ 24 & 28 \\ 46 & 37 \end{bmatrix}:$$

$$forventet(M) = \begin{bmatrix} 144.69 & 190.31 \\ 22.460 & 29.540 \\ 35.849 & 47.151 \end{bmatrix}$$

Der skal dog altid være mindst ét regneeksempel. Her vises alle udregninger.
Først bestemmes alle "I alt"-felterne (blå tal) i tabellen nedenfor.
Derefter bestemmes de forventede værdier (røde tal) ved at multiplicere tallene fra kolonnen og rækken og dividere med 470.

	Et eller flere kæledyr	Ingen kæledyr	I alt
Ingen hjemmeboende børn	$\frac{335 \cdot 203.}{470} = 144.6914894$	$\frac{335 \cdot 267.}{470} = 190.3085106$	$133 + 202 = 335$
Et hjemmeboende barn	$\frac{52 \cdot 203.}{470} = 22.45957447$	$\frac{52 \cdot 267.}{470} = 29.54042553$	$24 + 28 = 52$
To eller flere hjemmeboende børn	$\frac{83 \cdot 203.}{470} = 35.84893617$	$\frac{83 \cdot 267.}{470} = 47.15106383$	$46 + 37 = 83$
I alt	$133 + 24 + 46 = 203$	$202 + 28 + 37 = 267$	$335 + 52 + 83 = 470$ $203 + 267 = 470$

b) Teststørrelsen kan beregnes ud fra de forventede værdier:

$$Q = \frac{(133 - 144.6914894)^2}{144.6914894} + \frac{(202 - 190.3085106)^2}{190.3085106} + \frac{(24 - 22.45957447)^2}{22.45957447} + \frac{(28 - 29.54042553)^2}{29.54042553} + \frac{(46 - 35.84893617)^2}{35.84893617} + \frac{(37 - 47.15106383)^2}{47.15106383}$$

$$= 6.908746858$$

Dvs. teststørrelsen Q (der i opgaven kaldes χ^2) er 6,91

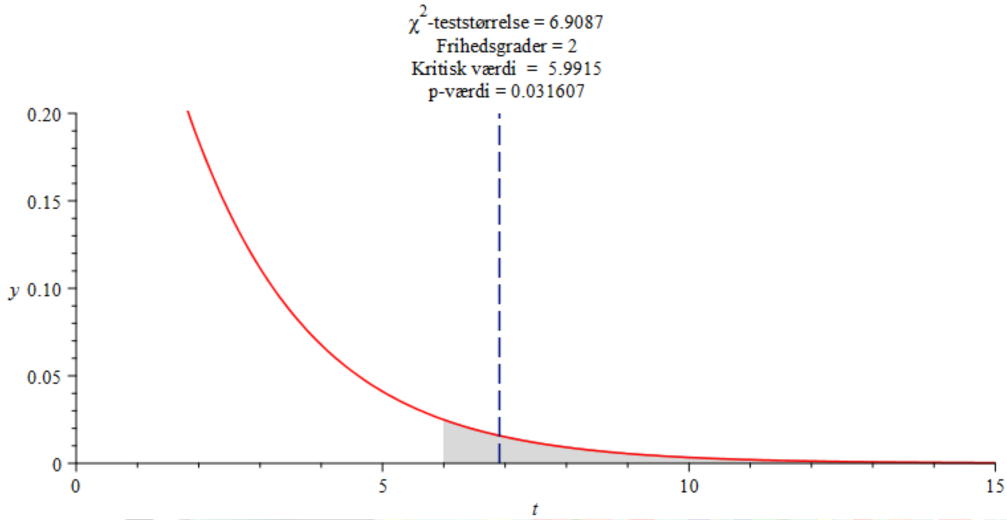
Antallet af frihedsgrader er $f = (r-1)\cdot(s-1) = (3-1)\cdot(2-1) = 2\cdot 1 = 2$

Med 2 frihedsgrader og et signifikansniveau på 5% er den kritiske værdi for teststørrelsen 5,99.

Da 6,91>5,99, **forkastes nulhypotesen,** dvs. der er en signifikant sammenhæng mellem kæledyr i husstanden og antallet af hjemmeboende børn i husstanden.

Man kan også anvende Maples Gym-pakke til alle beregninger:

$ChiKvadratUtest(M, level = 0.05)$



<u>*Opgave 12:*</u>

$restart : with(Gym) : P(x) = -0.15 \cdot x + 20 \cdot \frac{a}{M} :$

a) Der står ikke, at vægten angives i kg, men det er oplagt ud fra sammenhængen, at det er tilfældet.
Tiden x bestemmes, så $P(x) < 0.5$:

Anne: $-0.15 \cdot x + 20 \cdot \frac{4}{70} < 0.5 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[4.285714287 < x]]$

Bente: $-0.15 \cdot x + 20 \cdot \frac{4}{50} < 0.5 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[7.333333333 < x]]$

Da $7.333333333 - 4.285714287 = 3.047619046$,
tager det 3 timer længere for Bente end for Anne at få en alkoholpromille på under 0,5.

b) En alkoholpromille på 0 svarer til $P(x) = 0$, de tre timer svarer til $x = 3$, og Anne vejer stadig 70 kg.
Hermed har man:

$0 = -0.15 \cdot 3 + 20 \cdot \frac{a}{70} \xrightarrow{\text{solve for a}} [[a = 1.575000000]]$

Dvs. **Anne må højst indtage 1,575 genstande, hvis alkoholpromillen skal være 0 efter 3 timer**

Opgave 13:

a) Først skal punkternes koordinater bestemmes. Første- og andenkoordinaten bestemmes ved at udnytte den kvadratiske bund med sidelængde 3, mens tredjekoordinaten bestemmes ud fra, hvor højt punkterne ligger over xy-planen.

