Løsninger til eksamensopgaver på A-niveau 2021 ny ordning

26. maj 2021: Første delprøve

26. maj 2021 Opgave 1: $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 2t+1 \\ t^2-4t \end{pmatrix}$

a) Ved at indsætte den angivne *t*-værdi i koordinatfunktionerne bestemmes $\vec{s}(1) = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+1 \\ 1^2-4\cdot 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}}}$

b) Koordinatfunktionerne differentieres hver for sig, og der bruges ledvis differentiation i begge tilfælde:

$$\vec{s}\,'(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{d(2t+1)}{dt} \\ \dfrac{d(t^2-4t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 \\ 2t-4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 2t-4 \end{pmatrix}}}$$

26. maj 2021 Opgave 2: $f(x) = 6x^2 + \frac{1}{x}$, $x > 0$; $P(1,7)$

a) Først bestemmes ved ledvis integration den form samtlige stamfunktioner er på:

$F_k(x) = 2x^3 + \ln|x| + k = 2x^3 + \ln(x) + k$ (numerisktegnet fjernes, da $x > 0$)

Så udnyttes det, at grafen for stamfunktionen skal gå gennem punktet *P*:

$7 = 2\cdot 1^3 + \ln(1) + k \quad \Leftrightarrow \quad 7 = 2 + 0 + k \quad \Leftrightarrow \quad k = 5$

Dvs. forskriften for den søgte stamfunktion er: $\underline{\underline{F(x) = 2x^3 + \ln(x) + 5}}$

26. maj 2021 Opgave 3: $f(x,y) = x^3 + 4x + x\cdot y + y^2$

a) $f(2,3) = 2^3 + 4\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3^2 = 8 + 8 + 6 + 9 = \underline{\underline{31}}$

b) $$\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2+4+y+0 \\ 0+0+x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2+4+y \\ x+2y \end{pmatrix}$$

I punktet $(2,3,31)$ er gradienten $\nabla f = \begin{pmatrix} 3\cdot 2^2+4+3 \\ 2+2\cdot 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 19 \\ 8 \end{pmatrix}}}$

26. maj 2021 Opgave 4: $y' = x\cdot y + 5 \quad P(1,10)$

a) For at bestemme ligningen for tangenten til grafen for *f* i punktet *P* skal man kende punktets koordinater (og det gør man allerede) samt tangentens hældning, der bestemmes ved at indsætte punktets koordinater i differentialligningen:

$a_{\text{tangent}} = y' = 1\cdot 10 + 5 = 15$

Tangentens ligning bliver så:

$y - y_0 = a\cdot(x - x_0)$

$y - 10 = 15\cdot(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = 15x - 5}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

26. maj 2021 Opgave 5: $f(x)=3\cdot\sin(x)+3$

a) Da $f(0)=3\cdot\sin(0)+3=3\cdot 0+3=3$, skal grafen skære andenaksen i 3, dvs. man kan udelukke den blå graf *A*.
Da vinkelfrekvensen er 1 (koefficienten foran *x* i udtrykket), skal perioden være 2π. På figuren ses det, at perioden – der kan aflæses som afstanden mellem to bølgetoppe – for den røde graf *C* er π, mens den for den grønne graf *B* er 2π.
Dvs. **det er grafen *B*, der er graf for *f*.**

26. maj 2021 Opgave 6: $f(x)=\left(x^2-x-2\right)\cdot e^x$

a) Produktreglen anvendes til differentiation (og der anvendes ledvis integration på første faktor).

$$f'(x)=\left(x^2-x-2\right)'\cdot e^x+\left(x^2-x-2\right)\cdot\left(e^x\right)'=(2x-1)\cdot e^x+\left(x^2-x-2\right)\cdot e^x=$$
$$\left(2x-1+x^2-x-2\right)\cdot e^x=\underline{\underline{e^x\cdot\left(x^2+x-3\right)}}$$

b) Ligningen løses ved hjælp af nulreglen, da man har et produkt, der skal give 0:

$$0=\left(x^2-x-2\right)\cdot e^x \quad\Leftrightarrow\quad x^2-x-2=0\ \vee\ e^x=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x+1)\cdot(x-2)=0\ \vee\ e^x=0 \quad\Leftrightarrow$$
$$\underline{\underline{x=-1\ \vee\ x=2}}$$

Da eksponentialfunktioner ikke kan give 0, har $e^x=0$ ingen løsning.

