Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Løsninger til eksamensopgaver på A-niveau 2019

21. maj 2019: Delprøven UDEN hjælpemidler

21. maj 2019 opgave 1: Man kan godt benytte substitutionsmetoden, lige store koefficienters metode eller determinantmetoden, men her er det nemmeste at lægge ligningerne sammen, da *y* så forsvinder, og man dermed kan finde *x*-værdien:

$$\left.\begin{matrix} x+y=1 \\ 2x-y=17 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x+y)+(2x-y)=1+17 \;\Leftrightarrow\; 3x=18 \;\Leftrightarrow\; x=6$$

Den fundne *x*-værdi indsættes i den øverste ligning:

$$x=6:\;\; 6+y=1 \;\Leftrightarrow\; y=-5$$

Dvs. ligningssystemet har løsningen $\underline{\underline{(x,y)=(6,-5)}}$

21. maj 2019 opgave 2: $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} \quad \vec{b}=\begin{pmatrix}1+t\\-4\end{pmatrix}$

Uanset værdien af *t* er ingen af vektorerne nulvektoren, så der gælder:

$$\vec{a}\perp\vec{b} \;\Leftrightarrow\; \vec{a}\bullet\vec{b}=0 \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1+t\\-4\end{pmatrix}=0 \;\Leftrightarrow\; 4\cdot(1+t)+5\cdot(-4)=0 \;\Leftrightarrow$$

$$4+4t-20=0 \;\Leftrightarrow\; 4t=16 \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{t=4}}$$

21. maj 2019 opgave 3: Modellen er en eksponentiel udvikling. Begyndelsesværdien 75000 fortæller at, **i 2015 kostede varen 75000 kr.**

Fremskrivningsfaktoren 0,98 svarer til vækstraten $-0{,}02=-2\%$, og den fortæller derfor, at **varens pris falder med 2% om året.**

21. maj 2019 opgave 4: $f(x)=\frac{1}{x}+6x \quad , \quad x>0 \qquad\qquad P(1,10)$

Først bestemmes ved integration familien af stamfunktioner:

$$F_k(x)=\int f(x)\,dx=\int\left(\frac{1}{x}+6x\right)dx=\ln|x|+3x^2+k=\ln(x)+3x^2+k$$

(numerisktegnet kan fjernes, da $x>0$)

Ved at indsætte punktets koordinater i forskriften findes den *k*-værdi, der giver os forskriften for den stamfunktion, hvis graf går gennem *P*.

$$10=\ln(1)+3\cdot1^2+k \;\Leftrightarrow\; 10=0+3+k \;\Leftrightarrow\; k=7$$

Dvs. forskriften er:

$$\underline{\underline{F(x)=\ln(x)+3x^2+7}}$$

21. maj 2019 opgave 5: $f(x) = x^2 \cdot e^x$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{2}{x}+1\right)\cdot y$

Først bestemmes med produktreglen den afledede funktion af f:

$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$

Udtrykkene for funktionen og den afledede af funktionen indsættes i differentialligningen for at se, om man får en identitet:

$$2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = \left(\frac{2}{x}+1\right)\cdot x^2 \cdot e^x \quad \Leftrightarrow$$

$$2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = \frac{2\cdot\left(x^2 \cdot e^x\right)}{x} + x^2 \cdot e^x \quad \Leftrightarrow$$

$$2x \cdot e^x = 2 \cdot x \cdot e^x$$

Dette udsagn er sandt for alle x-værdier (dvs. det er en identitet), så ***f* er en løsning til differentialligningen**.

21. maj 2019 opgave 6: $f(x) = x^2 + k \cdot x$ $\qquad g(x) = x + k$

Skæringsstederne mellem graferne for f og g findes som de steder, hvor funktionsværdierne er ens, dvs. man sætter funktionsudtrykkene lig hinanden:

$$x^2 + k \cdot x = x + k \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (k-1)\cdot x - k = 0$$

Hvis der skal være netop ét skæringspunkt mellem graferne, skal ovenstående ligning have netop én løsning, og da det er en andengradsligning, svarer det til, at diskriminanten skal være 0.

$$d = (k-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-k) = k^2 + 1 - 2k + 4k = k^2 + 2k + 1$$

$$d = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$k^2 + 2k + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(k+1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{k = -1}}$$

(Andengradsligningen med k som variabel kan selvfølgelig også løses med diskriminantmetoden, men faktorisering og nulreglen er hurtigere)

21. maj 2019: Delprøven MED hjælpemidler

21. maj 2019 opgave 7:

$\vec{a} := \langle 2, -4 \rangle : \vec{b} := \langle 3, 4 \rangle :$

a) Arealet af den trekant, der udspændes af vektorerne, findes ved:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \left| det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} 2 & 3 \\ -4 & 4 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |2 \cdot 4 - (-4) \cdot 3| = \frac{1}{2} \cdot |20| = \underline{\underline{10}}$$

Maple kan også klare udregningen:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \left| det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \right| = 10$$

b) Projektionen bestemmes med formlen for projektion af vektor på vektor:

$$\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{a}_b = \frac{dotP\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{\left(len\left(\vec{b}\right)\right)^2} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} \\ -\frac{8}{5} \end{bmatrix}$$

Dvs. $\underline{\underline{\vec{a}_b = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ -\frac{8}{5} \end{pmatrix}}}$

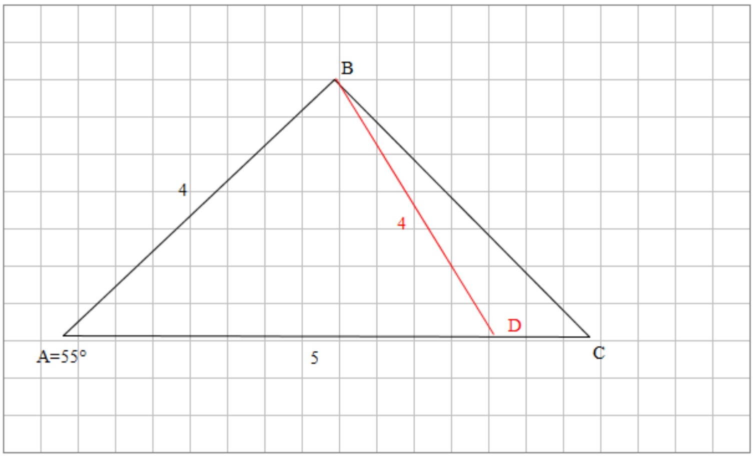
Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

21. maj 2019 opgave 8:

restart

with(*Gym*) :

$A := 55 : AC := 5 : AB := 4 :$



a) For at kunne bestemme omkredsen mangler man længden af siden BC. Da man kender en vinkel og de to hosliggende sider, kan den sidste side bestemmes med en cosinusrelation.

$$Cos(A) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \xrightarrow{\text{solve}} \{BC = 4.249346133\}, \{BC = -4.249346133\}$$

Da det er en sidelængde, forkastes den negative løsning.

