





# Løsninger til eksamensopgaver på A-niveau 2018

## *25. maj 2018: Delprøven UDEN hjælpemidler*

Opgave 1: $-2x^2+2x+12=0$

Man kan løse andengradsligningen med diskriminantmetoden, men man kan også som her forkorte ligningen med -2 og efterfølgende faktorisere og anvende nulreglen:

$$-2x^2+2x+12=0 \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow (x+2)(x-3)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=-2 \vee x=3}}$$

Opgave 2: Man kan genkende den retvinklede trekant *ABC* som en (6,8,10)-kant, dvs. en opskaleret (3,4,5)-kant, og derfor ved man allerede, at længden af *BC* er 6. Men det kan også regnes ud:
Da trekant *ABC* er retvinklet, kan Pythagoras' Sætning anvendes:

$$|AC|^2+|BC|^2=|AB|^2$$

$$|BC|=\sqrt{|AB|^2-|AC|^2}=\sqrt{10^2-8^2}=\sqrt{100-64}=\sqrt{36}=\underline{\underline{6}}$$

Længden af linjestykket *DE* bestemmes ved at udnytte, at da trekanterne er ensvinklede, er forholdene mellem korresponderende sider ens, dvs:

$$\frac{|DE|}{|BC|}=\frac{|AD|}{|AB|} \Leftrightarrow |DE|=\frac{|AD|}{|AB|}\cdot|BC|$$

$$|DE|=\frac{5}{10}\cdot 6=\frac{5\cdot 6}{10}=\frac{30}{10}=\underline{\underline{3}}$$

Opgave 3: $f(x)=3\cdot 1{,}1^x$ : En eksponentiel udvikling med begyndelsesværdi 3 og vækstrate 10%.

$g(x)=3\cdot 0{,}9^x$ : En eksponentiel udvikling med begyndelsesværdi 3 og vækstrate -10%.

$h(x)=3\cdot x^{0,5}$ : En potensvækst med positiv væksthastighed og negativ acceleration.

***C* er grafen for funktionen *h***, da den ligger i 1. kvadrant, hvilket passer med, at potensvækst kun er defineret for positive argumenter (*x*-værdier), mens eksponentielle udviklinger har alle reelle tal i definitionsmængden. (Man kan også begrunde det ved at bemærke, at grafen *C* svarer til en funktion med positiv væksthastighed og negativ acceleration (konkav), hvilket ikke kan passe med en eksponentiel udvikling).

***B* er grafen for funktionen *f***, da den svarer til en voksende funktion (*f* har vækstraten 10%).

***A* er grafen for funktionen *g*,** da den svarer til en aftagende funktion (*g* har vækstraten -10%).

Opgave 4: ***t* : Tiden målt i antal år efter 1990.** Da man ser på perioden 1990-2015, har man $0\le t\le 25$.
***U*: Udledningen målt i mio. tons $CO_2$ om året.**
Da udledningen falder med en fast procentdel, er der tale om **eksponentiel vækst** (med negativ vækstrate, $r=-1{,}5\%$). Fremskrivningsfaktoren *a* er givet ved:

$$a=1+r=1-0{,}015=0{,}985$$

Hermed er modellen: $\underline{\underline{U(t)=70{,}4\cdot 0{,}985^t \quad ; \quad 0\le t\le 25}}$




*Opgave 5:* $f(x) = e^{\frac{x}{3}} - x - 3$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{3}$

Man undersøger, om *f* er en løsning til differentialligningen, ved at indsætte i differentialligningen og se, om man får en identitet. For at kunne indsætte på venstresiden, skal man dog først finde den afledede funktion af *f*:

$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot e^{\frac{x}{3}} - 1$ (Der differentieres ledvist, og første led er en sammensat funktion).

Der indsættes i differentialligningen:

$$\frac{1}{3} \cdot e^{\frac{x}{3}} - 1 = \frac{x + e^{\frac{x}{3}} - x - 3}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{3} \cdot e^{\frac{x}{3}} - 1 = \frac{e^{\frac{x}{3}} - 3}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{3} \cdot e^{\frac{x}{3}} - 1 = \frac{e^{\frac{x}{3}}}{3} - \frac{3}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{3} \cdot e^{\frac{x}{3}} - 1 = \frac{1}{3} \cdot e^{\frac{x}{3}} - 1$$

Da dette er en identitet, **er *f* en løsning til differentialligningen.**

*Opgave 6:* Det ubestemte integral bestemmes ved integration ved substitution (evt. ved integrationsvariabelskift):

$$t = \ln(x)$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$dt = \frac{1}{x} dx$$

$$\int 3 \cdot \frac{1}{x} \cdot (\ln(x))^2 \, dx = \int 3 \cdot t^2 dt = t^3 + k = \underline{\underline{(\ln(x))^3 + k}}$$

## *25. maj 2018: Delprøven MED hjælpemidler*

*Opgave 7:*

a) Funktionsforskriften er $f(x) = b \cdot x^a$, dvs. det er potensvækst, så man skal anvende potensregression:

$Afstand := [1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5]:$

$Lysintensitet := [560, 248, 140, 90, 62, 46]:$

$f(x) := PowReg(Afstand, Lysintensitet, x):$

$$f(x) = \frac{558.849594360442}{x^{1.99636585020821}}$$

Dvs. $\underline{\underline{a = -1.996}}$ og $\underline{\underline{b = 558.8}}$

b) En lysintensitet på 5 $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ svarer til $f(x) = 5$, så denne ligning løses med Maples 'solve' (numerisk):

$$f(x) = 5 \xrightarrow{\text{solve}} 10.61761162$$

Dvs. **afstanden til lyskilden skal være 10,6 m**

c) Da det er potensvækst, er sammenhængen mellem vækstraterne: $(1 + r_y) = (1 + r_x)^a$.

En forøgelse af afstanden med 40% svarer til $r_x = 0.4$. Så man har:

$$1 + r_y = (1 + 0.4)^{-1.99636585020821} \xrightarrow{\text{solve}} \{r_y = -0.4891716640\}$$

Dvs. **lysintensiteten falder med 48,9%, når afstanden øges med 40%.**

*Opgave 8:*

$\vec{a} := \langle 2, -5 \rangle : \vec{b} := \langle 3, 4 \rangle : P(1, 3):$

a) Da linjen $l$ er parallel med $\vec{a}$, er tværvektoren $\hat{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ en normalvektor for linjen, og da $P$ ligger på linjen, kan man bestemme en ligning for linjen ved:

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0$$

$$5 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 3) = 0 \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = -\frac{5\,x}{2} + \frac{11}{2}$$

Dvs. $\underline{\underline{y = -\frac{5}{2} \cdot x + \frac{11}{2}}}$

b) Projektion af vektor på vektor bestemmes ved ligningen: $\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$

$$\vec{a}_b = \frac{dotP(a, b)}{len(b)^2} \cdot b = \begin{bmatrix} -\frac{42}{25} \\ -\frac{56}{25} \end{bmatrix}$$

Dvs. $\underline{\underline{\vec{a}_b = \begin{pmatrix} -\frac{42}{25} \\ -\frac{56}{25} \end{pmatrix}}}$

*Opgave 9:*

$restart$

$with(Gym):$

$a := 94 : c := 58 : B := 89 :$

a) Da man kender en vinkel og længden af de to hosliggende sider, kan arealet bestemmes med ½-appelsinformlen:

$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot Sin(B) = 2725.584817$$

Dvs. $\underline{\underline{T = 2725.6}}$

Vinkel $A$ kan ikke bestemmes direkte, da man ikke har et vinkel-side-par, så først bestemmes med en cosinusrelation længden af siden $AC$.

$$Cos(B) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \xrightarrow{\text{solve}} \{b = 109.5887720\}, \{b = -109.5887720\}$$

Da det er en sidelængde, forkastes den negative løsning. $b := 109.5887720 :$

Nu kan man benytte en sinusrelation til at bestemme vinkel $A$. Det bemærkes, at vinkel $A$ er spids, da den ikke ligger over for den længste side, der er $AC$.

$$intervalsolve\left(\frac{Sin(B)}{b} = \frac{Sin(A)}{a}, A = 0..180\right) = [59.05056113, 120.9494389]$$

Da vi søger den spidse vinkel, er:

$\underline{\underline{A = 59.1°}}$



b) Medianen fra $A$ deler pr. definition siden $BC$ i to lige store stykker, så hvis medianens fodpunkt på siden $BC$ kaldes $M$, er $|BM| = \frac{94}{2} = 47$.

$BM := 47 :$

Længden af medianen kan nu bestemmes med en cosinusrelation anvendt på trekant $ABM$:

$$Cos(B) = \frac{c^2 + BM^2 - m_a^{\ 2}}{2 \cdot c \cdot BM} \xrightarrow{\text{solve}} \{m_a = 74.01249542\}, \{m_a = -74.01249542\}$$

Da man igen søger en sidelængde, forkastes den negative løsning.

$\underline{\underline{m_a = 74.0}}$

*Opgave 10:*

$$f(x) := \left(x^2 + 5x + 500\right)\cdot e^{-\frac{x}{100}}:$$

a) Tangentens ligning er givet ved $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$, så man har:

$$y - f(0) = f'(0)\cdot(x - 0) \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = 500$$

Der er altså vandret tangent her:

$$\underline{\underline{y = 500}}$$

b) Monotoniforholdene bestemmes ved først at finde ekstremumsstederne og deres type. Dette gøres ved at finde de steder, hvor den første afledede af $f$ er 0, og derfor finde fortegnet for den anden afledede disse steder:

$$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 0\}, \{x = 195\}$$

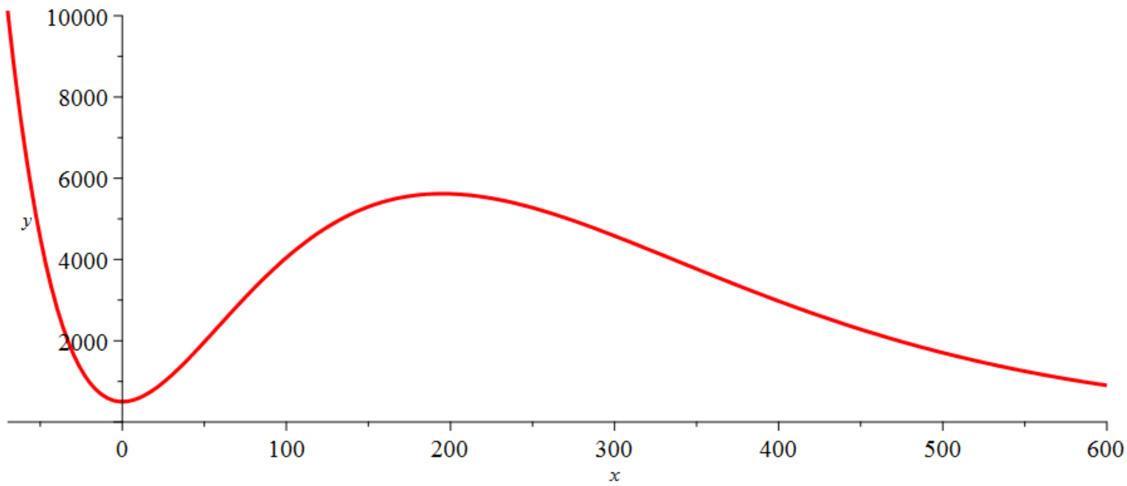
$$f''(0) = \frac{39}{20} > 0 \text{ dvs. lokalt minimumssted.}$$

$$f''(195.) = -0.2774344400 < 0 \text{ dvs. lokalt maksimumssted.}$$

Dvs. ***f* er aftagende i intervallerne ]-∞,0] og [195,∞[ , og *f* er voksende i intervallet [0,195]**

