Løsninger til eksamensopgaver på A-niveau 2020 ny ordning

25. maj 2020: Første delprøve

<u>*Opgave 1:*</u> $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 0{,}5 \cdot t^2 \\ 2 \cdot t + 6 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

a) $\vec{s}(1)$ bestemmes ved indsættelse af 1 på parameterens plads i forskriftten:

$$\vec{s}(1) = \begin{pmatrix} 0{,}5 \cdot 1^2 \\ 2 \cdot 1 + 6 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 8 \end{pmatrix}}}$$

b) Parameterkurven går igennem punktet $P(2{,}10)$, netop hvis der findes en værdi for parameteren, hvor $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$. Så det undersøges:

$$0{,}5 \cdot t^2 = 2 \Leftrightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow t = -2 \vee t = 2$$
$$2t + 6 = 10 \Leftrightarrow 2t = 4 \Leftrightarrow t = 2$$

Da $t = 2$ giver de søgte værdier for både første- og andenkoordinaten, **går parameterkurven igennem punktet *P*.**

<u>*Opgave 2:*</u> $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Man kan begynde med af finde den afledede funktion og den form stamfunktionerne er på:

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + k$$

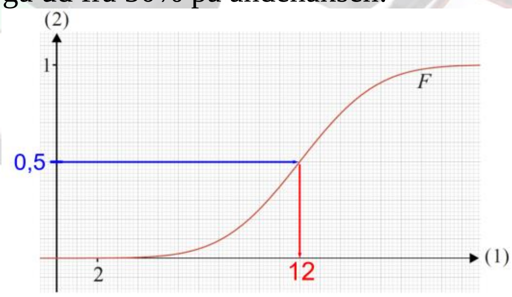
Graf *B* hører til f', da det er en lineær funktion, og *B* er en ret linje.

Graf *C* hører til f, da det er et andengradspolynomium, og *C* er en parabel.

Graf *A* hører til *F*, da det er et tredjegradspolynomium, der i modsætning til første- og andengradspolynomier har mulighed for at vende op til to gange, som *A* gør.

<u>*Opgave 3:*</u> $\dfrac{a \cdot (4a+6)}{2a} = \dfrac{4a+6}{2} = \underline{\underline{2a+3}}$

<u>*Opgave 4:*</u> Da det er en normalfordeling, svarer middelværdien til medianen, så man kan aflæse middelværdierne ved at gå ud fra 50% på andenaksen:



Dvs. $E(X) = \underline{\underline{12}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 5: $y_{n+1} = 1{,}10 \cdot y_n + 2000 \quad , \quad n = 0,1,2,\ldots$

a) Man kan ud fra differensligningen se, at beløbet på bankkontoen bliver multipliceret med 1,10 (dvs. fremskrivningsfaktoren er 1,10), og dermed er **rentefoden 10%** (rentefoden er den rigtige betegnelse for "renten i procent"), og man kan se, at der bliver lagt 2000 til beløbet, dvs. at **der hvert år indsættes 2000 kr.**

b) Med 5000 som startbeløb får man: $y_1 = 1{,}10 \cdot y_0 + 2000 = 1{,}10 \cdot 5000 + 2000 = 5500 + 2000 = 7500$
Dvs. at efter et år står der **7500 kr.** på kontoen.

Opgave 6: $f(x) = -3x^2 + 12x - 9$

a) Ligningen $f(x) = 0$ er en andengradsligning, der kan løses med diskriminantmetoden, men man kan også som her forkorte (med -3), faktorisere og anvende nulreglen:
$$0 = -3x^2 + 12x - 9 \Leftrightarrow 0 = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow 0 = (x-1)\cdot(x-3) \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1 \vee x = 3}}$$

b) Grafen er en parabel med grenene nedad (negativ *a*-værdi), så det område, der afgrænsen af grafen og førsteaksen, må – som også vist på figuren – ligge over førsteaksen mellem de to nulpunkter, der blev fundet i spørgsmål a), og som nu benyttes som grænser i det bestemte integral:
$$A_M = \int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 \left(-3x^2 + 12x - 9\right)dx = \left[-x^3 + 6x^2 - 9x\right]_1^3 =$$
$$\left(-3^3 + 6\cdot 3^2 - 9\cdot 3\right) - \left(-1^3 + 6\cdot 1^2 - 9\cdot 1\right) = (-27+54-27) - (-1+6-9) = \underline{\underline{4}}$$

Opgave 7: $f(x) = 3x - 6\cdot\ln(x) \;,\; x > 0 \qquad l: y = 2x - 7$

a) Tangenten er parallel med *l*, når den har samme hældning som *l*, dvs. tangentens hældning skal være 2. Tangentens hældning svarer til den afledede funktions værdi, så først bestemmes den afledede funktion, hvorefter dennes funktionsværdi sættes til 2:
$$f'(x) = 3 - \frac{6}{x}$$
$$2 = 3 - \frac{6}{x} \Leftrightarrow \frac{6}{x} = 3 - 2 \Leftrightarrow \frac{6}{x} = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 6}}$$

Opgave 8: $y' = 2y\cdot(8-y) \qquad P(0,2)$

a) For at kunne bestemme en ligning for tangenten skal man kende røringspunktets koordinatsæt samt tangentens hældning. Koordinatsættet er oplyst, mens hældningen kan bestemmes ved at indsætte i differentialligningen: $y' = 2\cdot 2\cdot(8-2) = 4\cdot 6 = 24$

Så kan tangentligningen bestemmes:
$$y - y_0 = a\cdot(x - x_0)$$
$$y - 2 = 24\cdot(x - 0) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 24x + 2}}$$

b) Der er tale om logistisk vækst, hvor differentialligningen er på formen $\frac{dy}{dx} = a\cdot y\cdot(M-y)$, så den fuldstændige løsning er: $f(x) = \frac{M}{1 + c\cdot e^{-a\cdot M\cdot x}} = \frac{8}{1 + c\cdot e^{-2\cdot 8\cdot x}} = \frac{8}{1 + c\cdot e^{-16x}}$

Da grafen går gennem *P*, har man: $2 = \frac{8}{1 + c\cdot e^{-16\cdot 0}} \Leftrightarrow 2 = \frac{8}{1 + c\cdot 1} \Leftrightarrow 1 + c = 4 \Leftrightarrow c = 3$

Dvs. den søgte partikulære løsning er: $\underline{\underline{f(x) = \frac{8}{1 + 3\cdot e^{-16x}}}}$

25. maj 2020: Anden delprøve

25. maj 2020 opgave 9: $f(x) = 7 \cdot \sin(2x - 5) + 3 \quad , \quad 0 \le x \le 2\pi$

a) Som man ser om lidt i spørgsmål b), vil man inden for den angivne definitionsmængde have to hele svingninger, så funktionen når at antage alle de mulige værdier.
Sinusfunktionen kan mindst give -1, så man har:

$$f_{\min} = 7 \cdot (-1) + 3 = -7 + 3 = \underline{\underline{-4}}$$

b) Da vinkelfrekvensen k er 2, bliver perioden T:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{k} = \frac{2 \cdot \pi}{2} = \underline{\underline{\pi}}$$

25. maj 2020 opgave 10:
$f(x) = a \cdot x + b$ (lineær model)
$f(x)$ er statsgæld målt i procent af BNP
x er arbejdsløshed målt i procent af arbejdsstyrken
a) Datasættet hentes ind i Maple med 'Tools'-'Assistants'-'Import Data':

$$M := \begin{bmatrix} 7.1 & 81.6 \\ 6.9 & 79.1 \\ 6.16 & 75.1 \\ 5.54 & 72.6 \\ 5.59 & 67.1 \\ 4.63 & 60.5 \\ 4.61 & 58.3 \\ 4.59 & 58.1 \\ 5.41 & 56.1 \\ 5.51 & 52.3 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

42 × 2 Matrix

with(Gym) :
Forskriften kan så bestemmes ved at lave lineær regression på datasættet:
$f(x) := LinReg(M, x)$:
$f(x) = 2.21467874258536\, x + 41.6483981810867$
Dvs. $\underline{\underline{f(x) = 2.215 \cdot x + 41.65}}$

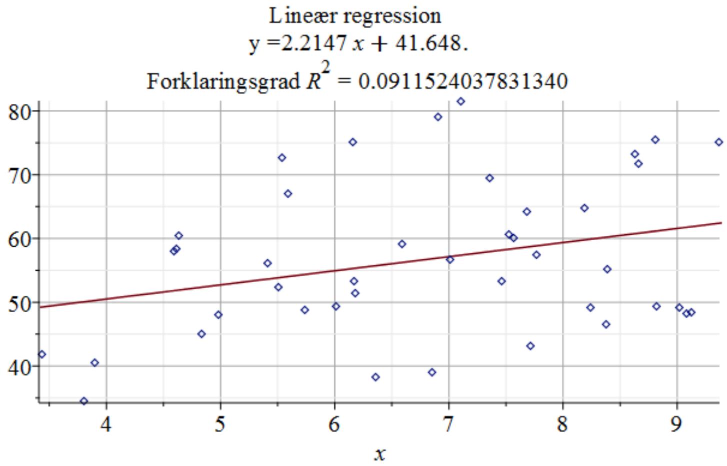
b) Med Gym-pakkens *testLin* kan man findes 95%-konfidensintervallet:
$testLin(M, konfidens = 0.95)$

	a	b
Koefficient	2.214679	41.648398
Standardfejl	1.105712	7.732141
t-stat	2.002943	5.386400
p-værdi	0.051993	0.000003
Nedre 95.00%	-0.020050	26.021159
Øvre 95.00%	4.449407	57.275637
Frihedsgrader	40	

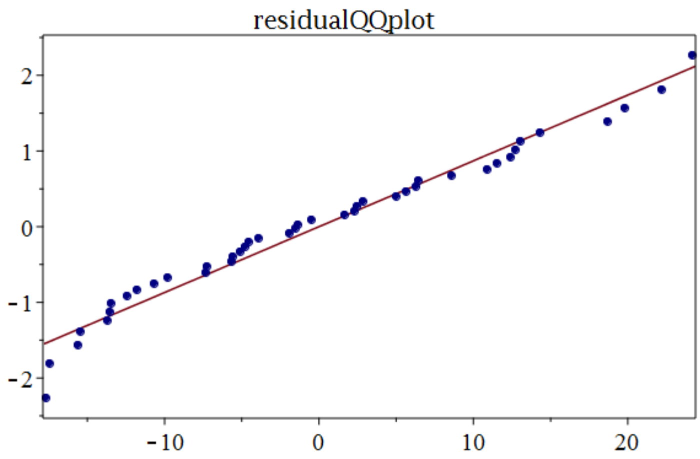
Dvs. 95%-konfidensintervallet for hældningen er $\underline{\underline{[-0.02, 4.45]}}$

Anden del af spørgsmålet er vist lidt problematisk.
Formodningen er ifølge opgaveteksten, at modellen er lineær.
Jeg vil tro, at opgavestilleren blot vil have svaret: Da konfidensintervallet både indeholder negative og positive værdier for hældningen, giver det ikke mening at snakke om en lineær model, dvs.
formodningen er IKKE rimelig (selvom man i praksis næppe vil se så firkantet på det, da det er en meget lille del af intervallet, der udgør de negative værdier).