$BC := 4.249346133 :$

Omkredsen er så:

$\mathrm{O} = AB + BC + AC = 13.24934613$

Dvs.

$\underline{\underline{\mathrm{O}_{ABC} = 13.25}}$

b) Trekanterne ABD og BCD har samme højde fra B, så forholdet mellem deres arealer svarer til forholdet mellem deres grundlinjer hørende til højden fra B:

$$\frac{T_{ABD}}{T_{BCD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot h_B \cdot |AD|}{\frac{1}{2} \cdot h_B \cdot |CD|} = \frac{|AD|}{|CD|}$$

Man skal altså finde ud af, hvor på siden AC, punktet D er placeret.

Da trekant ABD er ligebenet, er de to vinkler over for de lige lange sider kongruente, dvs. $\angle ADB = 55°$

Og ud fra vinkelsummen i en trekant har man så:

$\angle ABD = 180° - \angle A - \angle ADB = 180° - 55° - 55° = 70°$

Så kan længden af siden AD beregnes med sinusrelationerne:

$$\frac{\sin(\angle ABD)}{|AD|} = \frac{\sin(\angle A)}{|BD|}$$

$$\frac{Sin(70)}{AD} = \frac{Sin(55)}{4} \xrightarrow{\text{solve}} \{AD = 4.588611491\}$$

Hermed har man:

$$\frac{T_{ABD}}{T_{BCD}} = \frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|AD|}{|AC| - |AD|} = \frac{4.588611491}{5 - 4.588611491} = 11.15396126$$

Dvs. forholdet mellem trekanterne er **11,15**

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

21. maj 2019 opgave 9:

restart

with(*Gym*) :

a) Den del af cirklens areal, som cirkeludsnittet udgør, svarer til den del, som 105° udgør af 360°, dvs:

$$A_{cirkeludsnit} = \frac{105°}{360°} \cdot A_{cirkel} = \frac{105°}{360°} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{105}{360} \cdot \pi \cdot (10\text{cm})^2 = \frac{175\,\pi}{6}\ \text{cm}^2 \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 91.62978575\ \text{cm}^2$$

Dvs.

$$\underline{\underline{A_{cirkeludsnit} = 91.6\text{cm}^2}}$$

b) Arealets af den mørke kant bestemmes ved at trække arealet af den lyse (grønne) del fra det samlede areal:

$$A_{mørk} = A_{cirkeludsnit} - A_{lys} = \frac{105}{360} \cdot \pi \cdot 10^2 - \frac{105}{360} \cdot \pi \cdot (10 - x)^2 = \frac{105}{360} \cdot \pi \cdot \left(10^2 - (10 - x)^2\right) =$$

$$\frac{105}{360} \cdot \pi \cdot \left(100 - 100 - x^2 + 20\,x\right) = \frac{7}{24} \cdot \pi \cdot \left(20\,x - x^2\right) = \underline{\underline{\frac{7}{24} \cdot \pi \cdot x \cdot (20 - x)}}$$

Da den mørke kan ikke kan være bredere end radius, har man $0 < x < 10$

c) Hvis arealet skal være 45 cm^2 har man:

$$45. = \frac{7}{24} \cdot \pi \cdot x \cdot (20 - x) \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 17.13367590\},\ \{x = 2.866324100\}$$

Den første løsning falder uden for definitionsmængden, så den forkastes, dvs.

$\underline{\underline{x = 2.866}}$

21. maj 2019 opgave 10:

restart

with(*Gym*) :

$C(t) := 225 \cdot \sin(0.262 \cdot t - 2.88) + 250$:

a) Tallet 225 er amplituden, dvs. det halve af forskellen mellem største og mindste iltkoncentration (hvilket følger af, at sinus antager værdier i intervallet [-1,1]), dvs. at **iltkoncentrationen i vandoverfladen varierer med 450 µM i løbet af et døgn.**

Hvis man skal være meget omhyggelig, kan man også lige kontrollere, at den angivne definitionsmængde passer med, at fasen ændrer sig 2π , når t gennemløber intervallet, så man er sikker på, at man har at gøre med en hel svingning (men hvis ikke, ville der være noget galt med modellen): $0.262 \cdot 24 = 6.288 \approx 2\,\pi$

b) Den største iltkoncentration findes ved først at finde de lokale ekstremumssteder og derefter afgøre typen:

intervalsolve$(C'(t) = 0, t = 0..24)$

$$[4.996960585, 16.98777224]$$

Disse steder er der vandret tangent, og værdierne indsættes i den anden afledede:

$C''(4.996960585) = 15.444900 > 0$ dvs. lokalt minimumssted

$C''(16.98777224) = -15.444900 < 0$ dvs. lokalt maksimumssted

Dvs. **iltkoncentrationen i vandoverfladen er størst kl. 17**

Egentlig skal man også lige tjekke, at koncentrationen kl. 17 er større end ved midnat:

$C(0) = 191.8106463$

$C(16.98777224) = 475.$

Men da man har at gøre med en trigonometrisk funktion, kan man også henvise til dette og sige, at man dermed ved, at det fundne lokale maksimumssted også er globalt maksimumssted.

Man kan også løse opgaven ved at finde det sted, hvor koncentrationen er 475, da det er den størst mulige værdi $(225 + 250 = 475)$:

intervalsolve$(475 = C(t), t = 0..24) = [16.98777224]$

21. maj 2019 opgave 11:

restart
with(*Gym*) :
$f(x) := (4-x)\cdot x : g(x) := 2\cdot f(x) :$

a) Man kan ud fra forskrifterne se, at funktionernes nulpunkter er 0 og 4 (nulreglen). Dvs. punktmængden *M* ligger i dette interval. Da *g* har funktionsværdier dobbelt så store som *f*'s, vil grafen for *g* ligge øverst i det pågældende interval. Dermed har man:

$$A_M = \int_0^4 (g(x) - f(x))\, dx = \frac{32}{3}$$

$$\underline{\underline{A_M = \frac{32}{3}}}$$

b) Rumfanget af omdrejningslegemet findes ved at trække to rumfang fra hinanden:

$$V = \int_0^4 \pi\cdot g(x)^2\, dx - \int_0^4 \pi\cdot f(x)^2\, dx = \frac{512\,\pi}{5} \xrightarrow{\text{at 20 digits}} 321.69908772759482762$$

Dvs. $\underline{\underline{V = \frac{512\cdot\pi}{5}}}$

21. maj 2019 opgave 12:

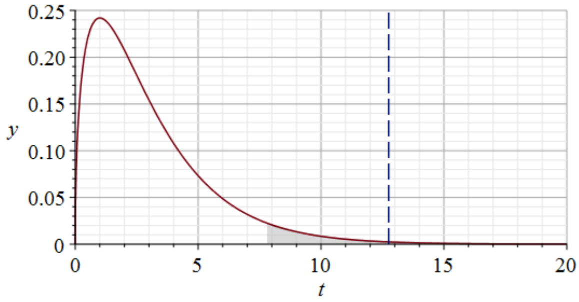
restart
with(*Gym*) :

a) Først bestemmes det samlede antal snegle, der blev fanget af sangdroslerne:
$n := 110 + 63 + 28 + 49 = 250$
Da man kender den procentvise fordeling i habitatet, kan man bestemme den forventede fordeling:

FORVENTET	$250\cdot 0.34 = 85.00$	$250\cdot 0.26 = 65.00$	$250\cdot 0.14 = 35.00$	$250\cdot 0.26 = 65.00$

b) Det er for sent at fastsætte signifikansniveauet efter optællingen, men nu testes der alligevel med et χ^2-GOF-test:
$obs := [110, 63, 28, 49] :$
$forv := [85, 65, 35, 65] :$
$ChiKvadratGOFtest(obs, forv, level = 0.05)$

χ^2-teststørrelse = 12.753
Frihedsgrader = 3
Kritisk værdi = 7.8147
p-værdi = 0.0052025



Da $p = 0.52\ \% < 5\ \% = \alpha$, skal **nulhypotesen forkastes**
Der er signifikant forskel på sangdroslernes fangst og habitatets fordeling af snegle.

21. maj 2019 opgave 13:

restart

with(*Gym*) :

$$f(x) := x + \frac{x}{x^2+1} :$$

a) Da linjen bestemt ved ligningen $y = x - 2$ har hældningen 1, skal de to tangenter, der er parallelle med denne linje, også have hældningen 1. Man skal altså finde de steder, hvor den afledede funktion af f antager værdien 1:

$$1 = f'(x) \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 1\}, \{x = -1\}$$

Dvs. $\underline{\underline{x = -1 \vee x = 1}}$

b) Man kan vise, at en funktion er voksende, ved at vise, at den afledede funktion er ikke-negativ i hele definitionsmængden. Først findes evt. steder, hvor den afledede funktion er 0:

$$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{x = \frac{\sqrt{-2 - 2\,\mathrm{I}\sqrt{7}}}{2}\right\}, \left\{x = -\frac{\sqrt{-2 - 2\,\mathrm{I}\sqrt{7}}}{2}\right\}, \left\{x = \frac{\sqrt{-2 + 2\,\mathrm{I}\sqrt{7}}}{2}\right\}, \left\{x = -\frac{\sqrt{-2 + 2\,\mathrm{I}\sqrt{7}}}{2}\right\}$$

Det bemærkes, at alle løsningerne er komplekse tal, dvs. der er ingen steder, hvor den afledede funktion er 0, dvs. der er ingen steder, hvor den kan skifte fortegn (den er kontinuert og defineret for alle reelle tal). Man behøver altså blot at finde dens fortegn et tilfældigt sted (eller også kan man henvise til spørgsmål a, hvor vi så, at der er steder, hvor den afledede er positiv). Det tilfældige sted vælges her som 42:

$$f'(42) = \frac{3113462}{3115225} > 0$$

Den afledede funktion af f er positiv i hele $\mathbb{R}$, og **dermed er f en voksende funktion**

21. maj 2019 opgave 14:

restart

with(*Gym*) :

$$\frac{dy}{dt} = 0.0447 \cdot (110 - y)$$

a) Med en kendt vandtemperatur på 90°C får man:

$$\frac{dy}{dt} = 0.0447 \cdot (110 - 90) = 0.8940$$

Dvs. at når temperaturen er 90°C , **øges vandtemperaturen med 0,89°C i minuttet**

b) Først bestemmes den partikulære løsning til differentialligningen, hvor $y(0) = 80$:

$$[y'(t) = 0.0447 \cdot (110 - y(t)), y(0) = 80] \xrightarrow{\text{solve DE}} y(t) = 110 - 30\,e^{-\frac{447\,t}{10000}}$$

Så bestemmes det tidspunkt, hvor temperaturen er 105°C, dvs. $y(t) = 105$:

$$105 = 110 - 30\,e^{-\frac{447\,t}{10000}} \xrightarrow{\text{solve}} \left\{t = \frac{10000\ln(6)}{447}\right\} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} \{t = 40.08410445\}$$

Dvs. det forventes, at gejseren kommer i udbrud igen **40 minutter efter sidste udbrud**

21. maj 2019 opgave 15:

restart
with(*Gym*) :
$\alpha : 2\,x + 2\,y - z - 1 = 0 \qquad P(-2, 3, 1)$

a) Et punkt ligger i planen, hvis dets koordinater indsat i planens ligning fører til et sandt udsagn:
$2\cdot(-2) + 2\cdot 3 - 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow$
$-4 + 6 - 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow$
$0 = 0$
Da dette er et sandt udsagn, **ligger *P* i planen α**

b) Man kender allerede kuglernes radius, der er 6, så man skal finde koordinatsættet til den ene kugles centrum. Dette centrum ligger på den linje, der går gennem *P* og har en retningsvektor, der er normalvektor til planen, fordi man hermed følger en linje vinkelret på planen væk fra denne. En parameterfremstilling for denne linje er altså:

$$\langle x, y, z\rangle = \langle -2, 3, 1\rangle + t\cdot\langle 2, 2, -1\rangle = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 2\,t \\ 3 + 2\,t \\ 1 - t \end{bmatrix}$$

Nu findes de to t-værdier, der svarer til de to punkter på linjen, hvis afstand til planen er 6:

$$dist(P_0, \alpha) = \frac{|a\cdot x_0 + b\cdot y_0 + c\cdot z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$6 = \frac{|2\cdot(-2 + 2\,t) + 2\cdot(3 + 2\,t) - (1 - t) - 1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} \xrightarrow{\text{solve}} \{t = 2\}, \{t = -2\}$$

De to mulige centre er altså:
$t = -2: \quad (-2 + 2\cdot(-2), 3 + 2\cdot(-2), 1 - (-2)) = (-6, -1, 3)$
$t = 2: \quad (-2 + 2\cdot 2, 3 + 2\cdot 2, 1 - 2) = (2, 7, -1)$

De to ligninger er altså (der spørges kun efter den ene):
$\underline{\underline{(x + 6)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 36}} \qquad \underline{\underline{(x - 2)^2 + (y - 7)^2 + (z + 1)^2 = 36}}$

24. maj 2019: Delprøven UDEN hjælpemidler

24. maj 2019 opgave 1: $3x^2-7x+2=0$

Man kan løse denne andengradsligning med diskriminantmetoden.

