Løsninger til eksamensopgaver på A-niveau 2019 ny ordning

21. maj 2019: Første delprøve

Opgave 1: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t+1 \\ t^2-1 \end{pmatrix}$ $\qquad Q(7,8)$

a) Funktionsværdien bestemmes ved indsættelse af *t*-værdien:

$$\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+1 \\ 1^2-1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

b) Punktet *Q* ligger på banekurven, hvis der findes en *t*-værdi (eller flere), hvor førstekoordinaten giver 7 og andenkoordinaten 8:

$$2t+1=7 \;\Leftrightarrow\; 2t=6 \;\Leftrightarrow\; t=3$$

$$t^2-1=8 \;\Leftrightarrow\; t^2=9 \;\Leftrightarrow\; t=-3 \;\vee\; t=3$$

Da *t*-værdien 3 giver de rigtige koordinater, **ligger *Q* på banekurven**.

Opgave 2: $f(x) = 6x^2 - 2x + 1$

a) Det ubestemte integral beregnes ved ledvis integration og tilføjelse af integrationskonstant:

$$\int f(x)\,dx = \underline{\underline{2x^3 - x^2 + x + k}}$$

b) Det er oplyst, at der i første kvadrant dannes en punktmængde, dvs. man behøver ikke at gøre rede for det, men hvis man skal argumentere for det, kan man gøre det ved at henvise til, at grafen for *f* er en parabel med grenene opad og en negativ diskriminant (dvs. ingen skæringer med førsteaksen).
Da grafen ligger over førsteaksen, bestemmes arealet af *M* som værdien af det bestemte integral, hvor grænserne er bestemt af de to lodrette linjer, der afgrænser punktmængden.

$$A_M = \int_1^3 f(x)\,dx = \left[2x^3 - x^2 + x\right]_1^3 = \left(2\cdot 3^3 - 3^2 + 3\right) - \left(2\cdot 1^3 - 1^2 + 1\right) =$$

$$(54-9+3)-(2-1+1) = 48-2 = \underline{\underline{46}}$$

Opgave 3: $f(x) = \sin(x) \quad , \quad g(x) = \sin(x) + 2 \quad , \quad h(x) = 2\cdot\sin(x) + 2$

$\sin(0) = 0$, så grafen for *f* går gennem origo.

Dvs. grafen *C* hører til funktion *f*

Sinusfunktionen antager værdier i intervallet [-1,1], så funktionsværdierne for *g* vil ligge i intervallet [1,3], mens funktionsværdierne for *h* vil ligge i intervallet [0,4].

Dvs. grafen *A* hører til funktionen *h*, og grafen *B* hører til funktionen *g*.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>*Opgave 4:*</u> $\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot (y-1) \quad P(2,5)$

a) For at bestemme en ligning for en tangent skal man kende røringspunktets koordinater samt tangentens hældning. Koordinaterne kendes allerede. Hældningen bestemmes ved at indsætte punktets koordinater i differentialligningen:

$$\frac{dy}{dx} = 2^2 \cdot (5-1) = 4 \cdot 4 = 16$$

Tangentens ligning bestemmes ved indsættelse i $y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$

$$y - 5 = 16 \cdot (x-2) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 16x - 27}}$$

<u>*Opgave 5:*</u> $f(x) = (x+2)\cdot(x-5)\cdot e^x$

a) $f(0) = (0+2)\cdot(0-5)\cdot e^0 = 2\cdot(-5)\cdot 1 = \underline{\underline{-10}}$

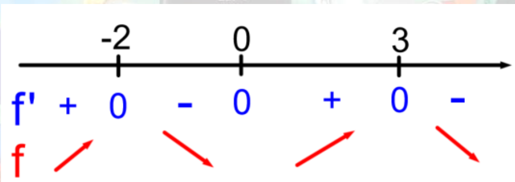
b) Ligningen $f(x) = 0$ løses ved hjælp af nulreglen:

$$0 = (x+2)\cdot(x-5)\cdot e^x \Leftrightarrow$$

$$x+2=0 \ \vee \ x-5=0 \ \vee \ e^x = 0 \Leftrightarrow$$

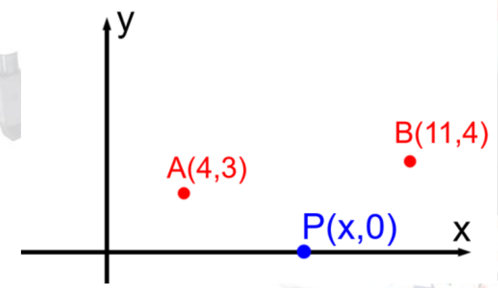
$$\underline{\underline{x=-2 \ \vee \ x=5}}$$

<u>*Opgave 6:*</u> Monotoniforholdene bestemmes ved at udnytte, at funktionen er voksende, når den afledede funktion er positiv, og aftagende, når den afledede funktion er negativ.
På grafen aflæses, at nulpunkterne for den afledede funktion er -2, 0 og 3, samt at fortegnsskemaet for den afledede funktion er:



Dvs. ***f* er voksende i intervallerne [-3,-2] og [0,3], og aftagende i intervallerne [-2,0] og [3,4]**

<u>*Opgave 7:*</u> *P*'s førstekoordinat må nødvendigvis ligge i intervallet [4,11].



Da afstandene fra *P* til punkterne *A* og *B* er ens, har man:

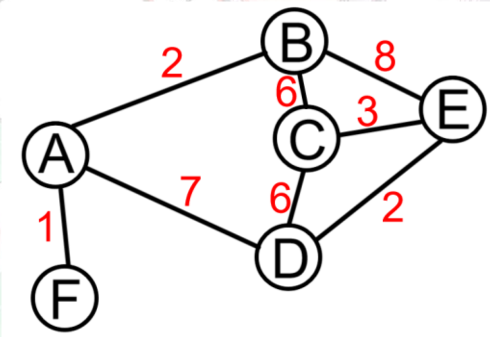
$$|AP| = |BP| \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{(11-x)^2 + (4-0)^2} \Leftrightarrow$$

$$(x-4)^2 + (3-0)^2 = (11-x)^2 + (4-0)^2 \Leftrightarrow x^2 + 16 - 8x + 9 = 121 + x^2 - 22x + 16 \Leftrightarrow$$

$$14x = 112 \Leftrightarrow x = \frac{112}{14} = \underline{\underline{8}}$$

Opgave 8: a) For at kunne tegne den vægtede graf skal man bemærke, at man fra A skal kunne komme til B, D og F. Fra B til A, C og E. Fra C til B, D og E. Fra D til A, C og E. Fra E til B, C og D. Fra F til A.

F skal derfor placeres for enden med forbindelse til A, og E skal placeres modsat F, da den ikke fører til hverken A eller F:



b) Dijkstra-tabellen udfyldes ved at følge Dijkstras algoritme:

Hjørne	A	B	C	D	E	F
Korteste sti til F	1	3	9	8	10	0
Sidst besøgte hjørne	F	A	B	A	D	
Status	P	P	P	P	P	P

Dvs. at den hurtigste rute (10 minutter) er : F →A→D→E

Opgave 9: a) Når $f(t)$ angiver vandbadets temperatur (når temperaturen måles i °C) og t tidspunktet, så kan væksthastigheden betegnes med $\frac{df}{dt}$.

Forskellen mellem omgivelsernes temperatur (22°C) og vandbadets er: $22 - f(t)$

Da væksthastigheden er proportional med denne forskel med proportionalitetsfaktoren $0{,}01s^{-1}$, får man differentialligningen:

$$\frac{df}{dt} = 0{,}01s^{-1} \cdot (22 - f(t))$$

Det bemærkes, at enheden på proportionalitetskonstanten giver lidt enhedsforstyrrelse, da tidspunktet er i minutter, mens væksthastigheden bliver pr. sekund.