Et "passende vindue" er et vindue, hvor man kan se dette forløb, dvs. begge ekstremumssteder skal ligge et stykke inde i intervallet:

$$plot(f(x), x = -70..600, y = 0..10000, color = red, thickness = 3)$$





*Opgave 11:*

$c(x) := \dfrac{12500 \cdot x - 2500 \cdot x^2}{150 + 7.8^x} + 90:$

a) Tidspunktet med den maksimale glukosekoncentration bestemmes ved at finde lokale ekstremumssteder.
Først findes de steder, hvor den afledede funktion er 0. Da man kender et interval ($0 \le x \le 7$) anvendes 'intervalsolve',
og da funktionsudtrykket indeholder både en eksponentialfunktion og potensfunktioner, regnes numerisk (dvs. 'f'-foran):
$\mathit{fintervalsolve}(c'(x) = 0, x = 0..7) = [1.619547144, 5.534788851]$
Fortegnet for den anden afledede bestemmes disse steder:
$c''(1.619547144) = -78.95967092 < 0$ dvs. lokalt maksimumssted.
$c''(5.534788851) = 0.3016358642 > 0$ dvs. lokalt minimumssted.
Da funktionen i intervallet [0,7] forløber *voksende, aftagende, voksende*, kan tidspunktet med den største glukosekoncentration enten være det lokale maksimumssted eller intervalendepunktet. Så værdierne disse to steder bestemmes:
$c(1.619547144) = 166.9591468$
$c(7) = 89.98007636$
Dvs. glukosekoncentrationen er maksimal **1,6 timer efter indtagelsen af måltidet**.

b) De to tidspunkter, hvor koncentrationen er 130 mg/dl, bestemmes:
$\mathit{fintervalsolve}(c(x) = 130, x = 0..7) = [0.5505316428, 2.665889157]$
Man ved fra spørgsmål a), at koncentrationen er større imellem disse steder. Længden af intervallet bestemmes:
$\Delta x = 2.665889157 - 0.5505316428 = 2.115357514$
Så glukosekoncentrationen er over 130 mg/dl i $\underline{\underline{\text{2.1 timer}}}$

*Opgave 12:*

$f(x) := x^3 - 6 \cdot x^2 + 32:$

a) For at bestemme rumfanget af omdrejningslegemet skal man kende grænserne på det bestemte integral.
På figuren er det angivet, at grafen for $f$ rører førsteaksen i 4, men det kan også tjekkes:
$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = -2\}, \{x = 4\}, \{x = 4\}$
Da $M$ ligger i første kvadrant, arbejdes med den nedre grænse 0:

$$V = \int_0^4 \pi \cdot f(x)^2 \, dx = \frac{53248\,\pi}{35} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 4779.529305$$

Dvs. $\underline{\underline{V = 4779.5}}$

b) For at kunne bestemme arealet af $N$, skal man kende det sted i første kvadrant, hvor grafen for $f$ skærer linjen med ligningen $y = 32$:
$f(x) = 32 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 6\}, \{x = 0\}, \{x = 0\}$
Dvs. det søgte skæringssted er $x = 6$.
Så kan forholdet mellem arealerne af de to punktmængder bestemmes:

$$\frac{A_M}{A_N} = \frac{\displaystyle\int_0^4 f(x) \, dx}{\displaystyle\int_0^6 (32 - f(x)) \, dx} = \frac{16}{27}$$

Dvs. $\underline{\underline{\dfrac{A_M}{A_N} = \dfrac{16}{27}}}$

*Opgave 13:*

**a) Nulhypotesen: Kolde fødder forårsager IKKE forkølelse.**

På baggrund af denne nulhypotese kan man udregne de forventede værdier. Da lige mange har haft afkølede og ikke-afkølede fødder, skal symptomerne ifølge nulhypotesen fordeles ligeligt blandt de to kategorier:

| | Symptomer på forkølelse | Ingen symptomer på forkølelse | Sum |
|---|---|---|---|
| Afkølede fødder | $\frac{18\cdot 90}{180} = 9$ | $\frac{162\cdot 90}{180} = 81$ | 90 |
| Ikke afkølede fødder | $\frac{18\cdot 90}{180} = 9$ | $\frac{162\cdot 90}{180} = 81$ | 90 |
| Sum | 18 | 162 | 180 |

b) Da man kender alle summerne, kan man udregne alle andre værdier ud fra oplysningen om, at 13 af forsøgspersonerne med afkølede fødder fik forkølelsessymptomer (1 frihedsgrad):

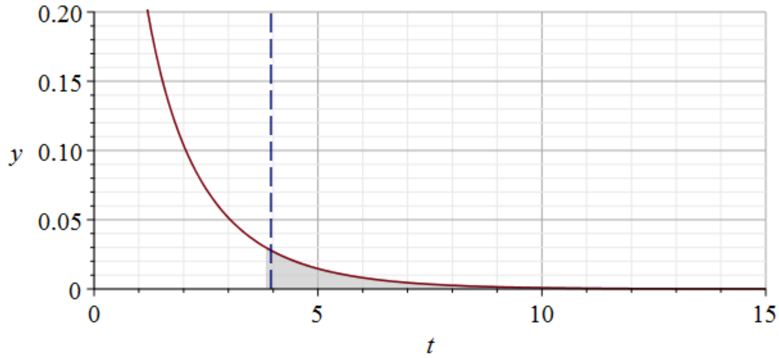
$$M := \begin{bmatrix} 13 & 77 \\ 5 & 85 \end{bmatrix}:$$

(Ovenstående matrix passer med summerne 90, 90, 18 og 162).

Med et $\chi^2$ – uafhængighedstest undersøge nulhypotesen:

$ChiKvadratUtest(M, level = 0.05)$

$\chi^2$-teststørrelse = 3.9506
Frihedsgrader = 1
Kritisk værdi = 3.8415
p-værdi = 0.046854



Da $p$-værdien (4,7%) er mindre end signifikansniveauet på 5%, **skal nulhypotesen forkastes**.
Der er altså ifølge undersøgelsen en signifikant sammenhæng mellem kolde fødder og forkølelse.


Løsningerne er hentet på [www.szymanskispil.dk](www.szymanskispil.dk)   Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

*Opgave 14:*

*restart*

*with*(*Gym*) :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{7700} \cdot (\mathrm{D} - 40 \cdot V)$$

a) Det er oplyst, at D = 2800, samt at $V(0) = 95$, så differentialligningen kan løses:

$$\left[ V'(t) = \frac{1}{7700} \cdot (2800 - 40 \cdot V(t)),\ V(0) = 95 \right] \xrightarrow{\text{solve DE}} V(t) = 70 + 25\,\mathrm{e}^{-\frac{2t}{385}}$$

Dvs. $\underline{\underline{V(t) = 70 + 25 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2 \cdot t}{385}}}}$

$$V(t) := 70 + 25\,\mathrm{e}^{-\frac{2t}{385}} :$$

45 dage efter slankekurens start svarer til $t = 45$:

$V(45.) = 89.78867078$

Dvs. efter 45 dage vejer personen $\underline{\underline{89.8 \text{ kg}}}$

b) *restart*

*with*(*Gym*) :

For at få Maple til at løse differentialligningen, anvendes variablerne $x$ og $y$ (og $a$ i stedet for D).

$$\left[ y'(x) = \frac{1}{7700} \cdot (a - 40 \cdot y(x)),\ y(0) = 100 \right] \xrightarrow{\text{solve DE}} y(x) = \frac{a}{40} + \mathrm{e}^{-\frac{2x}{385}} \left(100 - \frac{a}{40}\right)$$

Så den søgte funktion er:

**local** D :

Warning, A new binding for the name \`D\` has been created. The global instance of this name is still accessible using the :- prefix, :-\`D\`. See ?protect for details.

$$V(t) := \frac{\mathrm{D}}{40} + \mathrm{e}^{-\frac{2 \cdot t}{385}} \cdot \left(100 - \frac{\mathrm{D}}{40}\right) :$$

Et tab på 5 kg over 90 dage, svarer til, at $V(90) = 100 - 5$:

*solve*($V(90) = 95.$, D) $= 3464.458255$

Dvs. personens daglige energiindtag skal være $\underline{\mathrm{D} = 3464 \text{ kcal}}$


Løsningerne er hentet på [www.szymanskispil.dk](http://www.szymanskispil.dk) Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

*Opgave 15:*

a) Punkterne angives ved deres stedvektorer: $\overrightarrow{OA} := \langle 0, 3, 3 \rangle : \overrightarrow{OB} := \langle 1, 4, 0 \rangle : \overrightarrow{OC} := \langle 6, 0, 3 \rangle :$

En normalvektor for planen α findes ved at krydse to vektorer, der udspænder planen:

$$\overrightarrow{AB} := \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} := \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{n} := \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -9 \\ -18 \\ -9 \end{bmatrix}$$

En anden normalvektor findes ved at nedskalere denne vektor med 9 og vende den op (modsat retning):

$\vec{m} := \langle 1, 2, 1 \rangle :$

Punktet $A$ anvendes som punkt i planen, så ligningen bestemmes ved $a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + c \cdot (z - z_0) = 0$

$dotP(\vec{m}, \langle x, y, z \rangle - \overrightarrow{OA}) = 0 = x + 2y - 9 + z = 0$

Ved at flytte konstantleddet over på højresiden, får man derfor planens ligning til

$\underline{\underline{x + 2y + z = 9}}$



b) Det bemærkes ved at se på første vektor i parameterfremstillingen, at punktet $A$ ligger på linjen $l$. Man kan derfor få linjen til at ligge i planen ved at sikre sig, at retningsvektoren for linjen (der ses i parameterfremstillingen) står vinkelret på en normalvektor for planen. Dvs. prikproduktet mellem disse to vektorer skal være 0:

$solve(dotP(\vec{m}, \langle 3k, 1, -k \rangle) = 0, k) = -1$

Dvs. $\underline{\underline{k = -1}}$




## *30. maj 2018: Delprøven UDEN hjælpemidler*

<u>*Opgave 1:*</u> Ligningen løses ved først at gange ind i parenteserne på begge sider:

$$2\cdot\left(\frac{1}{2}x-3\right)+1=5x-2\cdot(x+1) \Leftrightarrow x-6+1=5x-2x-2 \Leftrightarrow x-5=3x-2 \Leftrightarrow -3=2x \Leftrightarrow \underline{\underline{x=-\frac{3}{2}}}$$

<u>*Opgave 2:*</u> $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}t\\3+t\end{pmatrix}$

Begge vektorer er egentlige vektorer (ingen værdi af *t* kan give nulvektoren), så man har:

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\bullet\vec{b}=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}t\\3+t\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow 2\cdot t+4\cdot(3+t)=0 \Leftrightarrow 2t+12+4t=0 \Leftrightarrow 6t=-12 \Leftrightarrow \underline{\underline{t=-2}}$$

<u>*Opgave 3:*</u> $f(x)=\frac{1}{3}\cdot x^3+x^2+3$

Monotoniforholdene bestemmes ved først at finde sted og type for ekstrema. Dette gøres ved at finde de steder, hvor den afledede funktion er 0, samt at bestemme fortegnet for den anden afledede disse steder:

$$f'(x)=x^2+2x$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2+2x=0 \Leftrightarrow (x+2)\cdot x=0 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=0$$

Disse steder er der vandret tangent. Fortegnet for den anden afledede bestemmes:

$$f''(x)=2x+2$$

$f''(-2)=2\cdot(-2)+2=-4+2=-2<0$ dvs. lokalt maksimumssted.