26. maj 2021 Opgave 7: $y_{n+1}=3\cdot y_n+1$; $n=0,1,2,\ldots$; $y_0=10$

a) For at finde y_1 udnyttes det, at man kender y_0: $y_1=3\cdot y_0+1=3\cdot 10+1=\underline{\underline{31}}$

Da man nu kender y_1, kan den bruges til at finde y_2: $y_2=3\cdot y_1+1=3\cdot 31+1=\underline{\underline{94}}$

b) Det er en differensligning på formen $y_{n+1}=a\cdot y_n+b$, hvor løsningen kan skrives på den lukkede form $y_n=a^n\cdot y_0+b\cdot\dfrac{a^n-1}{a-1}$, dvs:

$$y_n=3^n\cdot 10+1\cdot\frac{3^n-1}{3-1}=10\cdot 3^n+\frac{3^n-1}{2}=10\cdot 3^n+\frac{1}{2}\cdot 3^n-\frac{1}{2}=\underline{\underline{\frac{21}{2}\cdot 3^n-\frac{1}{2}}}$$

26. maj 2021 Opgave 8: $f(x)=a\cdot x^3+b\cdot x+5$ $\quad P(2,9)$

a) Da grafen for *f* går gennem *P*, har man $9=a\cdot 2^3+b\cdot 2+5 \quad\Leftrightarrow\quad 4=8a+2b$

$$f'(x)=3a\cdot x^2+b$$

Da *P* er et lokalt maksimum, er $f'(2)=0$, hvilket giver: $f'(2)=3a\cdot 2^2+b=12a+b$

$$0=12a+b$$

Man har dermed et ligningssystem med to ligninger med to ubekendte, der kan løses med lige store koefficienters metode eller som her med substitutionsmetoden, hvor man udnytter, at den sidste ligning giver $b=-12a$, hvilket indsættes i den øverste:

$$4=8a+2\cdot(-12a) \quad\Leftrightarrow\quad 4=8a-24a \quad\Leftrightarrow\quad 4=-16a \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{a=-\frac{1}{4}}}$$

Og dermed er $b=-12\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\underline{\underline{3}}$

26. maj 2021: Anden delprøve

26. maj 2021 Opgave 9

with(*Gym*) :

a) Den generelle forskrift for normalfordelinger er $f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$, så med

middelværdien 60 og spredningen 5 har man σ $f(x) := \frac{1}{5 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(x-60)^2}{2 \cdot 5^2}}$:

Så man har $P(X \le 70) = \int_{-\infty}^{70.} f(x)\, dx = 0.9772498681$

$\underline{\underline{P(x \le 70) = 0.9772}}$

26. maj 2021 Opgave 10

restart

with(*Gym*) :

$f(x) := 0.126 \cdot \left(45 - x^{1.2}\right) \cdot x^{0.5}$: $0 \le x \le 23$

a) Da man kender forskriften og afgrænsningerne af området, kan rumfanget bestemmes ved

$V = \int_0^{23} \pi \cdot f(x)^2\, dx = 5879.461291$

Dvs. at **rumfanget er 5879 m^3**

b) For at kunne bestemme bredden skal man kende den maksimale funktionsværdi i intervallet $[0, 23]$.

Først bestemme lokale ekstremumssteder:

$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 8.605537417\}$

Fortegnet for den anden afledede af f dette sted viser arten af ekstremumsstedet:

$f''(8.605537417) = -0.1347619583 < 0$, dvs. lokalt maksimumssted.

Da der ikke er andre lokale ekstremumssteder, må det også være et globalt maksimumssted.