$d=b^2-4ac=(-7)^2-4\cdot 3\cdot 2=49-24=25>0$, dvs. 2 løsninger.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{d}}{2\cdot a}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{25}}{2\cdot 3}=\frac{7\pm 5}{6}=\begin{cases}2\\ \frac{2}{6}\end{cases}$$

Dvs. $\underline{\underline{x=\frac{1}{3}\ \vee\ x=2}}$

24. maj 2019 opgave 2: $\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$

Arealet af parallelogrammet kan bestemmes som den numeriske værdi af determinanten af de to vektorer:

$$A=\left|\det\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right|=\left\|\begin{matrix}-3 & 7\\ 4 & 2\end{matrix}\right\|=|-3\cdot 2-4\cdot 7|=|-6-28|=|-34|=\underline{\underline{34}}$$

24. maj 2019 opgave 3: $f(x)=4x-6 \qquad g(x)=-3x+5 \qquad h(x)=f(x)-2\cdot g(x)$

Funktionsudtrykkene for *f* og *g* indsættes i funktionsforskriften for *h*:

$h(x)=(4x-6)-2\cdot(-3x+5)=4x-6+6x-10=\underline{\underline{10x-16}}$

24. maj 2019 opgave 4: $\frac{k}{x+3}=5$

x er placeret i nævneren, så først skal der ganges med nævneren på begge sider:

$$\frac{k}{x+3}=5 \Leftrightarrow k=5\cdot(x+3) \Leftrightarrow \frac{k}{5}=x+3 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=\frac{k}{5}-3}}$$

($x=\frac{k-15}{5}$ er også ok)

24. maj 2019 opgave 5: $f(x)=x^3+10x$

Det vises, at *f* er en voksende funktion, ved at vise, at den afledede funktion udelukkende giver positive værdier.

$f'(x)=3x^2+10$

Da et kvadrat mindst kan blive 0, er den afledede funktions mindste værdi 10, dvs. **den afledede funktion af *f* er positiv for alle *x*-værdier, og dermed er *f* en voksende funktion.**

24. maj 2019 opgave 6: $f(x)=\frac{1}{4x+12} \quad , \quad x>-3$

Det er en sammensat funktion, så man kan integrere med substitutionsmetoden:

$t=4x+12$

$\frac{dt}{dx}=4$

$\frac{1}{4}\cdot dt=dx$

$$\int\frac{1}{4x+12}dx=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{4}dt=\frac{1}{4}\ln|t|+k=\underline{\underline{\frac{1}{4}\cdot\ln(4x+12)+k}}$$

Numerisktegnet kan fjernes, da $x>-3$, dvs. argumentet for logaritmefunktionen er positivt.

24. maj 2019: Delprøven MED hjælpemidler

24. maj 2019 opgave 7:

restart

with(*Gym*) :

Modellen er en eksponentiel udvikling, og man kender værdier for mere end to år, så der skal anvendes regression. Det bemærkes, at tidspunktet t er målt i antal år efter 2009.

a)

$Tidspunkt := [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]:$

$Antalbesøgende := [8.2, 8.5, 9.1, 9.3, 9.6, 9.9, 10.8, 11.7, 12.3]:$

$f(t) := ExpReg(Tidspunkt, Antalbesøgende, t):$

$f(t) = 8.07075729192747\ 1.05101693441441^t$

Dvs. $\underline{\underline{a = 1.051}}$ og $\underline{\underline{b = 8.07}}$

b) Fremskrivningsfaktoren a er 1,051, hvilket svarer til en vækstrate på 5,1%. Dvs. at
i perioden er antallet af besøgende på danske museer øget med 5,1% om året

c) $T_2 = \dfrac{\ln(2)}{\ln(a)} = \dfrac{\ln(2.)}{\ln(1.05101693441441)} = 13.93030946$

Dvs. **fordoblingstiden er 14 år**

24. maj 2019 opgave 8:

restart

with(*Gym*) :

$h(t) := 35.5 \cdot \left(1 - \dfrac{t}{2}\right)^2 + 4.5:$

a) Væskehøjden til tiden $t = 0$ findes ved indsættelse i funktionsforskriften:

$h(0) = 35.5 \cdot \left(1 - \dfrac{0}{2}\right)^2 + 4.5 = 35.5 \cdot 1^2 + 4.5 = 35.5 + 4.5 = 40$

Dvs. **væskehøjden er 40 cm**

b) $h'(1.5) = -8.87500000$

Dette fortæller, at **halvandet minut efter hanen åbnes, falder væskehøjden med 8,9 cm i minuttet.**

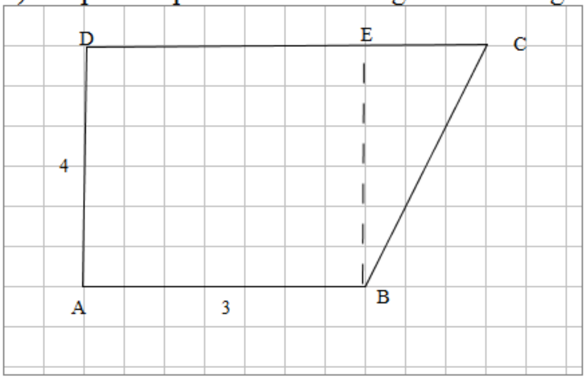
Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

24. maj 2019 opgave 9:

restart

with(Gym) :

a) Trapezet opdeles i et rektangel ABED og en retvinklet trekant BCE med den rette vinkel E:



Da $\angle ABC = 120°$, er $\angle CBE = 30°$. Dette benyttes, når arealet af trekanten skal bestemmes.
I en retvinklet trekant svarer de to kateter til højde og grundlinje, så man har:

$$A_{trapez} = A_{rektangel} + T_{trekant} = |AB| \cdot |AD| + \frac{1}{2} \cdot |BE| \cdot |EC| = |AB| \cdot |AD| + \frac{1}{2} \cdot |BE| \cdot \tan(\angle CBE) \cdot |BE|$$

$$A_{trapez} := 3 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot Tan(30) \cdot 4 = 16.61880215$$

Da længden af fodertruget er 15 dm langt, bliver rumfanget:

$$V := 15 \cdot A_{trapez} = 249.2820322$$

Dvs. der kan være **249,3 dm^3 vand i truget**

b) Man har brug for rumfanget udtrykt ved højden *h* af vandstanden. Dette får man ved at indsætte *h* i stedet for $|AD|$ og $|BE|$ i arealformlen for trapezet.

$$V(h) := 15 \cdot \left(3 \cdot h + \frac{1}{2} \cdot h \cdot Tan(30) \cdot h\right) :$$

Når der skal være 100 liter i fodertruget, har man altså:

$$V(h) = 100 \xrightarrow{\text{solve}} \{h = 1.881559833\}, \{h = -12.27386468\}$$

Den negative løsning forkastes, da man søger en sidelængde.
Dvs. **højden af vandstanden er 1,88 dm**

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

24. maj 2019 opgave 10: $f(x) = 4x^3 + 8x^2 + 10x + 3 \qquad P(2,100)$

a) Først bestemmes den form samtlige stamfunktioner er på:

$$F_k(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(4x^3 + 8x^2 + 10x + 3\right)dx = x^4 + \frac{8}{3}x^3 + 5x^2 + 3x + k$$

Så bestemmes k-værdien ved at udnytte, at grafen for F skal gå gennem punktet P:

$$100 = 2^4 + \frac{8}{3}\cdot 2^3 + 5\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + k \;\Leftrightarrow\; 100 = 16 + \frac{64}{3} + 20 + 6 + k \;\Leftrightarrow\; \frac{110}{3} = k$$