$f''(0)=2\cdot 0+2=2>0$, dvs. lokalt minimumssted.

Så ***f*** **er voksende i intervallerne ]-∞,-2] og [0,∞[ og aftagende i intervallet [-2,0]**

<u>*Opgave 4:*</u> $f(x)=-x^2+4$ ; $g(x)=x^2+2x+4$ ; $h(x)=x^2-2x+4$

Som den eneste af de tre funktioner har *f* en negativ koefficient på andengradsleddet ($a<0$). Grafen for denne funktion er en parabel med grenene pegende nedad (sur parabel). Dvs.
**Grafen *B* hører til funktionen *f***

Koefficienten for førstegradsleddet (*b*-værdien) svarer til hældningen for tangenten til grafen i skæringspunktet med andenaksen. Grafen *A* har en tangent med positiv hældning i skæringspunktet med andenaksen, og dette passer med den positive værdi for *g* ($b=2$).
**Grafen *A* hører til funktionen *g***

Den tilsvarende tangenthældning for *C* er negativ, hvilket passer med $b=-2$ for funktionen *h*.
**Grafen *C* hører til funktionen *h***




*Opgave 5:* Da trekanterne *ABC* og *CDE* er ensvinklede, er forholdene mellem korresponderende sider ens:

$$\frac{|BC|}{|EC|}=\frac{|AC|}{|DC|} \Leftrightarrow |BC|=\frac{|AC|}{|DC|}\cdot|EC|$$

$$|BC|=\frac{10}{6}\cdot 9=\frac{10\cdot 9}{6}=\frac{90}{6}=15$$

Hermed kan længden af *BE* beregnes:

$$|BE|=|BC|-|EC|=15-9=\underline{\underline{6}}$$

*Opgave 6:* $f(x)=a\cdot x^2+2x-4 \quad P(0,4) \quad Q(1,3)$

Først bestemmes den form, som samtlige stamfunktioner er på (familien af stamfunktioner):

$$F_k(x)=\int f(x)dx=\frac{1}{3}\cdot a\cdot x^3+x^2-4x+k$$

Da grafen for *F* skal gå gennem punkterne *P* og *Q* har man:

$$P\colon\ F_k(0)=4 \Leftrightarrow 4=\frac{1}{3}\cdot a\cdot 0^3+0^2-4\cdot 0+k \Leftrightarrow k=4$$

$$Q\colon\ F(1)=3 \Leftrightarrow 3=\frac{1}{3}\cdot a\cdot 1^3+1^2-4\cdot 1+4 \Leftrightarrow 3=\frac{a}{3}+1 \Leftrightarrow 2=\frac{a}{3} \Leftrightarrow a=6$$

Dvs.:

$$F(x)=\frac{1}{3}\cdot 6\cdot x^3+x^2-4x+4=\underline{\underline{2x^3+x^2-4x+4}}$$

# *30. maj 2018: Delprøven MED hjælpemidler*

## Opgave 7:

*restart*

*with*(*Gym*) :

Det er oplyst, at der er tale om en eksponentiel udvikling ($f(x) = b \cdot a^x$), og da man kender mere end to datapar, skal man anvende regression. Det bemærkes, at tidspunktet angives i antal år EFTER 1970:

$Tid := [0, 10, 20, 30, 40, 45]$ :

$BNP := [111, 264, 364, 559, 1326, 1613]$ :

$f(x) := ExpReg(Tid, BNP, x)$ :

$f(x) = 120.847008781140\ 1.05903848331423^x$

Dvs. $\underline{\underline{a = 1.059}}$ og $\underline{\underline{b = 120.8}}$

b) Fremskrivningsfaktoren $a$ viser, at vækstraten $r = a - 1 = 0.059 = 5.9\ \%$, dvs.
**i perioden 1970-2015 er BNP pr. indbygger øget med 5,9% om året.**

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2.)}{\ln(1.05903848331423)} = 12.08385989$$

Dvs. **fordoblingstiden er 12,1 år**

c) Hvis BNP pr. indbygger skal overstige 2000 USD, skal $f(x) > 2000$:

$solve(f(x) > 2000, x) = (48.92448314, \infty)$

Da $1970 + 49 = 2019$ har man altså, at ifølge modellen er det i $\underline{\underline{\text{år } 2019}}$

## Opgave 8:

$C(5, 4)\quad P(9, 3)$

a) Afstanden mellem punkterne $C$ og $P$ svarer til radius i cirklen:

$r = |CP| = \sqrt{(9-5)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

Da man nu har både centrums koordinater og radius, kan cirklens ligning angives:

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$\underline{\underline{(x-5)^2 + (y-4)^2 = 17}}$

b) Vektoren $\overrightarrow{CP}$ er en normalvektor til tangenten til cirklen i $P$.

$\vec{n} = \overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} 9-5 \\ 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Da punktet $P$ ligger på tangenten, får man ligningen:

$4 \cdot (x-9) - 1 \cdot (y-3) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{4x - y - 33 = 0}}$

c) Betegnelsen $Q$ indføres om det punkt på cirklen, hvor den anden tangent rører.
Da de to tangenter er parallelle, har de fælles normalvektorer, og $Q$ ligger på den samme diameter i cirklen, som $P$ ($P$ og $Q$ er endepunkterne på denne diameter).
Så man kan komme til punktet $Q$ ved først at gå ind til centrum, og derefter følge den modsatte vektor til $\overrightarrow{CP}$:

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Dvs $\underline{\underline{Q(1, 5)}}$.

## Opgave 9

$T(x) = 15 \cdot \sin(0.0172 \cdot x - 1.5) + 8$

a) Da sinusfunktionen giver værdier i intervallet [-1,1], har man:

$T_{max} = 15 \cdot 1 + 8 = 23$

$T_{min} = 15 \cdot (-1) + 8 = -7$

Dvs. **størsteværdien for døgnets middeltemperatur er 23 °C, og mindsteværdien er -7 °C**

## Opgave 10

Man kan undre sig lidt over, at kommunen er i stand til at undersøge læsehastigheden for alle børnene før læseforløbet, mens den kun udtager en stikprøve efter forløbet (måske har der været nedskær...effektiviseringer). Men nu til løsning af opgaven:

a) **Nulhypotese: Læsehastigheden efter læseforløbet er uændret.**
(Egentlig er der fejl i opgaveformuleringen. Med ovenstående nulhypotese undersøger man, om læseforløbet har ændret læsehastigheden (hvis nulhypotesen forkastes). Da man ikke kan ende med at acceptere en nulhypotese, kan man ikke undersøge det, der står i opgaveformuleringen.).
På baggrund af nulhypotesen kan man bestemme de forventede værdier ved at gange procenterne med 150 (antallet af elever i stikprøven):

$forventede := 150 \cdot [0.092, 0.31, 0.413, 0.151, 0.034] = [13.800, 46.50, 61.950, 22.650, 5.100]$

Dvs. de forventede værdier er:

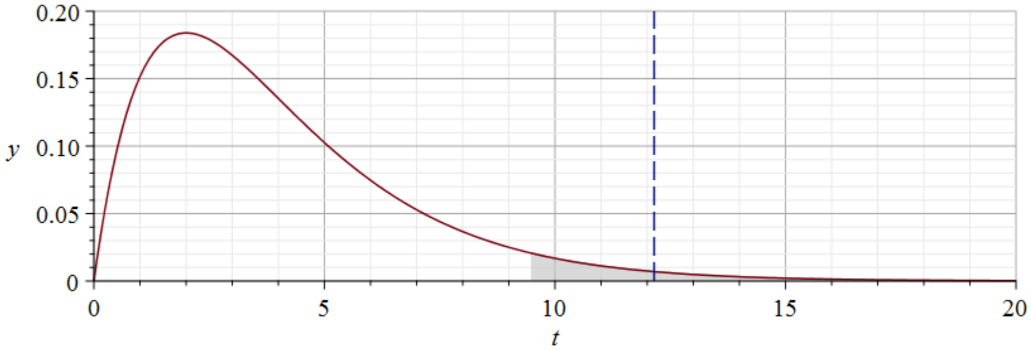
| Læsehastighed ord/minut | $< 80$ | $80 - 110$ | $110 - 140$ | $140 - 170$ | $> 170$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Forventet antal | 13.8 | 46.5 | 61.95 | 22.65 | 5.1 |

b) Der skal anvendes et $\chi^2$-GOFtest, da man skal undersøge, hvor godt en observeret fordeling passer med en forventet:

$observeret := [9, 41, 62, 26, 12]:$

$ChiKvadratGOFtest(observeret, forventede, level = 0.05)$

$\chi^2$-teststørrelse = 12.151
Frihedsgrader = 4
Kritisk værdi = 9.4877
p-værdi = 0.016264




Da $p$-værdien (1,6%) er mindre end signifikansniveauet (5%), **skal nulhypotesen forkastes.**
Der er altså signifikant forskel på læsehastigheden før og efter læseforløbet (og man kan se på tallene, at eleverne er blevet hurtigere læsere). Om selve læseforløbet vil fungere generelt, eller om der bare er tale om Hawthorne-effekten, kan man ikke sige noget om.