Men egentlig er argumentationen lidt kringlet. For normalt undersøger man, om der er en lineær sammenhæng, ved at se på, om punkterne danner en ret linje i et almindeligt koordinatsystem.
Det kan være svært at afgøre:
$LinReg(M)$



Men HVIS vi siger, at det ikke er urimeligt, at de danner en ret linje, kan vi tjekke, om residualerne danner en ret linje i et QQ-plot:
$residualQQplot(M, f)$



Det kan man sige, at de gør (afvigelserne helt ude i enderne kan man ikke regne med).
Da residualerne med god tilnærmelse er normalfordelt, kan man sige, at HVIS modellen er lineær, giver det mening at udregne et konfidensinterval for hældningen.
Men pointen er så, at da konfidensintervallet indeholder både positive og negative værdier, giver det IKKE mening med et konfidensinterval, og derfor kan modellen IKKE have været lineær.
Jeg vil tro, at det er det rigtige argument, men opgaveformuleringen tyder ikke på, at det er sådan, spørgsmålet er tænkt.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

25. maj 2020 opgave 11:

restart

$f(x) = e^{2x-4}$

a) Man kan godt lade Maple bestemme en forskrift for den afledede funktion, men det kan også gøres i hånden ved at benytte reglen for differentiation af sammensat funktion:

$\underline{\underline{f'(x) = 2 \cdot e^{2x-4}}}$

b) Kurvelængden/buelængden kan bestemmes med formlen for buelængden (med grænserne 1 og 3):

$f(x) := e^{2 \cdot x - 4}:$

$l = \int_{1.}^{3.} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = 7.863069700$

Dvs. buelængden er $\underline{\underline{7.863}}$

25. maj 2020 opgave 12:

$y_{n+1} = -\frac{1}{2} \cdot y_n^{\ 2} + 2 \cdot y_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, ...$

a) En værdi er et fikspunkt, hvis man i differensligningens får det samme ud, som man har smidt ind:

$-\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = -2 + 4 = 2$. **Da man altså får 2 ud, når man smider 2 ind, er $\tilde{y} = 2$ et fikspunkt.**

b) Højresiden i differensligningen differentieres med hensyn til *y*:

$\left(-\frac{1}{2} \cdot y^2 + 2 \cdot y\right)' = -\frac{1}{2} \cdot 2\, y + 2 = -y + 2$

Fikspunktet indsat giver:

$-2 + 2 = 0$

Da $|0| = 0 < 1$ er 2 et **stabilt** fikspunkt

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

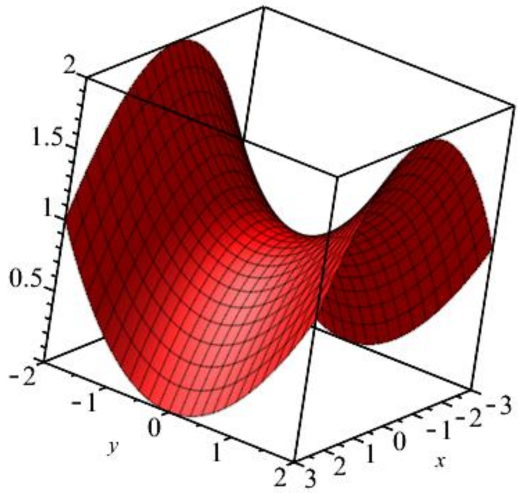
25. maj 2020 opgave 13:

$$f(x, y) := 1 - \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}:$$

$f(x, y)$ er chipsens højde over bordet.

a) I dette spørgsmål gælder det om at have sine plot-evner i orden:

$plot3d(f(x, y), x = -3..3, y = -2..2, color = red)$



b) De stationære punkter bestemmes som de punkter, hvor gradienten er 0:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y)) = 0, \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y)) = 0\right] \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 0, y = 0\}$$

Funktionsværdien dette sted er:

$f(0, 0) = 1$

Da der ikke er andre stationære punkter, må dette punkt være det omtalte saddelpunkt, dvs. saddelpunktets koordinater er $\underline{\underline{(0, 0, 1)}}$

Hvis man ikke stoler på opgaveinformationen eller bare gerne vil vise, at det fundne punkt rent faktisk er et saddelpunkt, kan man se på fortegnet for determinanten af hesse-matricen:

$$det(H) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(f(x, y)) \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2}(f(x, y)) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(f(x, y))\right)^2 = -\frac{1}{9} < 0, \text{ dvs. et saddelpunkt.}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

25. maj 2020 opgave 14:

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 4 \\ t^3 + t^2 - 4t \end{pmatrix} : \quad -3 \le t \le 3$$

a) Da det er oplyst, at dobbeltpunktet ligger på andenaksen, kan man finde parameterværdierne ved at se på, at førstekoordinaten skal være 0, dvs:

$$t^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow \underline{t = -2 \vee t = 2}$$

Hvis man tager opgaveteksten for gode varer, må dette være de to parameterværdier.
Hvis man vil eftervise, at det rent faktisk er et dobbeltpunkt, kan man indsætte og se, at andenkoordinaterne også giver det samme:

$$s(t) := \langle t^2 - 4, t^3 + t^2 - 4t \rangle :$$

$$s(-2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$s(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Dvs. $\underline{\underline{t_1 = -2 \ \text{ og } \ t_2 = 2}}$

b) En vandret tangent findes, når den afledede funktions (dvs. hastighedsfunktionen, hvis udgangspunktet er en stedfunktion) andenkoordinat er nul.

$$s'(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ 3t^2 + 2t - 4 \end{bmatrix}$$

Andenkoordinaten er 0, når $3t^2 + 2t - 4 = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{t = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{13}}{3}\right\}, \left\{t = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{13}}{3}\right\}$

Dette er parameterværdierne, og koordinatsættene bestemmes ved at indsætte i funktionsforskriften:

$$s\left(-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{13.}}{3}\right) = \begin{bmatrix} -3.245678061 \\ -2.064604932 \end{bmatrix}$$

$$s\left(-\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{13.}}{3}\right) = \begin{bmatrix} -1.643210829 \\ 4.879419747 \end{bmatrix}$$

Dvs. tangenterne er vandrette i punkterne $\underline{\underline{(-3.25, -2.06) \text{ og } (-1.64, 4.88)}}$

25. maj 2020 opgave 15:

$$\frac{dV}{dt} = 0.1 - 0.016 \cdot V^{\frac{2}{3}}$$

V er væskemængden målt i L
t er tiden målt i timer efter påfyldningens begyndelse

a) Når væskemængden er 10 L, har man $V = 10$, og det indsættes i differentialligningen for at finde hastigheden:

$$\frac{dV}{dt} = 0.1 - 0.016 \cdot 10^{\frac{2.}{3}} = 0.02573457866$$

Dvs. **væskemængden i karret øges med 0,026 L i timen**

b) Man kan hurtigt finde den øvre grænse for væskemængden ved at finde den væskemængde, hvor hastigheden er 0, da væskemængden vil øges, indtil andet led på højresiden når op på 0.1:

$$0 = 0.1 - 0.016 \cdot V^{\frac{2}{3.}} \xrightarrow{\text{solve}} \{V = 15.62500000\}$$

Dvs. **den øvre grænse for væskemængden er 15,6 L**

27. maj 2020: Første delprøve

27. maj 2020 opgave 1: Der integreres ledvist: $\int\left(e^x+5\right)dx = e^x + 5x + k$

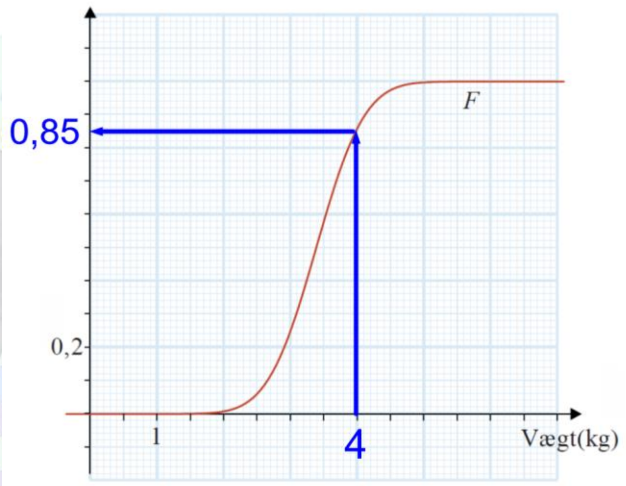
27. maj 2020 opgave 2: a) De normale udfald er de udfald, der ligger inden for to spredninger fra middelværdien:

$\mu + 2\cdot\sigma = 3{,}38 + 2\cdot 0{,}57 = 3{,}38 + 1{,}14 = 4{,}52$

$\mu - 2\cdot\sigma = 3{,}38 - 2\cdot 0{,}57 = 3{,}38 - 1{,}14 = 2{,}24$

Dvs. intervallet for de normale udfald er $\underline{\underline{[2.24, 4.52]}}$

b) Man går lodret op fra 4 kg til grafen og derfra vandret ud til andenaksen og aflæser 0,85.