Dvs. $\underline{\underline{F(x) = x^4 + \frac{8}{3}x^3 + 5x^2 + 3x + \frac{110}{3}}}$

b) For at kunne bestemme en ligning for tangenten til grafen for F i punktet P, skal man finde hældningen for tangenten, dvs. differentialkvotienten i 2 (**bemærk, at det er grafen for *F* og ikke *f*, der arbejdes med**):

$$F'(x) = f(x) = 4x^3 + 8x^2 + 10x + 3$$

$$F'(2) = f(2) = 4\cdot 2^3 + 8\cdot 2^2 + 10\cdot 2 + 3 = 32 + 32 + 20 + 3 = 87$$

Hermed bliver tangentens ligning:

$$y - y_0 = a\cdot(x - x_0)$$

$$y - 100 = 87\cdot(x - 2) \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{y = 87x - 74}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

24. maj 2019 opgave 11:

restart

with(Gym) :

a) Koordinatsættene aflæses ud fra træklodsens mål og placering i koordinatsystemet: **A(10,20,0)** **B(10,0,15)** **C(0,20,15)**

b) For at kunne arbejde med punkterne indføres deres stedvektorer:

$\overrightarrow{OA} := \langle 10, 20, 0\rangle : \overrightarrow{OB} := \langle 10, 0, 15\rangle : \overrightarrow{OC} := \langle 0, 20, 15\rangle :$

For at bestemme ligningen for den plan, der indeholder trekant ABC, skal man kende en normalvektor for planen samt et punkt i planen. Som punkt kan man vælge frit blandt A, B og C. For at finde en normalvektor findes først to vektorer, der udspænder planen:

$$\overrightarrow{AB} := \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} := \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -300 \\ -150 \\ -200 \end{bmatrix}$$

Som normalvektor for planen vælges en vektor, der er modsatrettet ovenstående og nedskaleret med 50:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Som punkt i planen vælges A, og planens ligning bliver så:

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + c \cdot (z - z_0) = 0$$

$$6 \cdot (x - 10) + 3 \cdot (y - 20) + 4 \cdot (z - 0) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{6x + 3y + 4z - 120 = 0}}$$

c) Vinkel BAC bestemmes som vinklen mellem vektorerne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$:

$$\cos(\angle BAC) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$$

$$Cos(BAC) = \frac{dotP(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{len(\overrightarrow{AB}) \cdot len(\overrightarrow{AC})} \xrightarrow{\text{solve}} \{BAC = 60.05091805\}$$

Dvs. $\underline{\underline{\angle BAC = 60.05°}}$

Arealet af trekant ABC bestemmes som halvdelen af længden af krydsproduktet af to udspændende vektorer:

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{300^2 + 150^2 + 200^2} = 25\sqrt{61} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 195.2562419$$

Dvs. $\underline{\underline{T_{ABC} = 195.26\text{cm}^2}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

24. maj 2019 opgave 12:

Opgave 12

restart

with(Gym) :

$y'(t) = 360000 - 0.004 \cdot y(t)$

a) Hastigheden svarer til $y'(t)$, så hastigheden bestemmes ved at indsætte i differentialligningen, hvor man udnytter, at man kender vandmængden til $t = 0$:

$y'(0) = 360000 - 0.004 \cdot 10^7 = 320000.000$

Dvs. **til tidspunktet 0 stiger vandmængden med 320000 m^3 i timen.**

b) Først findes den partikulære løsning til differentialligningen, der passer med begyndelsesbetingelsen:

$$\left[y'(t) = 360000 - 0.004 \cdot y(t), y(0) = 10^7\right] \xrightarrow{\text{solve DE}} y(t) = 90000000 - 80000000\, e^{-\frac{t}{250}}$$

Vandmængden til tiden $t = 48$ findes ved indsættelse i forskriften:

$$y(48) = 90000000 - 80000000\, e^{-\frac{48}{250}} = 90000000 - 80000000\, e^{-\frac{24}{125}} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 2.397545052\ 10^7$$

Dvs. vandmængden i reservoiret er $\underline{\underline{2.40 \cdot 10^7 \text{m}^3}}$

24. maj 2019 opgave 13:

restart

with(Gym) :

a) Nulhypotesen er: **Sygdomsbilledet er uafhængigt af, om man er vaccineret eller ej**

På baggrund af nulhypotesen kan man udregne de forventede værdier ved først at bestemme "i alt"-værdier:

OBSERVERET	Vaccineret	Ikke-vaccineret	I alt
Lungebetændelsen type I	5	23	$5 + 23 = 28$
Lungebetændelsen type II	10	8	$10 + 8 = 18$
Ikke syg	77	61	$77 + 61 = 138$
I alt	$5 + 10 + 77 = 92$	$23 + 8 + 61 = 92$	$28 + 18 + 138 = 184$ $92 + 92 = 184$

FORVENTET	Vaccineret	Ikke-vaccineret	I alt
Lungebetændelsen type I	$\frac{28 \cdot 92}{184} = 14$	$\frac{28 \cdot 92}{184} = 14$	28
Lungebetændelsen type II	$\frac{18 \cdot 92}{184} = 9$	$\frac{18 \cdot 92}{184} = 9$	18
Ikke syg	$\frac{138 \cdot 92}{184} = 69$	$\frac{138 \cdot 92}{184} = 69$	138
I alt	92	92	184

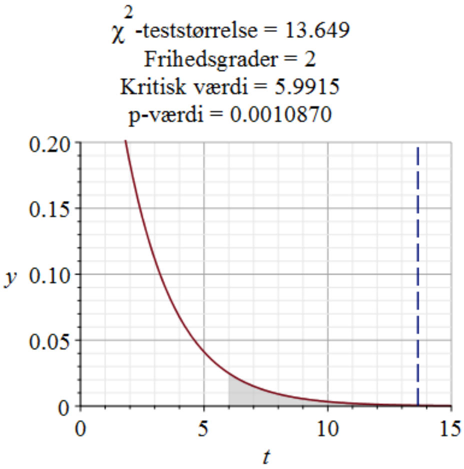
Man kan også lade Maple beregne forventede værdier:

$$M := \begin{bmatrix} 5 & 23 \\ 10 & 8 \\ 77 & 61 \end{bmatrix} :$$

$$\mathit{forventet}(M) = \begin{bmatrix} 14. & 14. \\ 9. & 9. \\ 69. & 69. \end{bmatrix}$$

b) Nulhypotesen testes på et 5% signifikansniveau, hvilket naturligvis er fastsat inden indsamlingen af data:

ChiKvadratUtest(*M*, *level* = 0.05)



Da $p - værdien$ er 0,1% og altså mindre end signifikansniveauet på 5%, **skal nulhypotesen forkastes**. Sygdomsbillederne hos de vaccinerede og ikke-vaccinerede er signifikant forskellige.