# Opgave 11

$$N(t) := \frac{20414}{1 + 6.325 \cdot e^{-0.378 \cdot t}} + 54349:$$

a) År 2020 svarer til $t = 6$, da tiden måles i antal år efter 2014:

$N(6) = 66685.54899$

Dvs. at **i år 2020 vil der ifølge modellen være 66686 fødsler.**

b) $N'(4) = 1876.768038$

Da $t = 4$ svarer til år 2018, fortæller dette tal, at

**i 2018 vokser det årlige antal fødsler med 1877 om året.**

# Opgave 12

$f(x) := -x^2 + 4x:$

a) For at kunne bestemme arealet af $M$ skal man kende de steder, hvor grafen skærer førsteaksen:

$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 0\}, \{x = 4\}$

Grafen er - som man også kan se på figuren - en parabel med grenene nedad, så $M$ ligger mellem disse grænser:

$$A_M = \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{32}{3}$$

Dvs. $\underline{\underline{A_M = \frac{32}{3}}}$

b) $g(x) := k \cdot x:$

Først findes (ved hjælp af faktorisering og nulreglen) de steder, hvor graferne for $g$ og $f$ skærer hinanden:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 4x = k \cdot x \Leftrightarrow x^2 + (k-4) \cdot x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x + k - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4 - k$

Det kan også gøres med Maple:

$solve(f(x) = g(x), x) = 0, 4 - k$

Og med disse grænser kan man sammenligne arealerne:

$A_{M_1} = A_{M_2}$

$$\int_0^{4-k} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{4-k} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{4-k}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{solve}} 0.8251978961$$

Der anvendes numerisk 'solve' (ellers skal man bemærke, at der er to komplekse løsninger).

Dvs. $\underline{\underline{k = 0.825}}$





# Opgave 13

$(x-3)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=9 \qquad 2x-2y+z-30=0$

a) For at kunne bestemme skæringspunkterne har man brug for en parameterfremstilling for linjen $l$.
Dvs. man skal kende et punkt og en retningsvektor.
Punktet er kuglens centrum, der ud fra kuglens ligning aflæses til $C(3,-4,2)$.
Retningsvektoren er planens normalvektor (da det er oplyst, at linjen står vinkelret på planen), og den aflæses ud fra planens ligning til $\vec{n}=(2,-2,1)$.
Parameterfremstillingen for linjen $l$ bliver så:
$\langle x,y,z\rangle=\langle 3,-4,2\rangle+t\cdot\langle 2,-2,1\rangle$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2t \\ -4-2t \\ 2+t \end{pmatrix}$$

Skæringspunkterne kan nu bestemmes ved at lade Maple løse ligningssystemet med 4 ligninger, som kuglens ligning og linjens parameterfremstilling udgør:

$$\left[(x-3)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=9,\ x=3+2t,\ y=-4-2t,\ z=2+t\right] \xrightarrow{\text{solve}}$$
$$\{t=-1, x=1, y=-2, z=1\}, \{t=1, x=5, y=-6, z=3\}$$

Dvs. koordinatsættene til de to skæringspunkter er $\underline{\underline{(1,-2,1) \text{ og } (5,-6,3)}}$

b) Afstanden fra kuglen til planen er differensen mellem afstanden fra kuglens centrum til planen og kuglens radius.
Kuglens radius aflæses ud fra kuglens ligning til $r=3$
Afstanden fra kuglens centrum til planen bestemmes med afstandsformlen fra punkt til plan:

$$dist(C,\alpha)=\frac{|2\cdot 3-2\cdot(-4)+2-30|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{14}{3}$$

Dvs. $dist(K,\alpha)=dist(C,\alpha)-r=\frac{14}{3}-3=\frac{14}{3}-\frac{9}{3}=\frac{14-9}{3}=\underline{\underline{\frac{5}{3}}}$

# Opgave 14

a) Da bægerets radius er 3 cm, har man den rette linje skærer andenaksen i 3, dvs.
$f(x)=a\cdot x+3$
Når $x$-værdien er 11 (højden på bægeret), er $y$-værdien 5 (radius i toppen), så man har:

$$5=a\cdot 11+3 \Leftrightarrow 2=a\cdot 11 \Leftrightarrow a=\frac{2}{11}$$

Dvs. $\underline{\underline{f(x)=\frac{2}{11}\cdot x+3}}$

b) Når væskeoverfladen er 8 cm fra bunden, svarer det til $x=8$.
Rumfanget af kaffen svarer til rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når punktmængden mellem grafen for $f$ og førsteaksen i intervallet [0,8] drejes 360° om førsteaksen:

$$V=\pi\cdot\int_0^8\left(\frac{2}{11}\cdot x+3\right)^2 dx=\frac{40856\,\pi}{363}\xrightarrow{\text{at 10 digits}}353.5892823$$

Dvs. der er **354 cm³** kaffe i bægeret




# Opgave 15

$C' = 2 \cdot t \cdot \frac{30 - C}{30}$

a) Man har fået oplyst begyndelsesbetingelsen (0,0), og med denne kan den partikulære løsning bestemmes:

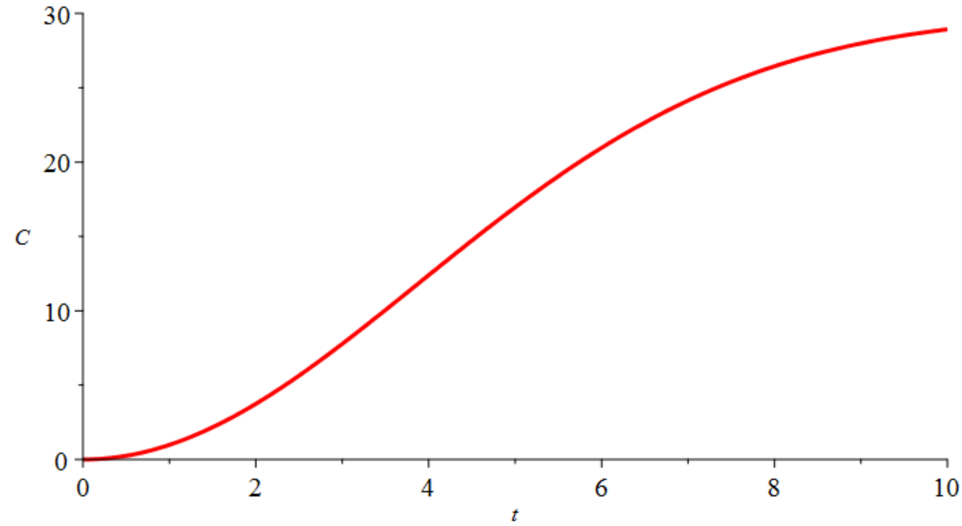
$$\left[C'(t) = 2 \cdot t \cdot \frac{30 - C(t)}{30},\ C(0) = 0\right] \xrightarrow{\text{solve DE}} C(t) = 30 - 30\,e^{-\frac{t^2}{30}}$$

Dvs. $\underline{\underline{C(t) = 30 - 30 \cdot e^{-\frac{t^2}{30}}}}$

$C(t) := 30 - 30 \cdot e^{-\frac{t^2}{30}}$ :

Grafen skal tegnes i det oplyste interval [0,10]. Hverken mere eller mindre.

$plot(C(t), t = 0..10, C = 0..30, color = red, thickness = 3)$




b) Man skal bestemme tidspunktet for den største væksthastighed, hvilket gøres ved at finde det sted, hvor den anden afledede er 0 og tjekke med fortegnet for den tredje afledede, at der er tale om et maksimum:

$$C''(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{t = \sqrt{15}\},\ \{t = -\sqrt{15}\}$$

Det er kun den positive løsning, der ligger i det oplyste interval:

$$C'''(\sqrt{15}) = -\frac{4\sqrt{15}\,e^{-\frac{1}{2}}}{15} < 0 \text{ dvs. lokalt maksimum}$$

$\sqrt{15.} = 3.872983346$

Dvs. **koncentrationen af stoffet i beholderen vokser hurtigst efter 3,9 døgn**




# *15. august 2018: Delprøven UDEN hjælpemidler*

<u>Opgave 1:</u> $P(2,17)\ Q(4,7)$

Da man kender to punkter, som grafen for den lineære funktion går gennem, kan man bestemme hældningskoefficienten:

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{7-17}{4-2}=\frac{-10}{2}=-5$$

b-værdien bestemmes ved at anvende *P*'s koordinater:

$$y_1=a\cdot x_1+b$$

$$17=-5\cdot 2+b \Leftrightarrow b=17+10=27$$

Dvs. forskriften er:

$$\underline{\underline{f(x)=-5\cdot x+27}}$$

<u>Opgave 2:</u> $f(t)=90\cdot 0{,}98^t \quad ;\ t\geq 0$

Konstanten 90 er begyndelsesværdien, og den fortæller, at **når afkølingen begynder, er kaffens temperatur 90 °C.**

Konstanten 0,98 er fremskrivningsfaktoren, og den fortæller, at **hvert minut aftager kaffens temperatur målt i °C med 2%.**

<u>Opgave 3:</u> $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}6\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Arealet af parallelogrammet udspændt af de to vektorer bestemmes som den numeriske værdi at determinanten:

$$A=\left|\det\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right|=\left\|\begin{matrix}4 & 6\\ 2 & \frac{1}{2}\end{matrix}\right\|=\left|4\cdot\frac{1}{2}-2\cdot 6\right|=|2-12|=|-10|=\underline{\underline{10}}$$

<u>Opgave 4:</u> $\frac{dy}{dx}=x\cdot y+2x \quad P(3,1)$

For at kunne bestemme en ligning for tangenten til grafen for *f* i *P*, skal man kende røringspunktets koordinater (dvs. *P*'s koordinater) samt tangentens hældning.

Hældningen bestemmes ved at indsætte røringspunktets koordinater i differentialligningen:

$$\frac{dy}{dx}=3\cdot 1+2\cdot 3=3+6=9$$

Hermed kan tangentens ligning bestemmes:

$$y-y_0=a\cdot(x-x_0)$$

$$y-1=9\cdot(x-3) \Leftrightarrow \underline{\underline{y=9x-26}}$$

*Opgave 5:* Arealet af kvadratet er $A_{kvadrat} = 3x \cdot 3x = 9x^2$

Arealet af rektanglet er $A_{rektangel} = x \cdot (x+4) = x^2 + 4x$

Hvis de to figurer skal have samme areal, skal:

$$9x^2 = x^2 + 4x \Leftrightarrow 8x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (2x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$$

Den første løsning forkastes, da den svarer til arealerne 0, dvs. at der ikke er nogen figurer.