Når temperaturen er 50°C, får man:

$$\frac{df}{dt} = 0{,}01s^{-1} \cdot (22 - 50)°C = \underline{\underline{-0{,}28\frac{°C}{s}}}$$

Dvs. at vandbadets temperatur falder med 0,28°C pr. sekund, når temperaturen er 50°C.

b) Der er allerede argumenteret for $\underline{\underline{\frac{df}{dt} = 0{,}01s^{-1} \cdot (22 - f(t))}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

21. maj 2019: Anden delprøve

21. maj 2019 opgave 10:

$f(x) := \left(e^x - 1\right)\cdot(4 - x)$:

a) Det er delvist angivet på grafen, at nulpunkterne for funktionen (og dermed grænserne for det bestemte integral) er 0 og 4, men man kan også se det ved at lade Maple løse $f(x) = 0$ eller selv løse ligningen med nulreglen:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \vee 4 - x = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \vee 4 = x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$

Når man kender grænserne, kan rumfanget af omdrejningslegemet bestemmes:

$$V = \int_0^4 \pi \cdot f(x)^2 \, dx = \frac{757\,\pi}{12} + \frac{\pi\, e^8}{4} - 4\,\pi\, e^4 \xrightarrow{\text{at 20 digits}} 1853.3204765766069570$$

Dvs. $\underline{\underline{V = 1853.32}}$

b) En stamfunktion til f bestemmes med Maple (eller partiel integration), og derefter tilføjer man selv integrationskonstanten:

$$\int f(x)\, dx = -4\,x + \frac{x^2}{2} - e^x\, x + 5\, e^x$$

$F_k(x) := -4\,x + \frac{x^2}{2} - e^x\, x + 5\, e^x + k$:

Konstanten bestemmes ved at udnytte, at grafen skal gå gennem punktet (0,0):

$solve\left(F_k(0) = 0, k\right) = -5$

Dvs. den søgte stamfunktion er: $\underline{\underline{F(x) = -4\,x + \frac{x^2}{2} - e^x\, x + 5\, e^x - 5}}$


Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

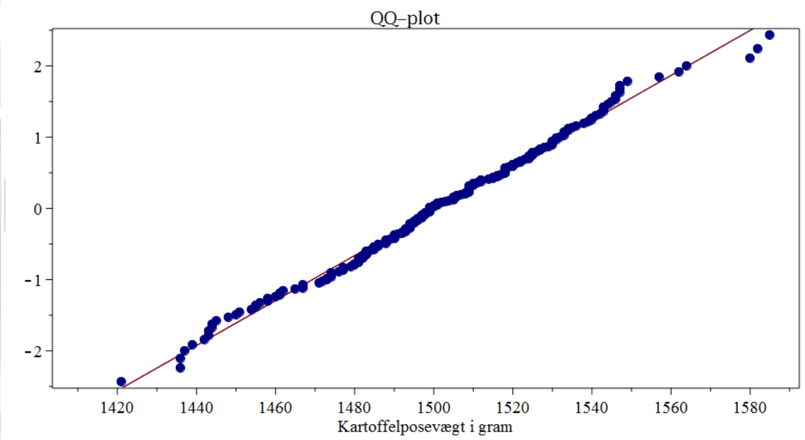
21. maj 2019 opgave 11:

a) Hele talsøjlen kopieres fra Excel til Maple (der er ingen decimaltal, så det er ikke nødvendigt at udskifte komma med punktum med 'søg' og 'erstat'). De gemmes under *kartofler* (en lille del af søjlen ses nedenfor):

$$kartofler := \begin{bmatrix} 1492 \\ 1493 \\ 1546 \\ 1502 \\ 1518 \\ 1489 \\ 1479 \end{bmatrix}:$$

For at undersøge, om posernes vægt er normalfordelt, kan man enten gruppere datasættet og anvende *normReg*, eller man kan som vist her direkte lave et *QQ-plot* med Gym-pakken:

$$QQplot(kartofler)$$



Da punkterne i QQ-plottet med god tilnærmelse danner en ret linje, er posernes vægt tilnærmelsesvis normalfordelt.

b)

Da det er en stikprøve, skal man anvende stikprøveestimater, og derfor anvendes Gym-pakkens kommando *standardafvigelse* til at finde spredningen.

$middel(kartofler) = 1500.940000$

$standardafvigelse(kartofler) = 31.6394004046268$

$\underline{\underline{E(X) = 1501}}$ og $\underline{\underline{\sigma(X) = 31.6}}$

c) Man kan benytte Gym-pakkens *normalcdf*, der angiver fordelingsfunktionens værdi, hvilket netop er $P(X < 1450)$ (det spiller ingen rolle, om der anvendes skarpt eller svagt ulighedstegn i en kontinuert fordeling):

$$normalcdf(1500.94,\ 31.6394004046268,\ 1450) = 0.0536969777$$

Dvs. sandsynligheden er $\underline{\underline{5.4\ \%}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

21. maj 2019 opgave 12:

a) G_1 **er en Eulergraf, da der fra samtlige hjørner udgår et lige antal kanter A (4), B (2), C(4), D(2), E(2) og F(4).**
Man kan også argumentere med, at der findes en Euler-cyklus, dvs. en Euler-tur, der begynder og ender samme sted, f.eks. A-B-C-A-F-C-D-F-E-A (her er alle kanter benyttes netop én gang).

b) En Euler-tur i G_2 kræver, at man anvender *D* som begyndelsespunkt og *E* som endepunkt (eller omvendt), da der fra disse to hjørner udgår et ulige antal kanter (3 fra hver). En mulig Euler-tur er:
D-E-F-D-C-F-A-C-B-A-E

21. maj 2019 opgave 13:

$\overrightarrow{OA} := \langle 2, 2\rangle : \overrightarrow{OB} := \langle 18, 10\rangle : \overrightarrow{OC} := \langle 13, 1\rangle :$

$\vec{r}(t) := (1-t)^2\cdot\overrightarrow{OA} + 2\cdot(1-t)\cdot t\cdot\overrightarrow{OB} + t^2\cdot\overrightarrow{OC} = t \rightarrow (1-t)^2\,\overrightarrow{OA} + (2-2\,t)\,t\,\overrightarrow{OB} + t^2\,\overrightarrow{OC}$

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} 2\,(1-t)^2 + 18\,(2-2\,t)\,t + 13\,t^2 \\ 2\,(1-t)^2 + 10\,(2-2\,t)\,t + t^2 \end{bmatrix} \overset{\text{simplify}}{=} \begin{bmatrix} -21\,t^2 + 32\,t + 2 \\ -17\,t^2 + 16\,t + 2 \end{bmatrix}$$

a) Stedvektorerne og vektorfunktionen er indtastet i Maple, og her kan man aflæse koordinatfunktionerne til $\underline{\underline{x(t) = -21\,t^2 + 32\,t + 2}}$ og $\underline{\underline{y(t) = -17\,t^2 + 16\cdot t + 2}}$

b) Funktionsværdien for den afledede funktion i 0 bestemmes:

$$\vec{r}\,'(0) = \begin{bmatrix} 32 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Vektoren $\overrightarrow{AB}$ bestemmes ud fra stedvektorerne:

$$\overrightarrow{AB} := \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 16 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Man kan se på koordinaterne, at de to vektorer er parallelle, da $\overrightarrow{AB}$ bare er hastighedsvektoren nedskaleret med en faktor 2. Men man kan også vise det ved en udregning ved at se, at determinanten af vektorparret giver 0:

$det\left(\overrightarrow{AB}, \vec{r}\,'(0)\right) = det\left(\begin{bmatrix} 16 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 32 \\ 16 \end{bmatrix}\right) = 0$ dvs. $\vec{r}\,'(0)$ **er parallel med** $\overrightarrow{AB}$

c) De afledede funktioner gemmes i Maple:

$xmærke(t) := -42\cdot t + 32 :$

$ymærke(t) := -34\cdot t + 16 :$

Så kan længden bestemmes:

$$\int_0^{1.} \sqrt{xmærke(t)^2 + ymærke(t)^2}\;\mathrm{d}t = 17.32052264$$

$\underline{\underline{l_{Bezier-kurve} = 17.32}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

21. maj 2019 opgave 14:

restart

with(Gym) :

$f(x, y) := 100 \cdot x^{0.6} \cdot y^{0.4} - 250 \cdot x - 0.1 \cdot y :$

a) Med 2000 arbejdstimer og 100000 kr. investeret i maskiner fås:

$f(2000, 100000) = 446352.4998$

Dvs. **overskuddet er 446352 kr.**

b) De partielt afledede bestemmes:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{60.0\, y^{0.4}}{x^{0.4}} - 250$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{40.0\, x^{0.6}}{y^{0.6}} - 0.1$$

Så kan gradienten bestemmes:

$$\left(\frac{60.0 \cdot 100000^{0.4}}{2000^{0.4}} - 250, \frac{40.0 \cdot 2000^{0.6}}{100000^{0.6}} - 0.1 \right) = 36.9057499, 3.725409999$$

Så gradienten er $\underline{\underline{(36.9, 3.73)}}$

Dvs. at når der bruges 2000 arbejdstimer og investeres 100000 kr. i maskiner, **vil overskuddet fra produktionen stige med 36,9 kr. for hver ekstra arbejdstime, der bruges, og med 3,7 kr. for hver krone, der investeres ekstra i maskiner.**

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

21. maj 2019 opgave 15:

$y' = a \cdot y^2 + b \cdot y + c$

Udtrykket på højresiden er et andengradspolynomium, så der skal laves polynomiumsregression.

a) $Befolkningstal := [449, 498, 554, 621, 697, 782, 870, 960, 1053, 1144, 1231, 1309]:$