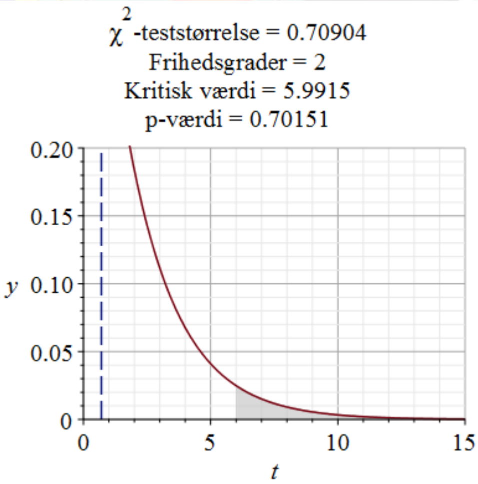
c) Hvis nulhypotesen ikke skal forkastes, skal sygdomsbillederne for de vaccinerede og ikke-vaccinerede ligge tæt på hinanden. Der er lige mange (123) i de to grupper, og der er 4 flere blandt de vaccinerede med lungebetændelse type II, så man skal have placeret i alt 4 færre i de to resterende grupper, hvilket gøres mest ligeligt med 2 færre i hver. Dvs.

	Vaccineret	**Ikke-vaccineret**
Lungebetændelsen type I	28	30
Lungebetændelsen type II	15	11
Ikke syg	80	82
I alt	123	123

Det tjekkes, at nulhypotesen ikke skal forkastes med disse værdier:

$$N := \begin{bmatrix} 28 & 30 \\ 15 & 11 \\ 80 & 82 \end{bmatrix}:$$

ChiKvadratUtest(*N*, *level* = 0.05)



Med en $p - værdi$ på 70%, hvilket er over signifikansniveauet på 5%, skal nulhypotesen ikke forkastes.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

24. maj 2019 opgave 14:

Opgave 14

$C(6, k) \qquad r = k \qquad k > 0$

a) Førsteaksen er tangent til cirklen, når afstanden fra cirklens centrum til førsteaksen er den samme som cirklens radius.
Dette er tilfældet, da centrums afstand til førsteaksen svarer til andenkoordinaten for centrum, der netop er sat lig cirklens radius.

b) $x + y - 2 = 0$

Afstanden fra centrum til linjen skal (som ovenfor) svare til cirklens radius. Man bruger afstandsformlen for punkt-linje i planen:

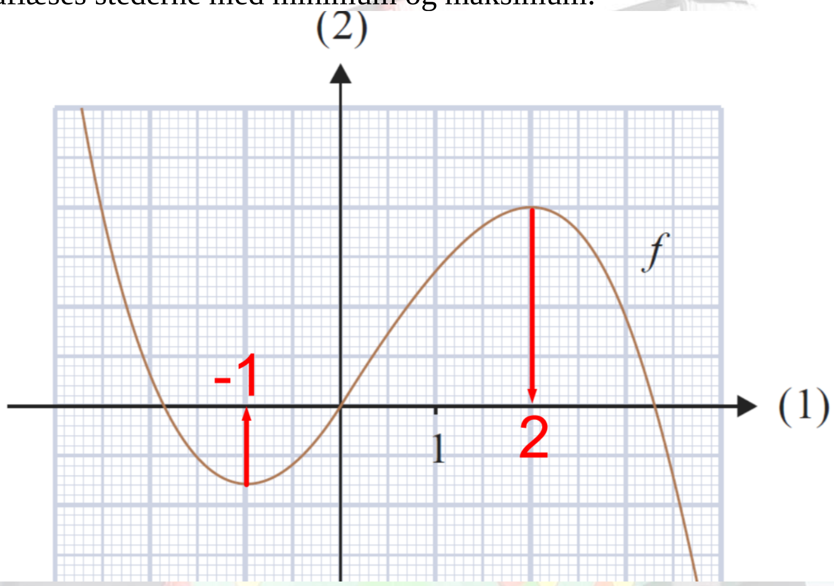
$$dist(P, l) = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$solve\left(k = \frac{|1 \cdot 6 + 1 \cdot k - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}, k\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{-2 + \sqrt{2}} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 9.656854240$$

Dvs. $\underline{\underline{k = 9.657}}$

15. august 2019: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: På grafen aflæses stederne med minimum og maksimum:



Hvis man antager, at funktionen er defineret for alle reelle tal, kan man altså se, at:
***f* er aftagende i intervallerne]-∞,-1] og [2,∞[og voksende i intervallet [-1,2]**

Opgave 2: $f(x) = a \cdot x^2 + 2x - 3 \quad P(-2,13)$

Hvis grafen skal gå gennem *P*, skal $f(-2) = 13$, dvs.

$$13 = a \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 3 \Leftrightarrow 13 = 4a - 4 - 3 \Leftrightarrow 13 = 4a - 7 \Leftrightarrow 4a = 20 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = 5}}$$

Opgave 3: $f(x) = (x^2 - 3)^4$

Det er en sammensat funktion, så kædereglen benyttes:

$$f'(x) = 2x \cdot 4 \cdot (x^2 - 3)^3 = \underline{\underline{8x \cdot (x^2 - 3)^3}}$$

Opgave 4: Hvis man vil argumentere ud fra hældninger, kan det gøres på følgende måde:

Linjen svarende til *l* har hældningen -1.

Linjen svarende til *m* har $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ som normalvektor, og dermed er $\vec{r_m} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ en retningsvektor.

Dermed har linjen svarende til *m* positiv hældning.

En retningsvektor for linjen svarende til *n* er $\vec{r_n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, dvs. hældningen er $a_n = -\frac{1}{3}$.

Da *A* har positiv hældning, **svarer *m* til *A*.**
Da *B* er mindre stejl end *C*, **svarer *n* til *B*.**
Da C er den stejleste af de to linjer med negative hældninger, **svarer *l* til *C*.**

Hvis man vil argumentere ud fra skæringen med andenaksen, kan det gøres på følgende måde:
l: Her vil linjen skære andenaksen i 7.
m: Skæringen med andenaksen findes ved at sætte førstekoordinaten til 0:

$$-2\cdot(0-3)+3\cdot(y-4)=0 \;\Leftrightarrow\; 6+3y-12=0 \;\Leftrightarrow\; y=2$$

n: $0=3+3\cdot t \;\Leftrightarrow\; t=-1$

Indsat i andenkoordinaten: $y=4-1\cdot(-1)=5$

Dvs. skæringerne på andenaksen er 2, 5 og 7, og figuren viser os altså, at:
***m* svarer til *A*, *n* svarer til *B* og *l* svarer til *C*.**

Opgave 5: $f(x)=x-2\cdot e^x \qquad P(0,3)$

Først bestemmes familien af stamfunktioner:

$$F_k(x)=\int f(x)\,dx=\frac{1}{2}x^2-2\cdot e^x+k$$

For at finde værdien af *k* udnyttes det, at grafen skal gå gennem punktet *P*:

$$3=\frac{1}{2}\cdot 0^2-2\cdot e^0+k \;\Leftrightarrow\; 3=0-2+k \;\Leftrightarrow\; k=5$$

Dvs. den søgte stamfunktion til *f* er $\underline{\underline{F(x)=\frac{1}{2}x^2-2\cdot e^x+5}}$

Opgave 6: Når begge akser tangerer cirklen, må cirklens centrum have ens første- og andenkoordinat, og desuden vil radius svare til disse koordinater, dvs. cirklens ligning bliver:

$$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$$

Da cirklen ligger i første kvadrant, er *a* et positivt tal, men det vil også følge af udregningerne, da det anvendte punkt ligger i første kvadrant.