Dvs. $\underline{\underline{x = \frac{1}{2}}}$

*Opgave 6:* $f(x) = a \cdot (x-1) \cdot (x+3)$

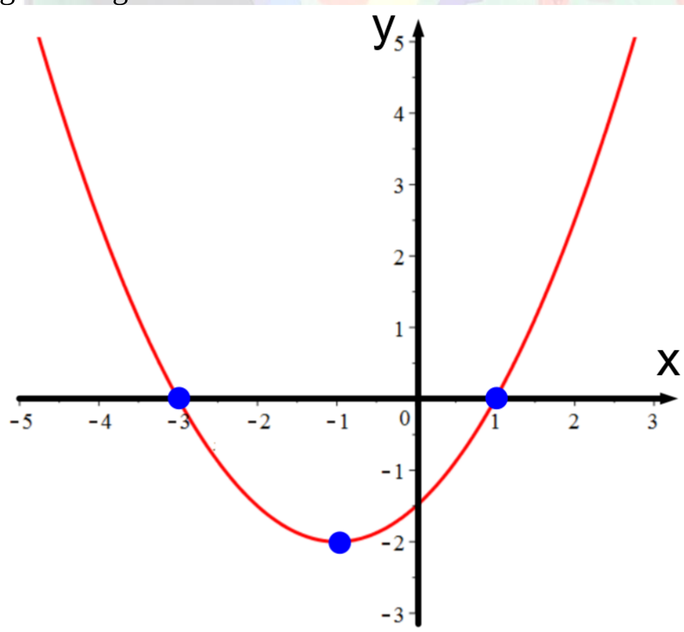
Man kan godt gange parenteserne ud og få polynomiet på formen $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ og derefter anvende toppunktsformlen $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right)$, men det er nemmere at udnytte, at polynomiet er angivet på den bedst tænkelige form:

Rødderne aflæses ud fra faktorerne til 1 og -3 (her giver parenteserne 0).
Toppunktets førstekoordinat ligger midt mellem rødderne, dvs. den er -1.
Da andenkoordinaten for toppunktet skal være -2, har man:

$$f(-1) = -2$$

$$-2 = a \cdot (-1-1) \cdot (-1+3) \Leftrightarrow -2 = a \cdot (-2) \cdot 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = \frac{1}{2}}}$$

Da man nu kender tre punkter på parablen (der jo er grafen for et andengradspolynomium), kan grafen tegnes:






## *15. august 2018: Delprøven MED hjælpemidler*

15. august 2018 **opgave 7**:
*restart*
*with(Gym)* :

a) Da modellen er $f(x) = b \cdot a^x$, og da man har mere end to sammenhørende talsæt, skal man anvende eksponentiel regression. Det bemærkes, at tiden angives i antal år EFTER 1960.

$Tid := [0, 10, 20, 30, 40, 50, 56]$ :
$Befolkningstal := [10.28, 12.51, 14.69, 17.07, 19.15, 22.03, 24.13]$ :
$f(x) := ExpReg(Tid, Befolkningstal, x)$ :

$$f(x) = 10.6589717438134\ 1.01488921343000^x$$

Dvs.
$\underline{\underline{a = 1.015 \text{ og } b = 10.66}}$

b) Fordoblingstiden kan bestemmes, da man kender fremskrivningsfaktoren:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2.)}{\ln(1.01488921343)} = 46.89936788$$

Dvs. befolkningstallet fordobles for hver **47 år**

c) Væksthastigheden er differentialkvotienten, dvs. det er værdien af den afledede funktion, der skal overstige 0,38.

$solve(f'(x) > 0.38, x) = (59.57804104, \infty)$

Da tiden måles i antal år efter 1960, er det altså i **år 2020**, at væksthastigheden overstiger 0,38 mio. pr. år

15. august 2018 **opgave 8**:
*restart*
*with(Gym)* :

a) Da man kender et sammenhørende par af side og vinkel, kan man anvende sinusrelationer, hvor man skal være opmærksom på, at den søgte vinkel er stump:

$A := 40 : BC := 4 : AB := 6$ :

$$intervalsolve\left(\frac{Sin(A)}{BC} = \frac{Sin(C)}{AB}, C = 90..180\right) = [105.3814317]$$

Dvs. $\underline{\underline{\angle C = 105.38°}}$

b) $C := 105.3814317 : T_{ADB} := 13.5$ :

Arealet af trekant $ADB$ (som man kender) indgår i ½-appelsinformlen sammen med vinkel $A$, og længderne af siderne $AB$ og $AD$. Man kender længden af $AB$, dvs. længden af $AD$ er den eneste ubekendte. Hvis man først finder længden af siden $AC$ i trekant $ABC$, vil længden af siden $CD$ være den eneste ubekendte:
Længden af siden $AC$ bestemmes ved først at finde $\angle ABC$ ud fra vinkelsummen i en trekant:

$ABC := 180 - A - C = 34.6185683$

Man kan nu både anvende sinus- og cosinusrelationerne til at bestemme længden af $AC$:

$$\frac{AC}{Sin(ABC)} = \frac{AB}{Sin(C)} \xrightarrow{\text{solve}} \{AC = 3.535292014\}$$

$AC := 3.535292014$ :

$$solve\left(T_{ADB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot (AC + CD) \cdot Sin(A), CD\right) = 3.465465207$$

Dvs. $\underline{\underline{|CD| = 3.47}}$

15. august 2018 **opgave 9**:

a) En nulhypotese er, at **svarene på spørgsmålet "Skal staten adfærdsregulere danskerne ved at lægge ekstra afgifter på usunde fødevarer?" er uafhængige af, om man spørger en kvinde eller en mand.**

For at kunne bestemme de forventede værdier skal man udregne nogle "i alt"-værdier:

| **Observeret** | Kvinder | Mænd | I alt |
|---|---|---|---|
| Ja | 250 | 190 | 440 |
| Nej | 179 | 186 | 365 |
| Ved ikke | 78 | 49 | 127 |
| I alt | 507 | 425 | **932** |

De forventede værdier kan beregnes på baggrund af nulhypotesen og "I alt"-værdierne:

| **Forventet** | Kvinder | Mænd | I alt |
|---|---|---|---|
| Ja | $\frac{507 \cdot 440}{932} =$ 239.3562232 | $\frac{425 \cdot 440.}{932} =$ 200.6437768 | 440 |
| Nej | $\frac{507 \cdot 365}{932} =$ 198.5568670 | $\frac{425 \cdot 365.}{932} =$ 166.4431330 | 365 |
| Ved ikke | $\frac{507 \cdot 127}{932} =$ 69.08690987 | $\frac{425 \cdot 127}{932} =$ 57.91309013 | 127 |
| I alt | 507 | 425 | 932 |

Det kan også gøres med en kommande fra gym-pakken (husk i så fald et enkelt regneeksempel):

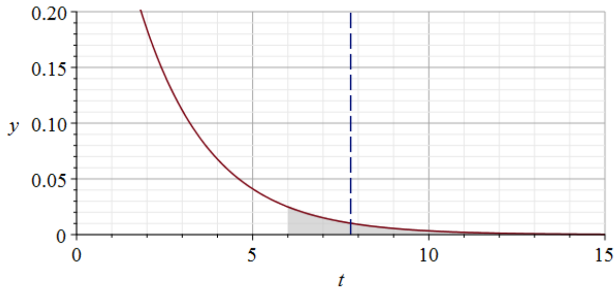
$$M := \begin{bmatrix} 250 & 190 \\ 179 & 186 \\ 78 & 49 \end{bmatrix} :$$

$$\mathit{forventet}(M) = \begin{bmatrix} 239.36 & 200.64 \\ 198.56 & 166.44 \\ 69.087 & 57.913 \end{bmatrix}$$

b) Der laves et $\chi^2$ −uafhængighedstest med signifikansniveauet 5%:

$\mathit{ChiKvadratUtest}(M, \mathit{level} = 0.05)$

$\chi^2$-teststørrelse = 7.7838
Frihedsgrader = 2
Kritisk værdi = 5.9915
p-værdi = 0.020407




Da *p*-værdien på 2,0% er mindre end signifikansniveauet på 5%, **skal nulhypotesen forkastes.**
Der er altså signifikant forskel på kvinder og mænds svar på spørgsmålet.

15. august 2018 **opgave 10**:

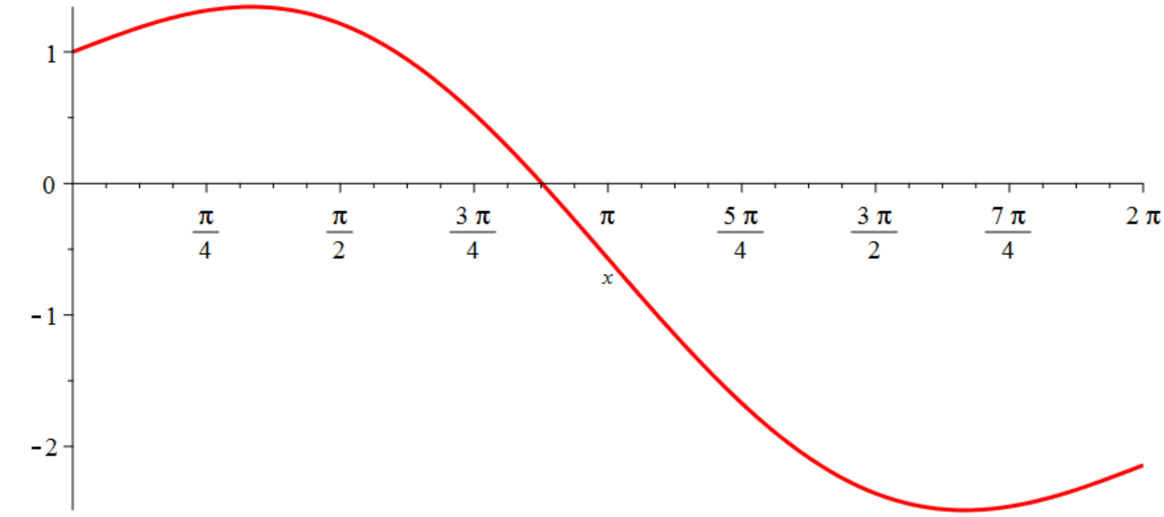
*restart*

$with(Gym):$

$f(x) := \sin(x) - 0.5 \cdot x + 1:$

a) Det er angivet, at definitionsmængden er [0,2π], og dette skal anvendes, når grafen tegnes:

$plot(f(x), x = 0..2\pi, thickness = 3, color = red)$




Det er oplyst (og man kan se på grafen), at der kun er ét nulpunkt, så man kan klare sig med 'solve', men da det er en trigonometrisk funktion, anvendes 'intervalsolve':

$intervalsolve(f(x) = 0, x = 0..2 \cdot \pi) = [2.754673754]$

Dvs. nulpunktet for *f* er $\underline{\underline{x = 2.755}}$

b) For at bestemme monotoniforholdene findes først de steder, hvor den afledede funktion er 0:

$intervalsolve(f'(x) = 0, x = 0..2 \cdot \pi) = [1.047197551, 5.235987756]$

Fortegnet for den anden afledede bestemmes disse steder:

$f''(1.047197551) = -0.8660254037 < 0$ dvs. lokalt maksimumsted.

$f''(5.235987756) = 0.8660254038 > 0$ dvs. lokalt minimumsted.

