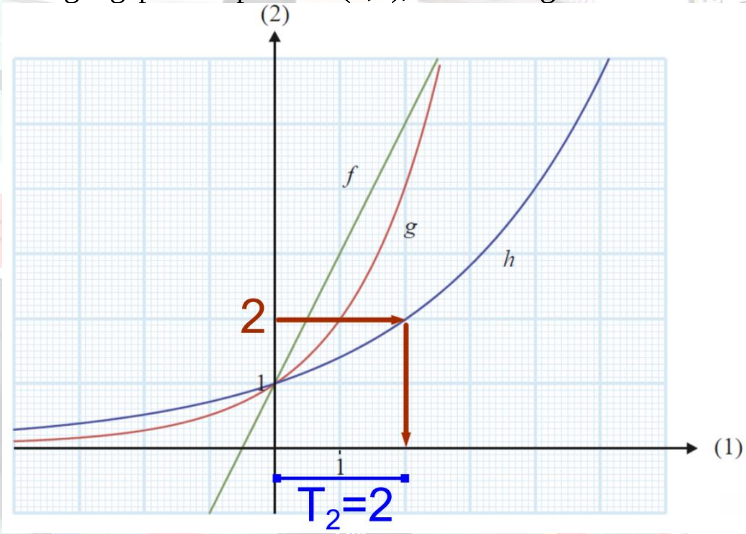
Løsninger til eksamensopgaver på A-niveau 2020

25. maj 2020: Delprøven UDEN hjælpemidler

25. maj 2020 opgave 1: Fordoblingskonstanten findes kun for eksponentielle udviklinger, og da den grønne graf er en ret linje og funktionen *f* dermed en lineær funktion, kan den udelukkes.

Fordoblingskonstanten er den faste værdi, der skal lægges til *x*-værdien for at fordoble *y*-værdien. Så med udgangspunkt i punktet (0,1), skal man gå ud fra den dobbelte *y*-værdi, dvs. 2:



Det ses, at det er **grafen for funktionen *h*,** der har fordoblingskonstanten 2.

25. maj 2020 opgave 2: $-x^2+x+12=0$

a) Man kan benytte diskriminantmetoden, men man kan også som vist her forlænge ligningen med -1, faktorisere og anvende nulreglen:

$$-x^2+x+12=0 \Leftrightarrow x^2-x-12=0 \Leftrightarrow (x+3)\cdot(x-4)=0 \vee \underline{\underline{x=-3 \vee x=4}}$$

25. maj 2020 opgave 3: $l:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}\ ,\ t\in\mathbb{R}$

a) Man vises, at punktet $P(5,1)$ ligger på linjen ved at vise, at der findes en værdi for *t*, der giver førstekoordinaten 5 og andenkoordinaten 1.

Først findes den værdi for *t*, der giver førstekoordinaten 5:

$$5=1-2t \Leftrightarrow 2t=-4 \Leftrightarrow t=-2$$

Så tjekkes det, at denne værdi for *t* også giver den rigtige andenkoordinat:

$$1=5+(-2)\cdot 2 \Leftrightarrow 1=5-4 \Leftrightarrow 1=1$$

Dette er sandt, så *t*-værdien -2 giver både rigtig førstekoordinat og andenkoordinat, og **dermed ligger *P* på linjen.**

<u>*25. maj 2020 opgave 4:*</u> $C_1 : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4 \quad , \quad C_2 : (x+3)^2 + y^2 = 9$

a) Man kan undersøge, om to cirkler skærer hinanden, ved at sammenligne deres radier med afstanden mellem deres centre.

I cirkel 1 aflæses centrum og radius til: $Centrum_1 = (2,1)\ \ r_1 = 2$

I cirkel 2 aflæses centrum og radius til: $Centrum_2 = (-3,0)\ \ r_2 = 3$

Afstanden mellem de to centre er: $dist = \sqrt{(2-(-3))^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5^2 + 1^1} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$

Man ser, at: $dist = \sqrt{26} > \sqrt{25} = 5 = r_1 + r_2$.

Dvs. afstanden mellem de to centre er større end summen af radierne,
så cirklerne skærer IKKE hinanden.

<u>*25. maj 2020 opgave 5:*</u> $f(x) = x^2 - x - 4$

a) Tangentens hældning svarer til differentialkvotientens værdi det pågældende sted, så først bestemmes den afledede funktion:

$f'(x) = 2x - 1$

Hvis tangenthældningen skal være 5, har man:

$5 = 2x - 1 \iff 6 = 2x \iff x = 3$

Dvs. det er tangenten i 3, der skal bestemmes.
Funktionsværdien i 3 bestemmes ved indsættelse i funktionsforskriften:

$f(3) = 3^2 - 3 - 4 = 9 - 3 - 4 = 2$

Dvs. ligningen for tangenten er:

$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$

$y - 2 = 5 \cdot (x - 3) \iff \underline{\underline{y = 5x - 13}}$

<u>*25. maj 2020 opgave 6:*</u> $f(x) = e^{x^2 - x} \qquad y' + y = 2x \cdot y$

a) Det undersøges, om en funktion er en løsning til en differentialligning, ved at indsætte i differentialligningen og se, om man får en identitet. For at kunne indsætte skal man først have bestemt den afledede funktion, og her bemærkes det, at *f* er en sammensat funktion:

$f'(x) = (2x-1) \cdot e^{x^2 - x}$

Funktionsudtrykkene for funktionen og den afledede af funktionen indsættes i differentialligningen:

$(2x-1) \cdot e^{x^2-x} + e^{x^2-x} = 2x \cdot e^{x^2-x} \iff$

$2x \cdot e^{x^2-x} - e^{x^2-x} + e^{x^2-x} = 2x \cdot e^{x^2-x} \iff$

$2x \cdot e^{x^2-x} = 2x \cdot e^{x^2-x}$

Dette er en identitet, så *f* er en løsning til differentialligningen.

21. maj 2019: Delprøven MED hjælpemidler

25. maj 2020 opgave 7:

a) Arealet af rektanglet $ABCE$ er:

$A_{ABCE} = 3 \cdot 8\text{m}^2 = 24\text{m}^2$

Da arealet af hele gavlen er 44 m^2, er arealet af den markerede del:

$A_{markeret} = A_{samlet} - A_{ABCE} = 44\text{m}^2 - 24\text{m}^2 = \underline{\underline{20\text{m}^2}}$

Da $ABCE$ er et rektangel, er $|CE| = |AB| = 8$.
Man kender nu arealet og to sider i trekant CDE, og dermed kan vinklen dannet af de to sider bestemmes med ½-appelsinformlen:

$with(Gym)$:

$20 = \frac{1}{2} \cdot 5.1 \cdot 8 \cdot Sin(v) \xrightarrow{\text{solve}} \{v = 78.63512303\}$

(Det er her udnyttet, at vinklen er spids - det fremgår implicit af opgaven - da man med metoden ville have overset en eventuel stump vinkel).

Dvs. $\underline{\underline{v = 78.6°}}$

b) Den sidste sidelængde kan bestemmes med en cosinusrelation:

$\cos(v) = \frac{|CE|^2 + |DE|^2 - |CD|^2}{2 \cdot |CE| \cdot |DE|}$

$Cos(78.63512303) = \frac{8^2 + 5.1^2 - CD^2}{2 \cdot 8 \cdot 5.1} \xrightarrow{\text{solve}} \{CD = 8.598267209\}, \{CD = -8.598267209\}$

Da det er en sidelængde forkastes den negative løsning, dvs.

$\underline{\underline{|CD| = 8.6\text{m}}}$

25. maj 2020 opgave 8:

a) $h(t) = b \cdot t^a$ $h(t)$: Vandhøjden målt i meter t : Tiden målt i timer efter påbegyndelse af fyldning.
Det er potensvækst, så der skal laves potensregression.