Da punktet $P(4,2)$ ligger på cirklen, har man:

$$(4-a)^2+(2-a)^2=a^2 \;\Leftrightarrow$$
$$16+a^2-8a+4+a^2-4a=a^2 \;\Leftrightarrow$$
$$a^2-12a+20=0 \;\Leftrightarrow$$
$$(a-10)\cdot(a-2)=0 \;\Leftrightarrow$$
$$a=10 \;\vee\; a=2$$

Da radius er større end 2, har man altså
$\underline{\underline{r=10}}$

Og cirklens ligning er: $\underline{\underline{(x-10)^2+(y-10)^2=100}}$

15. august 2019: Delprøven MED hjælpemidler

Opgave 7:

15. august 2019 opgave 7:

restart

with(*Gym*) :

$AB := 10 : BC := 10 : ABC := 120 :$

a) Da man kender to sider og den mellemliggende vinkel i trekant ABC, kan man anvende en cosinusrelation:

$$Cos(ABC) = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} \xrightarrow{\text{solve}} \{AC = 17.32050808\}, \{AC = -17.32050808\}$$

Da man søger en sidelængde, forkastes den negative løsning.

$\underline{\underline{|AC| = 17.32}}$

b) $AC := 17.32050808 :$

Den 6-kantede flise består af to trekanter af typen ABC samt et rektangel med sidelængderne AB og AC.

$$A_{flise} = 2 \cdot T_{ABC} + A_{rektangel} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot Sin(ABC) + AB \cdot AC = 259.8076212$$

$\underline{\underline{A_{flise} = 259.8\,\mathrm{cm}^2}}$

15. august 2019 opgave 8:

restart

with(*Gym*) :

a) Informationerne indskrives i en matrix.

$$M := \begin{bmatrix} 10..20 & 7 \\ 20..30 & 27 \\ 30..40 & 89 \\ 40..50 & 73 \\ 50..60 & 24 \\ 60..70 & 10 \end{bmatrix} :$$

Kvartilsættet kan bestemmes med en kommando fra Gym-pakken:

$kvartiler(M) = [32.640, 39.101, 46.781]$

Kvartilbredden er altså $46.781 - 32.64 = 14.141$

Dvs. kvartilsættet er $\underline{\underline{(32.6, 39.1, 46.8)}}$ og kvartilbredden er $\underline{\underline{14.1}}$

b) Den nedre grænse for outliers er $32.640 - 1.5 \cdot 14.141 = 11.4285$

Den øvre grænse for outliers er $46.781 + 1.5 \cdot 14.141 = 67.9925$

Dvs. personer med **aldre på 11 år eller derunder og 68 år eller derover er outliers.**

15. august 2019 opgave 9

A(0,2) B(8,6)

a) En retningsvektor for linjen l gennem de to punkter er $\vec{r}_1 = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8-0 \\ 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

En anden - kortere - retningsvektor er $\vec{r} = \frac{1}{4} \cdot \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ved at benytte punktet A som punkt på linjen får man altså:

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

b) Skæring mellem de to linjer kan bestemmes med et ligningssystem bestående af tre ligninger:

$[x = 0 + 2 \cdot t,\ y = 2 + 1 \cdot t,\ 7x + 2y - 20 = 0] \xrightarrow{\text{solve}} \{t = 1, x = 2, y = 3\}$

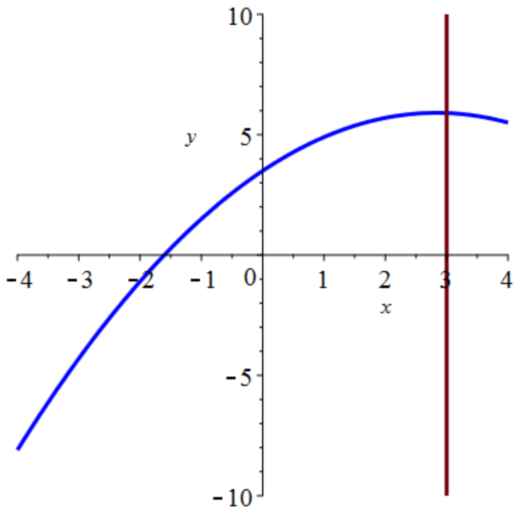
Dvs. de to linjer skærer hinanden i punktet $\underline{\underline{(2, 3)}}$

15. august 2019 opgave 10

$f(x) := -0.3 \cdot x^2 + 1.7 \cdot x + 3.5 :$

a)

$plot(f(x), x = -4..4, y = -10..10, thickness = 3, color = blue)$



Punktmængden ses at ligge i første kvadrant, og man har altså:

$$A_M = \int_0^3 f(x)\,dx = 15.45000000$$

Dvs. $\underline{\underline{A_M = 15.45}}$

b) Grænserne er de samme, når rumfanget skal bestemmes:

$$V = \int_0^3 \pi \cdot f(x)^2\,dx = 254.8742704$$

Dvs. at rumfanget af omdrejningslegemet er $\underline{\underline{254.87\text{cm}^3}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

15. august 2019 opgave 11

restart

with(*Gym*) :

$f(x) := (x^2 + x) \cdot e^{-x}$:

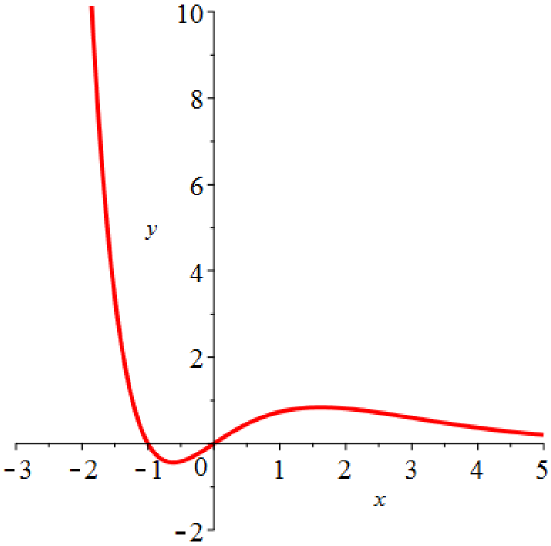
a) Først bestemmes funktionens nulpunkter med Maple:

$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = -1\}, \{x = 0\}$

Dvs. nulpunkterne er $\underline{\underline{x = -1 \ \vee \ x = 0}}$

Nulpunkterne skal fremgå af grafen, dvs. man skal vælge et passende vindue.