$\overrightarrow{OA} := \langle 0, 0, 4\rangle : \overrightarrow{OB} := \langle 0, 3, 3\rangle : \overrightarrow{OC} := \langle 3, 3, 1\rangle :$

Planen α indeholder punkterne A, B og C, så vektorerne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ er retningsvektorer for planen:

$$\overrightarrow{AB} := \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} := \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Som normalvektor for planen vælges en vektor, der er parallel med ovenstående krydsprodukt, men kortere:

$$\vec{n} := \langle 2, 1, 3\rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Man kan frit vælge blandt punkterne A, B og C, og her vælges A som et punkt i planen:

$\vec{n} \cdot \left(\langle x, y, z\rangle - \overrightarrow{OA}\right) = 0 = 2\,x + y + 3\,z - 12 = 0$

Dvs. en ligning for planen α er $\underline{\underline{2\,x + y + 3\,z = 12}}$

Punktet D har koordinatsættet (3,0,z). Da det ligger i planen α, opfylder punktets koordinater planens ligning:

$2\cdot 3 + 0 + 3\cdot z = 12 \Leftrightarrow 3\,z = 6 \Leftrightarrow z = 2$

Dvs. $\underline{\underline{\mathrm{D} = (3, 0, 2)}}$

b) En normalvektor for xz-planen er $\vec{m} := \langle 0, 1, 0\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Vinklen mellem to planer svarer til vinklen mellem deres normalvektorer. Den bestemmes ved:

$$\cos(v) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|}$$

$$Cos(v) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{len(\vec{n}) \cdot len(\vec{m})} \xrightarrow{\text{solve for v}} [[v = 74.49864043]]$$

Denne vinkel er spids, så den søgte vinkel er supplementvinklen:

$v_{stump} = 180 - 74.49864043 = 105.5013596$

Dvs. $\underline{\underline{v_{stump} = 105.5°}}$

Opgave 14:

a) Da t er tiden, og $f(t)$ er daglige antal solgte kopper, svarer væksthastigheden til $f'(t)$ eller $\frac{dy}{dt}$.

Da væksthastigheden er proportional med det daglige salg $f(t)$, er $\frac{dy}{dt} = k \cdot y$.

Da proportionalitetskonstanten er 0,025, har man differentialligningen:

$$\frac{dy}{dt} = 0.025 \cdot y$$

b) Den første dag efter åbningen svarer til $t = 0$, da der endnu ikke er gået et døgn siden åbningen. Dvs. at $N(0) = 50$. Hermed kan en forskrift bestemmes:

$$[N'(t) = 0.00017 \cdot N(t) \cdot (200 - N(t)), N(0) = 50] \xrightarrow{\text{solve DE}} N(t) = \frac{200}{1 + 3\,\mathrm{e}^{-\frac{17}{500}t}}$$

Dvs. $N(t) = \dfrac{200}{1 + 3 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{17}{500} \cdot t}}$

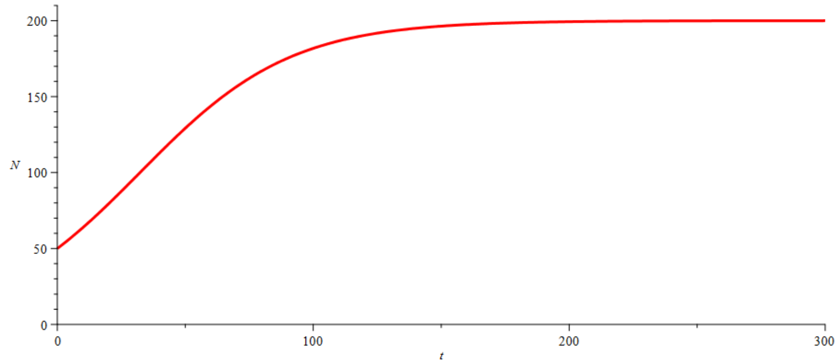
30 døgn efter åbningen svarer til $t = 30$, så det er $N(30)$, der skal udregnes:

$$N(30) = \frac{200.}{1 + 3 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{17.}{500} \cdot 30}} = 96.07140852$$

Dvs. **der sælges 96 kopper kaffe.**

c) Intervallet på førsteaksen skal begynde i 0, og derefter skal man have så meget med, at den logistiske vækst fremgår tydeligt:

$$plot\left(\frac{200}{1 + 3 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{17}{500} \cdot t}}, t = 0..300, N = 0..210, thickness = 3, color = red\right)$$



Da det er logistisk vækst, kan man i differentialligningen aflæse, at **den øvre grænse for det daglige salg af kaffe er 200 kopper.**

Man kan også bestemme det ved: $\lim_{t \to \infty} \dfrac{200}{1 + 3 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{17}{500} \cdot t}} = 200$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 15:

a) Området bestående af områderne P, Q og R kaldes her område B.
Arealet af område R svarer til arealet af område B fratrukket arealerne af områderne P og Q. Så man har:

$$A_R = A_B - A_P - A_Q = x\cdot(x+y) - x\cdot x - y\cdot y = x^2 + x\cdot y - x^2 - y^2 = \underline{\underline{x\cdot y - y^2}}$$

b) Da område B har en bredde, der er $\frac{3}{5}$ af længden, har man $\frac{3}{5} = \frac{x}{x+y}$.

Da område R har et areal på 1800, har man $1800 = x\cdot y - y^2$

Hermed har man to ligninger med to ubekendte, som Maple kan løse:

$$\left[\frac{3}{5} = \frac{x}{x+y},\ 1800 = x\cdot y - y^2\right] \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 90, y = 60\}, \{x = -90, y = -60\}$$

Da sidelængder ikke kan være negative, har man:

$\underline{\underline{x = 90}}$ og $\underline{\underline{y = 60}}$

15. august 2017: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: Da trekanten er retvinklet, fungerer de to kateter som grundlinje og tilsvarende højde, så arealet af trekanten er givet ved:

$$T=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BC|$$

Dvs.

$$15=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot 5 \Leftrightarrow |AC|=\frac{15\cdot 2}{5}=\underline{\underline{6}}$$

Opgave 2: Udtrykket reduceres ved hjælp af første og tredje kvadratsætning:

$$(x+y)^2+(x-y)\cdot(x+y)=x^2+y^2+2xy+x^2-y^2=\underline{\underline{2x^2+2xy}}=2x\cdot(x+y)$$

Opgave 3: $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ $\quad g(x)=x^2$ $\quad h(x)=x^{-1}$

Da det er potensfunktioner, kan man se på eksponenterne, hvordan graferne ser ud.

f: Eksponenten $\frac{1}{2}$ ligger mellem 0 og 1, så funktionen er voksende med aftagende væksthastighed, hvilket svarer til graf *B*.

g: Eksponenten 2 er større end 1, så funktionen er voksende med voksende væksthastighed, hvilket svarer til graf *C*.

h: Eksponenten -1 er mindre end 0, så funktionen er aftagende, hvilket svarer til graf *A*.