$Tid := [1, 2, 4, 6, 8, 10]$:

$Vandhøjde := [3.6, 4.6, 5.8, 6.6, 7.3, 7.8]$:

$h(t) := PowReg(Tid, Vandhøjde, t)$:

$h(t) = 3.62267601033730\ t^{0.335703560263975}$

Dvs. $\underline{\underline{a = 0.3357 \text{ og } b = 3.6227}}$

b) 15 timer efter påbegyndelse af fyldning svarer til $t = 15$, så man har:

$h(15) = 8.99181820921963$

Dvs. **vandhøjden er 9,0 m**

c) Først bestemmes den tid, det tager at få vandhøjden 10 m:

$h(t) = 10. \xrightarrow{\text{solve}} \{t = 20.58596023\}$

Da vandpumpen kan pumpe 72 m^3 i timen, bliver den samlede vandmængde:

$V_{fuld\,tank} = 72\text{m}^3 \cdot 20.58596023 = 1482.189137\ \text{m}^3$

Dvs. **der er 1482 m^3 i en fuld tank.**

25. maj 2020 opgave 9:

a) Punkterne angives ved deres stedvektorer:

$\overrightarrow{OA} := \langle 9, 0, 9\rangle : \overrightarrow{OB} := \langle 12, 0, 3\rangle : \overrightarrow{OC} := \langle 12, 12, 3\rangle : \overrightarrow{OD} := \langle 0, 12, 3\rangle :$

Først findes krydsproduktet mellem to vektorer, der udspænder den plan, som tagfladen ABC er en del af:

$$\overrightarrow{AB} := \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} := \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 72 \\ 0 \\ 36 \end{bmatrix}$$

Dette er en normalvektor for planen, men her benyttes en kortere vektor med samme retning som normalvektor:

$$\vec{n} := \langle 2, 0, 1\rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ligningen for planen er så (punktet A benyttes som punkt i planen):

$dotP\left(\vec{n}, \langle x, y, z\rangle - \overrightarrow{OA}\right) = 0 = 2\,x - 27 + z = 0$

Dvs. planens ligning er $\underline{\underline{2\,x + z - 27 = 0}}$

b) Arealet af en trekant er halvdelen af længden af krydsproduktet af to udspændende vektorer:

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot len\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) = 18\sqrt{5} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 40.24922359$$

Dvs. **arealet er 40,2 m^2**

c) Vinklen mellem to planer er vinklen mellem deres normalvektorer. Vi har allerede normalvektoren for tagfladen ABC. Ud fra ligningen $y + 2\,z = 18$ aflæses normalvektoren for den anden tagflade:

$$\overrightarrow{n_{ACD}} := \langle 0, 1, 2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vinklen mellem de to normalvektorer bestemmes med $\cos(v) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

$$Cos(v) = \frac{dotP\left(\vec{n}, \overrightarrow{n_{ACD}}\right)}{len(\vec{n}) \cdot len\left(\overrightarrow{n_{ACD}}\right)} \xrightarrow{\text{solve for v}} [[v = 66.42182152]]$$

Dette er den spidse vinkel. Den stumpe vinkel er supplementvinklen:

$v_{stump} = 180 - 66.42182152 = 113.5781785$

Dvs. **den stumpe vinkel er 113,6°**

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>25. maj 2020 opgave 10:</u>

$f(x) := x^3 - x^2 - 8\,x + 14:$

a) Monotoniforholdene bestemmes ved først at finde ekstremumssteder og arten af disse. Dette gøres ved at finde de steder, hvor den afledede funktion er 0 samt fortegnet for den anden afledede disse steder:

$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 2\}, \left\{x = -\frac{4}{3}\right\}$

Fortegnet for den anden afledede disse steder bestemmes:

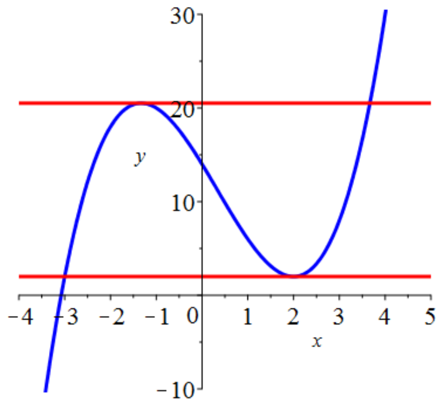
$f''\left(-\frac{4}{3}\right) = -10 < 0$, dvs. lokalt maksimumssted

$f''(2) = 10 > 0$, dvs. lokalt minimumssted.

Så f er voksende i intervallet $\left]-\infty, -\frac{4}{3}\right]$, aftagende i intervallet $\left[-\frac{4}{3}, 2\right]$ og voksende i intervallet [2,∞[

b) Funktionsudtrykket er et tredjegradspolynomium. Hvis ligningen $f(x) = k$ skal have netop to løsninger, skal den vandrette linje med ligningen $y = k$ skære/røre grafen for f to steder.

$plot\left(\left[f(x), \frac{554}{27}, 2\right], x = -4..5, y = -10..30, color = [blue, red, red], thickness = 3\right)$



Som det ses på figuren, skal de vandrette linjer altså tangere grafen i et af de to lokale ekstremumspunkter, for hvis den vandrette linje ligger mellem de to røde linjer, vil der være tre skæringer, mens der kun vil være én skæring, hvis den ligger uden for.

Man skal altså bestemme funktionsværdierne for de to lokale ekstremumssteder, der allerede blev bestemt i a):

$f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{554}{27}$

$f(2) = 2$

Dvs. $\underline{\underline{k = 2 \lor k = \frac{554}{27}}}$

25. maj 2020 opgave 11:

a) Tallene lægges ind i en matrix:

$$M := \begin{bmatrix} 18 & 20 & 22 \\ 31 & 27 & 52 \end{bmatrix}:$$

Med Gym-pakkens kommando *forventet* kan man finde de forventede værdier:

$$forventet(M) = \begin{bmatrix} 17.294 & 16.588 & 26.118 \\ 31.706 & 30.412 & 47.882 \end{bmatrix}$$

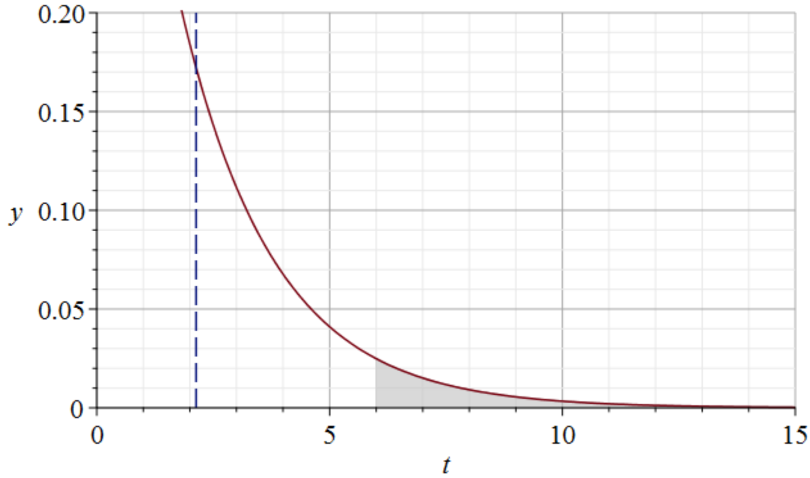
Der skal dog også være et regneeksempel, så her kommer alle udregningerne:

	Sort pels	Rødbrun pels	Broget pels	I alt
Udvikler horn	$\frac{49.\cdot 60}{170} =$ 17.29411765	$\frac{47.\cdot 60}{170} =$ 16.58823529	$\frac{74.\cdot 60}{170} =$ 26.11764706	$18 + 20 + 22 = 60$
Udvikler ikke horn	$\frac{49.\cdot 110}{170} =$ 31.70588235	$\frac{47.\cdot 110}{170} =$ 30.41176471	$\frac{74.\cdot 110}{170} =$ 47.88235294	$31 + 27 + 52 = 110$
I alt	$18 + 31 = 49$	$20 + 27 = 47$	$22 + 52 = 74$	$60 + 110 = 170$ $49 + 47 + 74 = 170$

b) Det skal udføres et χ^2 – uafhængighedstest:

chi2Utest$(M, level = 0.05)$

χ^2-teststørrelse = 2.1323
Frihedsgrader = 2
Kritisk værdi = 5.9915
p-værdi = 0.34434

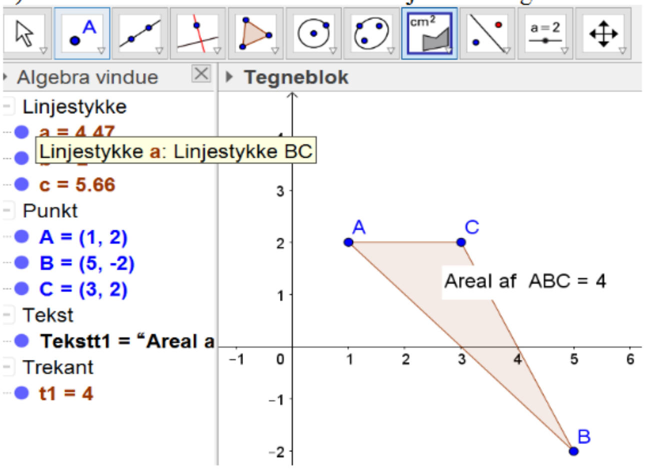


Da $p = 34\ \% > 5\ \%$ **kan nulhypotesen IKKE forkastes.**
Der er ikke signifikant forskel på evnen til at udvikle horn blandt de tre slags pelsudseende.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>25. maj 2020 opgave 12:</u>

a) Så er det åbenbart blevet tid til at tjekke Geogebra-kundskaber.