Dvs. ***f*** **er voksende i intervallet [0,1.047], aftagende i [1.047,5.236] og voksende i [5.236,2π]**

c) $\pi \cdot \int_0^2 f(x)^2 \, dx = 9.256922239$

Dette tal angiver **rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når punktmængden M afgrænset af grafen, koordinatakserne og linjen med ligningen $x = 2$ roteres 360° omkring førsteaksen** (det bemærkes, at den øvre grænse 2 ligger før nulpunktet, og dermed er M veldefineret ud fra beskrivelsen).


Løsningerne er hentet på [www.szymanskispil.dk](http://www.szymanskispil.dk) Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

15. august 2018 **opgave 11**:

*restart*

*with*(*Gym*) :

$\overrightarrow{OA} := \langle 11, 0, 10.5\rangle : \overrightarrow{OB} := \langle 5, 0, 15\rangle :$

En retningsvektor for linjen *l* bestemmes:

$$\overrightarrow{AB} := \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} -6. \\ 0. \\ 4.50000000000000 \end{bmatrix}$$

Punktet A kan anvendes som punkt i parameterfremstillingen (det kan B også):

$$\langle x, y, z\rangle = \overrightarrow{OA} + t\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.\, t + 11 \\ 0. \\ 4.50000000000000\, t + 10.5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 10.5 \end{pmatrix} + t\cdot \begin{pmatrix} -6.0 \\ 0 \\ 4.5 \end{pmatrix}}}$$

b) Da man både kender radius og centrum for kuglen, kan ligningen angives:

$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 15^2$

$\underline{\underline{x^2 + y^2 + z^2 = 225}}$

c) Kuglens ligning og parameterfremstillingen for linjen giver fire ligninger med 4 ubekendte:

$solve\left(\left[x = 11 - 6\,t, y = 0, z = 10.5 + 4.5\cdot t, x^2 + y^2 + z^2 = 225\right]\right) = \{t = 0.3333333333, x = 9., y = 0., z = 12.\}$

Dvs. koordinatsættet for røringspunktet er $\underline{\underline{(9, 0, 12)}}$



Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

15. august 2018 **opgave 12:**

*restart*

*with*( *Gym* ) :

a) Med de angivne oplysninger ligger punkterne $A(-12.5, 0)$, $B(0, 3.75)$ og $C(12.5, 0)$ på grafen.

Det udnyttes ,at man kender $c$-værdien 3,75, da det er skæringen med andenaksen, og da parablen ligger symmetrisk omkring andenaksen, er $b$-værdien 0. Dermed er det kun $a-$værdien, man mangler, og den kan bestemmes ved at anvende et af punkterne $A$ og $C$ (her anvendes $C$):

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$0 = a \cdot 12.5^2 + 0 \cdot 12.5 + 3.75 \xrightarrow{\text{solve}} \{a = -0.02400000000\}$

Man kunne også lade Maple bestemme alle tre koefficienter ud fra tre ligninger.

$f(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c:$

$solve([f(-12.5) = 0, f(0) = 3.75, f(12.5) = 0], \{a, b, c\}) = \{a = -0.02400000000, b = 0., c = 3.750000000\}$

Dvs. ligningen for parablen er:

$\underline{\underline{y = -0.024 \cdot x^2 + 3.75}}$

b) Da de to midterste stolper er 3,7 m høje, skal man finde de to steder, hvor punkterne på parablen har andenkoordinaten 3,7, dvs:

$3.7 = -0.024 \cdot x^2 + 3.75 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 1.443375673\}, \{x = -1.443375673\}$

Afstanden mellem disse to steder er $d$:

$d := 1.443375673 - (-1.443375673) = 2.886751346$

Dvs.

$\underline{\underline{d = 2.89 \text{ m}}}$

c) Pga. symmetrien har de to laveste stolper ens højder, så man behøver kun at regne på den ene. Her regnes på den højre. Afstanden fra origo til stolpen er $3.5 \cdot d$, dvs

$x_{stolpe} := 3.5 \cdot 2.886751346 = 10.10362971$

Dette sted findes andenkoordinaten:

$y_{stolpe} := -0.024 \cdot 10.10362971^2 + 3.75 = 1.300000001$

Dvs. de to laveste søjler er **1,30 m** høje

15. august 2018 **opgave 13**:

*restart*

*with*(*Gym*) :

a) $y'(t) = 0.25 \cdot (f(t) - y(t)), \qquad 0 \le t \le 120$

$f(t) := 48 \cdot 0.985^t + 22 :$

Stegens temperatur til tidspunktet $t = 0$ er 5°C, og vandbadets temperatur til dette tidspunkt findes ved at indsætte i den angivne funktionsforskrift.

$f(0) = 70.0$

Da man nu kender både vandbadets og stegens indre temperatur til tiden 0, kan man finde væksthastigheden til dette tidspunkt ved at indsætte i differentialligningen:

$y'(0) = 0.25 \cdot (f(0) - y(0)) = 0.25 \cdot (70 - 5) = 16.25$

Det fortæller, at **til tiden 0 vokser stegens indre temperatur med 16 °C i minuttet**

b) Det udnyttes, at stegens indre temperatur til tidspunktet $t = 0$ er 5°C:

$[y'(t) = 0.25 \cdot (f(t) - y(t)), y(0) = 5] \xrightarrow{\text{solve DE}}$

$$y(t) = \frac{48\ 200^{-t}\ 197^t}{4\ln(197) - 4\ln(200) + 1} + 22 + e^{-\frac{t}{4}} \left(-17 - \frac{48}{4\ln(197) - 4\ln(200) + 1}\right)$$

$$\boldsymbol{y(t) := \frac{48\ 200^{-t}\ 197^t}{4\ln(197) - 4\ln(200) + 1} + 22 + e^{-\frac{t}{4}} \left(-17 - \frac{48}{4\ln(197) - 4\ln(200) + 1}\right) :}$$

Først findes det eller de steder, hvor den første afledede er 0, hvorefter fortegnene for den anden afledede disse steder bestemmes for at bestemme karakteren af stedet:

$y'(t) = 0. \xrightarrow{\text{solve}} \{t = 13.16854723\}$

$evalf(y''(13.16854723)) = -0.1486326032 < 0$ dvs. lokalt maksimum.

Så **stegens indre temperatur er maksimal efter 13 minutter.**

c) Stedet med mindst væksthastighed er et sted med vendetangent, så først findes et sted, hvor den anden afledede er 0:

$intervalsolve(y''(t) = 0, t = 0..120) =$

`Warning, some roots are returned as numeric approximations`

$$[25.11416800]$$

Det viser sig, at det tager meget lang tid for Maple at udregne ovenstående. Advarslen er ikke et problem, da vi alligevel ikke regner eksakt her. Man kan komme hurtige igennem med *fintervalsolve*:

$fintervalsolve(y''(t) = 0, t = 0..120) = [25.11416804]$

Fortegnet for den tredje afledede bestemmes dette sted:

$evalf(y'''(25.1141680)) = 0.001880987728 > 0$, dvs. lokalt minimumssted.

Det er altså vist, at efter 25 minutter er væksthastigheden for stegens indre temperatur mindst. Vandbadets temperatur bestemmes dette sted:

$f(25.11416804) = 54.83958250$

Dvs. **vandbadets temperatur er 54,8 °C, når væksthastigheden for stegens indre temperatur er mindst.**


Løsningerne er hentet på [www.szymanskispil.dk](http://www.szymanskispil.dk) Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

## *7. december 2018: Delprøven UDEN hjælpemidler*

*Opgave 1:* I første led anvendes første kvadratsætning, og i andet led ganges ind i parentesen.

$$(a+b)^2 - b\cdot(a+b) = a^2 + b^2 + 2ab - ab - b^2 = a^2 + ab = \underline{\underline{a\cdot(a+b)}}$$

*Opgave 2:* Da trekant *ABC* er retvinklet, kan længden af siden *AC* bestemmes med Pythagoras' sætning:

$$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2 \iff |AC|^2 = |BC|^2 - |AB|^2$$

$$|AC| = \sqrt{|BC|^2 - |AB|^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100-64} = \sqrt{36} = \underline{\underline{6}}$$

Længden af linjestykket *BD* kan beregnes, hvis man først finder længden af siden *AD*.
Længden af siden *AD* bestemmes ved at udnytte, at trekanterne *ABC* og *ADE* er ensvinklede, så forholdende mellem korresponderende sider er ens, dvs:

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|BC|}$$

$$|AD| = \frac{|DE|}{|BC|}\cdot|AB| = \frac{15}{10}\cdot 8 = \frac{3}{2}\cdot 8 = \frac{24}{2} = 12$$

Og så har man:

$$|BD| = |AD| - |AB| = 12 - 8 = \underline{\underline{4}}$$

*Opgave 3:* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2-t \end{pmatrix}$

Begge vektorer er egentlige vektorer, da førstekoordinaterne ikke er 0. Så man har:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \det(\vec{a},\vec{b}) = 0 \iff \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ t & 2-t \end{vmatrix} = 0 \iff 2\cdot(2-t) - t\cdot(-3) = 0 \iff 4 - 2t + 3t = 0 \iff \underline{\underline{t = -4}}$$

*Opgave 4:* $f(x) = \frac{1}{3}\cdot x^3 + 2\cdot x^2 - 12\cdot x + 7$

For at bestemme monotoniforholdene for *f* bestemmes først de steder, hvor den afledede af *f* er 0:

$$f'(x) = x^2 + 4x - 12$$

$$f'(x) = 0 \iff x^2 + 4x - 12 = 0 \iff (x+6)\cdot(x-2) = 0 \iff x = -6 \ \vee \ x = 2$$

For at bestemme typen af ekstremumssted bestemmes fortegnet for den anden afledede af *f* de to steder, hvor den afledede af *f* er 0:

$$f''(x) = 2x + 4$$

$f''(-6) = 2\cdot(-6) + 4 = -12 + 4 = -8 < 0$ dvs. lokalt maksimumssted

$f''(2) = 2\cdot 2 + 4 = 4 + 4 = 8 > 0$ dvs. lokalt minimumssted

Dvs.