Opgave 4: $f(x)=2\cdot\ln(x)-x \quad ; \quad x>0$

For at bestemme monotoniforholdene bestemmes først nulpunkter for den afledede funktion samt fortegn for den anden afledede disse steder:

$$f'(x)=\frac{2}{x}-1$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2}{x}-1=0 \Leftrightarrow \frac{2}{x}=1 \Leftrightarrow x=2$$

$$f''(x)=-\frac{2}{x^2}$$

$f''(2)=-\frac{2}{2^2}=-\frac{1}{2}<0$, dvs. 2 er et lokalt maksimumssted.

Hermed er monotoniforholdene:

***f* er voksende i intervallet]0,2] og aftagende i intervallet [2,∞[**

Opgave 5: $4x^2-4x+k=0$

Hvis andengradsligningen skal have netop én løsning, skal diskriminanten være 0:

$$d=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot 4\cdot k=16-16k$$

$$d=0 \Leftrightarrow 16-16k=0 \Leftrightarrow 16=16k \Leftrightarrow k=\underline{\underline{1}}$$

<u>Opgave 6:</u> $x^2 - 4x + y^2 - 2y = 20 \qquad P(5,5)$

Punktet *P* ligger på cirklen, netop hvis koordinaterne indsat i ligningen giver et sandt udsagn:

$$5^2 - 4\cdot 5 + 5^2 - 2\cdot 5 = 20 \iff$$
$$25 - 20 + 25 - 10 = 20 \iff$$
$$20 = 20$$

Da dette er sandt, ligger *P* på cirklen.

Cirklens ligning omskrives, så centrum kan aflæses (kvadratkomplettering):

$$x^2 - 4x + y^2 - 2y = 20 \iff$$
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 20 + 4 + 1 \iff$$
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$$

Centrum kan hermed aflæses til $C(2,1)$

Vektoren $\overrightarrow{CP}$ er en normalvektor til tangenten, og da man kender et punkt på tangenten (punktet *P*), kan man benytte linjens ligning på formen $a\cdot(x-x_0)+b\cdot(y-y_0)=0$:

$$\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Dette indsættes sammen med *P*'s koordinater i linjens ligning:

$$3\cdot(x-5) + 4\cdot(y-5) = 0 \iff$$
$$3x + 4y - 15 - 20 = 0 \iff$$
$$\underline{\underline{3x + 4y - 35 = 0}}$$

Opgaven kan også løses uden vektorregning:
Hældningen for den radius, der går fra *C* til *P* er:

$$a_{radius} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-1}{5-2} = \frac{4}{3}$$

Da tangenten og radius er ortogonale, er produktet af deres hældninger -1:

$$a_{\tan} \cdot a_{radius} = -1 \iff a_{\tan} \cdot \frac{4}{3} = -1 \iff a_{\tan} = -\frac{3}{4}$$

Da man desuden kender et punkt på linjen, nemlig *P*, har man:

$$y - y_0 = a\cdot(x - x_0)$$

$$y - 5 = -\frac{3}{4}\cdot(x-5) \iff y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4} + 5 \iff y = -\frac{3}{4}x + \frac{35}{4}$$

15. august 2017: Delprøven MED hjælpemidler

restart
with(*Gym*) :

Opgave 7:

$N(t) = b \cdot a^t$, dvs. modellen er en eksponentiel udviklingen.

a) Da man har fået oplyst mere end 2 par af måleværdier, skal der anvendes regression:

$Tid := [1, 2, 5, 6, 7, 9, 10, 11]$:

$Antaltræer := [24500, 13600, 3020, 1800, 1150, 440, 270, 166]$:

$N(t) := ExpReg(Tid, Antaltræer, t)$:

$N(t) = 37322.7216338046\ 0.609614518120447^t$

Dvs.

$\underline{\underline{N(t) = 37323 \cdot 0.6096^t}}$

b) 14 år efter tørlægningen svarer til $t = 14$, så man har:

$N(14) = 36.5382315505869$

Dvs. **14 år efter tørlægningen er der ifølge modellen 37 træer pr. ha**

c) Da man kender fremskrivningsfaktoren a, kan halveringstiden bestemmes:

$$T_{0.5} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(a)} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2.}\right)}{\ln(0.609614518120447)} = 1.400499745$$

Dvs. **halveringstiden er 1,4 år**

Konstanten a er fremskrivningfaktoren, og ud fra denne kan vækstraten r bestemmes:

$r = a - 1 = 0.609614518120447 - 1 = -0.3903854819$

Dette fortæller, at **efter tørlægningen falder antallet af træer pr. ha med 39% om året.**

<u>*Opgave 8:*</u>

a) $f(x) := b \cdot x^a$: Da man kender to punkter på grafen, kan tallene a og b bestemmes ved at lade Maple løse to ligninger med to ubekendte:

$fsolve([f(3) = 17, f(5) = 102], \{a, b\}) = \{a = 3.507575552, b = 0.3605039877\}$

Dvs.

$\underline{\underline{a = 3.5 \text{ og } b = 0.36}}$

b) Da det er en potensfunktion, gælder:

$(1 + r_y) = (1 + r_x)^a$

$1 + r_y = (1 + 0.1)^{3.507575552} \xrightarrow{\text{solve for r\_\_y}} [[r_y = 0.3969728650]]$

Dvs. ***f(x)* vokser med 39,7%, når *x*-værdien vokser med 10%.**

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 9:

Opgave 9:

$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad m: \; 5x - y + 4 = 0$

a) En retningsvektor for linjen l er $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, så tværvektoren af denne vektor kan bruges som en normalvektor for l:

$n_l := \langle -1, 2 \rangle :$

En normalvektor for m kan ud fra ligningen aflæses til: $n_m := \langle 5, -1 \rangle :$

Vinklen mellem de to linjer kan så bestemmes som vinklen mellem disse normalvektorer:

$$\cos(v) = \frac{\vec{n_l} \cdot \vec{n_m}}{|\vec{n_l}| \cdot |\vec{n_m}|}$$

$$Cos(v) = \frac{dotP(n_l, n_m)}{len(n_l) \cdot len(n_m)} \xrightarrow{\text{solve for v}} [[v = 127.8749837]]$$

Dette er den stumpe vinkel mellem linjer. Den spidse er supplementvinklen:

$v_{spids} = 180 - 127.8749837 = 52.1250163$

Dvs. $\underline{\underline{v_{spids} = 52.125°}}$

Opgave 10:

Opgave 10:

a) Først oprettes en matrix med tabellens værdier:

$$M := \langle 30..35, 35..40, 40..45, 45..50, 50..55, 55..60, 60..65 | 138, 166, 699, 8333, 40611, 5433, 29 \rangle = \begin{bmatrix} 30..35 & 138 \\ 35..40 & 166 \\ 40..45 & 699 \\ 45..50 & 8333 \\ 50..55 & 40611 \\ 55..60 & 5433 \\ 60..65 & 29 \end{bmatrix}$$

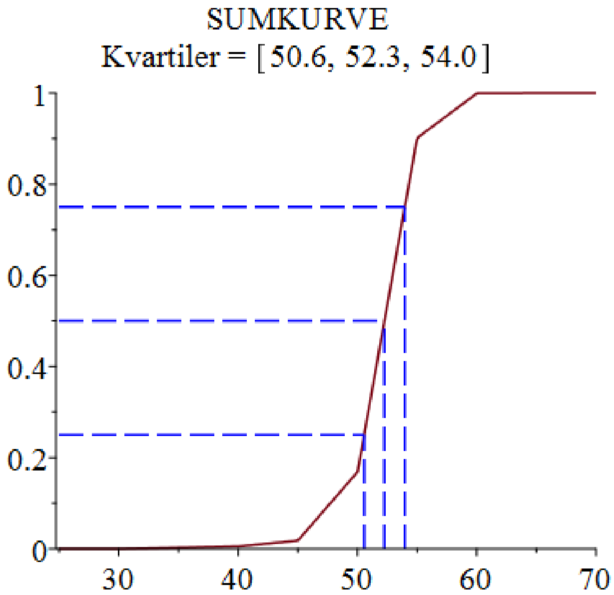
Med Maples Gym-pakke kan man både bestemme kumulerede frekvenser og en sumkurve:

$$kumuleretFrekvens(M) = \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 35 & 0.00249 \\ 40 & 0.00549 \\ 45 & 0.0181 \\ 50 & 0.168 \\ 55 & 0.901 \\ 60 & 0.999 \\ 65 & 1. \end{bmatrix}$$

De kumulerede frekvenser er bestemt ved at addere frekvenserne op til og med den øvre grænse for intervallet.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

$plotSumkurve(M)$



b) Kvartilsættet er allerede bestemt ovenfor til $\underline{\underline{(50.6, 52.3, 54.0)}}$

$K(t) := sumkurve(M, t) :$

$K(48) = 0.108336190871519$

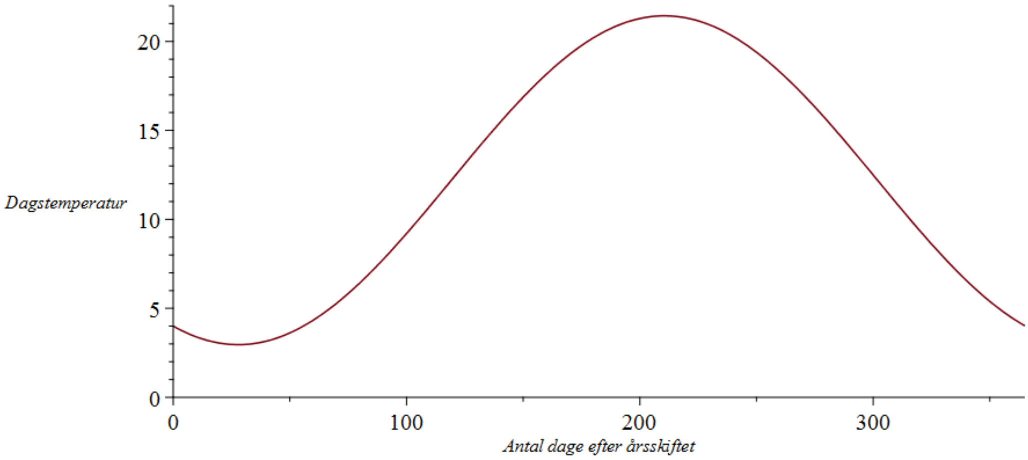
Dvs. **10,8% af levendefødte børn har en fødselslængde på højst 48 cm**

Opgave 11:

$f(x) := 9.24 \cdot \sin(0.0172 \cdot x - 2.05) + 12.2 :$

a) Definitionsmængden er angivet, så grafen skal tegnes i intervallet fra 0 til 365:

$plot(f(x), x = 0..365, y = 0..22)$



Forskellen i dagstemperatur på den varmeste og den koldeste dag svarer til den dobbelte amplitude i den trigonometriske funktion, og da amplituden aflæses til 9,24, har man altså, at **forskellen er 18,48 °C**

b) $f'(90) = 0.1393197743$

Dvs. at 90 dage efter årsskiftet vokser dagstemperaturen i Danmark med 0,14 °C pr. dag.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 12:

$$f(x) := \frac{1}{x^2+1}:$$

a) Arealet skal beregnes som et bestemt integral, så man skal kende den nedre og øvre grænse for dette. De svarer til førstekoordinaterne til skæringspunkterne mellem grafen for f og linjen med ligningen $y = 0.2$:

$$f(x) = 0.2 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = -2.], [x = 2.]]$$

Da grafen for f ligger øverst i det pågældende interval, får man (areal mellem to grafer):

$$A_M = \int_{-2}^{2} (f(x) - 0.2)\, dx = 1.414297436$$

$$\underline{\underline{A_M = 1.414}}$$

b) Det er vigtigt at bemærke, at man skal regne på det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes omkring **førsteaksen** (og ikke den vandrette linje med ligningen $y = 0.2$).