Punkterne indtastes, og med værktøjet til at tegne polygoner tegnes trekanten ABC.
Trekantens areal bestemmes med rigtige udregninger ved:

$$T_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right| = \frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}(5-1) & (3-1)\\ (-2-2) & (2-2)\end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}4 & 2\\ -4 & 0\end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\cdot|4\cdot 0-(-4)\cdot 2| = \frac{1}{2}\cdot|8| = \frac{1}{2}\cdot 8 = \underline{\underline{4}}$$

b) Hvis arealet skal være 23, har man:

$$23 = \frac{1}{2}\cdot\left|det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right| \Leftrightarrow 46 = \left\|\begin{matrix}(5-1) & (3-1)\\ (-2-2) & (k-2)\end{matrix}\right\| \Leftrightarrow 46 = \left\|\begin{matrix}4 & 2\\ -4 & k-2\end{matrix}\right\| \Leftrightarrow$$

$$46 = |4\cdot(k-2)-(-4)\cdot 2| \Leftrightarrow 46 = |4\,k-8+8| \Leftrightarrow 46 = |4\,k| \Leftrightarrow$$

$$46 = 4\,k \vee -46 = 4\,k \Leftrightarrow k = -\frac{23}{2} \vee k = \frac{23}{2}$$

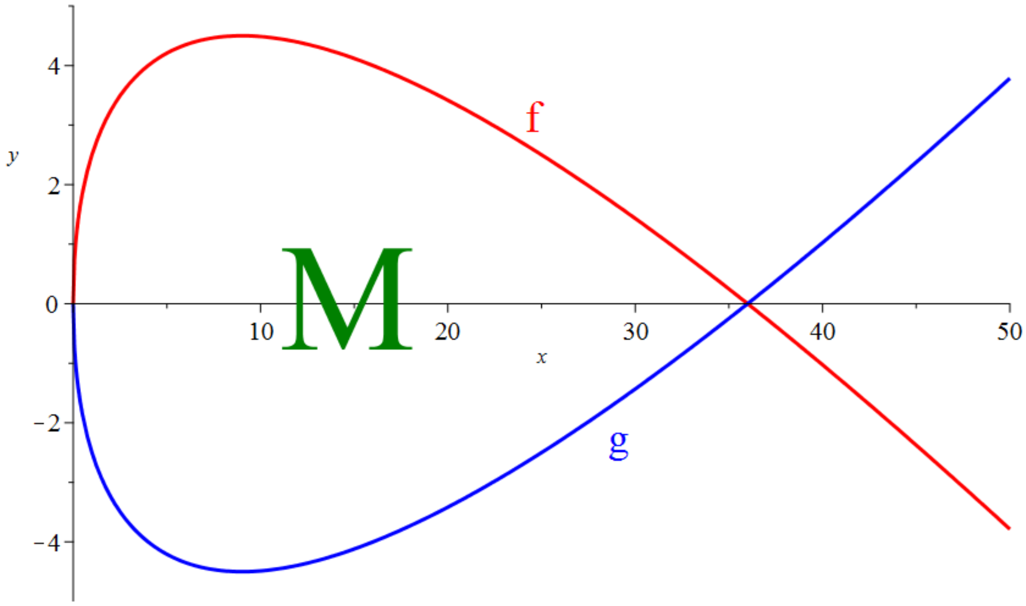
Da det er oplyst, at k skal være positiv, er $k = \underline{\underline{\frac{23}{2}}}$

25. maj 2020 opgave 13:

a) $f(x) := 3\cdot\sqrt{x} - \frac{1}{2}\cdot x : g(x) := -f(x) :$

Man skal kunne se skæringerne mellem graferne, når de tegnes, og den mindste x-værdi skal være 0:

$plot([f(x), g(x)], x = 0..50, y = -5..5, color = [red, blue], thickness = 3)$



b) Grafen for f ligger over grafen for g i området, så den største lodrette afstand svarer til at finde den lokale maksimumsværdi for funktionen:

$h(x) := f(x) - g(x) : =$

$h'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 9\}$

Fortegnet for den anden afledede dette sted bestemmes for at afgøre arten af stedet.

$h''(9) = -\frac{\sqrt{9}}{54} < 0$, dvs. det er (som forventet) et lokalt maksimumssted.

Funktionsværdien bestemmes dette sted.

$h(9) = 9$

Dvs. **den største lodrette afstand mellem de to grafer i området er 9**

c) For at kunne bestemme arealet skal man kende grænserne, der er skæringsstederne mellem graferne:

$f(x) = g(x) \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 0\}, \{x = 36\}$

Dette er øvre og nedre grænse i det bestemte integral, der svarer til arealet:

$$A_M = \int_0^{36} (f(x) - g(x))\,dx = 216$$

Dvs. $\underline{\underline{A_M = 216}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

25. maj 2020 opgave 14:

a) $v(t)$ er bilens hastighed målt i $\frac{\text{m}}{\text{s}}$; t er tidspunktet målt i sekunder ; $v(0) = 20$

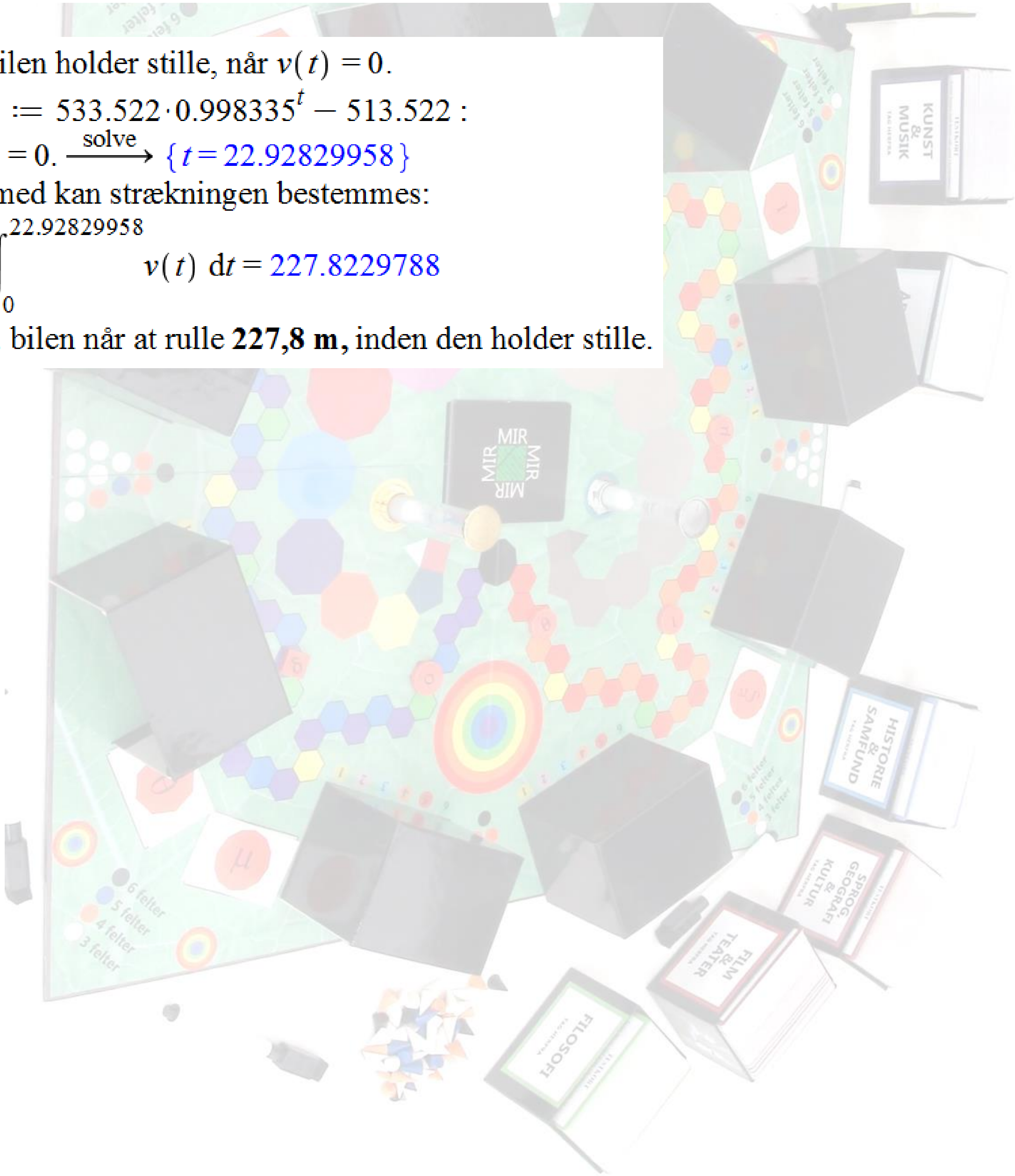
$m := 1200. : c := 2. : g := 9.82 : \theta := 5. :$