***f* er voksende i intervallerne ]-∞,-6] og [2,∞[ og aftagende i intervallet [-6,2]**



*Opgave 5:* $f(x)=0{,}6^x$ , $g(x)=1{,}5^x$ og $h(x)=0{,}6^x-1$

Funktionerne *f* og *g* er eksponentialfunktioner, så deres grafer går gennem punktet (0,1).
Grafen for funktionen *h* er en lodret parallelforskydning af grafen for *f* med 1 nedad, dvs. den går gennem punktet (0,0).
Altså er ***B* grafen for funktionen *h***

Funktionen *f* er aftagende, da fremskrivningsfaktoren 0,6 er mindre end 1.
***C* er grafen for funktionen *f*.**

Funktionen *g* er voksende, da fremskrivningsfaktoren 1,5 er større end 1.
***A* er grafen for funktionen *g*.**

*Opgave 6:* $f(x)=3\cdot e^{x^2}+4$ $\qquad y'=2x\cdot(y-4)$

Det undersøges, om funktionen *f* er en løsning til differentialligningen, ved at indsætte funktionsudtrykkene for *f* og den afledede af *f* i differentialligningen og se, om man får en identitet.
Man differentierer ledvis og anvender reglen for differentiation af sammensat funktion:

$$f'(x)=2x\cdot 3\cdot e^{x^2}=6x\cdot e^{x^2}$$

Indsat i differentialligningen:

$$6x\cdot e^{x^2}=2x\cdot\left(3\cdot e^{x^2}+4-4\right)\Leftrightarrow 6x\cdot e^{x^2}=2x\cdot 3\cdot e^{x^2}\Leftrightarrow 6x\cdot e^{x^2}=6x\cdot e^{x^2}$$

Da dette er en identitet, **er *f* en løsning til differentialligningen**.

## *7. december 2018: Delprøven MED hjælpemidler*

7. december 2018 opgave 7:

*restart*

*with*(*Gym*) :

a) $f(x) = b \cdot a^x$. Da det er ens eksponentiel udvikling, hvor man kender mere end to sæt sammenhørende værdier, skal man anvende eksponentiel regression. Det bemærkes, at tidspunktet måles i antal år efter 2011.

$Tidspunkt := [0, 1, 2, 3, 4, 5]$ :

$Antaltransaktioner := [5202, 23023, 53734, 69277, 125379, 226639]$ :

$f(x) := ExpReg(Tidspunkt, Antaltransaktioner, x)$ :

$f(x) = 8565.70912981435\ 1.99714685706667^x$

Man aflæser fra funktionsforskriften, at:

$\underline{\underline{a = 1.9971}}$ og $\underline{\underline{b = 8566}}$

b) Det daglige antal transaktioner overstiger 600000, når $f(x) > 600000$:

$solve(f(x) > 600000, x) = (6.142897774, \infty)$

Det fremgår ikke af opgaven, om antal daglige transaktioner er bestemt ved årets start, årets slutning eller et gennemsnit, så begge årstallene **2017** og **2018** kan angives som svar.

c) $T_2 = \dfrac{\ln(2)}{\ln(a)} = \dfrac{\ln(2.)}{\ln(1.99714685706667)} = 1.002063828$

Dvs. at **fordoblingstiden er 1 år.**

7. december 2018 opgave 8

*restart*

*with*(*Gym*) :

a) De kumulerede frekvenser beregnes ved at lægge frekvenserne til og med det pågældende interval sammen:

0-20 år: $f_{kumuleret} = 23.36$

20-40 år: $f_{kumuleret} = 23.36 + 24.42 = 47.78$

40-60 år: $f_{kumuleret} = 23.36 + 24.42 + 27.37 = 75.15$

60 - 70 år: $f_{kumuleret} = 23.36 + 24.42 + 27.37 + 11.97 = 87.12$

70 - 80 år: $f_{kumuleret} = 23.36 + 24.42 + 27.37 + 11.97 + 8.53 = 95.65$

80 - 90 år: $f_{kumuleret} = 23.36 + 24.42 + 27.37 + 11.97 + 8.53 + 3.51 = 99.16$

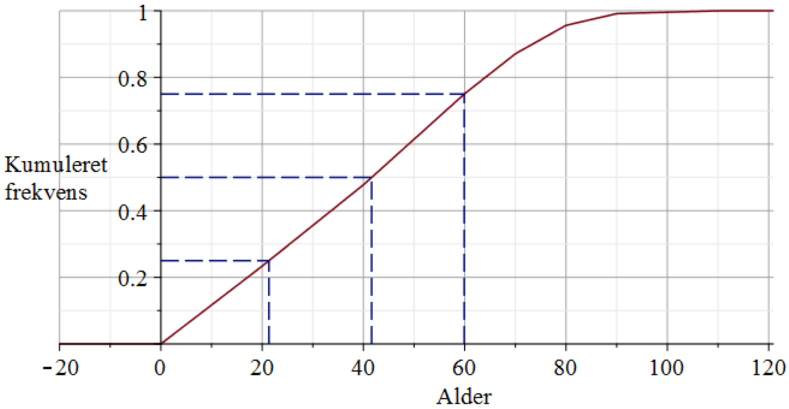
90 - 110 år: $f_{kumuleret} = 23.36 + 24.42 + 27.37 + 11.97 + 8.53 + 3.51 + 0.84 = 100.00$


Løsningerne er hentet på [www.szymanskispil.dk](http://www.szymanskispil.dk) Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

For at kunne tegne sumkurven indtastes tabellen i en matrix:

$$M := \begin{bmatrix} 0..20 & 23.36 \\ 20..40 & 24.42 \\ 40..60 & 27.37 \\ 60..70 & 11.97 \\ 70..80 & 8.53 \\ 80..90 & 3.51 \\ 90..110 & 0.84 \end{bmatrix} :$$

$plotSumkurve(M)$






b) For at kunne finde antallet af danskere mellem 65 år og 67 år, skal man arbejde med sumkurven som funktionsudtryk.

$f(A) := sumkurve(M, A) = A \rightarrow Gym{:}\text{-}sumkurve(M, A)$

$f(67) - f(65) = 0.0239400000000000$

Dvs. 2,4% af befolkningen er mellem 65 år og 67 år.

Da der er 5,7 millioner danskere, svarer de 2,4% til:

$0.02394 \cdot 5.7 \cdot 10^6 = 136458.0000$

Dvs. der vil være **136458** færre danskere over pensionsalderen.



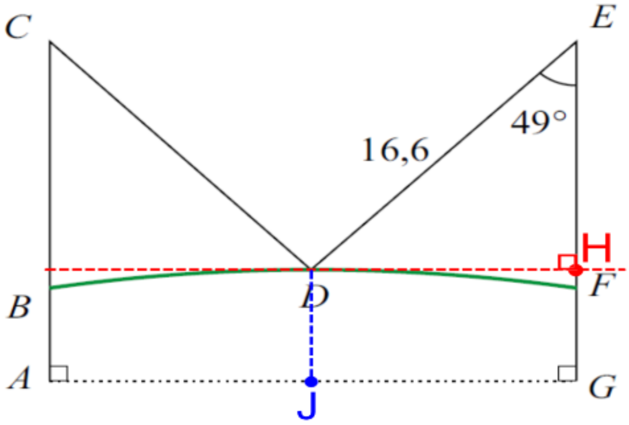


7. december 2018 opgave 9

*restart*

*with(Gym)* :

a) For at bestemme bredden af vejbanen konstrueres en retvinklet trekant DEH.




Da trekant DEH er retvinklet, gælder $\sin(49°) = \frac{|DH|}{16.6}$

$|AG| = 2\cdot|DH| = 2\cdot Sin(49)\cdot 16.6 = 25.05635806$

Dvs. $\underline{\underline{|AG| = 25.1\text{ m}}}$

b) Gangbroen indtegnes i et koordinatsystem, så $J$ ligger i origo og punktet $D$ får koordinatsættet (0,5.2).

Ligninger for parabler er generelt på formen $y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$, og da gangbroens toppunkt ligger på andenaksen, er b-værdien 0, og da skæringen med andenaksen er i 5,2, er $c = 5.2$.

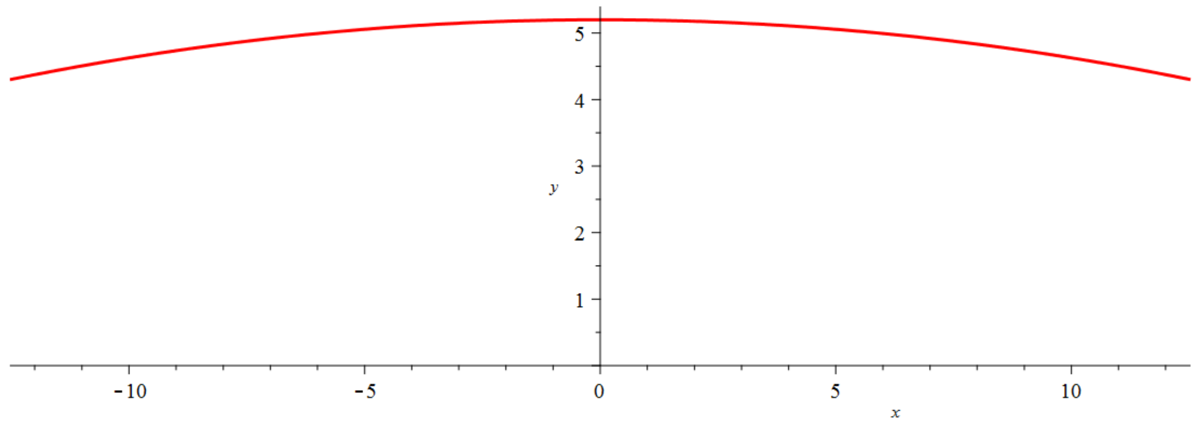
Dvs. ligningen er $y = a\cdot x^2 + 5.2$

For at bestemme a-værdien anvendes, at punktet F på parablen har koordinatsættet $\left(\frac{25.05635806}{2}, 4.3\right)$:

$$4.3 = a\cdot\left(\frac{25.05635806}{2}\right)^2 + 5.2 \xrightarrow{\text{solve}} \{a = -0.005734117759\}$$

Dvs. at ligningen er $\underline{\underline{y = -0.005734\cdot x^2 + 5.2}}$

$$plot\left(-0.005734117759\cdot x^2 + 5.2, x = -\frac{25.05635806}{2} .. \frac{25.05635806}{2}, y = 0 ..5.4, thickness = 3, color = red\right)$$




Løsningerne er hentet på [www.szymanskispil.dk](http://www.szymanskispil.dk) Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

7. december 2018 opgave 10

*restart*

*with*(*Gym*) :

a) Punkterne angives ved deres stedvektorer: $\overrightarrow{OA} := \langle 0, 20, 45 \rangle : \overrightarrow{OB} := \langle 17.3, -10, 0 \rangle :$

Vektoren $\overrightarrow{AB}$ kan anvendes som retningsvektor i parameterfremstillingen.

$$\overrightarrow{AB} := \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 17.3000000000000 \\ -30. \\ -45. \end{bmatrix}$$

Punktet $A$ anvendes som punkt i parameterfremstillingen, så man har:

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 45 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 17.3 \\ -30. \\ -45. \end{pmatrix}}}$$

b) En ligning for xy-planen er $z = 0$, og en normalvektor for planen er $\vec{n} := \langle 0, 0, 1 \rangle :$

For at bestemme vinklen mellem xy-planen og linjen, findes først vinklen mellem planens **normalvektor** og linjens retningsvektor:

$$\cos(v) = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \vec{n}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\vec{n}|}$$

$$Cos(v) = \frac{dotP(\overrightarrow{AB}, \vec{n})}{len(\overrightarrow{AB}) \cdot len(\vec{n})} \xrightarrow{\text{solve}} \{v = 142.4191057\}$$