Så først roteres grafen for f, og derefter roteres den vandrette linje:

$$V = \int_{-2}^{2} \pi \cdot f(x)^2\, dx - \int_{-2}^{2} \pi \cdot 0.2^2\, dx = \pi \arctan(2) + 0.7539822372 \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 4.232192516$$

Dvs. $\underline{\underline{V = 4.232}}$

Opgave 13:

$$\frac{dM}{dt} = 123 - 0.06 \cdot M$$

a) Det bemærkes, at "stegens vægttab pr. døgn" svarer til væksthastigheden (med modsat fortegn) for funktionen, dvs. det svarer til venstresiden i differentialligningen. Når stegen vejer 2500 g, er $M(t) = 2500$, dvs:

$$\frac{dM}{dt} = 123 - 0.06 \cdot 2500 = -27.00$$

Dvs. stegen **taber 27 g pr. døgn, når den vejer 2500 g.**

b) Da stegen vejer 2650 g, inden den sættes til tørre, har man $M(0) = 2650$. Denne begyndelsesbetingelse anvendes, når Maple løser differentialligningen:

$$[M'(t) = 123 - 0.06 \cdot M(t), M(0) = 2650] \xrightarrow{\text{solve DE}} M(t) = 2050 + 600\, e^{-\frac{3t}{50}}$$

30 døgn i køleskabet svarer til $t = 30$, dvs.:

$$M(30) = 2050 + 600 \cdot e^{-\frac{3 \cdot 30.}{50}} = 2149.179333$$

Dvs. efter 30 døgn vejer stegen $\underline{\underline{2149 \text{ g}}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 14:

a) Da trekant ABC er ligebenet, deler højden fra B trekanten i to kongruente retvinklede trekanter med katetelængderne h og y. Dvs. man har:

$h^2 + y^2 = x^2 \Leftrightarrow h^2 = x^2 - y^2$

Da h angiver en sidelængde, er det kun den positive værdi, der kan bruges, så: $\underline{\underline{h = \sqrt{x^2 - y^2}}}$

Arealet af en trekant kan beregnes med $T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$, og med AC som grundlinje har man:

$T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 2\,y = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 - y^2} \cdot 2\,y = \underline{\underline{y \cdot \sqrt{x^2 - y^2}}}$

b) Da omkredsen af trekant ABC er 10, har man $x + x + 2\,y = 10 \Leftrightarrow 2\,x + 2\,y = 10 \Leftrightarrow x + y = 5 \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 5 - x}}$

Hermed kan trekantens areal angives alene ved x:

$T(x) := (5 - x) \cdot \sqrt{x^2 - (5 - x)^2}$:

Første og anden afledede funktion af T anvendes til at bestemmes ekstremumssted:

$T'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} \left[\left[x = \frac{10}{3}\right]\right]$

Værdien af den anden afledede dette sted udregnes:

$T''\left(\frac{10.}{3}\right) = -5.196152423 < 0$ dvs. lokalt maksimumssted.

Dvs. trekant ABC har det største areal, når $\underline{\underline{x = \frac{10}{3}}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 15:

a) Da terningen har kantlængden 2, vil midtpunkterne ligge 1 fra de nærmeste hjørner.
Så man har $\underline{\underline{A(1,0,0), B(1,2,0), C(2,1,2) \text{og } D(0,1,2)}}$

$\overrightarrow{OA} := \langle 1, 0, 0 \rangle : \overrightarrow{OB} := \langle 1, 2, 0 \rangle : \overrightarrow{OC} := \langle 2, 1, 2 \rangle : \overrightarrow{OD} := \langle 0, 1, 2 \rangle :$

b) Arealet af trekanten kan bestemmes, når man har to vektorer, der udspænder trekanten:

$$\overrightarrow{AB} := \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} := \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Trekantens areal bestemmes ved $T = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

$$T = \frac{1}{2} \cdot len(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = \sqrt{5}$$

Dvs. $\underline{\underline{T = \sqrt{5}}}$

c) Projektionen af D på trekant ABC bestemmes som skæringspunktet mellem planen, som ABC er en del af, og linjen gennem D, der står vinkelret på denne plan. Først bestemmes en ligning for planen:
En normalvektor for planen er:

$$\vec{n} := \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Det udnyttes, at punktet A ligger i planen, så dens ligning er:

$$(\langle x, y, z \rangle - \overrightarrow{OA}).\vec{n} = 0 = -4 + 4\,x - 2\,z = 0$$

Denne ligning kan forkortes, så planens ligning er $2\,x - z - 2 = 0$.
Normalvektoren for planen fungerer som retningsvektor for projektionslinjen, så en parameterfremstilling for linjen er:

$$\langle x, y, z \rangle = \overrightarrow{OD} + t \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\,t \\ 1 \\ -2\,t + 2 \end{bmatrix}$$

Dette giver os fire ligninger med fire ubekendte, der kan løses:

$$solve([2\,x - z - 2 = 0, x = 4\,t, y = 1, z = -2\,t + 2], \{x, y, z, t\}) = \left\{t = \frac{2}{5}, x = \frac{8}{5}, y = 1, z = \frac{6}{5}\right\}$$

Dvs. projektionen er $\underline{\underline{\left(\frac{8}{5}, 1, \frac{6}{5}\right)}}$ Det bemærkes, at dette punkt faktisk ligger på trekanten, da z-koordinaten ligger mellem 0 og 2

7. december 2017: Delprøven UDEN hjælpemidler

<u>*Opgave 1:*</u> Udtrykket reduceres ved at anvende en kvadratsætning på første led og gange ind i parentes i andet led:

$$(p+2q)^2 - 2q\cdot(q+2p) = p^2+4q^2+2\cdot p\cdot 2q - 2q^2 - 4p\cdot q = \underline{\underline{p^2+2q^2}}$$

<u>*Opgave 2:*</u> *a*-værdierne for alle tre polynomier er positive, da benene vender opad på alle parablerne (glade parabler).

Da parablen C er smallest, har det tilhørende andengradspolynomium den største *a*-værdi.

Da *b*-værdien angiver hældningen for tangenten til parablen i skæringspunktet med *y*-aksen, og da man kan se på figuren, at den røde parabels tangent her har den mindste hældning af de tre, er det **parablen A, hvis andengradspolynomium har den mindste *b*-værdi.**

Man kan også bruge kendskabet til toppunktet for en parabel. Toppunktets førstekoordinat er $-\dfrac{b}{2a}$, og det bemærkes, at alle tre parabler har toppunkt samme sted, dvs. samme førstekoordinat.
Da parablen *A* er bredest, har det tilsvarende polynomium den mindste *a*-værdi, og da brøken skal have samme værdi for alle parablerne, skal den dermed også have den mindste *b*-værdi.