$Befolkningstilvækst := [8, 9.8, 11.2, 13.4, 15.2, 17, 17.6, 18, 18.6, 18.2, 17.4, 15.6]:$

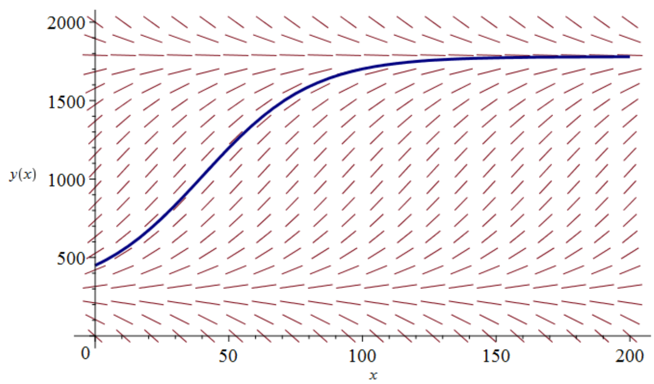
$f(x) := PolyReg(Befolkningstal, Befolkningstilvækst, 2, x):$

$$f(x) = -0.0000322294661317991\, x^2 + 0.0658427111485072\, x - 15.1028134347860$$

Dvs. $\underline{\underline{a = -3.22 \cdot 10^{-5}}}$, $\underline{\underline{b = 0.0658}}$ og $\underline{\underline{c = -15.1}}$

b) Med Gym-pakkens *linjeelementer* eller *hældningsfelt* kan man tegne et hældningsfelt ved at angive differentialligningen, og man kan få løsningskurven for den partikulære løsning med ved at angive et punkt på denne. Da man skal angive udviklingen efter 1960, og der i 1960 var 449 millioner, har man punktet (0,449), hvilket er indsat til sidst i kommandoen:

$$linjeelementer\big(y'(x) = -0.0000322294661317991 \cdot y^2 + 0.0658427111485072 \cdot y - 15.102813434786,\ y,\ x = 0..200,\ y = 0..2000,\ [y(0) = 449]\big)$$



c)

Den partikulære løsning svarende til $y(0) = 449$ bestemmes og gemmes som g:

$$[y'(t) = -0.0000322294661317991\, y(t)^2 + 0.0658427111485072\, y(t) - 15.1028134347860,\ y(0) = 449.] \xrightarrow{\text{solve DE}}$$

$$y(t) = -\frac{1}{481073157442722175679828764356126746979741 9}\Bigg(2000\Bigg(-164606777871268\sqrt{14926500968878068964362340509} + 14926500968878068964362340509 \tanh\Bigg(\frac{1}{7463250484439034482181170254500000000000000 0}\Bigg(\Bigg(5000000000000000\sqrt{14926500968878068964362340509}\, \operatorname{arctanh}\Bigg(\frac{18450325281075804 1\sqrt{14926500968878068964362340509}}{2985300193775613792872468101800 0}\Bigg) - 14926500968878068964362340509\, t\Bigg)\sqrt{14926500968878068964362340509}\Bigg)\Bigg)\Bigg)\sqrt{14926500968878068964362340509}\Bigg)$$

$$\xrightarrow{\text{at 10 digits}} y(t) = 1021.467605 - 758.1513119 \tanh(0.9846773683 - 0.02443481203\, t)$$

$g(t) := 1021.467605 - 758.1513119 \tanh(0.9846773683 - 0.02443481203\, t):$

Modellen er en voksende funktion, men væksthastigheden går mod 0, og Maple kan beregne grænseværdien ved grænseovergangen $t \to \infty$:

$$\lim_{t \to \infty} g(t) = 1779.618917$$

Dvs. **det maksimale befolkningstal i Indien er 1780 millioner.**

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

15. august 2019: Første delprøve

<u>*Opgave 1:*</u> På første led anvendes første kvadratsætning, mens der ganges ind i parentes i andet led:

$$(x+2y)^2 - 2y\cdot(y+2x) = x^2 + 4y^2 + 4xy - 2y^2 - 4xy = \underline{\underline{x^2 + 2y^2}}$$

<u>*Opgave 2:*</u> Når man skal finde antallet af mulige menuer med et fastsat antal retter, skal man anvende multiplikationsprincippet, da man f.eks. **både** skal have forret **og** hovedret **og** dessert.

Antallet af menuer med to retter er:

$$A_{2-retters-menu} = A_{hovedret}\cdot A_{dessert} = 4\cdot 5 = 20$$

Antallet af menuer med tre retter er:

$$A_{3-retters-menu} = A_{forret}\cdot A_{hovedret}\cdot A_{dessert} = 3\cdot 4\cdot 5 = 60$$

Der er altså 80 forskellige menuer, der trækkes lod iblandt. Heraf er 60 3-retters menuer, så sandsynligheden for at trække en 3-retters menu er:

$$p = \frac{Antal\ gunstige}{Antal\ mulige} = \frac{60}{80} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

<u>*Opgave 3:*</u> $f(x) = x^2\cdot e^x$

a) Funktionen differentieres med anvendelse af produktreglen:

$$f'(x) = 2x\cdot e^x + x^2\cdot e^x = \underline{\underline{x\cdot e^x\cdot(2+x)}}$$

b) Ligningen $f'(x)=0$ kan løses med nulreglen, da funktionsudtrykket er et produkt:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x\cdot e^x\cdot(2+x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee e^x=0 \vee 2+x=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=0 \vee x=-2}}$$

<u>*Opgave 4:*</u> $\int_0^2 (3x^2+4x+3)\,dx = \left[x^3+2x^2+3x\right]_0^2 = (2^3+2\cdot 2^2+3\cdot 2)-(0^3+2\cdot 0^2+3\cdot 0) = 8+8+6 = \underline{\underline{22}}$

<u>*Opgave 5:*</u> Prims algoritme anvendes med udgangspunkt i A:

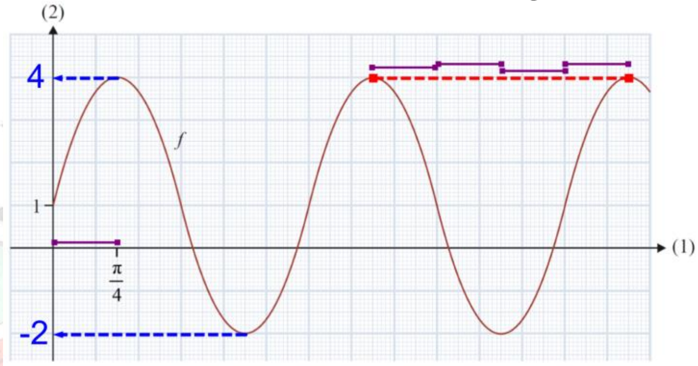
1) Fra *A* er den billigste rute til *D* (koster 6 tusinde kroner)
2) Fra *A-D* er den billigste rute *D-B* (pris: 5)
3) Fra *A-D-B* er den billigste rute *D-C* (pris: 12)
4) Fra *A-D-B-C* er den billigste rute *C-H* (pris: 5)
5) Fra *A-D-B-C-H* er den billigste rute *A-E* (pris: 13)
6) Fra *A-D-B-C-H-E* vælges *E-F* (pris: 8)
7) Fra *A-D-B-C-H-E-F* vælges *F-G* (pris: 7)

Den samlede, billigste pris bliver altså $5+6+12+5+13+8+7=56$, dvs. **56.000 kr.**

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>Opgave 6:</u> $f(x) = A \cdot \sin(b \cdot x) + c$

Amplituden A er halvdelen af forskellen mellem den mindste og den største værdi.



På figuren aflæses $f_{max} = 4$ og $f_{min} = -2$.

Dvs. $A = \dfrac{f_{max} - f_{min}}{2} = \dfrac{4-(-2)}{2} = \dfrac{6}{2} = \underline{\underline{3}}$

Den lodrette forskydning c er gennemsnittet af mindste og største værdi:

$$c = \frac{f_{max} + f_{min}}{2} = \frac{4+(-2)}{2} = \frac{2}{2} = \underline{\underline{1}}$$

Vinkelfrekvensen b findes ved på grafen at aflæse, at perioden (afstanden fra top til top markeret med den røde stiplede linje) svarer til fire gange det stykke (lilla stykke), der er angivet til at have længden $\dfrac{\pi}{4}$, dvs. perioden er $T = 4 \cdot \dfrac{\pi}{4} = \pi$.

Hermed kan b findes:

$$T = \frac{2\pi}{b} \Leftrightarrow b = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = \underline{\underline{2}}$$

Hvis man ikke kan huske formlen for sammenhængen mellem b og T, kan man ræsonnere sig frem til, at da der står $\sin(b \cdot x)$, vil man gennemføre én svingning, hver gang $b \cdot x$ øges med $2 \cdot \pi$.