Dvs. sandsynligheden for, at fødselsvægten for en pige er mindre end 4 kg, er **85%**

27. maj 2020 opgave 3: $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\cdot\cos(t)\\6\cdot\sin(t)\end{pmatrix}$, $0 \le t \le 2\pi$

a) Parameterfremstillingen for en cirkel med centrum i (a,b) og radius r er $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}r\cdot\cos(t)\\r\cdot\sin(t)\end{pmatrix}$

Så man kan aflæse, at $\underline{\underline{C(3,1) \text{ og } r = 6}}$

b) $\vec{s}(0) = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\cdot\cos(0)\\6\cdot\sin(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\cdot 1\\6\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}9\\1\end{pmatrix}}}$

c) Man differentierer koordinatvis i vektorfunktioner. Desuden gælder som altid reglen om ledvis differentiation:

$$\vec{s}\,'(t) = \left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\cdot\cos(t)\\6\cdot\sin(t)\end{pmatrix}\right)' = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}' + \begin{pmatrix}6\cdot\cos(t)\\6\cdot\sin(t)\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\cdot(-\sin(t))\\6\cdot\cos(t)\end{pmatrix} = \underline{\underline{6\cdot\begin{pmatrix}-\sin(t)\\\cos(t)\end{pmatrix}}}$$

27. maj 2020 opgave 4: $y_{n+1} = 2 \cdot y_n + 8 \quad , \quad n = 0,1,2,...$

y_n :Antal bakterier målt i millioner
n: Tidspunktet målt i timer.
Det er oplyst, at $y_0 = 51$

a) Modellen benyttes til at regne to tidsskridt frem:
$y_1 = 2 \cdot y_0 + 8 = 2 \cdot 51 + 8 = 102 + 8 = 110$
$y_2 = 2 \cdot y_1 + 8 = 2 \cdot 110 + 8 = 220 + 8 = 228$
Dvs. **efter to timer er der 228 millioner bakterier i bakteriekolonien.**

b) Differensligningen er på formen $y_{n+1} = a \cdot y_n + b$ (formel F2 i indstiksarket til formelsamlingen), hvor løsningen på lukket form er $y_n = a^n \cdot y_0 + b \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1}$. Da $a = 2$ og $b = 8$, har man:

$$y_n = 2^n \cdot 51 + 8 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 51 \cdot 2^n + 8 \cdot \frac{2^n - 1}{1} = 51 \cdot 2^n + 8 \cdot 2^n - 8 = \underline{\underline{59 \cdot 2^n - 8}}$$

27. maj 2020 opgave 5: $y' = 6 - \frac{1}{2} \cdot y \qquad (0,8)$

a) Differentialkvotienten i 0 findes ved indsættelse af den kendte funktionsværdi 8 i differentialligningen (da det netop er funktionsværdien i 0):

$$f'(0) = 6 - \frac{1}{2} \cdot 8 = 6 - 4 = \underline{\underline{2}}$$

b) Det er en standarddifferentialligning (nr. 177 i formelsamlingen) på formen $y' = b - a \cdot y$ med den fuldstændige løsning $y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$.

Så den fuldstændige løsning er: $f(x) = \frac{6}{0,5} + c \cdot e^{-0,5 \cdot x} = 12 + c \cdot e^{-0,5 \cdot x}$

For at bestemme den partikulære løsning, hvis graf går gennem det oplyste punkt, skal man indsætte punktets koordinater i funktionsforskriften og dermed bestemme *c*:

$$8 = 12 + c \cdot e^{-0,5 \cdot 0} \Leftrightarrow -4 = c \cdot e^0 \Leftrightarrow c = -4$$

Dvs. forskriften for *f* er : $\underline{\underline{f(x) = 12 - 4 \cdot e^{-0,5 \cdot x}}}$

27. maj 2020 opgave 6: $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + 12 \cdot x + 10$

Den afledede funktion er: $f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + 12$

a) Når $a = 3$ og $b = 20$, har man: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 9x^2 + 40x + 12 = 0$

Diskriminanten beregnes for at finde antallet af løsninger til denne andengradsligning:
$d = 40^2 - 4 \cdot 9 \cdot 12 = 1600 - 432 = 1168 > 0$, dvs. **der er 2 løsninger**

b) $f'(-2) = 0 \Leftrightarrow 3a \cdot (-2)^2 + 2b \cdot (-2) + 12 = 0 \Leftrightarrow 12a - 4b + 12 = 0$

$f'(2) = 12 \Leftrightarrow 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + 12 = 12 \Leftrightarrow 12a + 4b = 0$

Hermed har man to ligninger med to ubekendte. Ved at lægge ligningerne sammen får man én ligning med *a* som eneste ubekendt:

$$(12a - 4b + 12) + (12a + 4b) = 0 + 0 \Leftrightarrow 24a + 12 = 0 \Leftrightarrow 24a = -12 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = -\frac{1}{2}}}$$

Man kan sætte denne værdi ind i en af ligningerne for at finde *b*-værdien, men i dette tilfælde er det lige så nemt at trække den nederste ligning fra den øverste og på den måde få én ligning med *b*-værdien som eneste ubekendte:

$$(12a + 4b) - (12a - 4b + 12) = 0 - 0 \Leftrightarrow 8b - 12 = 0 \Leftrightarrow 8b = 12 \Leftrightarrow b = \frac{12}{8} \Leftrightarrow \underline{\underline{b = \frac{3}{2}}}$$

27. maj 2020: Anden delprøve

27. maj 2020 opgave 7: $f(x) = 3 - x - \ln(4-x)$, $x < 4$

$f(x) := 3 - x - \ln(4 - x)$:

a) Det er indirekte angivet på figuren, at funktionen har et nulpunkt i 3, men man bør alligevel tjekke, at det passer:

$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 3\}$

Dvs. grænserne i det bestemte integral, der angiver arealet af M, er 0 og 3:

$A_M = \int_0^3 f(x)\,dx = \frac{15}{2} - 8\ln(2) \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 1.954822555$

Dvs. $\underline{\underline{A_M = 1.955}}$

b) Det er de samme grænser, der skal anvendes, når man skal finde rumfanget af omdrejningslegemet:

$V = \int_0^3 \pi \cdot f(x)^2\,dx = \frac{33\pi}{2} - 32\pi\ln(2) + 16\pi\ln(2)^2 \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 6.30372642$

Dvs. $\underline{\underline{V = 6.304}}$

27. maj 2020 opgave 8: Data hentes ind i Maple via *Tools* → *Assistants* → *Import Data*:

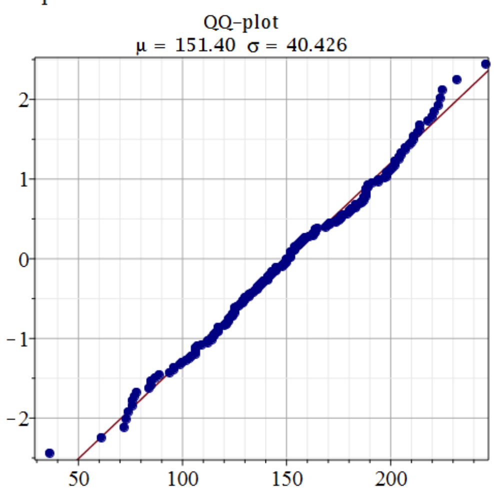
with(*Gym*) :

$$Pointtal := \begin{bmatrix} 117.0 \\ 157.0 \\ 169.0 \\ 155.0 \\ 143.0 \\ 207.0 \\ 164.0 \\ 183.0 \\ 189.0 \\ 128.0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

202 × 1 Matrix

a) For at undersøge, om pointtallene tilnærmelsesvis er normalfordelte, laves et QQ-plot:

QQplot(*Pointtal*)



Da punkterne med god tilnærmelse (små, usystematiske afvigelser) danner en ret linje, er pointtallene tilnærmelsesvis normalfordelte.

b) Fordelingsfunktionen for normalfordelingen findes i Gym-pakken som *normalcdf*. Fordelingsfunktionen angiver sandsynligheden op til og med den angivne værdi, så da man skal finde sandsynligheden for at få **mere** end 200 point, skal man udregne sandsynligheden for den komplementære hændelse:

$p = 1 - normalcdf(151.4, 40.4, 200) = 0.1144939076$

Dvs. **der er 11,4% chance for, at et tilfældigt valgt dansk skolebarn får mere end 200 point.**

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

27. maj 2020 opgave 9: $K' = 0{,}00106 \cdot K \cdot (222{,}9 - K) \qquad K(0) = 18$

$K(t)$ er kapaciteten målt i GW

t er tiden målt i antal år efter 2001

a) Differentialligningen genkendes som logistisk vækst, så man kan bruge løsningen til denne, men man kan også lade Maple bestemme den partikulære løsning med det angivne udgangspunkt:

$$K'(t) = 0.00106 \cdot K(t) \cdot (222.9 - K(t)), K(0) = 18 \xrightarrow{\text{solve DE}} K(t) = \frac{13374}{60 + 683\, e^{-\frac{118137\, t}{500000}}}$$

Dvs. $\underline{\underline{K(t) = \frac{13374}{60 + 683\, e^{-\frac{118137\, t}{500000}}}}}$

$$\text{eller } K(t) = \frac{222.9}{1 + \frac{683}{60} \cdot e^{-\frac{118137}{500000} \cdot t}} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} K(t) = \frac{222.9}{1. + 11.383\, e^{-0.23627\, t}}$$, hvis man anvender løsningsudtrykket.

b) Tallet 222,9, der står i differentialligningen og i tælleren, når løsningen er på formen med 1+..., er den øvre grænse, dvs. at man **i perioden højst kan opnå en kapacitet på 222,9 GW.**

Hvorvidt man når op på denne kapacitet, kan tjekkes at indsætte $t = 17$ svarende til 2018, der er periodens slutning:

$$K(17) = \frac{13374.}{60. + 683.\, e^{-\frac{118137 \cdot 17.}{500000}}} = 184.9717755$$

Modellen skal altså fortsætte med at gælde, hvis man skal nå op omkring den øvre grænse.

c) Da det er logistisk vækst, ved man, at kapaciteten vokser hurtigst, når den er på halvdelen af den øvre grænse. Så dette tidspunkt kan bestemmes:

$$\frac{222.9}{2} = \frac{222.9}{1 + \frac{683}{60} \cdot e^{-\frac{118137}{500000} \cdot t}} \xrightarrow{\text{solve}} \{t = 10.29377036\}$$

10 år efter 2001 er 2011, dvs. **i 2011 vokser kapaciteten hurtigst.**

27. maj 2020 opgave 10: $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2-4x+y^2+6y}$

a) $f(x,y) := \mathrm{e}^{x^2-4x+y^2+6y}$:

For at bestemme gradienten skal man bestemme de partielt afledede:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(f) \\ \frac{\partial}{\partial y}(f) \end{pmatrix}$$

$$f_x(x,y) := \frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)) = (x,y) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$$

$$f_y(x,y) := \frac{\partial}{\partial y}(f(x,y)) = (x,y) \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$$

$$f_x(x,y) = (2x-4)\,\mathrm{e}^{x^2+y^2-4x+6y}$$

$$f_y(x,y) = (2y+6)\,\mathrm{e}^{x^2+y^2-4x+6y}$$

$$fx(x,y) := (2x-4)\,\mathrm{e}^{x^2+y^2-4x+6y} :$$

$$fy(x,y) := (2y+6)\,\mathrm{e}^{x^2+y^2-4x+6y} :$$

Når $x = 1$ og $y = 0$, har man:

$$fx(1,0) = -2\,\mathrm{e}^{-3}$$

$$fy(1,0) = 6\,\mathrm{e}^{-3}$$

Dvs. gradienten er $\underline{\underline{\nabla f = \begin{pmatrix} -2\,\mathrm{e}^{-3} \\ 6\,\mathrm{e}^{-3} \end{pmatrix}}}$