Differentialligningen løses med den angivne begyndelsesbetingelse:

$$m \cdot v'(t) + c \cdot v(t) + m \cdot g \cdot Sin(\theta) = 0, v(0.) = 20. \xrightarrow{\text{solve DE}} v(t) = -\frac{1027043273}{2000000} + \frac{1067043273\, e^{-\frac{t}{600}}}{2000000} \xrightarrow{\text{at 10 digits}}$$

$$v(t) = -513.5216365 + 533.5216365\, e^{-0.001666666667\, t}$$

Da $e^{-0.001666666667} = 0.9983347215$, er det hermed vist, at v er bestemt ved $v(t) = 533.522 \cdot 0.998335^t - 513.522$



b) Bilen holder stille, når $v(t) = 0$.

$v(t) := 533.522 \cdot 0.998335^t - 513.522 :$

$v(t) = 0. \xrightarrow{\text{solve}} \{t = 22.92829958\}$

Hermed kan strækningen bestemmes:

$$s = \int_0^{22.92829958} v(t)\, dt = 227.8229788$$

Dvs. bilen når at rulle **227,8 m**, inden den holder stille.

27. maj 2020: Delprøven UDEN hjælpemidler

27. maj 2020 opgave 1: I andet led anvendes første kvadratsætning.

$$x\cdot(x+4)-(x+2)^2=x^2+4x-\left(x^2+4+4x\right)=x^2+4x-x^2-4-4x=\underline{\underline{-4}}$$

27. maj 2020 opgave 2: $f(x)=\left(x^3+5x\right)\cdot\ln(x)\ ,\ \ x>0$

Først bestemmes den afledede funktion af f ved hjælp af produktreglen:

$$f'(x)=\left(3x^2+5\right)\cdot\ln(x)+\left(x^3+5x\right)\cdot\frac{1}{x}$$

Så bestemmes differentialkvotienten i 1:

$$f'(1)=\left(3\cdot1^2+5\right)\cdot\ln(1)+\left(1^3+5\cdot1\right)\cdot\frac{1}{1}=8\cdot\ln(1)+6=8\cdot0+6=\underline{\underline{6}}$$

27. maj 2020 opgave 3:

$$\int_1^2\left(4x^3+8x\right)dx=\left[x^4+4x^2\right]_1^2=\left(2^4+4\cdot2^2\right)-\left(1^4+4\cdot1^2\right)=16+16-1-4=\underline{\underline{27}}$$

27. maj 2020 opgave 4: Ligningen omskrives til formen $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

$$x^2+10x+y^2-6y=2$$

$$(x+5)^2+(y-3)^2=2+5^2+3^2$$

$$(x+5)^2+(y-3)^2=36=6^2$$

Dvs. $\underline{\underline{C(-5,3)\text{ og }r=6}}$

27. maj 2020 opgave 5: $f(x)=x^2+k\cdot x-1$ $\qquad T\left(-2,f(-2)\right)$

Førstekoordinaten for en parabels toppunkt er $-\dfrac{b}{2a}$.

Så $-\dfrac{k}{2\cdot1}=-2\ \Leftrightarrow\ \underline{\underline{k=4}}$

Andenkoordinaten beregnes ved indsættelse i funktionsforskriften, hvor k er sat til 4.

$$f(-2)=(-2)^2+4\cdot(-2)-1=4-8-1=\underline{\underline{-5}}$$

27. maj 2020 opgave 6: $f(x)=a^x\ ,\ a>0$

At ligningen $f(x+2)=16\cdot f(x)$ er opfyldt for alle værdier af x vil sige, at det er en identitet.

Ved indsættelse i funktionsudtrykket fås:

$$a^{x+2}=16\cdot a^x\ \Leftrightarrow\ a^x\cdot a^2=16\cdot a^x\ \Leftrightarrow\ a^2=16\ \Leftrightarrow\ \underline{\underline{a=4}}\ \ (\text{da }\ a>0)$$

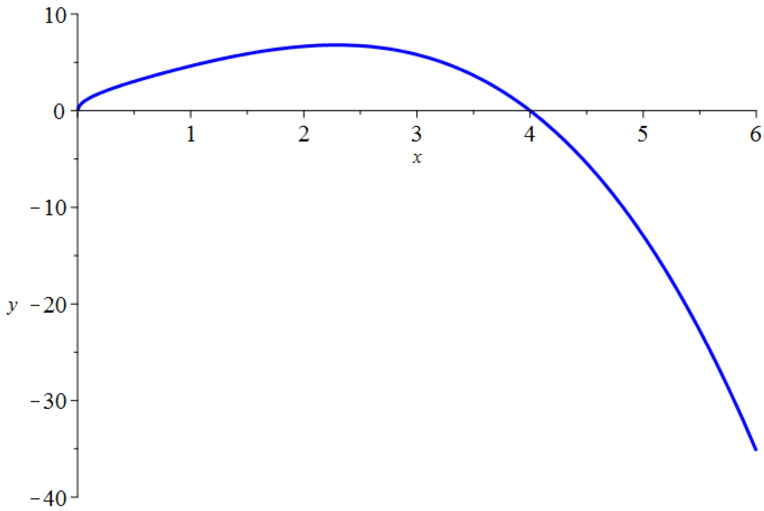
27. maj 2020: Delprøven MED hjælpemidler

27. maj 2020 opgave 7:

$f(x) := 4\cdot\sqrt{x} - \frac{3}{8}\cdot x^3 + x^2 :$

a) Grafen skal tegnes begyndende i $x = 0$ og så langt ud, at man får alle nulpunkter med:

$plot(f(x), x = 0..6, y = -40..10, color = blue, thickness = 3)$



Maple kan finde nulpunkterne:

$f(x) = 0. \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 0.\}, \{x = 4.\}, \{x = -1.271019255 + 1.372185854\,\mathrm{I}\}, \{x = -1.271019255 - 1.372185854\,\mathrm{I}\}$

De komplekse løsninger forkastes, dvs. $\underline{\underline{x = 0 \lor x = 4}}$

b) Nulpunkterne fungerer som grænser i det bestemte integral, der svarer til arealet af den punktmængde, der er dannet i første kvadrant:

$$A_M = \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{56}{3}$$

Dvs. $\underline{\underline{A_M = \frac{56}{3}}}$

c) Det er de samme grænser, der skal anvendes til at bestemme rumfanget af omdrejningslegemet:

$$V = \int_0^4 \pi\cdot f(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{10624\,\pi}{105} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 317.8693368$$