<u>Opgave 7:</u> $y' = 0,5 \cdot y \qquad P(0,6)$

a) For at kunne angive linjeelementer har man også brug for at kende tangenthældningen i punktet P, og den bestemmes ved indsættelse i differentialligningen:
$y' = 0,5 \cdot 6 = 3$
Dvs. linjeelementet er $\underline{\underline{(0,6;3)}}$.
Dvs. at tangenten til grafen for *f* i punktet *P* har hældningen 3.

b) Det er en standarddifferentialligning (nr. 176 i formelsamlingen), og den fuldstændige løsning er $f(x) = c \cdot e^{0,5 \cdot x}$.
Koordinaterne til P benyttes til at bestemme konstanten c:
$6 = c \cdot e^{0,5 \cdot 0} \Leftrightarrow 6 = c \cdot 1 \Leftrightarrow c = 6$
Dvs. $\underline{\underline{f(x) = 6 \cdot e^{0,5 \cdot x}}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>*Opgave 8:*</u> $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} t^2-4 \\ t-3 \end{pmatrix}$

Skæring med *x*-aksen svarer til $y=0$, dvs. $t-3=0 \Leftrightarrow t=3$

$$\vec{r}(3)=\begin{pmatrix} 3^2-4 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Skæring med *y*-aksen svarer til $x=0$, dvs. $t^2-4=0 \Leftrightarrow t^2=4 \Leftrightarrow t=-2 \vee t=2$

$$\vec{r}(-2)=\begin{pmatrix} 0 \\ -2-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(2)=\begin{pmatrix} 0 \\ 2-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dvs. de tre skæringspunkter med koordinatsystemets akser er $\underline{\underline{(0,-5),\ (0,-1) \text{ og } (5,0)}}$

<u>*Opgave 9:*</u> $\mu=0,4 \qquad n=4$

a) Da middelværdien er givet ved $\mu=n\cdot p$, har man

$$p=\frac{\mu}{n}=\frac{0,4}{4}=\underline{\underline{0,1}}$$

Sandsynligheden kan beregnes med formlen for binomialfordelingen (252 i formelsamlingen):

$$P(X=2)=K(4,2)\cdot p^2\cdot(1-p)^{4-2}=\frac{4!}{2!\cdot(4-2)!}\cdot 0,1^2\cdot 0,9^2=\frac{24}{2\cdot 2}\cdot 0,01\cdot 0,81=6\cdot 0,0081=\underline{\underline{0,0486}}$$

b) Spredningen bestemmes med formel 254 fra formelsamlingen:

$$\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}=\sqrt{4\cdot 0,1\cdot 0,9}=\sqrt{0,36}=\underline{\underline{0,6}}$$

<u>*Opgave 10:*</u> $f(x)=(a\cdot x+b)^2 \quad , \quad b<0 \quad , \quad f'(0)=2\cdot b \qquad f(1)=4$

Først bestemmes den afledede funktion af *f*, og det bemærkes, at der er tale om en sammensat funktion, hvor den indre funktion svarer til udtrykket inden i parentesen:

$$f'(x)=(a\cdot x+b)'\cdot 2\cdot(a\cdot x+b)^{2-1}=2a\cdot(a\cdot x+b)$$

Da $f'(0)=2\cdot b$ har man:

$$2a\cdot(a\cdot 0+b)=2\cdot b \Leftrightarrow 2a\cdot b=2b \Leftrightarrow \underline{\underline{a=1}}$$

Da $f(1)=4$, har man:

$$(a\cdot 1+b)^2=4 \Leftrightarrow (1\cdot 1+b)^2=4 \Leftrightarrow (b+1)^2=4 \Leftrightarrow b+1=-2 \vee b+1=2 \Leftrightarrow b=-3 \vee b=1$$

Da det er oplyst, at *b* er negativ, forkastes den sidste løsning, dvs.

$\underline{\underline{b=-3}}$

15. august 2019: Anden delprøve

Opgave 11: a) Graden af et hjørne er defineret som antallet af kanter, der udgår fra et hjørne, så man har:

$$\underline{\underline{grad(A)=2 \quad grad(B)=3 \quad grad(C)=2 \quad grad(D)=1 \quad grad(E)=4 \quad grad(F)=4 \quad grad(G)=2 \quad grad(H)=2}}$$

b) I en lukket Eulertur skal alle kanter gennemløbes netop én gang, og man skal begynde og slutte i samme punkt. Man kan se, at det ikke kan lade sig gøre ved at se på punkt *D*. Man kan ikke få punkt *D* med på en tur uden at gennemløbe kanten *DE* to gange.

c) Der udgår et ulige antal kanter fra *B* (graden er 3). Hver gang et hjørne passeres på en tur, anvender man to kanter – en til at komme til punktet og en til at forlade det – så man kan ikke passere punkt *B* to gange, da der efter en passage kun er én kant tilbage. Dermed skal punktet *B* ligge først eller sidst på ruten, så man enten forlader det fra start eller kommer til det til sidst.

d) Hvis man begynder i *B*, skal man nødvendigvis slutte i *D* (og omvendt), da begge hjørner har ulige grader. Nogle eksempler på Eulerture er:

$B-A-F-B-C-E-F-G-H-E-D$

$D-E-F-G-H-E-C-B-A-F-B$

$B-C-E-F-A-B-F-G-H-E-D$

Opgave 12: a) Middelværdien er 5 kg og spredningen 0,11 kg. Normale udfald i en normalfordeling er udfald, der ligger inden for to spredninger i forhold til middelværdien.

$\mu-2\cdot\sigma=5\,\text{kg}-2\cdot 0{,}11\,\text{kg}=4{,}78\,\text{kg}$

Da vægten på posen er 4,85 kg og altså ligger mellem middelværdien og den nedre grænse for normale udfald, **er det et normalt udfald.**

b) Tæthedsfunktionen for normalfordelingen er:

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}:$$

$\mu := 10:$

Da det er oplyst, at 10% af poserne vejer mindre end 9,8 kg, dvs. $P(X\leq 9.8)=0.1$, har man:

$$fsolve\left(\int_{-\infty}^{9.8} f(x)\,dx=0.1,\ \sigma\right)=0.1560608292$$

Dvs. $\underline{\underline{\sigma=0.156\text{ kg}}}$

Man kan også bruge Gym-pakkens *normalcdf* :

$with(Gym):$

$fsolve(normalcdf(10,\sigma,9.8)=0.1,\ \sigma)=0.1560608292$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>*Opgave 13:*</u> $\overrightarrow{OP}(t)=\begin{pmatrix}65\cdot t\\ -4{,}91\cdot t^2+37{,}5\cdot t+1{,}8\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{OG}(t)=\begin{pmatrix}141-29\cdot t\\ 46\end{pmatrix}$

$restart$

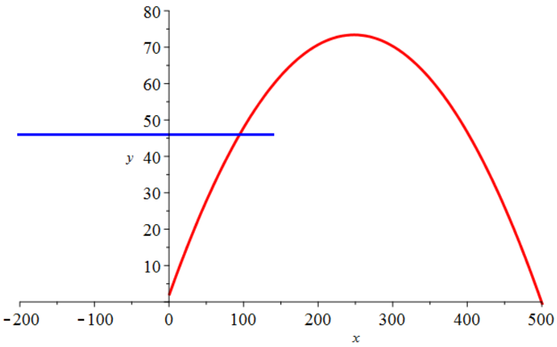
$with(Gym):$

$OP(t) := \langle 65\cdot t, -4.91\cdot t^2+37.5\cdot t+1.8\rangle :$

$OG(t) := \langle 141-29\cdot t, 46\rangle :$

a) De to banekurver tegnes med starttiden 0. Pilespidsen tegnes rød, og gåsens position er blå.

$plot([[OP(t)_1, OP(t)_2, t=0..8],[OG(t)_1, OG(t)_2, t=0..15]], x=-200..500, y=0..80, color=[red, blue], thickness=3)$



b) Farten er længden af hastighedsvektoren, og hastigheden er den afledede af stedvektoren:

$v=|\overrightarrow{OP}'(t)|$

$v=len(OP'(1)) = 70.64830076$

Dvs. farten er $\underline{\underline{70.6\frac{\text{m}}{\text{s}}}}$

c) Svaret må være 'nej', da man ikke ville kunne svare 'ja', fordi man mangler en tredje koordinat for at kunne beskrive situationen rigtigt. For selvom højden over jorden passer, kan jægeren stadig godt skyde forbi gåsen. Vi kan kun undersøge, om jægeren skyder under eller over gåsen.