Den kan også bestemmes med Gym-pakkens *gradient*:

$$f(x,y) \xrightarrow{\text{gradient } (x0,y0)}$$

$$x_0 = 1, y_0 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2\,\mathrm{e}^{-3} \\ 6\,\mathrm{e}^{-3} \end{bmatrix}$$

b) Et stationært punkt er et punkt, hvor gradienten er 0-vektoren, dvs:

Det kan hurtigt findes ved at løse ligningssystemet:

$$(2x-4)\,\mathrm{e}^{x^2+y^2-4x+6y} = 0 \wedge (2y+6)\,\mathrm{e}^{x^2+y^2-4x+6y} = 0$$

Da eksponentielfunktioner ikke kan give 0, giver nulreglen os:

$$2x-4=0 \wedge 2y+6=0 \Leftrightarrow x=2 \wedge y=-3$$

Dvs. $\underline{\underline{P(2,-3)}}$

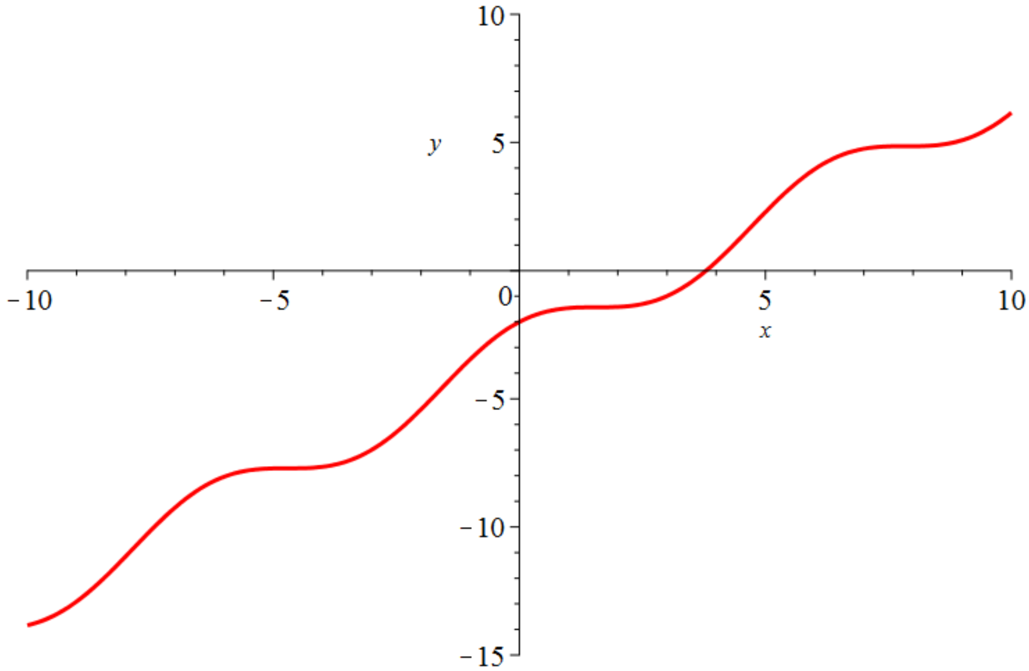

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

27. maj 2020 opgave 11: $f(x) = \cos(x) + x - 3$

a) $f(x) := \cos(x) + x - 3:$

Når grafen skal tegnes, skal man have et område med, hvor man kan se alle skæringer med koordinatakserne samt se tendensen:

$plot(f(x), x = -10..10, y = -15..10, color = red, thickness = 3)$



b) For at kunne anvende Newton-Raphsons metode skal man bestemme den afledede funktion:

$f'(x) = -\sin(x) + 1$

Man kan nu finde x-værdier tættere og tættere på nulpunktet ved $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{\cos(x_n) + x_n - 3}{-\sin(x_n) + 1}$

Så man kan definere en funktion, man vedvarende kan indsætte de fundne funktionsværdier i:

$g(x) := x - \dfrac{\cos(x) + x - 3.}{-\sin(x) + 1}:$

$g(5.) = 3.834226409$

$g(3.834226409) = 3.794765356$

$g(3.794765356) = 3.794388648$

$g(3.794388648) = 3.794388613$

Vi ser nu, at afvigelserne begynder at ske ud på det 9. ciffer, dvs. med 5 betydende cifre er nulpunktet $\underline{\underline{x = 3.7944}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

27. maj 2020 opgave 12: $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k\cdot t \\ 10\cdot t-3t^2 \end{pmatrix}$, $t\geq 0 \quad 0<k<8$

a) $r(t) := \langle k\cdot t,\ 10\cdot t-3\cdot t^2\rangle$:

Farten er længden af hastighedsvektoren, så med $k := 2$: fås

$$|\vec{r}\,'(t)| = len\left(\frac{\partial}{\partial t}(r(t))\right) = 2\sqrt{9\,t^2-30\,t+26}$$

Når $t=1$, har man:

$$2\sqrt{9\cdot 1^2-30\cdot 1+26} = 2\sqrt{5} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 4.472135954$$

Dvs. **farten er 4,47** $\mathbf{\frac{m}{s}}$

b) Fodbolden rammer jorden, når andenkoordinaten er 0:

$$10\cdot t-3\cdot t^2=0 \xrightarrow{\text{solve}} \{t=0\},\ \left\{t=\frac{10}{3}\right\}$$

Den første løsning svarer til det tidspunkt, hvor der sparkes, så **bolden rammer jorden 3,3 sekunder efter sparket.**

c) Førstekoordinaten viser, hvor langt fodbolden er kommet (den er 0 fra start), så når bolden skal være nået 26 meter, når den rammer jorden, har man:

unassign('*k*')

$$k\cdot\frac{10}{3}=26. = \xrightarrow{\text{solve}} \{k=7.800000000\}$$

Dvs. $\underline{\underline{k=7.8}}$

13. august 2020: Første delprøve

13. august 2020 Opgave 1: Der integreres ledvist, og integrationskonstanten tilføjes:

$$\int \left(3x^2+2x+6\right)dx = \underline{\underline{x^3+x^2+6x+k}}$$

13. august 2020 Opgave 2: $f(x)=(x+2)\cdot \mathrm{e}^{x-1}$

a) $f(1)=(1+2)\cdot \mathrm{e}^{1-1}=3\cdot \mathrm{e}^0=3\cdot 1=\underline{\underline{3}}$

b) Nulreglen benyttes undervejs, da man får et produkt, der skal give 0:

$f(x)=0 \;\Leftrightarrow$

$(x+2)\cdot \mathrm{e}^{x-1}=0 \;\Leftrightarrow$

$x+2=0 \;\vee\; \mathrm{e}^{x-1}=0 \;\Leftrightarrow$

$\underline{\underline{x=-2}}$

I sidste skridt benyttes, at en eksponentialfunktion aldrig kan give 0.

13. august 2020 Opgave 3: $f(t)=6\cdot\sin(\pi\cdot t)+5$

a) Amplituden er koefficienten foran sinusfunktionen, dvs. $\underline{\underline{A=6}}$

b) Den afledede bestemmes ved hjælp af reglen om differentiation af sammensat funktion:

$f'(t)=6\cdot\pi\cdot\cos(\pi\cdot t)+0=6\pi\cdot\cos(\pi\cdot t)$

$f'(1)=6\pi\cdot\cos(\pi\cdot 1)=6\cdot\pi\cdot(-1)=\underline{\underline{-6\pi}}$

13. august 2020 Opgave 4: Graferne for en funktion og dens omvendte funktion er hinandens spejlinger i linjen med ligningen $y=x$. Dvs. **det er A, der er graf for den omvendte funktion til *f*.**

Man kan også se på konkrete punkter. F.eks. kan man sige, at da punktet (0,4) ligger på grafen for *f*, skal punktet (4,0) ligge på grafen for den omvendte funktion til *f*. Og dette punkt ligger på *A*, men ikke på *B*.

13. august 2020 Opgave 5: $y'=0{,}1\cdot y \qquad P(0,6)$

a) Den sidste koordinat i linjeelementet er tangenthældningen i punktet, og den bestemmes ved indsættelse at punktets koordinater (her har kun *y*-koordinaten betydning) i differentialligningen: $y'=0{,}1\cdot 6=0{,}6$.

Dvs. linjeelementet er $\underline{\underline{(0,6;0.6)}}$

b) Den fuldstændige løsning til differentialligningen er: $f(x)=c\cdot\mathrm{e}^{0{,}1\cdot x}$

Punktets koordinater benyttes til at bestemme konstanten:

$6=c\cdot\mathrm{e}^{0{,}1\cdot 0} \;\Leftrightarrow\; 6=c\cdot\mathrm{e}^0 \;\Leftrightarrow\; 6=c\cdot 1 \;\Leftrightarrow\; c=6$

Dvs. forskriften for den partikulære løsning, hvis graf indeholder punktet *P*, er: $\underline{\underline{f(x)=6\cdot\mathrm{e}^{0{,}1\cdot x}}}$

13. august 2020 Opgave 6: $\mu = 500$ g $\sigma = 8$ g

a) Normale udfald er de udfald, der ligger inden for 2 spredninger fra middelværdien, så intervallet for normale udfald er $\left[500\,\text{g} - 2\cdot 8\,\text{g}, 500\,\text{g} + 2\cdot 8\,\text{g}\right] = \underline{\underline{\left[484\,\text{g}, 516\,\text{g}\right]}}$

b) Intervallet mellem 492 g og 508 g svarer til 1 spredning fra middelværdien, og da det generelt gælder, at 68,3% af udfaldene i en normalfordelt stokastisk variabel ligger inden for 1 spredning fra middelværdien, er sandsynligheden **68,3%.**

13. august 2020 Opgave 7: $y_{n+1} = 3y_n - \frac{1}{2}\cdot y_n^2 \quad , \; n = 0,1,2,\ldots$