Bredden af ballonen er så det dobbelte af funktionsværdien dette sted (symmetri omkring førsteaksen):

$b = 2 \cdot f(8.605537417) = 23.48196184$

Dvs. **bredden af ballonen er 23,5 m**

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

26. maj 2021 Opgave 11

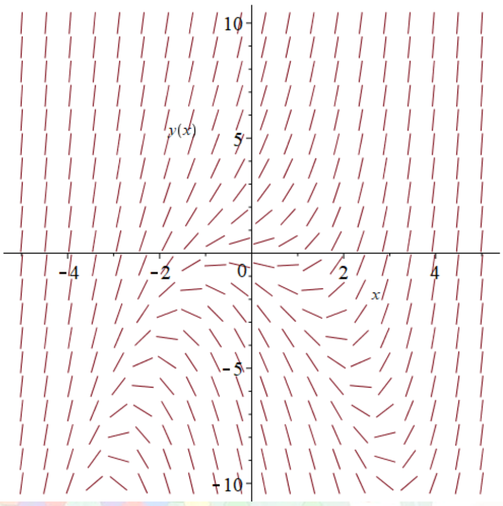
restart

with(*Gym*) :

$y' = y + x^2$

a) Man kan tegne et hældningsfelt ved hjælp af Gym-pakkens *linjeelementer* eller *hældningsfelt*:

$hældningsfelt(y'(x) = y(x) + x^2, y, x = -5..5, y = -10..10)$



b) Da man får oplyst, at f er en løsning til differentialligningen, og at grafen for f går gennem punktet $P(0,-1)$, er der tale om en partikulær løsning, der bestemmes ved

$$[y' = y + x^2, y(0) = -1] \xrightarrow{\text{solve DE}} y(x) = -x^2 - 2x - 2 + e^x$$

Dvs. $\underline{\underline{f(x) = e^x - x^2 - 2x - 2}}$

26. maj 2021 Opgave 12

$f(x) := x^3 + x - 5$:

a) Med Newton-Raphsons metode følger man tangenten i et punkt indtil skæring med førsteaksen.

Tangentens ligning er: $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Og da man skal finde skæringen med førsteaksen sættes y-værdien til 0, så skæringen x_1 bliver:

$$0 - f(x_0) = f'(x) \cdot (x_1 - x_0) \Leftrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Med $x_0 = 1$ får man:

$$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = \frac{7}{4}$$

Og med x_1 som udgangspunkt findes x_2 :

$$x_2 = \frac{7}{4} - \frac{f\left(\frac{7}{4}\right)}{f'\left(\frac{7}{4}\right)} = \frac{503}{326} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 1.542944785$$

Dvs. $\underline{\underline{x_1 = \frac{7}{4}\ og\ x_2 = \frac{503}{326}}}$

b) Maple løser ligningen:

$$f(x) = 0. \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 1.515980228\}, \{x = -0.7579901138 + 1.650347551\,I\}, \{x = -0.7579901138 - 1.650347551\,I\}$$

To af løsningerne er komplekse, så de forkastes.

Vores løsning fundet med to skridt og udgangspunktet 1 med Newton-Raphsons metode **afviger først på anden decimal,**

og den procentvise afvigelse er: $\dfrac{\frac{503}{326} - 1.515980228}{1.515980228} = 0.01778687908 = \underline{\underline{1.8\,\%}}$

(Med ét skridt mere ville afvigelsen have været på 0,027%)

26. maj 2021 Opgave 13

$with(Gym):$

$f(x) = a \cdot x + b$

$f(x)$ er dagligt isforbrug målt i liter

x er middeltemperaturen målt i grader celsius

a) Med Tools-Assistants-Import Data hentes dataene fra Excel-arket ind i Maple (Cell Range: A2-B31):

$$M := \begin{bmatrix} 5.0 & 0.82 \\ 13.3 & 0.79 \\ 17.2 & 0.83 \\ 20.0 & 0.9 \\ 20.6 & 0.86 \\ 18.3 & 0.73 \\ 16.1 & 0.69 \\ 8.3 & 0.61 \\ 0. & 0.57 \\ -4.4 & 0.54 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

30 × 2 Matrix

Så kan der laves lineær regression på datasættet.

$f(x) := LinReg(M, x) = x \rightarrow LinReg(M, x)$

$f(x) = 0.0119062041039853\,x + 0.646891061012139$

$a = 0.0119$ og $b = 0.6469$

b) Forudsætningen for, at det giver mening med et konfidensinterval for hældningen, og at man altså kan bruge det til at afgøre noget som helst, er, at punkterne med god tilnærmelse danner en ret linje i et almindeligt koordinatsystem, samt at residualerne er normalfordelt (eller at man vurderer, at 30 målinger er tilpas stort). Disse to forudsætninger kan undersøges (og de er nogenlunde opfyldt), men opgaveformuleringen lægger ikke op til det, så man kan også blot gøre det, der står:

Med Gym-pakkens *testLin* kan 95%-konfidensintervallet bestemmes:

$testLin(M, konfidensInterval = 0.95)$

	a	b
Koefficient	0.01191	0.64689
Standardfejl	0.00182	0.02377
t-stat	6.54240	27.21526
p-værdi	0.00000	0.00000
Nedre 95.00%	0.00818	0.59820
Øvre 95.00%	0.01563	0.69558
Frihedsgrader	28	

Dvs. 95%-konfidensintervallet for hældningen er $[0.0082, 0.0156]$

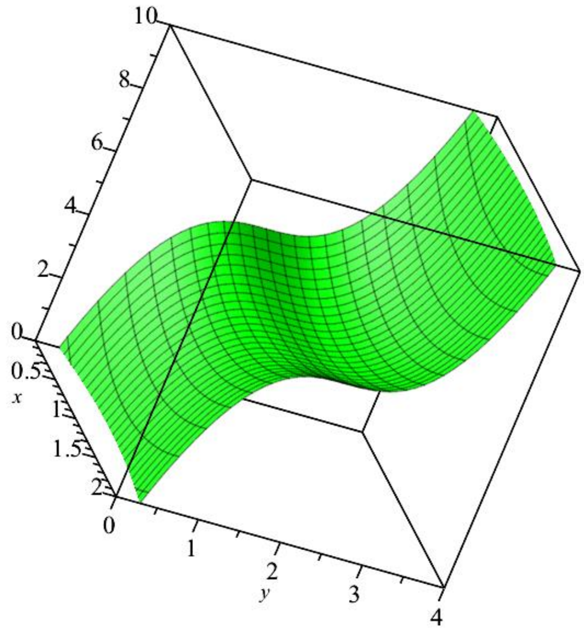
Da konfidensintervallet udelukkende indeholder positive værdier, **ER der statistisk belæg for, at sammenhængen mellem det daglige isforbrug og middeltemperaturen er voksende**.

26. maj 2021 Opgave 14

$f(x, y) := (x-1)^2 + (y-2)^3 + 4 :$

a) Grafen kan tegnes med et 3D-plot:

$plot3d(f(x, y), x = 0..2, y = 0..4, view = [0..2, 0..4, 0..10], color = green)$



b) Der er stationære punkter, hvor gradienten er nulvektoren, så dette sted bestemmes:

$\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y)) = 0, \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y)) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 1, y = 2\}$

Dvs. $\underline{\underline{x_0 = 1 \text{ og } y_0 = 2}}$

26. maj 2021 Opgave 15

$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t \\ 30 - 4.91 \cdot t^2 \end{pmatrix} \quad ; \quad t \geq 0$

$\vec{s}$ er stedvektoren, der angiver nøddens position over stien (længder måles i meter), og tiden t måles i sekunder.

a) Farten er længden af hastighedsvektoren, og længden af en vektor kan bestemmes med Gym-pakkens *len* , hvor 'evaluate at point' benyttes med t-værdien sat til 1

$s(t) := \langle 5t, 30 - 4.91 \cdot t^2 \rangle :$

$|\vec{s}'(1)| = len(s'(t)) \xrightarrow{\text{evaluate at point}} 11.01963702$

Dvs. **nøddens fart efter 1 sekund er 11** $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}$

b) Det er underforstået i opgaven, at nødden slippes til tiden 0, samt at stien svarer til andenkoordinaten 0. Så først findes det tidspunkt, hvor nødden rammer stien:

$30 - 4.91 \cdot t^2 = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{t = -2.471837299\}, \{t = 2.471837299\}$

Den negative løsning forkastes, da den svarer til et tidspunkt inden nødden er sluppet.

De afledede af koordinatfunktionerne bestemmes:

$x'(t) = 5$

$y'(t) = -2 \cdot 4.91 \cdot t = -9.82 \cdot t$

Længden af banekurven kan så bestemmes med det angivne udtryk:

$\int_0^{2.471837299} \sqrt{5^2 + (9.82 \cdot t)^2} \, dt = 33.53658429$

Dvs. **banekurvens længde er 33,5 meter**

28. maj 2021: Første delprøve

28. maj 2021 Opgave 1: $f(x,y) = x^2 \cdot y + 2y$

a) Funktionsværdien bestemmes ved at indsætte 2 på *x*'s plads og 5 på *y*'s plads i forskriften:

$f(2,5) = 2^2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 4 \cdot 5 + 10 = 20 + 10 = \underline{\underline{30}}$

b) De partielle afledede bestemmes ved at betragte den anden variabel som en konstant og så anvende ledvis differentiation:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x \cdot y + 0 = \underline{\underline{2xy}}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 \cdot 1 + 2 = \underline{\underline{x^2 + 2}}$$

28. maj 2021 Opgave 2: $f(x) = 2x^3 - 6x \qquad P(1,10)$

a) Først bestemmes ved ledvis integration den form samtlige stamfunktioner er på:

$$F_k(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + k$$

Da grafen skal gå gennem *P*, kan man bestemmes *k*-værdien ved at indsætte *P*'s koordinater:

$$10 = \frac{1}{2} \cdot 1^4 - 3 \cdot 1^2 + k \quad \Leftrightarrow \quad 10 = \frac{1}{2} - 3 + k \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{25}{2}$$

Dvs. den søgte stamfunktion har forskriften $\underline{\underline{F(x) = \frac{1}{2} \cdot x^4 - 3x^2 + \frac{25}{2}}}$

28. maj 2021 Opgave 3: $y_{n+1} = 6 \cdot y_n + 2 \cdot y_{n-1}$, $n = 1,2,3,...$, $y_1 = 5$, $y_2 = 32$

a) Når $n = 1$, bliver den generelle differensligning til $y_2 = 6 \cdot y_1 + 2 \cdot y_0$, og da man kender y_1 og y_2, kan man bestemme y_0:

$$32 = 6 \cdot 5 + 2 \cdot y_0 \quad \Leftrightarrow \quad 32 = 30 + 2 \cdot y_0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y_0 = 1}}$$

28. maj 2021 Opgave 4: $X(100,14)$ er en normalfordelt stokastisk variabel.

a) Normale udfald ligger inden for 2 spredninger fra middelværdien. To spredninger trukket fra og lagt til middelværdien giver henholdsvis $100 - 2 \cdot 14 = 72$ og $100 + 2 \cdot 14 = 128$, dvs. normale udfald ligger i intervallet [72,128]. Da 80 ligger i dette interval, **er det et normalt udfald.**

b) Da *f* er tæthedsfunktionen for *X*, betyder $\int_{100}^{120} f(x)\,dx = 0,423$, at

42,3% af kyllingelårene har en vægt mellem 100 og 120 gram.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

28. maj 2021 Opgave 5: $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} t^2+2t-3 \\ t+1 \end{pmatrix}$

a) Skæringer med andenaksen bestemmes ved at finde de parameterværdier, hvor førstekoordinaten giver 0. Det bestemmes ved faktorisering og anvendelse af nulreglen:

$$t^2+2t-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad (t+3)\cdot(t-1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=-3 \ \vee \ t=1$$

Man kan godt nøjes med at bestemme de tilsvarende andenkoordinater, men man kan også som vist tjekke, at førstekoordinaterne giver 0:

$$\vec{r}(-3)=\begin{pmatrix} (-3)^2+2\cdot(-3)-3 \\ -3+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}(1)=\begin{pmatrix} 1^2+2\cdot 1-3 \\ 1+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dvs. skæringspunkterne med andenaksen er $\underline{\underline{(0,-2)\text{og } (0,2)}}$

28. maj 2021 Opgave 6: $f(x)=\ln(x)\cdot(x-2) \quad ; x>0$

a) Ligningen løses ved anvendelse af nulreglen, da man har et produkt, der giver 0:

$$f(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x)\cdot(x-2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x)=0 \ \vee \ x-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=1 \ \vee \ x=2}}$$