$plot(f(x), x = -3..5, y = -2..10, color = red, thickness = 3)$



b) Da funktionen allerede er lagt ind i Maple, kan man bestemme en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(-1, f(-1))$ ved:

$y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x - (-1)) \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = -e\,(x + 1)$

Dvs. tangentens ligning er

$\underline{\underline{y = -e \cdot x - e}}$

c) For at bestemme monotoniforholdene findes først de steder, hvor den afledede funktion er 0:

$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}, \left\{x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$

Fortegnet for den anden afledede bestemmes disse steder:

$f''\left(\frac{1.}{2} - \frac{\sqrt{5.}}{2}\right) = 4.148525387 > 0$ dvs. lokalt minimumssted

$f''\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5.}}{2}\right) = -0.4433857895 < 0$ dvs. lokalt maksimumssted

Man har altså:

f er aftagende i intervallerne]-∞,$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$] og [$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, ∞[og voksende i intervallet $\left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

15. august 2019 opgave 12

restart

with(*Gym*) :

a) Tidspunktet angives i antal år efter 1991, så man har:

$Tid := [0, 5, 10, 14, 16, 20, 22, 24, 26]:$

$Antalartikler := [4740, 5173, 5746, 6017, 6374, 6568, 6796, 6893, 7012]:$

Det er oplyst, at der er tale om en lineær sammenhæng, så der laves lineær regression.

$f(x) := LinReg(Tid, Antalartikler, x) = x \rightarrow LinReg(Tid, Antalartikler, x)$

$f(x) = 89.3703966005665\, x + 4786.13951841360$

Dvs. $\underline{\underline{a = 89 \text{ og } b = 4786}}$

$g(x) := 570000 \cdot x + 7100000:$

b) Det gennemsnitlige antal ord i artiklerne er forholdet mellem antallet af ord og antallet af artikler, dvs.

$$h(x) := \frac{g(x)}{f(x)} = x \rightarrow \frac{g(x)}{f(x)}$$

$$h(x) = \frac{570000\, x + 7100000}{89.3703966005665\, x + 4786.13951841360}$$

c) Det gennemsnitlige antal ord overstiger 3500, når $h(x) > 3500$

$solve(h(x) > 3500, x) = (-\infty, -53.55396978), (37.52469976, \infty)$

Da man kigger på tidspunkter efter 1991, forkastes den første løsning, dvs. tidspunktet er $\underline{\underline{x = 37.5}}$ (år 2029)

15. august 2019 opgave 13

restart

with(*Gym*) :

A(4,0,0) , B(0,4,0) og $C\left(2+2\sqrt{3},\, 2+2\sqrt{3},\, 0\right)$. Desuden er $D\left(x_0, x_0, 4\right)$

a) Problemstillingen kan løses ved at benytte punkt C og et af punkterne A og B. For da D har ens første- og andenkoordinat, vil A og B give samme ligning, dvs. der vil automatisk gælde $|AD| = |BD|$

Man opstiller altså ligningen svarende til, at $|AD| = |CD|$

$$\sqrt{\left(x_0-4\right)^2+\left(x_0-0\right)^2+(4-0)^2}=\sqrt{\left(x_0-\left(2+2\cdot\sqrt{3}\right)\right)^2+\left(x_0-\left(2+2\cdot\sqrt{3}\right)\right)^2+(4-0)^2}\xrightarrow{\text{solve}}\left\{x_0=\frac{2\sqrt{3}}{3}+2\right\}$$

Det er altså vist, at $\underline{\underline{D\left(2\frac{\sqrt{3}}{3}+2,\, 2\frac{\sqrt{3}}{3}+2,\, 4\right)}}$

b) Først bestemmes to vektorer, der udspænder trekanten:

$$\overrightarrow{AB} := \langle 0-4,\, 4-0,\, 0-0\rangle = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} := \left\langle 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+2-4,\, 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+2-0,\, 4-0\right\rangle = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{3}}{3}-2 \\ \frac{2\sqrt{3}}{3}+2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Arealet af trekanten er så halvdelen af længden af krydsproduktet mellem de to vektorer.

$$T=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|$$

$$T=\frac{1}{2}\cdot len\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)=\frac{8\sqrt{21}}{3}\xrightarrow{\text{at 10 digits}}12.22020185$$

Dvs. arealet er $\underline{\underline{12.22\text{m}^2}}$

c) $\overrightarrow{AD}$ er en retningsvektor for en af stængerne, og den kan altså bruges til at bestemme den søgte vinkel. Først bestemmes en vinkel mellem $\overrightarrow{AD}$ og en normalvektor for xy-planen. Som normalvektor kan enhver vektor parallel med z-aksen benyttes, så her anvendes den simple $\vec{n} := \langle 0, 0, 1\rangle$.

Vinklen bestemmes med formlen $\cos(v) = \dfrac{\overrightarrow{AD}\bullet\vec{n}}{\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}$

$$Cos(v) = \frac{dotP\left(\overrightarrow{AD}, \vec{n}\right)}{len\left(\overrightarrow{AD}\right)\cdot len\left(\vec{n}\right)}\xrightarrow{\text{solve}}\{v=39.23152048\}$$

Den spidse vinkel mellem selve planen og stangen er så:

$v_{spids} = 90 - 39.23152048 = 50.76847952$

Dvs. $\underline{\underline{v_{spids} = 50.8°}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

15. august 2019 opgave 14

$$\frac{dy}{dx} = 0.00002 \cdot y \cdot (10000 - y)$$

a) At væksthastigheden er 250 bakterier pr. time, fortæller os, at $\frac{dy}{dx} = 250$. Dvs. ligningen bliver:

$$250 = 0.00002 \cdot y \cdot (10000 - y) \xrightarrow{\text{solve}} \{y = 8535.533906\}, \{y = 1464.466094\}$$

Dvs. der **kan være enten 1464 eller 8536 bakterier i bakteriesuppen til tidspunktet $x = 40$**

b) Den partikulære løsning svarende til de 1464 bakterier bestemmes:

$$[y' = 0.00002 \cdot y \cdot (10000 - y), y(40) = 1464.466094] \xrightarrow{\text{solve DE}} y(x) = \frac{7322330470000\, e^{-8}}{4267766953\, e^{-\frac{x}{5}} + 732233047\, e^{-8}}$$

Man kan gør udtrykket pænere ved at forkorte brøken, så man får 10000 i tælleren:

$$\frac{4267766953.\, e^{-\frac{x}{5}}}{732233047\, e^{-8}} = \frac{5.828427125\, e^{-\frac{x}{5}}}{e^{-8}} \overset{\text{simplify}}{=} 5.828427125\, e^{-\frac{x}{5}+8}$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{10000}{1 + 5.82843 \cdot e^{-\frac{x}{5}+8}}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

*****. december 2019: Delprøven UDEN hjælpemidler***

<u>Opgave 1:</u>

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

****. december 2019: Delprøven MED hjælpemidler***