Dermed er vinklen mellem planen og linjen:

$w = |90° - v| = |90 - 142.4191057| = 52.4191057$

Dette er den spidse vinkel, dvs:

$$\underline{\underline{w_{spids} = 52.42°}}$$





7. december 2018 opgave 11

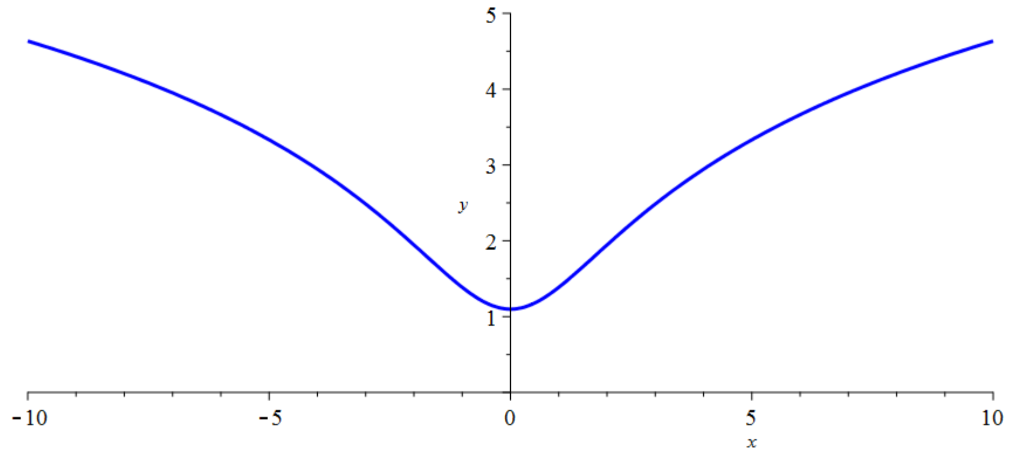
*restart*

*with*( *Gym* ) :

$f(x) := \ln(x^2+3)$ : $P(1, f(1))$

a) Grafen skal tegnes i et passende koordinatsystem, hvor man kan se grafens forløb:'

$plot(f(x), x=-10..10, y=0..5, thickness=3, color=blue)$



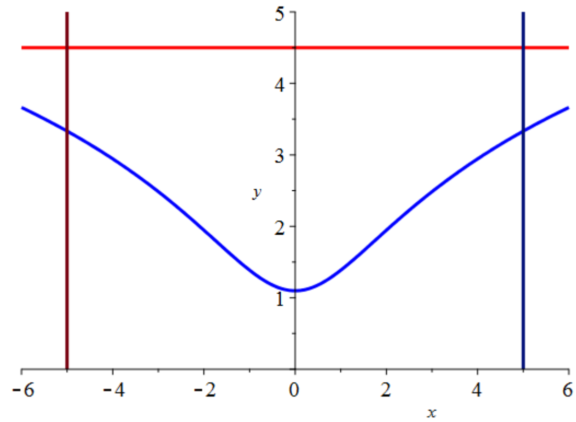
Ligningen for tangenten til grafen for *f* i *P* bestemmes ud fra $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$:

$y = f'(1)\cdot(x-1) + f(1) = y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + 2\ln(2)$

Dvs. $\underline{\underline{y = \frac{x}{2} + 2\cdot\ln(2) - \frac{1}{2}}}$

b) Punktmængden kan illustreres med en konkret værdi af *k*. Her ses på $k = 4.5$:

$plot([f(x), 4.5], x=-6..6, y=0..5, thickness=3, color=[blue, red])$



Det bemærkes, at den vandrette linje ligger over grafen for *f*, så når arealet skal være 40, har man:

$solve\left(\int_{-5}^{5}(k - f(x))\,dx = 40., k\right) = 6.189447138$

Dvs. $\underline{\underline{k = 6.189}}$

c) Igen bemærkes det, at den vandrette linje ligger over grafen for *f*:

$V = \pi\cdot\int_{-5}^{5} 5^2\,dx - \pi\cdot\int_{-5}^{5} f(x)^2\,dx = 250\pi - \pi\left(\int_{-5}^{5}\ln(x^2+3)^2\,dx\right) \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 618.8327466$

Dvs. rumfanget af omdrejningslegemet er $\underline{\underline{618.83}}$

7. december 2018 opgave 12

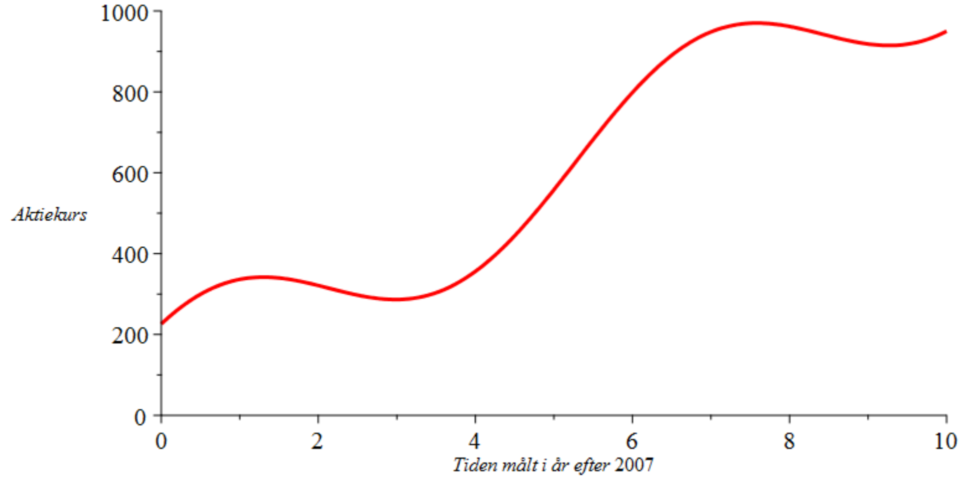
*restart*

*with*(*Gym*) :

a) $K(t) := 100 \cdot t + 150 \cdot \sin(t+1) + 100$ :

Funktionen er defineret i intervallet [0,10], så det er i dette område, at grafen skal tegnes:

$plot(K(t), t = 0..10, y = 0..1000, thickness = 3, color = red)$




År 2010 svarer til $t = 3$:

$K(3.) = 286.4796257$

Dvs. i 2010 var aktiekursen $\underline{\underline{286}}$

b) $K'(8.) = -36.6695393$

Dette betyder, at **i år 2015 faldt aktiekursen med 37 kurspoint om året.**

c) Den maksimale veksthastighed findes et sted med vendetangent, dvs. et sted hvor den anden afledede af funktionen antager værdien 0. Da der indgår en trigonometrisk funktion i funktionsudtrykket, skal man anvende *intervalsolve* for at få alle løsninger med:

$intervalsolve(K''(t) = 0, t = 0..10) = [\pi - 1, 2\pi - 1, 3\pi - 1]$

Fortegnet for den tredje afledede disse steder angiver typen af ekstremumssted:

$K'''(\pi - 1) = 150 > 0$ dvs. lokalt minimumssted

$K'''(2 \cdot \pi - 1) = -150 < 0$ dvs. lokalt maksimumssted

$K'''(3 \cdot \pi - 1) = 150 > 0$ dvs. lokalt minimumssted

$2 \cdot \pi - 1. = 5.283185308$  $0.283185308 \cdot 12 = 3.398223696$

Dvs. aktiekursen vokser hurtigst **3 måneder inde i år 2012.**


Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

7. december 2018 opgave 13

*restart*

*with*(*Gym*) :

a) Andelen af kulstof-14 betegnes med $A$.

Da tiden betegnes $t$, er væksthastigheden for andelen af kulstof-14: $\frac{dA}{dt}$

Da væksthastigheden er proportional med andelen, har man: $\frac{dA}{dt} = k \cdot A$

Proportionalitetskonstanten er angivet, dvs. man har $\underline{\underline{\frac{dA}{dt} = -0.000121 \cdot A}}$

(Der er en fejl i opgaveformuleringen. Der står, at det er den hastighed, hvormed andelen **aftager**,
der er proportional med andelen, men så skal der ikke være angivet noget minus på proportionalitetskonstanten).

b) Først bestemmes den partikulære løsning til differentialligningen, hvor det udnyttes,
at andelen var 100% i år -250:

$$[A'(t) = -0.000121 \cdot A(t), A(-250) = 100] \xrightarrow{\text{solve DE}} A(t) = \frac{100\, e^{-\frac{121\, t}{1000000}}}{e^{\frac{121}{4000}}}$$

Denne forskrift kan bruges til at bestemme andelen i år 2018:

$$A(t) := \frac{100\, e^{-\frac{121\, t}{1000000}}}{e^{\frac{121.}{4000}}} :$$

$A(2018.) = 76.00067226$

Dvs. at i 2018 var andelen af kulstof-14 i Grauballemanden $\underline{\underline{76\ \%}}$




7. december 2018 opgave 14

*restart*

*with*(*Gym*) :

$f(x) := x^2 - 10 \cdot x + 29 :$

a) Først bestemmes tangentens ligning udtrykt ved *a*:

$solve(y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a), y) = -a^2 + 2\,a\,x - 10\,x + 29$

Dvs. tangentens ligning er $y = -a^2 + 2 \cdot a \cdot x - 10 \cdot x + 29$

*Q* er tangentens skæring med andenaksen, dvs. man har $x = 0$:

$y = -a^2 + 2 \cdot a \cdot 0 - 10 \cdot 0 + 29 = 29 - a^2$

Dvs. $\underline{\underline{Q(0, 29 - a^2)}}$

Trekantens areal er givet ved $T = \frac{1}{2} \cdot |QR| \cdot a$

Det udnyttes, at andenkoordinaten for *R* svarer til *f(a)*:

$|QR| = 29 - a^2 - (a^2 - 10 \cdot a + 29) = -2 \cdot a^2 + 10 \cdot a$

Dermed bliver:

$T = \frac{1}{2} \cdot (-2 \cdot a^2 + 10 \cdot a) \cdot a = \underline{\underline{-a^3 + 5 \cdot a^2}}$

b) $T(a) := 5 \cdot a^2 - a^3 :$

For at bestemme det sted, hvor arealet af trekanten er størst, findes først det sted, hvor den afledede er 0:

$intervalsolve(T'(a) = 0, a = 0\,..5) = \left[0, \frac{10}{3}\right]$

Den første løsning svarer til arealet 0, så den kan man se bort fra.

Værdien af den anden afledede det andet sted bestemmes for at afgøre typen af ekstremumssted:

$T''\left(\frac{10}{3}\right) = -10 < 0$ , dvs. lokalt maksimumssted.

Dvs. trekantens areal er størst, når $\underline{\underline{a = \frac{10}{3}}}$