<u>*Opgave 3:*</u> Da trekant *ABC* er retvinklet, kan hypotenusen bestemmes med Pythagoras:

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2+|BC|^2} = \sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = \underline{\underline{10}}$$

Da trekanterne *ABC* og *BCD* er ensvinklede, er forholdet mellem korresponderende sider konstant:

$$\frac{|CD|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AC|} \Leftrightarrow |CD| = \frac{|BC|^2}{|AC|}$$

$$|CD| = \frac{6^2}{8} = \frac{36}{8} = \underline{\underline{\frac{9}{2}}}$$

<u>*Opgave 4:*</u> Man kan godt løse andengradsligningen ved først at gange parentesen ud og omskrive til formen $x^2+6x+8=0$, der kan løses ved diskriminantmetoden eller faktorisering og nulreglen:

$$x^2+6x+8=0 \Leftrightarrow (x+4)\cdot(x+2)=0 \Leftrightarrow x=-4 \vee x=-2$$

Men man kan også løse andengradsligningen som en helt almindelig ligning:

$$(x+3)^2-1=0 \Leftrightarrow (x+3)^2=1 \Leftrightarrow x+3=\pm 1 \Leftrightarrow$$

$$x+3=1 \vee x+3=-1 \vee \underline{\underline{x=-2 \vee x=-4}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 5: l: $4x+3y=12$

Da linjen m står vinkelret på l, vil en normalvektor for l være en retningsvektor for m, og en normalvektor for l kan aflæses ud fra ligningen:

$$\vec{r}_m=\vec{n}_l=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

Da det er oplyst, at linjen m går gennem $P(8,10)$, er en parameterfremstilling for m:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\10\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

Den t-værdi, der svarer til skæringspunktet, bestemmes ved at indsætte udtrykkene for x og y fra parameterfremstillingen i ligningen:

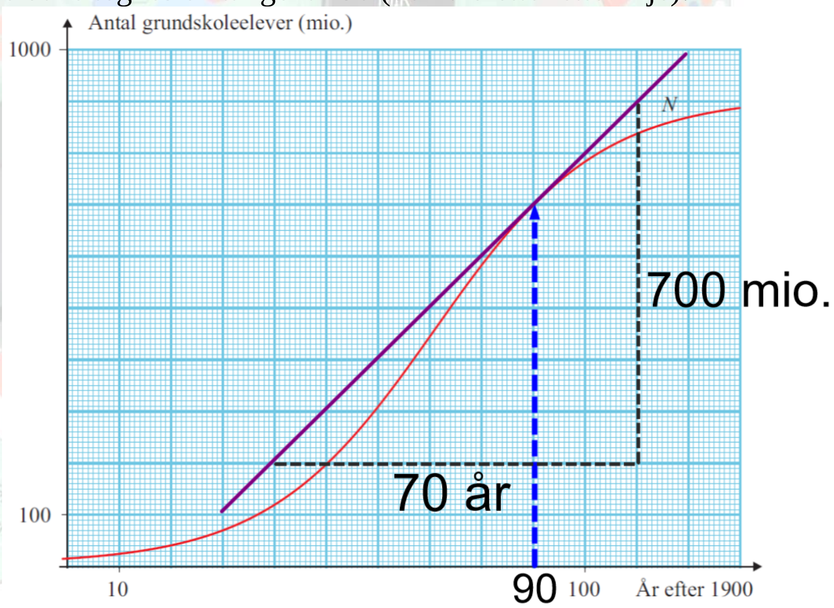
$$4\cdot(8+4t)+3\cdot(10+3t)=12 \;\Leftrightarrow\; 32+16t+30+9t=12 \;\Leftrightarrow\; 25t=-50 \;\Leftrightarrow\; t=-2$$

Dette indsættes i parameterfremstillingen: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\10\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$

Dvs. koordinatsættet til skæringspunktet er $\underline{\underline{(0,4)}}$

Man kan også arbejde med en ligning for m i stedet for en parameterfremstilling og dermed få to ligninger med to ubekendte. I så fald skal man udnytte, at tværvektoren af en normalvektor for l kan bruges som normalvektor for m, da linjerne er ortogonale.

Opgave 6: Efter bedste evne tegnes en tangent i 90 (den violette rette linje):



$N'(90)$, der svarer til tangentens hældning, bestemmes:

$$N'(90)=\frac{\Delta N}{\Delta t}=\frac{700\,\text{mio.}}{70\,\text{år}}=\underline{\underline{10\,\frac{\text{mio.}}{\text{år}}}}$$

Det betyder, at **i 1990 voksede antallet af grundskoleelever i verden med 10 mio. om året.**

7. december 2017: Delprøven MED hjælpemidler

Opgave 7:

restart
with(*Gym*) :

a) Det er oplyst, at modellen er en funktion med forskriften $f(x) = b \cdot x^a$, dvs. potensvækst. Da man kender mere end to målinger, skal der anvendes regression.

$Afkøling := [11, 19, 32, 44]:$
$Forbrug := [1554, 777, 518, 388]:$
$f(x) := PowReg(Afkøling, Forbrug, x):$

$$f(x) = \frac{15478.2282774928}{x^{0.982647316468958}}$$

Det bemærkes, at faktoren med x er placeret i nævneren, så a-værdien er negativ:
$\underline{\underline{a = -0.983}}$ og $\underline{\underline{b = 15478}}$

b) Hvis forbruget skal være 600, skal $f(x) = 600$:
$f(x) = 600. \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 27.32103045]]$
Dvs. **den gennemsnitlige afkøling af fjernvarmevandet er så 27,3 °C.**

Opgave 8:

restart
with(*Gym*) :

a) $f(x) := (x^2 + x - 11) \cdot e^{-x}:$
En ligning for tangenten i $P(0, f(0))$ bestemmes ud fra ligningen for en ret linje med kendt punkt og hældning:
$y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = 12x - 11$
Dvs. ligningen er $\underline{\underline{y = 12x - 11}}$

b) Monotoniforholdene bestemmes ved først at bestemme placering og type for ekstremumsstederne:
$f'(x) = 0. \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 4.], [x = -3.]]$
Fortegnet for den anden afledede bestemmes disse steder for at afgøre typen:
$f''(-3.) = 140.5987584 > 0$ dvs. lokalt minimumssted
$f''(4.) = -0.1282094722 < 0$ dvs. lokalt maksimumssted
Dvs. ***f*** **er aftagende i intervallerne]-∞,-3] og [4,∞[, og f er voksende i intervallet [-3,4].**