Dvs. $\underline{\underline{V = 317.87}}$

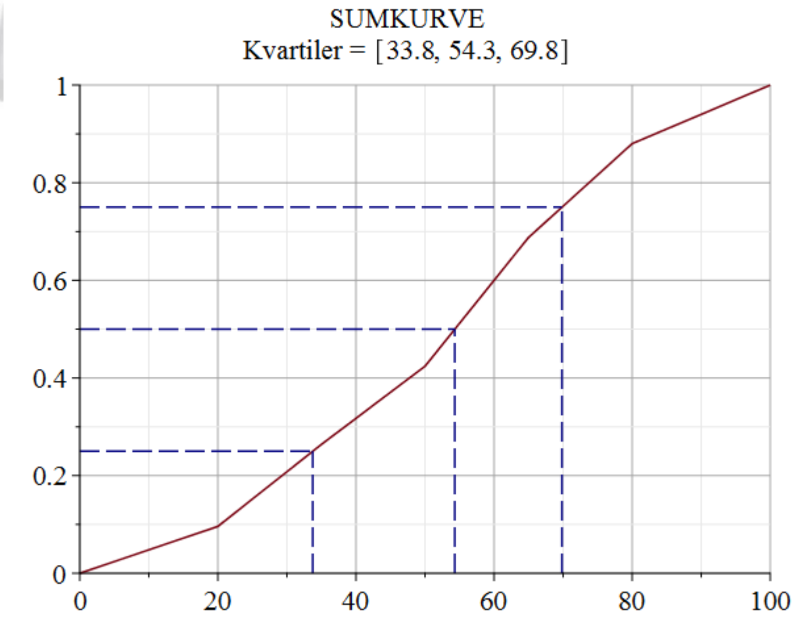
27. maj 2020 opgave 8:

a) Tallene indtastes i en matrix:

$$Paratviden := \begin{bmatrix} 0..20 & 60 \\ 20..35 & 105 \\ 35..50 & 100 \\ 50..65 & 165 \\ 65..80 & 120 \\ 80..100 & 75 \end{bmatrix}:$$

Med en kommando fra Gym-pakken kan sumkurven så tegnes:

$plotSumkurve(Paratviden)$



Kvartilsættet er samtidig beregnet til $\underline{\underline{(34\ \%, 54\ \%, 70\ \%)}}$

b) Dette spørgsmål kan ikke besvares. Det kan være alt mellem 80% og 100% afhængigt af, hvordan de 75 bedste resultater er fordelt inden for intervallet]80,100].

Men ideen med opgaven er nok, at man skal gøre følgende:

50 elever ud af 625 er $\dfrac{50}{625.} = 0.08000000000 = 8\ \%$

Dvs. man kan så bestemme 92%-fraktilen.

$fraktil(Paratviden, 0.92) = 86.66666667$

Hvis man går ud fra, at resultaterne er jævnt fordelt i intervallet (hvilket man ikke kan gå ud fra), så skal man altså have mindst **87%** for at modtage diplom.

27. maj 2020 opgave 9:

$l:\ 6x + 8y + 12 = 0 \qquad m:\ 2x - 3y + 12 = 0$

a) Skæringen mellem linjen og førsteaksen findes ved at udnytte, at alle punkter på førsteaksen har andenkoordinaten 0, dvs. i ligningen for l indsættes 0 på y's plads:

$6x + 8 \cdot 0 + 12 = 0 \Leftrightarrow 6x = -12 \Leftrightarrow x = -2$

Så skæringspunktet er $\underline{\underline{(-2, 0)}}$

b)Vinklen mellem linjerne kan bestemmes ved at finde vinklen mellem normalvektorer for de to linjer. Ud fra ligninger aflæses:

$$\vec{n_l} := \langle 6, 8\rangle = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\vec{n_m} := \langle 2, -3\rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Vinklen mellem vektorerne kan så bestemmes:

$$\cos(v) = \frac{\vec{n_l} \bullet \vec{n_m}}{|\vec{n_l}| \cdot |\vec{n_m}|}$$

$$Cos(v) = \frac{dotP(\vec{n_l}, \vec{n_m})}{len(\vec{n_l}) \cdot len(\vec{n_m})} \xrightarrow{\text{solve for v}} [[v = 109.4400348]]$$

Det er den stumpe vinkel, der er fundet. Den spidse vinkel er supplementvinklen:

$v_{spids} = 180 - 109.4400348 = 70.5599652$

Dvs. den spidse vinkel mellem linjerne l og m er **70,6°**

27. maj 2020 opgave 10:

$f(x) := \sqrt{(x-3)^2 + 16}$:

a) Da funktionen er indlæst i Maple, kan man bestemme tangentligningen ved:

$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$

$$y - f(6) = f'(6) \cdot (x - 6) \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = \frac{3\sqrt{25}\,(x-6)}{25} + 5 \xrightarrow{\text{at 10 digits}} y = 0.6000000000\,x + 1.400000000$$

Dvs. tangentens ligning er $\underline{\underline{y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{5}}}$

b) For at bestemme monotoniforholdene findes først de lokale ekstremumssteder.

$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 3\}$

Arten af dette ekstremumssted bestemmes ved at se på fortegnet for den anden afledede:

$f''(3) = \frac{\sqrt{16}}{16} > 0$, dvs. lokalt minimumssted.

Der er ingen begrænsninger i definitionsmængden (den er alle reelle tal), så man har:

***f* er aftagende i intervallet]-∞,3] og voksende i intervallet [3,∞[**

27. maj 2020 opgave 11:

$y' = 0.034 \cdot y - 250 \cdot 1.011^t$

$y(t)$: Størrelsen af pensionsopsparingen målt i tusinde kroner.

t: Tidspunktet målt i år fra den dato, hvor personen går på pension.

Det er oplyst, at $y(0) = 4500$.

a) Differentialligningen kan løses sammen med den angivne begyndelsesbetingelse:

$$y'(t) = 0.034 \cdot y(t) - 250 \cdot 1.011^t,\ y(0) = 4500 \xrightarrow{\text{solve DE}}$$

$$y(t) = -\frac{125000\ 1011^t\ 1000^{-t}}{500 \ln(1011) - 1500 \ln(10) - 17} + e^{\frac{17\,t}{500}} \left(4500 + \frac{125000}{500 \ln(1011) - 1500 \ln(10) - 17}\right) \xrightarrow{\text{at 10 digits}} y(t)$$

$$= 10841.25540\ 1011.^t\ 1000.^{-1.\,t} - 6341.25540\ e^{0.03400000000\,t}$$

Dvs. $\boldsymbol{y(t) := 10841.25540 \cdot 1011.^t \cdot 1000.^{-1.\,t} - 6341.25540 \cdot e^{0.03400000000 \cdot t}}$:

b) En pensionsopsparing på 0 svarer til $y(t) = 0$, og denne ligning kan Maple løse:

$$y(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t = 23.25588227]]$$

Dvs. **23 år og 3 måneder fra den dato, hvor personen går på pension, er pensionsopsparingen på 0.**

27. maj 2020 opgave 12:

a) Som variable benyttes:

***t*: Tiden målt i antal år efter 1986**

***N*: Antal atomsprænghoveder**

Det er oplyst, at sammenhængen er en eksponentiel udvikling, og da man har mere end to sæt sammenhørende værdier, skal der laves regression.

$Tiden := [0, 4, 9, 14, 19, 24, 29]$:

$Atomsprænghoveder := [40159, 32980, 18179, 12188, 7000, 5215, 4500]$:

$N(t) := ExpReg(Tiden, Atomsprænghoveder, t)$:

$$N(t) = 39816.5066208430\ 0.921448994951214^t$$

Dvs. $\underline{\underline{N(t) = 39817 \cdot 0.921^t}}$

b) Da man kender fremskrivningsfaktoren, kan halveringstiden beregnes:

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(a)} = \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.921448994951214)} = 8.472868459$$

Dvs. **halveringstiden er 8,5 år**

c) Først findes det årstal i perioden 1986-2015, hvor der var 25000 atomsprænghoveder:

$$N(t) = 25000 \xrightarrow{\text{solve}} \{t = 5.689010543\}$$

Dvs. at i år **1991** havde Rusland 25000 atomsprænghoveder (der skal ikke rundes op, da det vil ske i løbet af året)

I den lineære model fastholdes t som den samme variabel, dvs. man vil så blot få negative værdier, da alle årene ligger før 1986.