Men nu til opgaveløsningen:

For at afgøre, om pilespidsen rammer gåsen, ses på, hvor højt pilen er oppe til det tidspunkt, hvor deres x-koordinater er ens:

$65\cdot t=141-29\cdot t \xrightarrow{\text{solve for t}} \left[\left[t=\frac{3}{2}\right]\right]$

Pilespidsens højde til dette tidspunkt er:

$OP\left(\frac{3}{2}\right)_2 = 47.00250000$

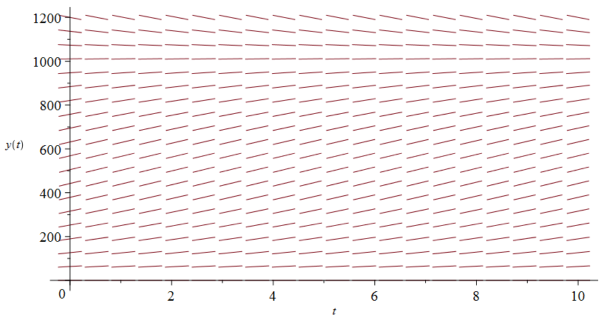
Dvs. pilespidsen er 1 m over gåsen, **så gåsen bliver ikke ramt.**

<u>*Opgave 14:*</u> $\frac{dy}{dt}=0{,}23\cdot y\cdot\left(1-\frac{y}{1073}\right)-s\cdot y$

$with(Gym):$

a) Et hældningsfelt kan tegnes med kommandoen *linjeelementer*:

$linjeelementer\left(y'(t)=0.23\cdot y(t)\cdot\left(1-\frac{y(t)}{1073}\right)-0.01\cdot y(t), y(t), t=0..10, y=0..1200\right)$



b) Differentialligningen løses med begyndelsesbetingelsen $y(0) = 900$:

$$\left[y'(t) = 0.23 \cdot y(t) \cdot \left(1 - \frac{y(t)}{1073}\right) - 0.01 \cdot y(t),\ y(0) = 900\right] \xrightarrow{\text{solve DE}} y(t) = \frac{10622700}{10350 + 1453\,e^{-\frac{11\,t}{50}}}$$

Dvs. $y(t) = \dfrac{10622700}{10350 + 1453\,e^{-\frac{11\,t}{50}}}$

c) Hvis bestanden skal holdes konstant, skal væksthastigheden være 0, dvs. $\frac{dy}{dt} = 0$.

Dette skal ske, når $y = 900$. Hermed kan differentialligningen benyttes til at bestemme s:

$$0 = 0.23 \cdot 900 \cdot \left(1 - \frac{900}{1073}\right) - s \cdot 900 \xrightarrow{\text{solve for s}} [[s = 0.03708294501]]$$

Dette er andelen af rensdyr, der skal skydes, og da antallet af rensdyr er 900, svarer disse 3,7% til:
$900 \cdot 0.03708294501 = 33.37465051$

Dvs. **der skal skydes 33375 rensdyr om året.**

Opgave 15:

with(*Gym*) :

a) Modellen er $\frac{1}{v} = a \cdot \frac{1}{s} + b$, så man har brug for at lave lineær regression på de reciprokke værdier.

Først indtastes data på almindelig vis i lister, hvorefter man med en 'tilde' laver lister med reciprokke værdier.

Substratkoncentration := [1, 2.5, 3.1, 5.4, 10.7, 12.3, 15.2, 21] :

Initialhastighed := [0.028, 0.061, 0.072, 0.105, 0.152, 0.161, 0.175, 0.195] :

reciproksubstrat := *Substratkoncentration*$^{\sim -1}$: =

reciprokinitial := *Initialhastighed*$^{\sim -1}$:

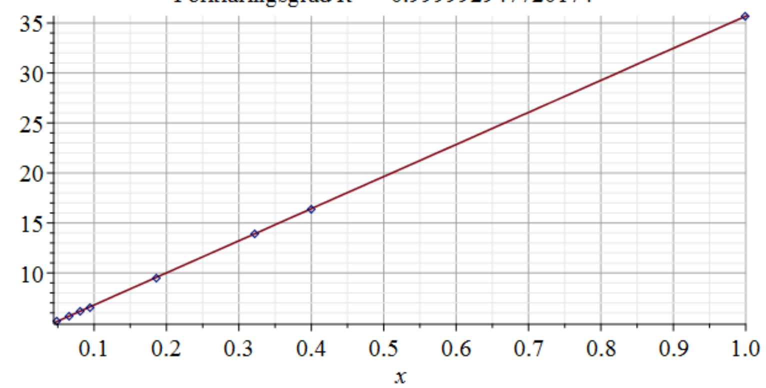
reciproksubstrat = $\left[1, 0.4000000000, 0.3225806452, 0.1851851852, 0.09345794393, 0.08130081301, 0.06578947368, \frac{1}{21}\right]$

reciprokinitial = [35.71428571, 16.39344262, 13.88888889, 9.523809524, 6.578947368, 6.211180124, 5.714285714, 5.128205128]

Så laves lineær regression:

LinReg(*reciproksubstrat*, *reciprokinitial*)

Lineær regression
$y = 32.109\,x + 3.5805.$
Forklaringsgrad $R^2 = 0.999992947720174$



Punkterne danner med meget god tilnærmelse en ret linje, så det er passende med en lineær model.
Fra ligningen aflæses:
$a = 32.109$ og $b = 3.58$

b) Når substratkoncentrationen er 7,0 mM, får man ligningen

$$\frac{1}{v} = 32.109 \cdot \frac{1}{7.0} + 3.5805 \xrightarrow{\text{solve for v}} [[v = 0.1224364861]]$$

Dvs. så er initialhastigheden $v = 0.122\,\frac{\text{mM}}{\text{s}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 16: Forskriften for en parabel er $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Parablen er indlagt, så den skærer i origo, og da konstanten c angiver skæringen med andenaksen, har man altså $c = 0$.

Dvs. forskriften er:

$f(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x :$

Da vinduet er 3,7 m bredt, skærer parablen førsteaksen i 3,7, dvs. $f(3.7) = 0$, og da toppunktet ligger midt mellem de to nulpunkter, og vinduet er 5,5 meter højt, har man $f\left(\frac{3.7}{2}\right) = 5.5$. Dette giver to ligninger med de ubekendte a og b, der kan løses med Maple:

$$solve\left(\left[f\left(\frac{3.7}{2}\right) = 5.5, f(3.7) = 0\right], \{a, b\}\right) = \{a = -1.607012418, b = 5.945945946\}$$

Dvs. $\underline{\underline{f(x) = -1.607 \cdot x^2 + 5.946 \cdot x}}$

b) $f(x) := -1.607012418 \cdot x^2 + 5.945945946 \cdot x :$

For at kunne beregne arealet har man brug for at kende førstekoordinaten til punktet i øverste, højre hjørne af vinduet, dvs. det ene af skæringspunkterne mellem den vandrette linje ($y = 3.1$) og parablen:

$$3.1 = f(x) \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 3.072069779\}, \{x = 0.6279302207\}$$

Det er den første løsning, der ligger mellem 2.3 og 3.7, der svarer til vinduets øverste, højre hjørne.
Punktmængden deles nu op i et rektangel med højden 3,1 og en "trekant" med buet hypotenuse.

$$A_M = A_{rektangel} + A_{buettrekant} = 3.1 \cdot (3.072069779 - 2.3) + \int_{3.072069779}^{3.7} f(x) \, dx = 3.433021685$$

Dvs. arealet er $\underline{\underline{3.43 \text{m}^2}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

6. december 2019: Første delprøve

Opgave 1: På sidste led anvendes den anden kvadratsætning:

$$5ab-4a^2+(2a-b)^2=5ab-4a^2+4a^2+b^2-4ab=\underline{\underline{ab+b^2}}=b\cdot(a+b)$$

Opgave 2: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x\cdot y+2}{x}\qquad P(5,2)$

Man kender allerede koordinaterne til tangentens røringspunkt *P*, så man mangler kun tangenthældningen, der bestemmes ved indsættelse i differentialligningen:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5\cdot 2+2}{5}=\frac{12}{5}$$

Dvs. tangentens ligning er:

$$y-y_0=a\cdot(x-x_0)$$

$$y-2=\frac{12}{5}\cdot(x-5)\;\Leftrightarrow\;\underline{\underline{y=\frac{12}{5}\cdot x-10}}$$

Opgave 3: $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}t^2\\ t^3-4t\end{pmatrix}$

a) Da man kender den ene af *t*-værdierne ($t=2$), der svarer til punktet, kan punktets koordinater bestemmes ved indsættelse i forskriften:

$$\vec{r}(2)=\begin{pmatrix}2^2\\ 2^3-4\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 8-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 0\end{pmatrix}$$