Opgave 9

restart
with(*Gym*) :

a) $C(4, 3)$ $r = \sqrt{8}$
Cirklen ligning er $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, hvor centrum er $C(a, b)$. Dermed er denne cirkels ligning:
$\underline{\underline{(x-4)^2 + (y-3)^2 = 8}}$

b) Hvis en tangent rører i punktet P, er $\overrightarrow{CP}$ en normalvektorer for tangenten. Man søger de to punkter, hvor tangenten er parallel med $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dvs. $\vec{r}$ skal være en retningsvektor for tangenterne. Altså skal der gælde $\overrightarrow{CP} \perp \vec{r}$ (da normalvektorer og retningsvektorer for en linje er ortogonale).
Med $P(x, y)$ har man:
$\overrightarrow{CP} := \langle x - 4, y - 3 \rangle :$
$\vec{r} := \langle 1, 1 \rangle :$
To egentlige vektorer er ortogonale, netop når deres prikprodukt er 0. Desuden skal punkterne ligge på cirklen.
Dette giver et ligningssystem:
$[dotP(\overrightarrow{CP}, \vec{r}) = 0, (x-4)^2 + (y-3)^2 = 8] \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 6, y = 1\}, \{x = 2, y = 5\}$
Dvs. $\underline{\underline{P_1(6, 1)}}$ og $\underline{\underline{P_2(2, 5)}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 10

restart

$with(Gym)$:

a) $AC := 3.9 : AB := 4.2 : BC := 2.4 : BDC := 58$:

Da man kender alle tre sider i trekant ABC, kan vinklen bestemmes med en cosinusrelation:

$$Cos(ABC) = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} \xrightarrow{\text{solve for ABC}} [[ABC = 66.03051768]]$$

Dvs. $\underline{\underline{\angle ABC = 66.0°}}$

b) $ABC := 66.03051768$:

Der ses først på trekant BCD, da den kan bruges til at bestemme længden af siden CD, der indgår i trekant CDE.
Her anvendes sinusrelationerne, da man kender to vinkler og en side:

$$\frac{Sin(ABC)}{DC} = \frac{Sin(BDC)}{BC} \xrightarrow{\text{solve for DC}} [[DC = 2.585972114]]$$

$DC := 2.585972114$:

Nu har man en sidelængde i trekant CDE, men der skal bruges nogle vinkler for at kunne bestemme endnu en.
Først bemærkes det, at trekant ADE som oplyst er retvinklet, og da vinklerne $\angle ADE$, $\angle EDC$ og $\angle BDC$ tilsammen udgør en lige vinkel (180°), har man:

$EDC := 180 - 90 - BDC = 32$

For at finde endnu en vinkel i trekant CDE ses nu på trekant ABC, hvor vinklen A kan bestemmes med en cosinusrelation:

$$Cos(BAC) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \xrightarrow{\text{solve for BAC}} [[BAC = 34.21605112]]$$

Da trekant ADE er retvinklet, er dermed:

$AED = 90 - 34.21605112 = 55.78394888$

Dermed er:

$DEC := 180 - 55.78394888 = 124.2160511$

Den sidste vinkel i trekant CDE er så:

$DCE := 180 - DEC - EDC = 23.7839489$

Og nu kan den søgte sidelængde bestemmes med sinusrelationerne:

$$\frac{Sin(DEC)}{DC} = \frac{Sin(DCE)}{DE} \xrightarrow{\text{solve for DE}} [[DE = 1.261174143]]$$

Dvs. **tangen er 1,26 m**

Opgave 11

restart
with(*Gym*) :

a) Da man har fået oplyst halveringstiden, er det nemmeste at opskrive funktionen på formen $f(t) = b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}}$

Med en begyndelsesværdi på 25 og en halveringskonstant på 2,5, har man så:

$$\underline{\underline{f(t) = 25 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2.5}}}}$$

Man kan også bestemme fremskrivningsfaktoren ud fra halveringskonstanten:

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(a)}$$

$$2.5 = \frac{\ln\left(\frac{1}{2.}\right)}{\ln(a)} \xrightarrow{\text{solve for a}} [[a = 0.7578582832]]$$

Og så er forskriften: $f(t) := 25 \cdot 0.7578582832^{t}$:

b) Da mængden skal være 3 mg, skal $f(t) = 3$, dvs:

$$f(t) = 3. \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t = 7.647234221]]$$

Dvs. **der går 8 døgn, før personen ikke testes positiv ved en narkotest.**

Opgave 12:

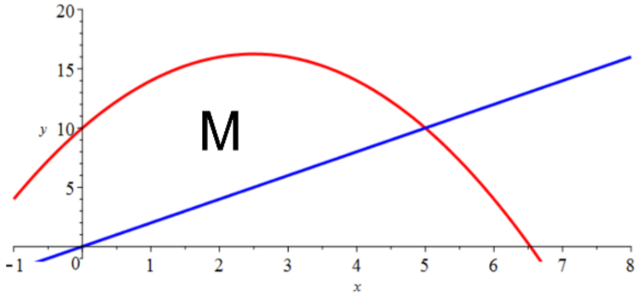
restart

with(*Gym*) :

a) $f(x) := -x^2 + 5x + 10 : g(x) := 2x :$

Først tegnes graferne for at identificere punktmængden *M*:

$plot([f(x), g(x)], x=-1..8, y=-1..20, color=[red, blue], thickness=3) :$



Da området skal ligge i første kvadrant og være afgrænset af andenaksen, er det det på grafen angivne område, der er tale om.