Da væksten er 1568 atomsprænghoveder om året, bliver den lineære model:

$M(t) := 1568 \cdot t + 39817$:

Så i perioden 1961 - 1986 er der 25000 atomsprænghoveder til tiden:

$$M(t) = 25000. \xrightarrow{\text{solve}} \{t = -9.449617347\}$$

$$1986 - 9.449617347 = 1976.550383$$

Dvs. **i år 1976** var der også 25000 atomsprænghoveder i Rusland.

27. maj 2020 opgave 13:

Punkterne lægges ind i Maple ved deres stedvektorer:

$\overrightarrow{OA} := \langle 0, 120, 0\rangle : \overrightarrow{OB} := \langle 103.9, -60, 0\rangle : \overrightarrow{OP} := \langle 0, 0, 1500\rangle :$

a) Til en parameterfremstilling har man brug for et punkt og en retningsvektor. Som punkt vælges A.

Som retningsvektor vælges $\overrightarrow{AP} := \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ -120 \\ 1500 \end{bmatrix}$

Dvs. parameterfremstillingen bliver: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 120 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -120 \\ 1500 \end{pmatrix}$

b) Da kuglerne rører hverandre parvist i ét punkt, vil afstanden mellem A og B svare til to radier.

$\overrightarrow{AB} := \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 103.900000000000 \\ -180. \\ 0. \end{bmatrix}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{103.9^2 + 180^2 + 0^2} = 207.8345736$

Dvs. radius for en skærm er $r := \dfrac{207.8345736}{2} = 103.9172868$

Så kuglens ligning bliver:

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$

$(x - 0)^2 + (y - 120)^2 + (z - 0)^2 = r^2 =$

$$x^2 + (y - 120)^2 + z^2 = 10798.80250$$

c) Dette punkt svarer til skæringen mellem linjen gennem A og P samt kuglen.
Der vil være to skæringspunkter, og Q vil så være punktet svarende til den parameterværdi, der ligger mellem 0 og 1 (da parameterværdien 0 svarer til punktet A).

$solve([x = 0, y = 120 - 120 \cdot t, z = 1500 \cdot t, x^2 + (y - 120)^2 + z^2 = r^2], \{x, y, z, t\}) =$

$\{t = 0.06905755947, x = 0., y = 111.7130929, z = 103.5863392\}, \{t = -0.06905755947, x = 0., y = 128.2869071, z = -103.5863392\}$

Dvs. $\underline{\underline{Q(0, 111.7, 103.6)}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

27. maj 2020 opgave 14:

a) Oplysninger fra opgaven lægges ind i Maple:

$A := 2 \cdot B : C := 6 \cdot B : BC := 12 :$

Så kan vinkel B bestemmes ud fra, at vinkelsummen i en trekant er 180°:

$$180 = A + B + C \xrightarrow{\text{solve}} \{B = 20\}$$

Dvs. $\underline{\underline{\angle B = 20°}}$

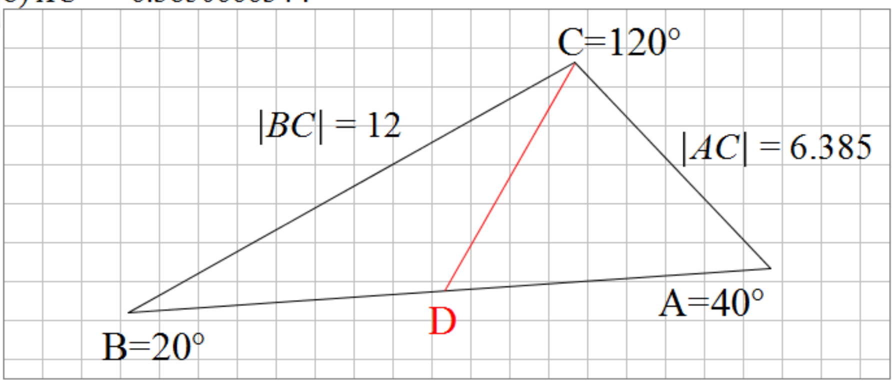
$B := 20 :$

Så kan længden af siden AC bestemmes med sinusrelationerne:

$$\frac{AC}{Sin(B)} = \frac{BC}{Sin(A)} \xrightarrow{\text{solve}} \{AC = 6.385066634\}$$

Dvs. $\underline{\underline{|AC| = 6.385}}$

b) $AC := 6.385066634 :$



Medianens fodpunkt kaldes D.

For at kunne beregne længden af medianen, skal man kunne regne på enten trekant BCD eller ACD. Her vælges BCD.

Man skal kende længden af siden BD, så først bestemmes længden af AB:

$$Cos(C) = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC} \xrightarrow{\text{solve}} \{AB = 16.16755626\}, \{AB = -16.16755626\}$$

Da det er en sidelængde forkastes den negative løsning:

$AB := 16.16755626 :$

Da den røde linje er en median, der deles siden på midten, har man:

$$BD := \frac{AB}{2} = 8.083778130$$

Og så kan længden af medianen bestemmes:

$$Cos(B) = \frac{BC^2 + BD^2 - CD^2}{2 \cdot BC \cdot BD} \xrightarrow{\text{solve}} \{CD = 5.199718176\}, \{CD = -5.199718176\}$$

En sidelængde er positiv, så **længden af medianen m_c er 5,2**

13. august 2020: Delprøven UDEN hjælpemidler

13. august 2020 Opgave 1: $\dfrac{35\cdot a^9\cdot b^7}{7\cdot a^5\cdot b^{-3}}=\dfrac{35}{7}\cdot a^{9-5}\cdot b^{7-(-3)}=\underline{\underline{5\cdot a^4\cdot b^{10}}}$

13. august 2020 Opgave 2: $g(x)=f(x)+3 \quad ; \quad h(x)=f(x-4)$

Grafen for *g* er en lodret parallelforskydning af grafen for *f* med 3 opad.
Så *B* er grafen for *f*
og *C* er grafen for *g*
Grafen for *h* er en vandret forskydning af grafen for *f* med 4 til højre, så
***A* er grafen for *h*.**

13. august 2020 Opgave 3: Andengradsligningen løses ved faktorisering og anvendelse af nulreglen:

$$x^2+10x-24=0 \;\Leftrightarrow\; (x+12)\cdot(x-2)=0 \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{x=-12 \;\vee\; x=2}}$$

13. august 2020 Opgave 4: Der integreres ledvist

$$\int\left(4x^3+20x+3\right)dx=x^4+20\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2+3x+k=\underline{\underline{x^4+10x^2+3x+k}}$$

13. august 2020 Opgave 5: $f(x)=(2x+5)\cdot \mathrm{e}^x$

Den afledede funktion bestemmes med produktreglen:

$$f'(x)=2\cdot\mathrm{e}^x+(2x+5)\cdot\mathrm{e}^x=7\cdot\mathrm{e}^x+2x\cdot\mathrm{e}^x$$

Herefter kan differentialkvotienten i 0 bestemmes:

$$f'(0)=7\cdot\mathrm{e}^0+2\cdot 0\cdot\mathrm{e}^0=7\cdot 1+0=\underline{\underline{7}}$$

13. august 2020 Opgave 6: Trekanterne *ABC* og *ADE* er ensvinklede, da de begge er retvinklede og deler vinkel *A*. Dvs. forholdet mellem ensliggende sider er konstant:

$$\frac{|AC|}{|AE|}=\frac{|BC|}{|DE|} \;\Leftrightarrow\; |AC|=\frac{|BC|}{|DE|}\cdot|AE|$$

$$|AC|=\frac{4{,}5}{3}\cdot 4=\frac{18}{3}=\underline{\underline{6}}$$

Arealet af firkanten bestemmes som forskellen mellem arealerne af trekanterne *ABC* og *ADE*:

$$A_{BCDE}=T_{ABC}-T_{ADE}=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BC|-\frac{1}{2}\cdot|AE|\cdot|DE|=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4{,}5-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3=13{,}5-6=\underline{\underline{7{,}5}}$$