Dvs. $\underline{\underline{P(4,0)}}$

b) Hver af koordinatfunktionerne giver en ligning, som *t* skal opfylde, når man kender *P*:

$$t^2=4\;\Leftrightarrow\;t=-2\;\vee\;t=2$$

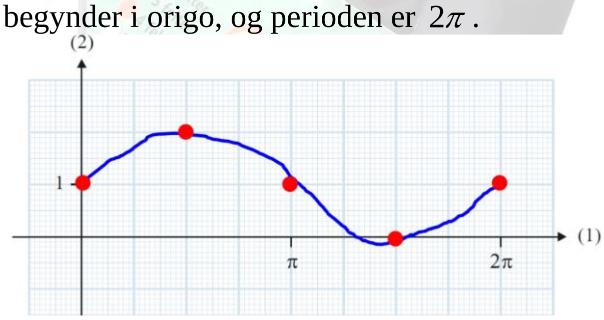
$$t^3-4t=0\;\Leftrightarrow\;t\cdot(t^2-4)=0\;\Leftrightarrow\;t=0\;\vee\;t^2-4=0\;\Leftrightarrow\;t=0\;\vee\;t=-2\;\vee\;t=2$$

Da $t=0$ kun er en løsning til *y*-koordinat-ligningen, og da man allerede har anvendt $t=2$, er:

$\underline{\underline{t_0=-2}}$

Opgave 4: $f(x)=\sin(x)+1$

a) Det er en sinusfunktion, der er parallelforskudt med 1 op ad *y*-aksen. Sinusfunktionen i sig selv begynder i origo, og perioden er 2π.



b) $f'(x)=\cos(x)$

$f'(\pi)=\cos(\pi)=\underline{\underline{-1}}$

Opgave 5: $f(x) = \ln(x) + 6x^2 \quad , \quad x > 0 \quad ; \quad P(1,5)$

a) Det ubestemte integral giver os familien af samtlige stamfunktioner:

$$F_k(x) = \int f(x)\,dx = x \cdot \ln(x) - x + 2x^3 + k$$

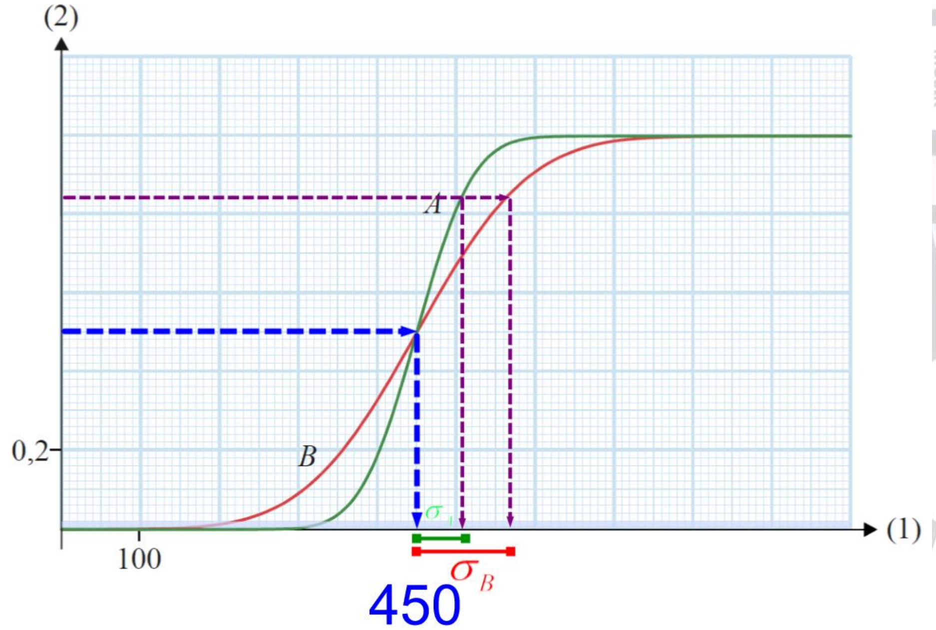
Punktets koordinater anvendes til at bestemme *k*-værdien for den søgte stamfunktion:

$$5 = 1 \cdot \ln(1) - 1 + 2 \cdot 1^3 + k \iff 5 = 0 - 1 + 2 + k \iff k = 4$$

Dvs. den søgte stamfunktion er:

$$\underline{\underline{F(x) = x \cdot \ln(x) - x + 2x^3 + 4}}$$

Opgave 6: Da vægtene er normalfordelt, kan man aflæse flere ting ud fra fordelingsfunktionerne:



a) Gennemsnittet af vægten svarer til medianen i en normalfordeling, dvs. ud fra 50% kan man gå vandret til grafen og derefter ned og aflæse $\underline{\underline{\mu = 450\,\text{g}}}$ (stiplede blå pile)

b) Da man egentlig kun skal svare på, hvor vægtene varierer mest, kan man nøjes med at notere, at den røde kurve er fladere i sin stigning, hvorfor **poserne fra fabrik *B* varierer mest i vægt**.
Man kunne også have aflæst spredningerne ved at gå 34,15% op (eller ned) fra 50% (de violette, stiplede linjer) og dermed udnytte, at 68,3% af målingerne i en normalfordeling ligger inden for én spredning fra middelværdien. Da spredningen fra fabrik *B* er størst, varierer poserne herfra mest i vægt.

Opgave 7: $f(x) = 3x + 24$

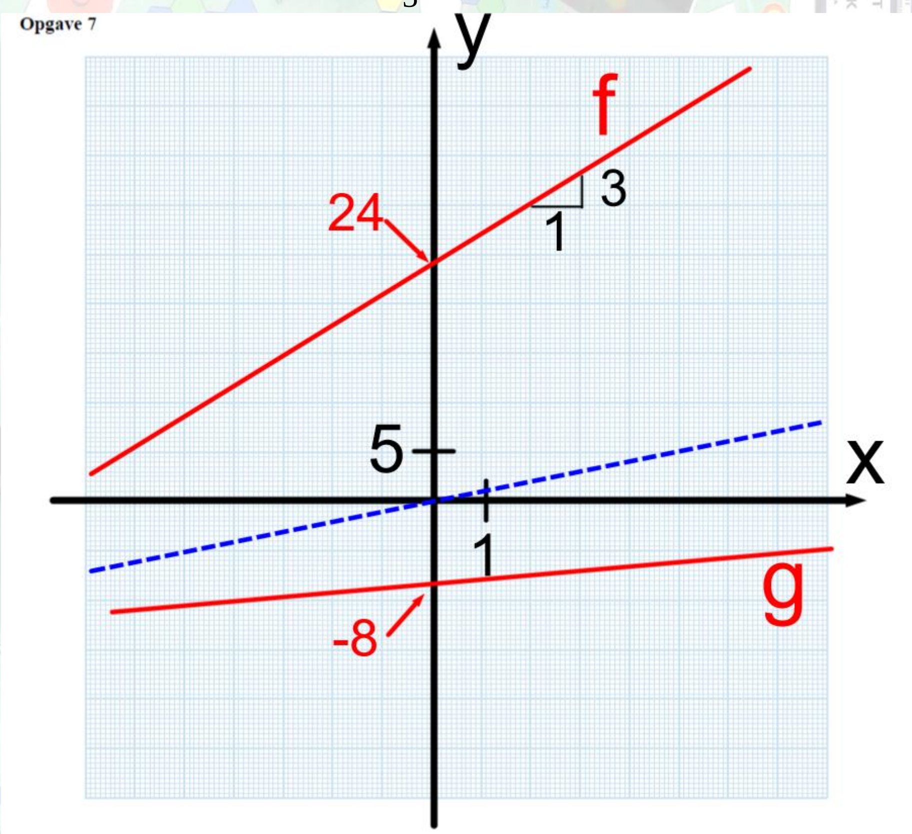
For at kunne tegne begge grafer skal man have forskellig størrelse enheder på de to akser. Derfor kan man ikke grafisk spejle grafen for *f* i linjen med ligningen $y = x$ (stiplede blå linje), når man skal tegne grafen for *g*.

Derfor bestemmes først forskriften for *g*, så man kan tegne grafen ud fra den:

b) Da *g* er den omvendte funktion af *f*, byttes der rundt på funktionsværdi og *x*-værdi i forskriften for *f*:

$$x = 3\cdot g(x) + 24 \Leftrightarrow x - 24 = 3\cdot g(x) \Leftrightarrow \underline{\underline{g(x) = \frac{1}{3}x - 8}}$$

a) Graferne for *f* og *g* tegnes ved at udnytte, at skæringerne med andenaksen er henholdsvis 24 og -8, mens hældningerne er 3 og $\frac{1}{3}$.



Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 8: Fra start ser Dijkstra-tabellen ud på nedenstående måde:

Opgave 8 — Start

	Havrebjerg	Holsted	Ringsted	Rønnede	Skovsø	Slagelse	Sorø
Korteste vej til Havrebjerg	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Sidst besøgte							
Status	M	M	M	M	M	M	M

Opgave 8 — Første trin

	Havrebjerg	Holsted	Ringsted	Rønnede	Skovsø	Slagelse	Sorø
Korteste vej til Havrebjerg	0	∞	∞	∞	7	8	∞
Sidst besøgte					Havrebjerg	Havrebjerg	
Status	P	M	M	M	M	M	M

Opgave 8 — Andet trin

	Havrebjerg	Holsted	Ringsted	Rønnede	Skovsø	Slagelse	Sorø
Korteste vej til Havrebjerg	0	∞	35	∞	7	8	20
Sidst besøgte			Skovsø		Havrebjerg	Havrebjerg	Skovsø
Status	P	M	M	M	P	M	M

Opgave 8 — Tredje trin

	Havrebjerg	Holsted	Ringsted	Rønnede	Skovsø	Slagelse	Sorø
Korteste vej til Havrebjerg	0	43	35	∞	7	8	20
Sidst besøgte		Slagelse	Skovsø		Havrebjerg	Havrebjerg	Skovsø
Status	P	M	M	M	P	P	M

Opgave 8 — Fjerde trin

	Havrebjerg	Holsted	Ringsted	Rønnede	Skovsø	Slagelse	Sorø
Korteste vej til Havrebjerg	0	43	35	∞	7	8	20
Sidst besøgte		Slagelse	Skovsø		Havrebjerg	Havrebjerg	Skovsø
Status	P	M	M	M	P	P	P

Opgave 8 — Femte trin

	Havrebjerg	Holsted	Ringsted	Rønnede	Skovsø	Slagelse	Sorø
Korteste vej til Havrebjerg	0	43	35	65	7	8	20
Sidst besøgte		Slagelse	Skovsø	Ringsted	Havrebjerg	Havrebjerg	Skovsø
Status	P	M	P	M	P	P	P

Opgave 8 — Sjette og syvende trin

	Havrebjerg	Holsted	Ringsted	Rønnede	Skovsø	Slagelse	Sorø
Korteste vej til Havrebjerg	0	43	35	61	7	8	20
Sidst besøgte		Slagelse	Skovsø	Holsted	Havrebjerg	Havrebjerg	Skovsø
Status	P	P	P	P	P	P	P

Dvs. den korteste rute fra Havrebjerg til Rønnede er: **Havrebjerg-Slagelse-Holsted-Rønnede**

Opgave 9: $x^2 + y^2 + a \cdot x - 6 \cdot y = 0 \qquad P(2,6)$

a) Hvis punktet skal ligge på cirklen, skal koordinaterne indsat i ligningen give et sandt udsagn:

$$2^2 + 6^2 + a \cdot 2 - 6 \cdot 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; 4 + 36 + 2a - 36 = 0 \;\Leftrightarrow\; 4 + 2a = 0 \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{a = -2}}$$

b) Man anvender kvadratkomplettering:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{a^2}{4} + 3^2$$

Højresiden svarer til kvadratet på radius, så når radius skal være 5, har man:

$$\frac{a^2}{4} + 3^2 = 5^2 \;\Leftrightarrow\; \frac{a^2}{4} + 9 = 25 \;\Leftrightarrow\; \frac{a^2}{4} = 16 \;\Leftrightarrow\; a^2 = 64 \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{a = -8 \;\vee\; a = 8}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

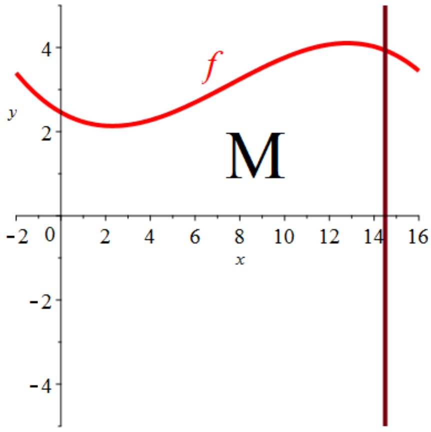
6. december 2019: Anden delprøve

<u>*Opgave 10:*</u> $f(x) = -0,0034 \cdot x^3 + 0,077 \cdot x^2 - 0,3 \cdot x + 2,46$

a) $f(x) := -0.0034 \cdot x^3 + 0.077 \cdot x^2 - 0.3 \cdot x + 2.46$:

For at få overblik over opgaven og svare på et delspørgsmål tegnes grafen:

$plot(f(x), x = -2..16, y = -5..5, color = red, thickness = 4)$



Da man kender både nedre og øvre grænse for integralet, bliver arealet:

$$A_M = \int_0^{14.5} f(x)\, dx = 44.80623854$$

Dvs. $\underline{\underline{A_M = 44.806}}$

b) De samme grænser kan bruges til at bestemme rumfanget af omdrejningslegemet:

$$V = \int_0^{14.5} \pi \cdot f(x)^2\, dx = 460.7460159$$

Dvs. $\underline{\underline{V = 460.75 \text{cm}^3}}$

<u>*Opgave 11:*</u> a) Hvis mindst tre hjørner har ulige grader, kan man ikke lave en Eulertur, og her er der en frygtelig masse hjørner med ulige grader, helt præcist 6 (A, B, C, D, E og G), så **man kan IKKE lave en Eulergraf.**

b) Et udspændende træ er f.eks. ***A-B-C-D-G-E-F***

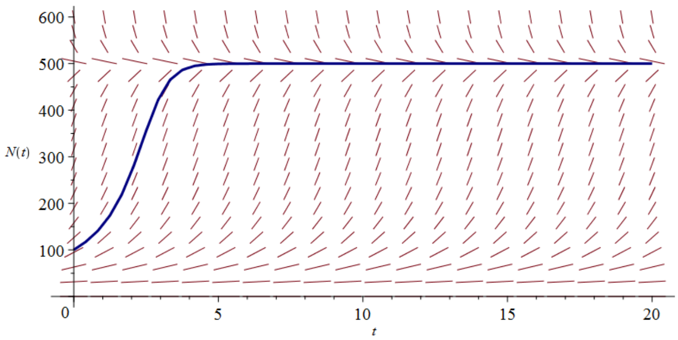
Det er et træ, da det er en sammenhængende graf uden gentagelser af hjørner (dvs. uden kredse), og det er udspændende, da alle hjørner er med.

<u>*Opgave 12:*</u> $N'(t) = -0,00001 \cdot N(t)^3 + 0,0051 \cdot N(t)^2 - 0,05 \cdot N(t)$

a) Med kommandoen *linjeelementer* fra Gym-pakken kan man tegne et hældningsfelt:

$with(Gym)$:

$linjeelementer(N'(t) = -0.00001 \cdot N(t)^3 + 0.0051 \cdot N(t)^2 - 0.05 \cdot N(t), N(t), t = 0..20, N = 0..600, [N(0) = 100])$



b) Væksthastigheden kan bestemmes ved indsættelse af den kendte værdi for N i differentialligningen:

$N' = -0.00001 \cdot 100^3 + 0.0051 \cdot 100^2 - 0.05 \cdot 100 = 36.00000$

Dvs. væksthastigheden er **36 bjørne om året.**

c) Differentialligningen giver væksthastigheden $f(N)$ som funktion af antal bjørne:

$f(N) := -0.00001 \cdot N^3 + 0.0051 \cdot N^2 - 0.05 \cdot N:$

Nulpunkterne for funktionen bestemmes:

$f(N) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{N = 0.\}, \{N = 500.\}, \{N = 10.\}$

Fortegnet for funktionen mellem nulpunkterne bestemmes:

$f(5) = -0.12375 < 0$, dvs. i intervallet]0,10[er væksthastigheden negativ.

$f(20) = 0.96000 > 0$, dvs. i intervallet]10,500[er væksthastigheden positiv.

$f(600) = -354.00000 < 0$, dvs. med mere end 500 bjørne er væksthastigheden negativ.

Væksthastigheden er altså positiv i intervallet]10,500[.

Da det er bjørne, arbejder man med hele tal, så **det mindste antal er 11, og det største er 499.**

Opgave 13: $f(x) = a \cdot x + b$

13) Data hentes med Tools-Assistants-Import Data.

$$Blomster := \begin{bmatrix} 2.0 & 5.1 \\ 1.9 & 5.8 \\ 2.2 & 5.7 \\ 2.0 & 5.6 \\ 2.0 & 5.6 \\ 1.7 & 5.9 \\ 1.9 & 6.5 \\ 2.4 & 6.4 \\ 1.6 & 5.0 \\ 1.6 & 5.7 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

100 × 2 Matrix

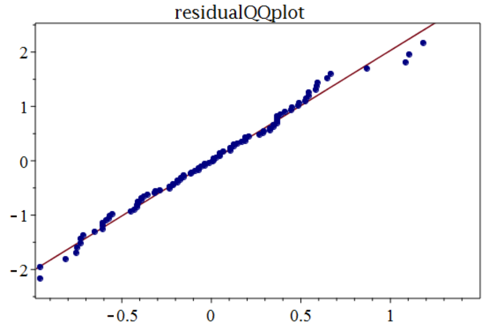
a) Der laves lineær regression.