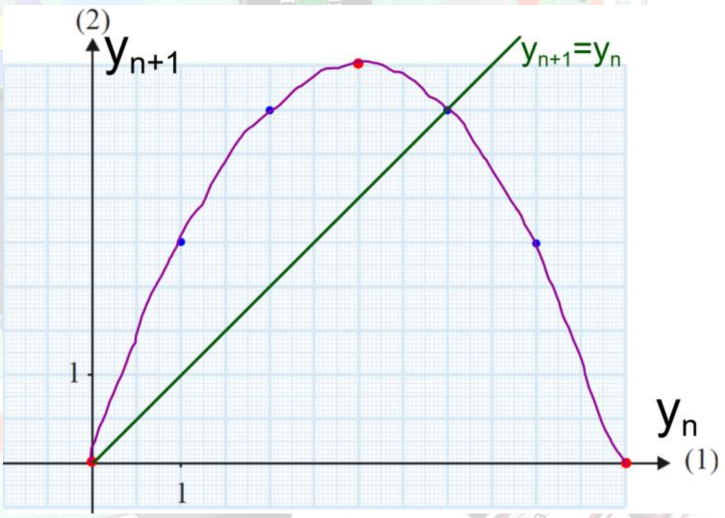
a) I et cobwebdiagram skal man indtegne en graf for udtrykket på højresiden af lighedstegnet sammen med grafen for $y_{n+1} = y_n$. Højresiden er en parabel med grenene pegende nedad og toppunkt i

$$T\left(-\frac{b}{2a};-\frac{d}{4a}\right) = T\left(-\frac{3}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)};-\frac{3^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0}{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}\right) = T\left(3;\frac{9}{2}\right)$$ og skæringerne med førsteaksen

$$0 = 3y_n - \frac{1}{2}\cdot y_n^2 \Leftrightarrow y_n^2 - 6y_n = 0 \Leftrightarrow y_n\cdot\left(y_n - 6\right) = 0 \Leftrightarrow y_n = 0 \;\vee\; y_n = 6$$

Nogle støttepunkter (de blå punkter nedenfor) findes ved indsættelse i ligningen:

$$\left(1;\frac{5}{2}\right),\ (2;4),(4;4)\left(5;\frac{5}{2}\right)$$



b) Fikspunkterne er de steder, hvor de to grafer skærer hinanden, dvs. $\underline{\underline{y_1 = 0 \text{ og } y_2 = 4}}$.

For at kunne afgøre, om fikspunkterne er stabile eller ustabile, differentieres højresiden af den oprindelige ligning: $\left(3y_n - \frac{1}{2}\cdot y_n^2\right)' = -y_n + 3$

$y_1: \left|-0+3\right| = 3 > 1$, dvs. **ustabilt fikspunkt**

$y_2: \left|-4+3\right| = 1$ **Uafklaret**

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

13. august 2020 Opgave 8: $f(x) = x^3 - 4x^2 - 12x + 1$

a) $f'(x) = 3x^2 - 8x - 12$

$f'(-1) = 3\cdot(-1)^2 - 8\cdot(-1) - 12 = 3\cdot 1 + 8 - 12 = 3 + 8 - 12 = \underline{\underline{-1}}$

b) $f'(k) = k$

$k = 3k^2 - 8k - 12 \iff 3k^2 - 9k - 12 = 0 \iff k^2 - 3k - 4 = 0$

Udtrykket faktoriseres, og nulreglen anvendes:

$k^2 - 3k - 4 = 0 \iff (k-4)\cdot(k+1) = 0 \iff k = 4 \vee k = -1$

Dvs. **den anden værdi for *k* er 4**

13. august 2020: Anden delprøve

13. august 2020 Opgave 9: $f(x) = \ln(x^2+3)$

$f(x) := \ln(x^2+3)$:

a) De lodrette linjer med ligningerne $x=-5$ og $x=5$ giver os nedre og øvre grænse i det bestemte integral, der angiver arealet af punktmængden M.

$$A_M = \int_{-5}^{5} f(x)\,dx = -20 + 20\ln(2) + 10\ln(7) + 4\sqrt{3}\arctan\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right) \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 21.89447138$$

Dvs. $\underline{\underline{A_M = 21.89}}$

b) Kurvelængden (eller buelængden) kan også bestemmes med et bestemt integral:

$$l = \int_{-5}^{5.} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = 11.01194944$$

Dvs. **kurvelængden er 11.012**

13. august 2020 Opgave 10: $\frac{dy}{dt} = 1 - 0{,}045 \cdot y \qquad P(0{,}100)$

a) Da man både kender differentialligningen og et punkt på grafen, kan man bestemme en forskrift for den partikulære løsning f:

$$y'(t) = 1 - 0.045 \cdot y(t),\ y(0) = 100 \xrightarrow{\text{solve DE}} y(t) = \frac{200}{9} + \frac{700\,e^{-\frac{9t}{200}}}{9}$$

Dvs. $\underline{\underline{y = \frac{200}{9} + \frac{700\,e^{-\frac{9t}{200}}}{9}}}$

b) Væksthastigheden afhænger ifølge differentialligningen kun af selve temperaturen, og når den er 50°C har man:

$y' = 1 - 0.045 \cdot 50 = -1.250$

Dvs. suppens temperatur falder med 1,25°C pr. minut, når den er 50°C.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

13. august 2020 Opgave 11: $X \sim N(6, 0.7)$

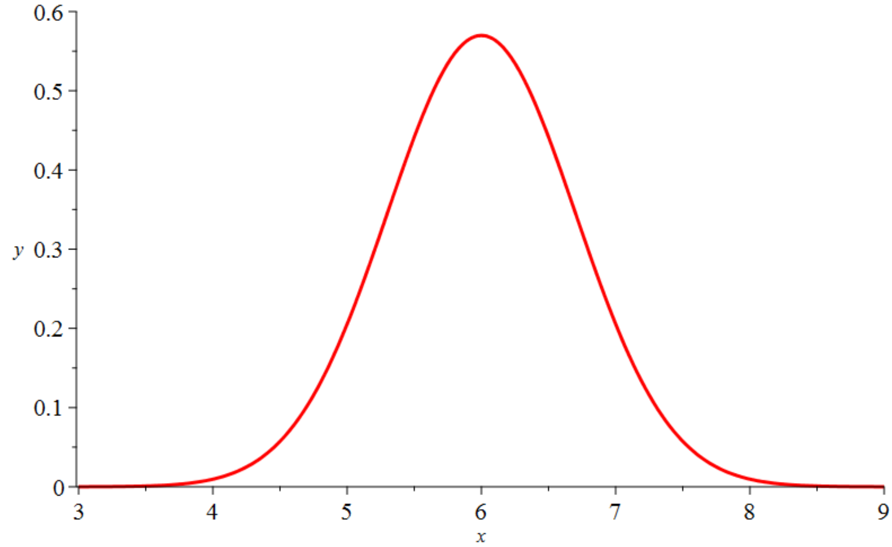
$with(Gym)$:

a) Den generelle forskrift for en normalfordelings tæthedsfunktion er $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$

Så forskriften for denne tæthedsfunktion er $f(x) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot 0.7} \cdot e^{-\frac{(x-6)^2}{2 \cdot 0.7^2}}$:

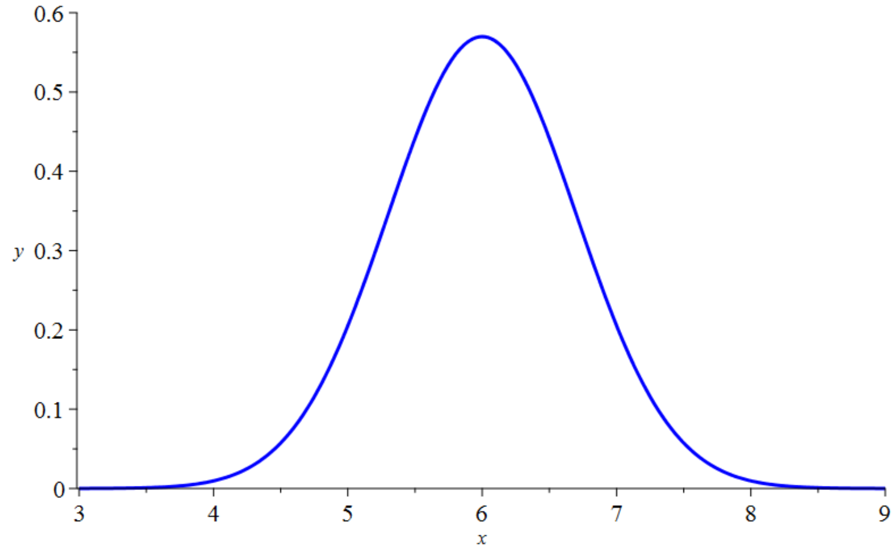
Så kan grafen tegnes:

$plot(f(x), x = 3 ..9, y = 0 ..0.6, color = red, thickness = 3)$



Man kan også benytte sig af Gym-pakkens *normalpdf*:

$plot(normalpdf(6, 0.7, x), x = 3 ..9, y = 0 ..0.6, color = blue, thickness = 3)$



b) $\int_5^8 f(x) \, dx = 0.9212989077$

Dvs. at **92,1% af udfaldene for *X* vil ligge mellem 5 og 8.**

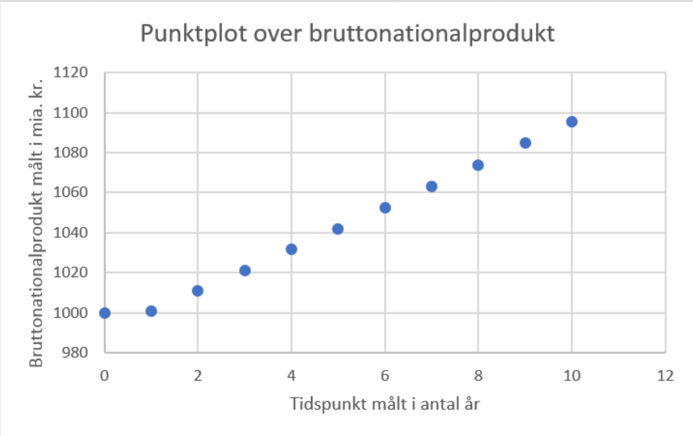
Tallet kan også bestemmes ved: $normalcdf(6, 0.7, 8) - normalcdf(6, 0.7, 5) = 0.9212989076$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>*13. august 2020 Opgave 12:*</u> $y_{n+1} = 1{,}02 \cdot y_n - 0{,}01 \cdot y_{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

I Excel indtastes ligningen i cellen B4, hvorefter den trækkes ned til B16.

	A	B
2	0	1000
3	1	1001
4	2	1011,02
5	3	1021,23
6	4	1031,545
7	5	1041,963
8	6	1052,487
9	7	1063,117
10	8	1073,855
11	9	1084,701
12	10	1095,656
13	11	1106,722
14	12	1117,9
15	13	1129,191
16	14	1140,596



b) Som det ses i tabellen, går der **9 år**, før landets bruttonationalprodukt overstiger 1080 mia. kr. (1073 efter 8 år og 1084 efter 9 år).