13. august 2020: Delprøven MED hjælpemidler

<u>*13. august 2020 opgave 7:*</u> $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}$

Opgave 7

$\vec{a} := \langle 7, 2 \rangle : \vec{b} := \langle 9, -4 \rangle :$

a) Arealet af trekanten er halvdelen af den numeriske værdi af determinanten af vektorparret $T = \frac{1}{2} \cdot \left| det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \right|$

$T = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} 7 & 9 \\ 2 & -4 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |7 \cdot (-4) - 2 \cdot 9| = \frac{1}{2} \cdot |-28 - 18| = \frac{1}{2} \cdot |-46| = \underline{\underline{23}}$

Det kan også udregnes med en kommando fra Gym-pakken:

$with(Gym):$

$T = \frac{1}{2} \cdot \left| det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \right| = 23$

b) Projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er givet ved $\vec{a_b} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2} \cdot \vec{b}$

$\vec{a_b} = \frac{dotP\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{\left(len\left(\vec{b}\right)\right)^2} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} \frac{495}{97} \\ -\frac{220}{97} \end{bmatrix}$

Dvs. $\vec{a_b} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{495}{97} \\ -\frac{220}{97} \end{pmatrix}}}$

<u>*13. august 2020 opgave 8:*</u>

a) Tidspunktet er angivet i antal år efter 2010, og kørslen er angivet i antal kørte km målt i mia. Sammenhængen er en eksponential udvikling, så der skal anvendes eksponentiel regression.

$Tidspunkt := [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]:$

$Kørsel := [13.5, 14.0, 14.5, 14.9, 15.6, 16.3, 17.1]:$

$f(x) := ExpReg(Tidspunkt, Kørsel, x) = x \rightarrow ExpReg(Tidspunkt, Kørsel, x)$

$f(x) = 13.4251203685823\ 1.03956641745308^x$

Dvs. $\underline{\underline{a = 1.0396}}$ og $\underline{\underline{b = 13.4251}}$

b) Fordoblingstiden bestemmes ud fra fremskrivningsfaktoren:

$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2.)}{\ln(1.03956641745308)} = 17.86290566$

Dvs. **at det kørte antal km. på de danske motorveje ifølge modellen fordobles på 18 år**

c) Modellens værdi i 2017 beregnes ved at indsætte $x = 7$ i forskriften:

$f(7) = 17.6150499221071$

Dette er modellens værdi, og det skal bestemmes, hvor mange procent 17,8 afviger fra dette tal:

$\frac{17.8 - 17.6150499221071}{17.6150499221071} = 0.01049954901$

Dvs. **det faktiske tal afviger med 1%**

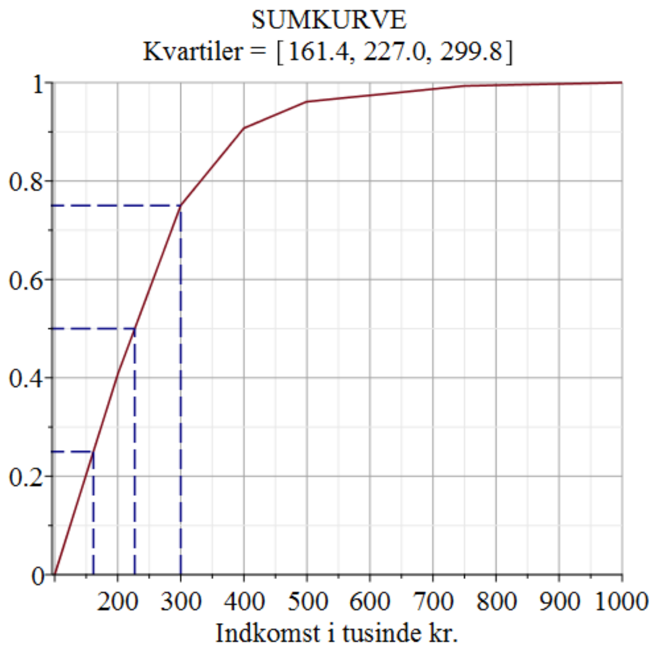
<u>13. august 2020 opgave 9:</u>

a) Data for indkomstfordelingen gemmes i en matrix.

$$M := \begin{bmatrix} 100..200 & 1570 \\ 200..300 & 1323 \\ 300..400 & 604 \\ 400..500 & 208 \\ 500..750 & 123 \\ 750..1000 & 26 \end{bmatrix}:$$

Så kan sumkurven tegnes:

$plotSumkurve(M)$



b) Andelen af personer med indkomst over 600 tusinde bestemmes ved at trække funktionsværdien fra 1:

$1 - sumkurve(M, 600) = 0.0258951738453554$

Dvs. at **2,6% af lønmodtagerne havde i 2016 en indkomst over 600 tusinde kr.**

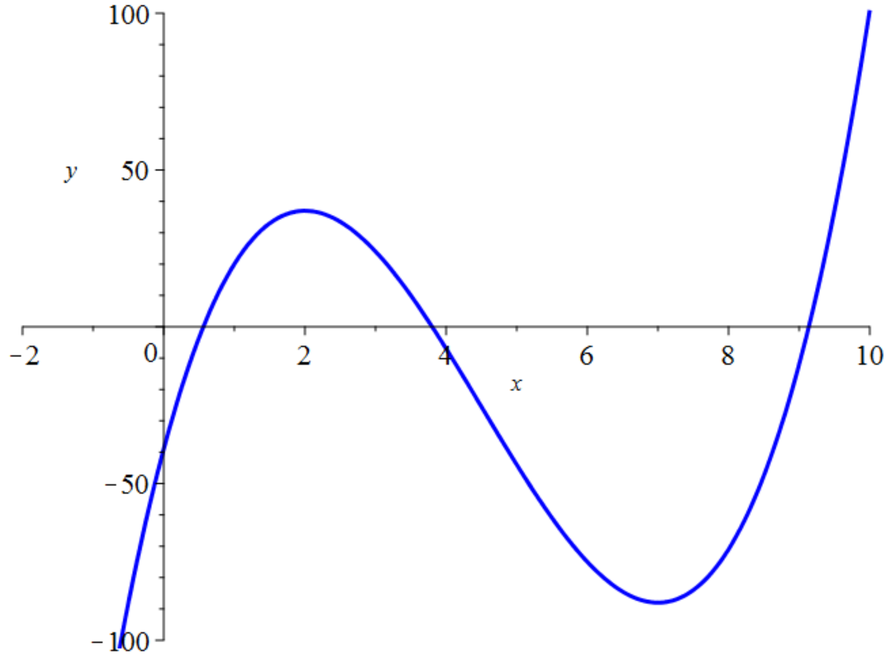
Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

13. august 2020 opgave 10: $f(x) = 2x^3 - 27x^2 + 84x - 39$

a) $f(x) := 2 \cdot x^3 - 27 \cdot x^2 + 84 \cdot x - 39$:

Når grafen for f tegnes, skal man kunne se alle nulpunkter og ekstremumssteder:

$plot(f(x), x = -2..10, y = -100..100, thickness = 3, color = blue)$



b) For at bestemme monotoniforholdene findes først de steder, hvor der er vandret tangent:

$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 7\}, \{x = 2\}$

Med fortegnet for den anden afledede afgøres det, hvilken type punkt, der er tale om:

$f''(2) = -30 < 0$, dvs. lokalt maksimumssted (hvilket selvfølgelig også kan ses på grafen)

$f''(7) = 30 > 0$, dvs. lokalt minimumssted.