$f(x) := LinReg(Blomster, x):$

$f(x) = 0.807179487179487\, x + 3.87828717948718$

Med denne funktionsforskrift kan man lave et QQ-plot af residualerne:

$residualQQplot(Blomster, f)$



Da punkterne tilnærmelsesvis danner en ret linje, er residualerne med god tilnærmelse normalfordelte.

b) Med *testLin*-kommandoen bestemmes et 95%-konfidensinterval for hældningen:

testLin(*Blomster*)

	a	b
Koefficient	0.807179	3.878287
Standardfejl	0.158577	0.306902
t-stat	5.090157	12.636894
p-værdi	0.000002	0.000000
Nedre 95.00%	0.492490	3.269250
Øvre 95.00%	1.121869	4.487324
Frihedsgrader	98	

Dvs. 95%-konfidensintervallet for hældningen er **[0,49 ; 1,12]**

Da konfidensintervallet består af udelukkende positive værdier, **er det troværdigt, at sammenhængen er voksende.**

<u>*Opgave 14:*</u> $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cdot\cos(t)+\frac{7}{2}\cdot\cos\left(\frac{1}{3}t\right)\\ \frac{1}{2}\cdot\sin(t)+\frac{7}{2}\cdot\sin\left(\frac{1}{3}\cdot t\right)\end{pmatrix}\quad ;\quad 0\le t\le 6\pi$

with(*Gym*) :

a) $s(t) := \left\langle \frac{1}{2}\cdot\cos(t)+\frac{7}{2}\cdot\cos\left(\frac{1}{3}\cdot t\right), \frac{1}{2}\cdot\sin(t)+\frac{7}{2}\cdot\sin\left(\frac{1}{3}\cdot t\right)\right\rangle$:

Den største lodrette afstand findes ved at bestemme mindste og største funktionsværdi for andenkoordinatfunktionen.

Først bestemmes de steder, hvor den afledede er nul:

$fintervalsolve\left(\frac{d}{dt}s(t)_2=0, t=0..6\cdot\pi\right)$ = [3.450785975, 4.712388980, 5.973991986, 12.87556394, 14.13716694, 15.39876995]

Fortegnet for den anden afledede de første steder bestemmes:

$s''(3.450785975)_2 = -0.2028602063 < 0$, dvs. lokalt maksimumssted. $s(3.450785975)_2 = 3.042903098$

$s''(4.712388980)_2 = 0.1111111111 > 0$, dvs. lokalt minimumssted. $s(4.712388980)_2 = 3.000000000$

Da det er oplyst, at parameterkurven er symmetrisk omkring begge akser, har man:

$d = 2\cdot s(3.450785975)_2 = 6.085806196$, dvs. **den største lodrette afstand er 6,09 cm**

b) Længden af randen kan bestemmes med den angivne formel:

$$L=\int_{0.}^{6\cdot\pi}\sqrt{\left(s'(t)_1\right)^2+\left(s'(t)_2\right)^2}\,dt = 23.01311260$$

Dvs. **længden er 23,0 cm**

<u>*Opgave 15:*</u> a) Trådnettet består af fem rektangulære flader:

$$A_{trådnet}=A_{top}+A_{bund}+A_{front}+2\cdot A_{side}=x\cdot y+x\cdot y+y\cdot h+2\cdot x\cdot h=48$$

Hermed kan *h* udtrykkes med *x* og *y*:

$$2\cdot x\cdot y+h\cdot(y+2x)=48 \iff h\cdot(y+2x)=48-2xy \iff h=\frac{48-2xy}{y+2x}$$

Dette kan bruges til at finde rumfanget udtrykt alene ved *x* og *y*:

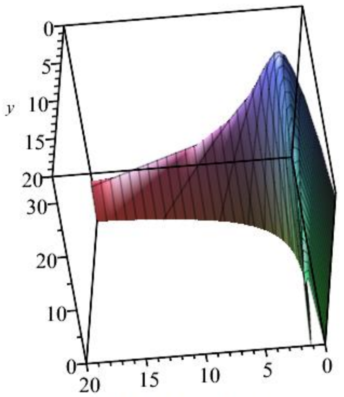
$$V(x,y,h)=x\cdot y\cdot h$$

$$\underline{\underline{V(x,y)=x\cdot y\cdot\frac{48-2xy}{y+2x}}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

b) $V(x,y) := \dfrac{x\cdot y\cdot(48-2\cdot x\cdot y)}{2\cdot x+y}$:

$plot3d\left(\dfrac{x\cdot y\cdot(48-2\cdot x\cdot y)}{2\cdot x+y}, x=0..20, y=0..20\right)$



z-vinduet er sat til [0;35] under aksernes egenskaber.

c) $P(2, 4, 32)$

Determinanten af Hesse-matricen bestemmes i dette punkt:

$$f_{xx}(x,y) := \frac{\partial^2}{\partial x^2}(V(x,y)) = (x,y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x,y)$$

$$f_{yy}(x,y) := \frac{\partial^2}{\partial y^2}(V(x,y)) = \ = (x,y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2} V(x,y)$$

$$f_{xy}(x,y) := \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(V(x,y)) = (x,y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} V(x,y)$$

$$determinantHesse(x,y) := f_{xx}(x,y)\cdot f_{yy}(x,y) - \left(f_{xy}(x,y)\right)^2 = (x,y) \rightarrow f_{xx}(x,y)\, f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2$$

$determinantHesse(x,y) =$

$$\left(-\frac{4y^2}{2x+y} - \frac{4y(-2yx+48)}{(2x+y)^2} + \frac{8xy^2}{(2x+y)^2} + \frac{8xy(-2yx+48)}{(2x+y)^3}\right)\left(-\frac{4x^2}{2x+y} - \frac{2x(-2yx+48)}{(2x+y)^2} + \frac{4x^2y}{(2x+y)^2} + \frac{2xy(-2yx+48)}{(2x+y)^3}\right) - \left(\frac{-2yx+48}{2x+y} - \frac{6yx}{2x+y} - \frac{y(-2yx+48)}{(2x+y)^2} + \frac{2xy^2}{(2x+y)^2} - \frac{2x(-2yx+48)}{(2x+y)^2} + \frac{4x^2y}{(2x+y)^2} + \frac{4xy(-2yx+48)}{(2x+y)^3}\right)^2$$

$$f(x,y) := \left(-\frac{4y^2}{2x+y} - \frac{4y(-2yx+48)}{(2x+y)^2} + \frac{8xy^2}{(2x+y)^2} + \frac{8xy(-2yx+48)}{(2x+y)^3}\right)\left(-\frac{4x^2}{2x+y} - \frac{2x(-2yx+48)}{(2x+y)^2} + \frac{4x^2y}{(2x+y)^2} + \frac{2xy(-2yx+48)}{(2x+y)^3}\right) - \left(\frac{-2yx+48}{2x+y} - \frac{6yx}{2x+y} - \frac{y(-2yx+48)}{(2x+y)^2} + \frac{2xy^2}{(2x+y)^2} - \frac{2x(-2yx+48)}{(2x+y)^2} + \frac{4x^2y}{(2x+y)^2} + \frac{4xy(-2yx+48)}{(2x+y)^3}\right)^2 :$$

$f(2,4) = 12 > 0$, dvs. lokalt ekstremumspunkt.

Fortegnet for den dobbeltafledede med hensyn til x bestemmes:

$$f_{xx}(x,y) = -\frac{4y^2}{2x+y} - \frac{4y(-2yx+48)}{(2x+y)^2} + \frac{8xy^2}{(2x+y)^2} + \frac{8xy(-2yx+48)}{(2x+y)^3}$$

$$g(x,y) := -\frac{4y^2}{2x+y} - \frac{4y(-2yx+48)}{(2x+y)^2} + \frac{8xy^2}{(2x+y)^2} + \frac{8xy(-2yx+48)}{(2x+y)^3} :$$

$g(2,4) = -8 < 0$, dvs. lokalt maksimumspunkt.

Dvs. *P* er et lokalt maksimumspunkt, og hvis man går ud fra – hvilket grafen tyder på og som er det eneste, der giver fysisk mening – at det også er et globalt maksimumspunkt, så opnår man det størst mulige rumfang af hønsegården, når $x = 2$ m og $y = 4$ m, og det maksimale rumfang er 32 m^3.