<u>*13. august 2020 Opgave 13:*</u> $f(x,y) = -0{,}1 \cdot x^2 - 0{,}1 \cdot y^2 + 5$ $\quad f(x,y) \geq 0$ Enhed: km

$with(Gym)$:

$f(x,y) := -0.1 \cdot x^2 - 0.1 \cdot y^2 + 5$:

a) Da funktionsforskriften er gemt i Maple, kan Maple udregne funktionsværdien:

$f(3,4) = 2.5$

$\underline{\underline{f(3,4) = 2.5}}$

b) Gradienten er $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)), \frac{\partial}{\partial y}(f(x,y)) \right\rangle = \begin{bmatrix} -0.2\,x \\ -0.2\,y \end{bmatrix}$

Når $x = 3$ og $y = 4$ har man altså $grad(f) = \begin{pmatrix} -0.2 \cdot 3 \\ -0.2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -0.6 \\ -0.8 \end{pmatrix}}}$

Gradienten er ensrettet med vektoren $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, og længden af gradienten er $\sqrt{0.6^2 + 0.8^2} = 1.00$

Dvs. at **når man står i punktet (3,4,2.5), er bjerget stejlest i retningen** $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ **, og i denne retning er hældningen 1.**

c) Niveaukurven $f(x,y) = 2.5$ er givet ved ligningen $2.5 = -0.1 \cdot x^2 - 0.1 \cdot y^2 + 5 \Leftrightarrow$

$0.1 \cdot x^2 + 0.1 \cdot y^2 = 5 - 2.5 \Leftrightarrow$

$x^2 + y^2 = 2.5 \cdot 10 \Leftrightarrow$

$x^2 + y^2 = 5^2$

Dette er ligningen med en cirkel med centrum i origo **og radius 5.**

Omkredsen af denne cirkel svarer til vandrernes tur.

$O = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 5 \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 31.41592654$

Dvs. **vandrerne går 31,4 km**

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

13. august 2020 Opgave 14: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5\cdot\cos(t) \\ 5\cdot\sin(t) \end{pmatrix}$, $0 \le t < 2\pi$ $\quad P(-12,0)$

a) Afstanden mellem punkterne $P(-12, 0)$ og $Q(5\cdot\cos(t), 2 + 5\cdot\sin(t))$ kan beregnes som afstanden mellem to punkterne (eller længden af vektoren $\overrightarrow{PQ}$):

$$d(t) = \sqrt{(5\cdot\cos(t) - (-12))^2 + (2 + 5\cdot\sin(t) - 0)^2} =$$
$$\sqrt{25\cdot\cos^2(t) + 12^2 + 2\cdot 12\cdot 5\cdot\cos(t) + 2^2 + 25\cdot\sin^2(t) + 2\cdot 2\cdot 5\cdot\sin(t)} =$$
$$\sqrt{144 + 4 + 120\cdot\cos(t) + 20\cdot\sin(t) + 25\cdot\left(\cos^2(t) + \sin^2(t)\right)} =$$
$$\sqrt{148 + 120\cdot\cos(t) + 20\cdot\sin(t) + 25\cdot 1} =$$
$$\underline{\underline{\sqrt{173 + 120\cdot\cos(t) + 20\cdot\sin(t)}}}$$

b) Den mindste afstand findes ved hjælp af første og anden afledede af afstandsfunktionen:

$d(t) := \sqrt{173 + 120\cdot\cos(t) + 20\cdot\sin(t)}$:

$\mathit{intervalsolve}(d'(t) = 0., t = 0..2\cdot\pi) = \left[\arctan\left(\frac{1}{6}\right), \arctan\left(\frac{1}{6}\right) + \pi\right]$

Fortegnet for den anden afledede bestemmes disse to steder:

$d''\left(\arctan\left(\frac{1}{6}\right)\right) = -\frac{10\sqrt{37}}{\sqrt{173 + 20\sqrt{37}}} < 0$, dvs. lokalt maksimumssted.

$d''\left(\arctan\left(\frac{1}{6}\right) + \pi\right) = \frac{10\sqrt{37}}{\sqrt{173 - 20\sqrt{37}}} > 0$, dvs. lokalt minimumssted.

Da man er kommet hele vejen rundt på cirklen, har man altså fundet den t-værdi, der giver den mindste afstand:

$Q_{\min} = \left(0 + 5\cdot\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{6}\right) + \pi\right), 2 + 5\cdot\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{6}\right) + \pi\right)\right) = -\frac{30\sqrt{37}}{37}, 2 - \frac{5\sqrt{37}}{37} \xrightarrow{\text{afrund}} -4.93197, 1.17801$

Dvs. $\underline{\underline{Q_{\min} = (-4.93, 1.18)}}$

7. december 2020: Første delprøve

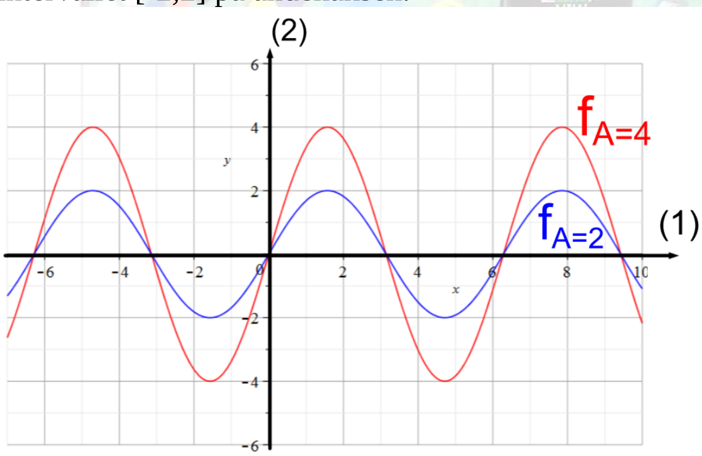
7. december 2020 Opgave 1: $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 7t + 10 \\ 2t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

a) Den afledede bestemmes ved at differentiere koordinatvis: $\underline{\underline{\vec{s}\,'(t) = \begin{pmatrix} 2t - 7 \\ 2 \end{pmatrix}}}$

b) Skæringer med andenaksen er karakteriseret ved, at førstekoordinaten er 0, så man får:
$t^2 - 7t + 10 = 0 \iff (t-2)\cdot(t-5) = 0 \iff t = 2 \ \vee \ t = 5$
Disse værdier for parameteren *t* indsættes i vektorfunktionens andenkoordinat for at finde skæringspunkternes andenkoordinater:
$2 \cdot 2 = 4$
$2 \cdot 5 = 10$
Dvs. skæringspunkterne *P* og *Q* (det er ikke angivet, hvilket af punkterne, der ligger øverst) er:
$\underline{\underline{P(0,4) \text{ og } Q(0,10)}}$

7. december 2020 Opgave 2: $f(x) = A \cdot \sin(x)$

a) Det er kun amplituden, der ændrer sig, dvs. graferne skal have de samme skæringer med førsteaksen og de samme lokale minimumssteder og maksimumssteder.
Da amplituden er 2, skal grafen have udsving på 2 i forhold til ligevægt, dvs. den skal ligge i intervallet [-2,2] på andenaksen.



7. december 2020 Opgave 3: $x^3 \cdot (2x-6) = 0$

a) Da man har et produkt, der giver 0, kan ligningen løses med nulreglen:
$x^3 \cdot (2x-6) = 0 \iff x^3 = 0 \ \vee \ 2x - 6 = 0 \iff x = 0 \ \vee \ 2x = 6 \iff \underline{\underline{x = 0 \ \vee \ x = 3}}$

7. december 2020 Opgave 4: $f(x) = e^{2x} + x^2$ $\qquad y' = 2 \cdot (y + x - x^2)$

a) Først bestemmes den afledede af *f* (første led er en sammensat funktion, dvs. kædereglen bruges):
$f'(x) = 2e^{2x} + 2x$

Det undersøges, om *f* er en løsning til differentialligningen, ved at indsætte funktionsudtrykkene i differentialligningen og se, om man får en identitet.

$$2e^{2x} + 2x = 2 \cdot (e^{2x} + x^2 + x - x^2) \Leftrightarrow$$

$$2e^{2x} + 2x = 2 \cdot (e^{2x} + x) \Leftrightarrow$$

$$2e^{2x} + 2x = 2e^{2x} + 2x$$

Da man får en identitet (udsagnet er sandt for alle *x*-værdier), **er *f* en løsning til differentialligningen.**

7. december 2020 Opgave 5: $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 5 + 5 \cdot \cos(t) \\ 7 + 5 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 2\pi \qquad P(8,11)$

a) Den generelle form for parameterfremstillingen for en cirkel med radius *r* og centrum i (a,b) er:

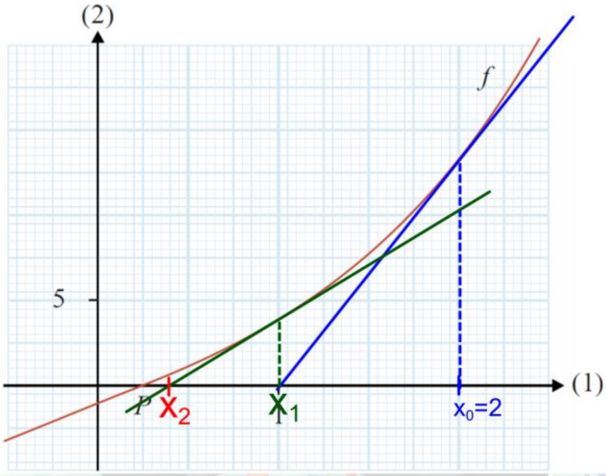
$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} a + r \cdot \cos(t) \\ b + r \cdot \sin(t) \end{pmatrix} \ , \ 0 \le t \le 2\pi$$

Så man kan aflæse: $\underline{\underline{r = 5 \text{ og } C(5,7)}}$

b) Da *l* er en tangent til cirklen i *P*, er $\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} 8-5 \\ 11-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en normalvektor for *l*.