Man skal altså bestemme skæringspunktet mellem de to grafer i første kvadrant for at finde den øvre grænse for det bestemte integral, der angiver arealet:

$f(x) = g(x) \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = -2], [x = 5]]$

Det første sted hører ikke til 1.kvadrant, så det er $x = 5$, der er den søgte løsning. Det er grafen for *f* (den røde), der ligger øverst i det pågældende interval, så man har:

$$A_M = \int_0^5 (f(x) - g(x))\,dx = \frac{275}{6}$$

$$\underline{\underline{A_M = \frac{275}{6}}}$$

b) Rumfanget bestemmes ved først at rotere grafen for *f* og derefter *g*:

$$V = \pi \cdot \int_0^5 f(x)^2\,dx - \pi \cdot \int_0^5 g(x)^2\,dx = \frac{5125\,\pi}{6} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 2683.443725$$

Dvs. $\underline{\underline{V = 2683.4}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 13

restart

with(*Gym*) :

a) Nulhypotesen er: **Belgiernes holdning til at spise insekter er uafhængig af alder.**

Værdierne indskrives i en matrix:

$$M := \begin{bmatrix} 12 & 42 & 27 & 43 & 23 \\ 10 & 15 & 5 & 7 & 11 \end{bmatrix} :$$

De forventede værdier er så:

$$forventet(M) = \begin{bmatrix} 16.585 & 42.969 & 24.123 & 37.692 & 25.631 \\ 5.4154 & 14.031 & 7.8769 & 12.308 & 8.3692 \end{bmatrix}$$

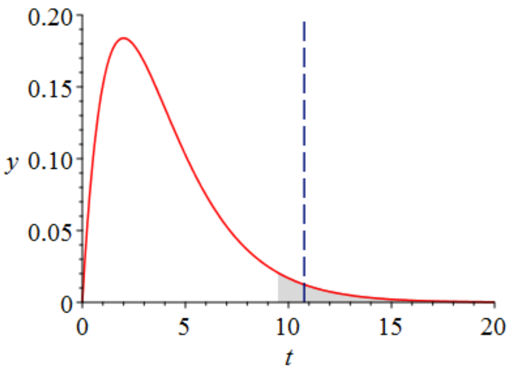
Disse kan beregnes med baggrund i nulhypotesen ved at lave en tabel med i alt:

svar/alder	<13 år	13 år - 18 år	19 år - 25 år	26 år - 45 år	> 45 år	i alt
Positiv	$\frac{22 \cdot 147.}{195} = 16.58461538$	$\frac{57 \cdot 147.}{195} = 42.96923077$	$\frac{32 \cdot 147.}{195} = 24.12307692$	$\frac{50 \cdot 147.}{195} = 37.69230769$	$\frac{34 \cdot 147.}{195} = 25.63076923$	$12 + 42 + 27 + 43 + 23 = 147$
Negativ	$\frac{22 \cdot 48.}{195} = 5.415384615$	$\frac{57 \cdot 48.}{195} = 14.03076923$	$\frac{32 \cdot 48.}{195} = 7.876923077$	$\frac{50 \cdot 48.}{195} = 12.30769231$	$\frac{34 \cdot 48.}{195} = 8.369230769$	$10 + 15 + 5 + 7 + 11 = 48$
I alt	$12 + 10 = 22$	$42 + 15 = 57$	$27 + 5 = 32$	$43 + 7 = 50$	$23 + 11 = 34$	$147 + 48 = 195$ $22 + 57 + 32 + 50 + 34 = 195$

b) Der skal anvendes et $\chi^2 - U - test$:

χ^2-teststørrelse = 10.765
Frihedsgrader = 4
Kritisk værdi = 9.4877
p-værdi = 0.029340

ChiKvadratUtest(*M*)



p-værdien er 2,9%, og da dette er mindre end signifikansniveauet på 5%, skal nulhypetesen forkastes.
Belgiernes holdning til at spise insekter er IKKE uafhængig af alder.
(Der er en signifikant sammenhæng mellem belgiernes holdning til at spise insekter og deres alder.)

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 14

restart

with(*Gym*) :

a) $\overrightarrow{OA} := \langle -4,-1,4\rangle : \overrightarrow{OB} := \langle -3,1,3\rangle : \overrightarrow{OC} := \langle -2,1,1\rangle : \overrightarrow{OD} := \langle 0,3,0\rangle :$

Vinklen mellem rørstykkerne AB og BC bestemmes som vinklen mellem retningsvektorer for disse:

$$\overrightarrow{AB} := \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} := \overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\cos(v) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}$$

$$Cos(v) = \frac{dotP(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})}{len(\overrightarrow{AB})\cdot len(\overrightarrow{BC})} \xrightarrow{\text{solve for v}} [[v = 56.78908924]]$$

I dette tilfælde, hvor det er rørstykker, som smeltevandet skal løbe igennem, vil det være den stumpe vinkel, der passer med den virkelige situation:

$v_{rør} = 180 - 56.78908924 = 123.2109108$

Dvs. vinklen er **123,2°**

b) Først bestemmes en ligning for den plan, som punkterne A, B og C ligger i, og derefter tjekkes det, om punktet D også ligger i denne plan:

De to vektorer fra spørgsmål a) kan anvendes som retningsvektorer for planen, og en normalvektor er derfor:

$$\vec{n} := \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Punktet A anvendes som punkt i planen, og ligningen for denne bliver så:

$dotP(\vec{n}, \langle x,y,z\rangle - \overrightarrow{OA}) = 0 = -4\,x - 7 + y - 2\,z = 0$

Ved at indsætte punktet D's koordinater i ligningen undersøges det, om det ligger i planen:

$-4\cdot 0 - 7 + 3 - 2\cdot 0 = 0 = -4 = 0$

Dette er en absurditet (et falsk udsagn), så **punkterne ligger ikke i samme plan.**

Opgave 15

restart
with(*Gym*) :

a) $\frac{dT}{dx} = 0.0045 \cdot (A - T) \quad , \; x \geq 0$

Differentialligningen løses med A som ubekendt og med en starttemperatur på 12 °C.

$$[T'(x) = 0.0045 \cdot (A - T(x)), T(0) = 12] \xrightarrow{\text{solve DE}} T(x) = A + \mathrm{e}^{-\frac{9x}{2000}} (12 - A)$$

Dvs. $\underline{\underline{T(x) = A + \mathrm{e}^{-\frac{9x}{2000}} (12 - A)}}$

b) Med en ovntemperatur på 80 °C har man:

$T(x) := 80 + \mathrm{e}^{-\frac{9 \cdot x}{2000}} \cdot (12 - 80) :$

Når stegen skal nå temperaturen 62 °C har man:

$T(x) = 62. \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 295.3635438]]$

Dvs. **stegen skal stege 295 minutter**

c) Nu er ovnens temperatur igen ukendt:

$T(x) := A + \mathrm{e}^{-\frac{9 \cdot x}{2000}} \cdot (12 - A) :$

Da temperaturen i stegen skal være 62°C efter 120 minutter, har man:

$solve(T(120.) = 62, A) = 131.8317330$

Dvs. **ovnen skal indstilles på 132°C**