Dvs. ***f*** **er voksende i intervallet]-∞,2], aftagende i intervallet [2,7] og voksende i intervallet [7,∞[**

c) $g(x) := -f(x)$:

Tangenternes hældninger svarer til værdierne af de afledede funktioner, så hvis hældningerne skal være ens, har man:

$g'(x) = f'(x) \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 2\}, \{x = 7\}$

Dvs. de mulige førstekoordinater er $\underline{\underline{2 \text{ og } 7}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

13. august 2020 opgave 11: $f(x) = e^x - e^{x^2}$

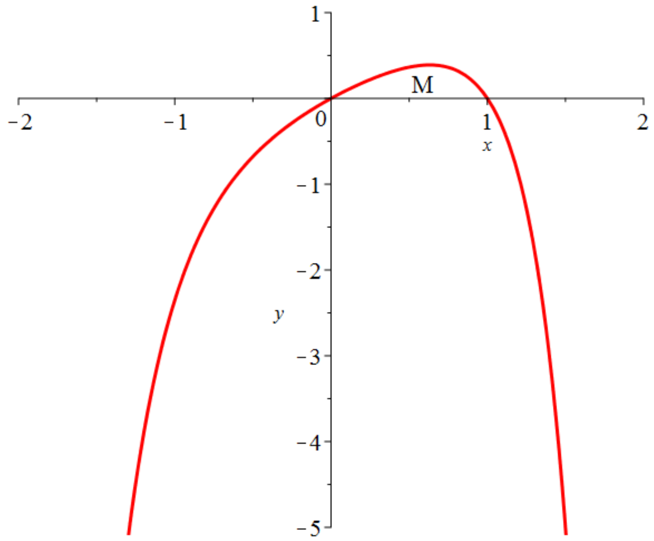
a) $f(x) := e^x - e^{x^2}$:

$f(x) = 0. \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 0.\}, \{x = 1.\}$

Dvs. nulpunkterne er $\underline{\underline{x = 0 \text{ og } x = 1}}$

b) For at få et overblik tegnes grafen for f:

$plot(f(x), x = -2..2, y = -5..1, color = red, thickness = 3)$



De fundne nulpunkter i ovenstående spørgsmål fungerer altså som grænser i det bestemte integral, der svarer til arealet af punktmængden M:

$$A_M = \int_0^1 f(x)\,dx = -1 - \frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{erfi}(1)}{2} + e \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 0.255630082$$

Dvs. $\underline{\underline{A_M = 0.25563}}$

13. august 2020 opgave 12:

$with(Gym)$:

Punkterne angives ved deres stedvektorer: $\overrightarrow{OP} := \langle 0, 3.4\rangle : \overrightarrow{OQ} := \langle 0.24, 0\rangle : \overrightarrow{OS} := \langle 5.9, 3.4\rangle$:

a) For at angive en parameterfremstilling for linjen l har man brug for et punkt på linjen (enten P eller Q - her vælges P) samt en retningsvektor - her kan $\overrightarrow{QP}$ bruges.

$$\overrightarrow{QP} := \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \begin{bmatrix} -0.240000000000000 \\ 3.40000000000000 \end{bmatrix}$$

Så en paramterfremstilling er: $\underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3.4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -0.24 \\ 3.4 \end{pmatrix}}}$

b) Da linjen l er tangent til cirklen, er den ortogonal med linjen m gennem punkterne P og C, dvs. retningsvektoren for l kan bruges som normalvektor for linjen m. Da P ligger på m, får linjen m ligningen:

$m: -0.24 \cdot (x - 0) + 3.4 \cdot (y - 3.4) = 0 \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = 0.07058823530\,x + 3.400000000$

Centrum for cirklen kan bestemmes som skæringen mellem linjen m og linjen gennem C og S med ligningen $0.24 \cdot x + 3.4 \cdot y - 12.976 = 0$

$[y = 0.07058823530\,x + 3.4,\ 0.24 \cdot x + 3.4 \cdot y - 12.976 = 0] \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 2.950000000, y = 3.608235294\}$

Centrum i cirklen svarer til afstanden fra C til P:

$r := \sqrt{(3.608235294 - 3.4)^2 + (2.95 - 0)^2} = 2.957340349$

$r^2 = 8.745861940$

Da man nu kender cirklens centrum og kvadratet på radius, har man ligningen for cirklen:

$\underline{\underline{(x - 2.95)^2 + (y - 3.608235294)^2 = 8.745861940}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

13. august 2020 opgave 13:

$with(Gym)$:

Punkternes koordinater angives ved deres stedvektorer (der regnes i dm):

$\overrightarrow{OA} := \langle 25, -10, 10\rangle : \overrightarrow{OB} := \langle 25, 10, 10\rangle : \overrightarrow{OC} := \langle 0, -20, 0\rangle : \overrightarrow{OD} := \langle 0, 20, 0\rangle$:

a) Først bestemmes en ligning for den plan, der indeholder punkterne A, B og C:

$$\overrightarrow{AB} := \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} := \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} -25 \\ -10 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -200 \\ 0 \\ 500 \end{bmatrix}$$

Som normalvektor for planen kan man anvende en nedskaleres version af vektoren: $\vec{n} := \langle -2, 0, 5\rangle = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

Med udgangspunkt i punktet A (der er frit valg mellem de tre punkter) får man:

$\vec{n} \bullet \left(\langle x, y, z\rangle - \overrightarrow{OA}\right) = 0$

$$-2\,x + 5\,z = 0$$

Man bør også lige tjekke, at punktet D ligger i denne plan (ellers skal man stole på opgaveformuleringen):

$-2\cdot 0 + 5\cdot 0 = 0$

Da det er et sandt udsagn, ligger D i planen, der altså har ligningen $\underline{\underline{-2\,x + 5\,z = 0}}$

b) Den skrå gulvflade kan deles op i to trekanter ABC og BCD, og arealerne bestemmes ud fra længderne af krydsprodukter ($T = \frac{1}{2}\cdot|\vec{a} \times \vec{b}|$):

$$\overrightarrow{BD} := \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} -25 \\ 10 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} := \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} -25 \\ -30 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$A_{ABDC} = T_{ABC} + T_{BCD} = \frac{1}{2}\cdot len\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) + \frac{1}{2}\cdot len\left(\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC}\right) = 150\sqrt{29} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 807.7747210$$

Dvs. arealet er **807,8 dm^2**

c) Vinklen mellem planer svarer til vinklen mellem deres normalvektorer, og planen med ligningen

$2\,x + 5\,y - 100 = 0$ har normalvektoren $\vec{m} := \langle 2, 5, 0\rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

$$Cos(v) = \frac{dotP(\vec{n}, \vec{m})}{len(\vec{n})\cdot len(\vec{m})} \xrightarrow{\text{solve for v}} [[v = 97.92814177]]$$

Da denne vinkel er stump, har man $\underline{\underline{v_{stump} = 97.9°}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

13. august 2020 opgave 14:

$with(Gym):$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{v}{200}\cdot(45 - T) + 0.015\cdot(22 - T)$$

T: Badevandets temperatur i grader celsius

x: Tidspunktet målt i minutter efter start af badet

v: Hastighed for tilførsel af vand målt i liter pr. minut.

a) Når $T(0) = 39$ og $v = 1.0$ får man den partikulære løsning:

$$\left[T'(x) = \frac{1}{200}\cdot(45 - T(x)) + 0.015\cdot(22 - T(x)),\ T(0) = 39\right] \xrightarrow{\text{solve DE}} T(x) = \frac{111}{4} + \frac{45\,e^{-\frac{x}{50}}}{4}$$

$$T(x) := \frac{111}{4} + \frac{45\,e^{-\frac{x}{50}}}{4} = x \rightarrow \frac{111}{4} + \frac{45}{4}\,e^{-\frac{1}{50}x}$$

Så kan temperaturen efter 40 minutter bestemmes:

$$T(40) = \frac{111}{4} + \frac{45\,e^{-\frac{4}{5}}}{4} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 32.80495085$$

Dvs. $\underline{\underline{T = 32.8°C}}$

b) Løsningen med ukendt v bliver:

$$\left[T'(x) = \frac{v}{200}\cdot(45 - T(x)) + 0.015\cdot(22 - T(x)),\ T(0) = 39\right] \xrightarrow{\text{solve DE}} T(x) = e^{-\frac{(v+3)\,x}{200}}\left(39 - \frac{3\,(15\,v + 22)}{v+3}\right) + \frac{3\,(15\,v + 22)}{v+3}$$

Hvis temperaturen skal være 37 grader celsius efter 40 minutter har man:

$$e^{-\frac{(v+3)\cdot 40}{200}}\left(39 - \frac{3\,(15\,v + 22)}{v+3}\right) + \frac{3\,(15\,v + 22)}{v+3} = 37. \xrightarrow{\text{solve}} 5.127082234$$

Dvs. **hastigheden skal være 5,1 liter pr. minut.**