Og da punktet *P* ligger på tangenten, bliver ligningen for *l*:
$3 \cdot (x - 8) + 4 \cdot (y - 11) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{3x + 4y - 68 = 0}}$

7. december 2020 Opgave 6: a) De to tangenter er tangenterne i x_0 og x_1.



b) $f(x)=\frac{3}{4}x^3+4x-1$

Først bestemmes tangenthældningen for den blå tangent ovenfor:

$$f'(x)=\frac{9}{4}x^2+4$$

$$f'(2)=\frac{9}{4}\cdot 2^2+4=9+4=13$$

Andenkoordinaten for tangentens røringspunkt er:

$$f(2)=\frac{3}{4}\cdot 2^3+4\cdot 2-1=\frac{3}{4}\cdot 8+8-1=6+8-1=13$$

Dvs. tangentens ligning er:

$$y-y_0=a\cdot(x-x_0)$$

$$y-13=13\cdot(x-2) \Leftrightarrow y=13x-13$$

Skæringen med førsteaksen, som er x_1, bestemmes ved at sætte *y*-værdien til 0:

$$0=13\cdot x_1-13 \Leftrightarrow 13\cdot x_1=13 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=13}}$$

7. december 2020 Opgave 7: $f(x)=\mathrm{e}^{-0,3x}$ $\quad g(x)=4\cdot\mathrm{e}^{-0,3x}$ $\quad h(x)=4\cdot\mathrm{e}^{0,3x}$

De afledede funktioner angiver tangenthældningerne:

$$f'(x)=-0,3\cdot\mathrm{e}^{-0,3x} \qquad g'(x)=-1,2\cdot\mathrm{e}^{-0,3x} \qquad h'(x)=1,2\cdot\mathrm{e}^{0,3x}$$

Man kan se på, hvor graferne for de tre funktioner skærer andenaksen:

$$f(0)=\mathrm{e}^{-0,3\cdot 0}=1 \qquad g(0)=4\cdot\mathrm{e}^{-0,3\cdot 0}=4 \qquad h(0)=4\cdot\mathrm{e}^{0,3\cdot 0}=4$$

Dvs. alle graferne skærer andenaksen på den positive del, og man kan derfor se på hældningsfeltet, at hældningerne for tangenterne til graferne i skæringspunkterne med andenaksen skal være negative. På de afledede funktioner kan man se, at det ikke gælder for *h*, dvs. ***h* kan ikke være en løsning til differentialligningen.**

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

7. december 2020 Opgave 8: f er tæthedsfunktionen for en normalfordelt stokastisk variabel X.

a) $\int_7^{13} f(x)\,dx$ **angiver sandsynligheden for, at** X **antager en værdi i intervallet** $[7,13]$**.**

b) $E(X)=10 \quad \int_7^{13} f(x)\,dx = 0{,}8$

For en normalfordelt stokastisk variabel ligger 68,3% af udfaldene inden for én spredning fra middelværdien. **Dvs. hvis spredningen skulle være 3, skulle** $\int_7^{13} f(x)\,dx = 0{,}683$**. Dermed har** X **ikke spredningen 3.**

7. december 2020 Opgave 9: $f(x)=k^2-x^2 \quad ,\ k>0$

a) Punktet P er grafens skæring med førsteaksen på den positive del.

$f(x)=0 \iff k^2-x^2=0 \iff x^2=k^2 \iff x=k$, da både k og x er positive.

Så $\underline{\underline{P(k,0)}}$

b) Arealet af punktmængden M findes ved hjælp af det bestemte integral:

$$A_M=\int_0^k \left(k^2-x^2\right)dx=\left[k^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^k=\left(k^2\cdot k-\frac{1}{3}\cdot k^3\right)-\left(k^2\cdot 0-\frac{1}{3}\cdot 0^3\right)=k^3-\frac{1}{3}k^3=\frac{2}{3}k^3$$

Skæringen med andenaksen (punktet R's andenkoordinat) bestemmes ved $f(0)=k^2-0^2=k^2$

Så højden af rektanglet er k^2, mens bredden er k (R og P koordinater anvendes).

Dermed er arealet: $A_{\text{rektangel}}=h\cdot b=k^2\cdot k=k^3$

Så forholdet mellem arealerne er: $\dfrac{A_M}{A_{\text{rektangel}}}=\dfrac{\frac{2}{3}k^3}{k^3}=\underline{\underline{\dfrac{2}{3}}}$

7. december 2020: Anden delprøve

7. december 2020 Opgave 10:

$f(x) := \ln(x) - 3x^2 + 10:$

a) Det er lidt synd at bruge Maple til at løse denne opgave, men ...

Først bestemmes en stamfunktion:

$\int f(x)\,dx = -x^3 + 9x + x\ln(x)$

Maple angiver ikke integrationskonstanten, så samtlige stamfunktioner er på formen

$F_k(x) := x\cdot\ln(x) + 9x - x^3 + k:$

Da grafen skal gå gennem punktet $P(1, 20)$, har man:

$solve(F_k(1) = 20, k) = 12$

Dvs. den søgte stamfunktion er $\underline{\underline{F(x) = x\cdot\ln(x) + 9x - x^3 + 12}}$

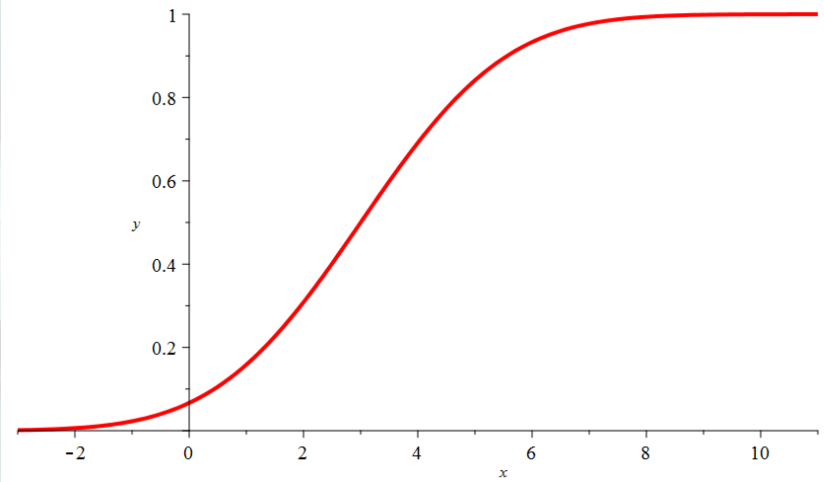
7. december 2020 Opgave 11: $X \sim N(3,2)$

restart

with(Gym) :

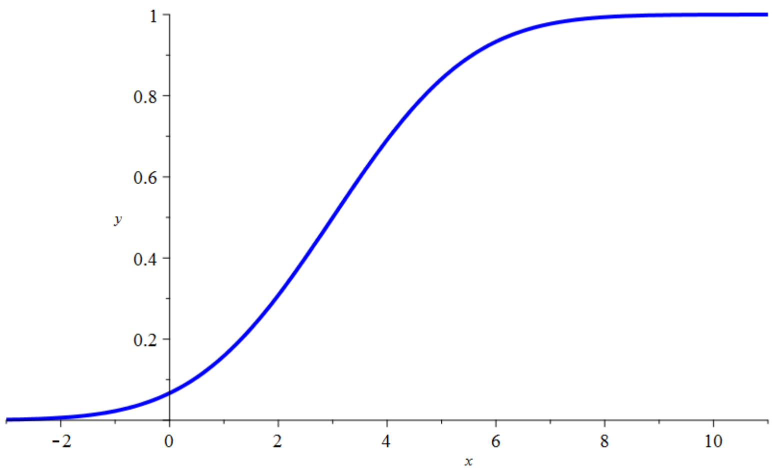
a) I Gym-pakken ligger fordelingsfunktionen for normalfordelingen i kommandoen *normalcdf*:

plot(normalcdf(3, 2, x), x = −3 ..11, *y* = 0 ..1, *color* = *red*, *thickness* = 4)



Man kan også benytte forskriften:

$plot\left(\frac{1}{2\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-3)^2}{2\cdot 2^2}}\,dt,\ x = -3..11,\ y = 0..1,\ color = blue,\ thickness = 4\right)$



b) Sandsynligheden $P(0.5 \le X \le 4)$ kan bestemmes med *normalcdf* eller med forskriften:

$normalcdf(3, 2, 4) - normalcdf(3, 2, 0.5) = 0.585812687533145$

$$\int_{0.5}^{4} \frac{1}{2\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-3)^2}{2\cdot 2^2}}\,dx = 0.5858126876$$

Dvs. $\underline{\underline{P(0.5 \le X \le 4) = 0.5858}}$

c) Igen kan man bruge Gym-pakkens kommando eller funktionsforskriften:

$fsolve(normalcdf(3, 2, k) = 0.6, k) = 3.506694208$

$$\int_{-\infty}^{k} \frac{1}{2\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-3)^2}{2\cdot 2^2}}\,dx = 0.6 \xrightarrow{\text{solve}} 3.506694206$$

Dvs. $\underline{\underline{k = 3.51}}$

7. december 2020 Opgave 12:

Er delprøven med hjælpemidler begyndt?

$y' = 8 - 2y \qquad P(0, 2)$

a) For at bestemme en ligning for tangenten har man brug for tangentens hældning, der kan bestemmes ved indsættelse af punktets koordinater i differentialligningen:

$y' = 8 - 2\cdot 2 = 8 - 4 = 4$

Så tangentens ligning er:

$y - y_0 = a\cdot(x - x_0)$

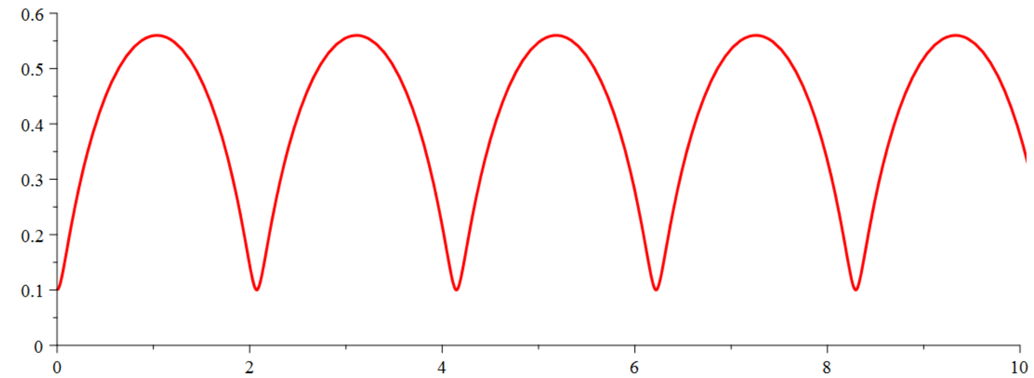
$y - 2 = 4\cdot(x - 0) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 4x + 2}}$

7. december 2020 Opgave 13: $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,95\cdot t - 0,23\cdot\sin(15\cdot t) \\ 0,33 - 0,23\cdot\cos(15\cdot t) \end{pmatrix}$; $0 \le t \le 2$

Tiden t måles i sekunder og koordinaterne x og y måles i meter.

a) Parameterkurven tegnes med det angivne interval for parameterværdien t:

$plot([4.95\cdot t - 0.23\cdot\sin(15\cdot t), 0.33 - 0.23\cdot\cos(15\cdot t), t = 0..2], view = [0..10, 0..0.6], color = red, thickness = 3)$



b) Man må gå ud fra, at y angiver højden over jorden.
Det er altså y-koordinatens maksimale værdi, man skal finde.
Da hjulet kører mere end en hel omgang, vil cosinusværdiens mindste værdi være -1, dvs. y-koordinatens største værdi er

$y_{maks} = 0.33 - 0.23\cdot(-1) = 0.56$

Dvs. **refleksens maksimale højde over jorden er 0,56 m**

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

7. december 2020 Opgave 14: $y_{n+1} = y_n + 0,001 \cdot y_n \cdot (2000 - y_n)$, $n = 0,1,2,...$

n måles i måneder, og y er antal smittede $y_0 = 8$

a) I Excel indtastes differensligningen som en formel (Her i cellen B4):

B4 =B3+0,001*B3*(2000-B3)

	A	B	C	D	E
1	Tid i måneder	Antal smittede			
2	*n*	*y*			
3	0	8			
4	1	23,936			

Formlen kopieres nedad:

	A	B
1	Tid i måneder	Antal smittede
2	*n*	*y*
3	0	8
4	1	23,936
5	2	71,2350679
6	3	208,6307688
7	4	582,3655087
8	5	1407,94694
9	6	2241,526234
10	7	1700,138844
11	8	2209,944443
12	9	1745,978888
13	10	2189,494387

Dvs. at **efter 10 måneder er der 2189 smittede.**
(Man kan dog se, at allerede efter 5 måneder begynder der at blive problemer med modellen, da antallet af smittede går op og ned).

b) Differensligningen omskrives til $y_{n+1} - y_n = 0,001 \cdot y_n \cdot (2000 - y_n)$

$y_{n+1} - y_n$ er tilvæksten i smittede pr. måned (det kan også skrives $\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta n}$, da $\Delta n = 1$), dvs. det er det, der svarer til differenskvotienten. Dermed kan differensligningen på denne form sammenlignes med differentialligningen $y' = a \cdot y \cdot (M - y)$, hvor man kan se, at:

$\underline{\underline{a = 0,001 \text{ og } M = 2000}}$

c) Differentialligningen løses med samme begyndelsesbetingelse som differensligningen:

$y' = 0.001 \cdot y \cdot (2000 - y), y(0) = 8 \xrightarrow{\text{solve DE}} y(x) = \frac{2000}{1 + 249\, e^{-2x}}$

$f(x) := \frac{2000}{1 + 249 \cdot e^{-2 \cdot x}}$:

Data hentes fra Excel med Tools-Assistants-Import Data:

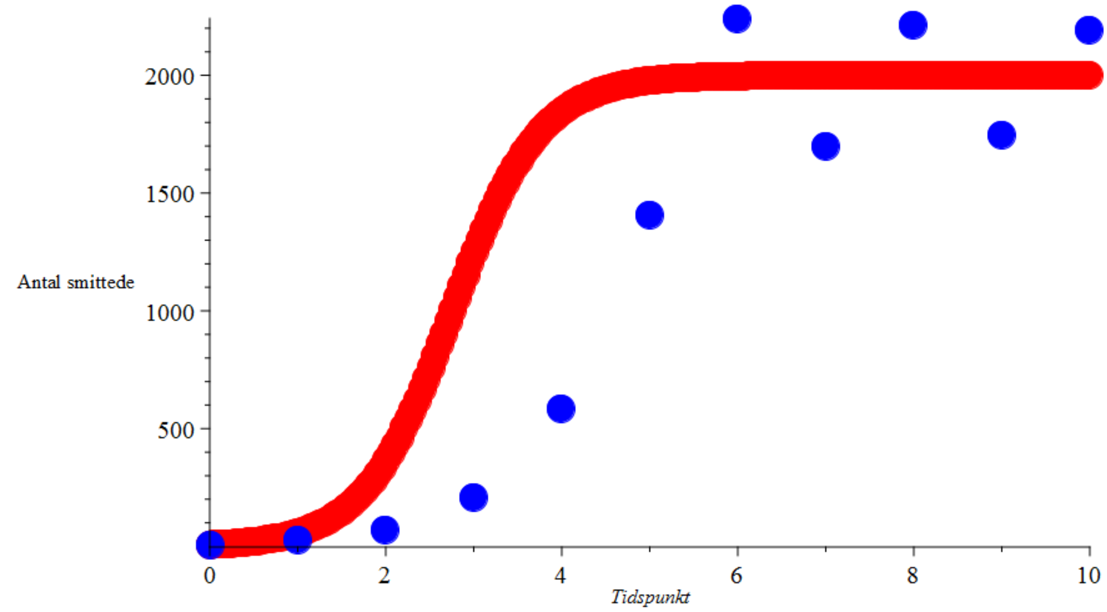
$$Smittede := \begin{bmatrix} 0. & 8.0 \\ 1.0 & 23.936 \\ 2.0 & 71.235067904 \\ 3.0 & 208.63076881271255 \\ 4.0 & 582.3655087427542 \\ 5.0 & 1407.9469404550555 \\ 6.0 & 2241.52623422 8415 \\ 7.0 & 1700.1388439510258 \\ 8.0 & 2209.944443141947 \\ 9.0 & 1745.9788876518708 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

11 × 2 Matrix

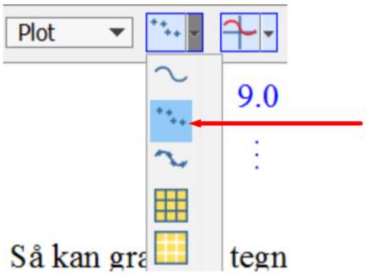
Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Så kan graferne tegnes sammen:

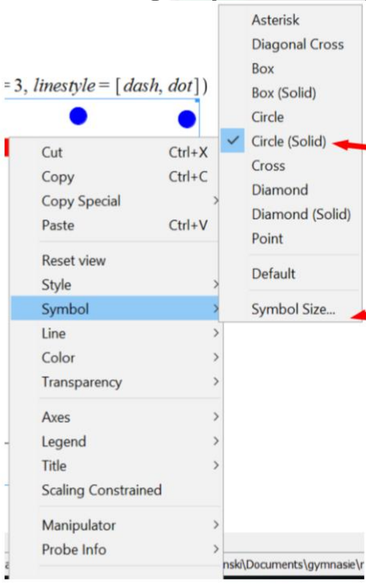
$plot([f(x), Smittede], x = 0..10, color = [red, blue], thickness = 3, linestyle = [dash, dot])$



For at få ovenstående graf til kun at angive 11 blå punkter er nedenstående grafopsætning valgt:



Desuden er grafsymbolerne (højreklik på grafen) sat til cirkler og symbolstørrelsen er øget (til ca. 20)



Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

7. december 2020 Opgave 15:

$with(Gym):$

$v^2 = a \cdot h + b$

a) Højden h måles i meter og hastigheden v måles i $\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$Højde := [0.36, 0.45, 0.55, 0.63, 0.76, 0.85, 0.91]:$

$Hastighed := [3.25, 2.94, 2.64, 2.34, 1.73, 1.11, 0.49]:$

Man bemærker, at man skal bruge kvadratet på hastigheden, dvs. der skal laves en ny liste

(man kan selvfølgelig godt fra start bare skrive 3.25^2, 2.94^2, 2.64^2,... i en tabel, men så får man ikke brugt tilden ~):

$Kvadratetpåhastigheden := Hastighed^{\sim 2} = [10.5625, 8.6436, 6.9696, 5.4756, 2.9929, 1.2321, 0.2401]$

Da der er en lineær sammenhæng med kvadratet på hastigheden og højden, laver man lineær regression:

$vkvad(h) := LinReg(Højde, Kvadratetpåhastigheden, h):$

$vkvad(h) = -18.7181392732591\ h + 17.2193154460569$

Dvs. $\underline{\underline{a = -18.72}}$ og $\underline{\underline{b = 17.22}}$

b) Med en højde på 0,20 m over gulvet, dvs. $h = 0.2$, får man:

$vkvad(0.2) = 13.4756875914051$

Dette er kvadratet på hastigheden, så hastigheden er:

$v = \sqrt{13.4756875914051} = 3.670924623$

Hastigheden er altså $\underline{\underline{3.67 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$

7. december 2020 Opgave 16:

a) På figuren er det angivet, at stalden går det samme stykke h ind i både højden og bredden.

Da den samlede længde af hegnet er 360 m, har man altså:

$2x + 2y - 2h = 360 \Leftrightarrow h = x + y - 180$

Arealet af hestefolden er arealet af et rektangel fratrukket arealet af det kvadrat, som stalden fylder i rektanglet:

$A_{hestefold} = A_{rektangel} - A_{kvadrat} = x \cdot y - h^2 = x \cdot y - (x + y - 180)^2 \overset{\text{expand}}{=} -x^2 - x\,y - y^2 + 360\,x + 360\,y - 32400$

Heraf fremgår det, at $A(x, y) = -x^2 - y^2 - x \cdot y + 360\,x + 360\,y - 32400$

Man kan også udregne parentesen i hånden:

$x \cdot y - (x + y - 180)^2 = x \cdot y - (x + y - 180) \cdot (x + y - 180) =$

$x \cdot y - \left(x^2 + xy - 180\,x + xy + y^2 - 180\,y - 180\,x - 180\,y + 32400\right) =$

$-x \cdot y - x^2 - y^2 + 360\,x + 360\,y - 32400$

b) For at finde de værdier for x og y, der giver det størst mulige areal, skal man først finde stationære punkter for funktionen af to variable:

$A(x, y) := -x^2 - y^2 - x \cdot y + 360\,x + 360\,y - 32400:$

$\frac{\partial}{\partial x}(A(x, y)) = 0, \frac{\partial}{\partial y}(A(x, y)) = 0 \xrightarrow{\text{solve (specified)}} \{x = 120, y = 120\}$

En fysiker vil sige, at problemstillingens karakter sikrer os, at dette giver det største areal, men vi vil også vise det matematisk ved at undersøge arten af dette stationære punkt.

Derfor bestemmes værdien for determinanten af Hesse-matricen:

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(A(x, y)) \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2}(A(x, y)) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(A(x, y))\right)^2 \xrightarrow{\text{evaluate at point}} 3$>0 dvs. lokalt ekstremumspunkt

Så bestemmes, om det er et lokalt minimums- eller maksimumspunkt.

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(A(x, y)) \xrightarrow{\text{evaluate at point}} -2$<0 dvs. lokalt maksimumspunkt.

De fundne værdier er altså dem, der giver det største areal, dvs. $\underline{\underline{x = 120 \wedge y = 120}}$