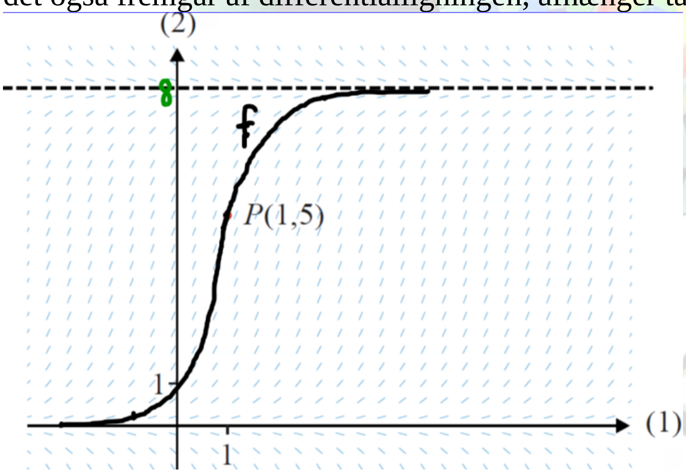
b) Differentialkvotienten i 1 bestemmes ved først at finde den afledede funktion ved anvendelse af produktreglen og derefter indsætte 1:

$$f'(x)=\frac{1}{x}\cdot(x-2)+\ln(x)\cdot 1$$

$$f'(1)=\frac{1}{1}\cdot(1-2)+\ln(1)\cdot 1=-1+0=\underline{\underline{-1}}$$

28. maj 2021 Opgave 7: $y'=a\cdot y\cdot(8-y) \quad P(1,5)$

a) Man kan genkende differentialligningen som logistisk vækst, og så ved man, hvordan grafen skal forløbe (nedre grænse er 0 og øvre grænse er 8). Men man kan også tegne grafen alene ud fra hældningsfeltet, hvor man skal udnytte, at linjeelementerne hele tiden angiver tangenthældningen i den pågældende højde (som det også fremgår af differentialligningen, afhænger tangenthældningen ikke af *x*-værdien):



b) $f'(1)=3$ fortæller os, at $y'=3$, når $x=1$, og vi ved fra *P*, at $y=5$, når $x=1$, så man har:

$$3=a\cdot 5\cdot(8-5) \quad \Leftrightarrow \quad 3=5a\cdot 3 \quad \Leftrightarrow \quad 5a=1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{a=\frac{1}{5}}}$$

28. maj 2021 Opgave 8: $\int 2x \cdot \mathrm{e}^{x^2-4}\,dx$

a) Man har en sammensat funktion, hvor den indre funktions afledede svarer til de $2x$, der står foran den sammensatte funktion. Så man kan integrere ved substitutionsmetoden (eller lave integrationsvariabelskift):

Integrationsvariabelskift: $\int 2x \cdot \mathrm{e}^{x^2-4}\,dx = \int 2x \cdot \mathrm{e}^{x^2-4}\,\frac{d\left(x^2-4\right)}{2x} = \int \mathrm{e}^{x^2-4}\,d\left(x^2-4\right) = \underline{\underline{\mathrm{e}^{x^2-4}+k}}$

Substitutionsmetoden:

$t = x^2 - 4$

$\frac{dt}{dx} = 2x$

$dt = 2x dt$

$$\int 2x \cdot \mathrm{e}^{x^2-4}\,dx = \int \mathrm{e}^t\,dt = \mathrm{e}^t + k = \underline{\underline{\mathrm{e}^{x^2-4}+k}}$$

28. maj 2021: Anden delprøve

28. maj 2021 Opgave 9:

$$\frac{dy}{dx} = 5y \qquad P(1,3)$$

a) Man kan genkende differentialligningen som en standarddifferentialligning, hvor løsningen er den eksponentielle udvikling på formen $f(x) = c \cdot e^{5x}$, hvorefter c kan bestemmes ved at indsætte punktets koordinater.

Man kan dog også lade Maple udregne det hele:

$$y'(x) = 5 \cdot y(x),\, y(1) = 3 \xrightarrow{\text{solve DE}} y(x) = \frac{3\,e^{5x}}{e^{5}}$$

Dvs. $\underline{\underline{f(x) = 3 \cdot e^{5x-5}}}$

restart

28. maj 2021 Opgave 10:

with(*Gym*) :

$M(V) = a \cdot V + b$

M er vægten af et æble målt i gram. V er rumfanget af æblet målt i kubikcentimeter.

a) Tabellens data hentes ind i Maple med: Tools-Assistants-Import Data i området A2-B205:

$$N := \begin{bmatrix} 126.0 & 164.3 \\ 140.5 & 185.9 \\ 150.70000000000002 & 201.10000000000002 \\ 142.1 & 188.8 \\ 135.8 & 178.60000000000002 \\ 136.1 & 180.60000000000002 \\ 156.5 & 206.70000000000002 \\ 151.1 & 200.10000000000002 \\ 127.60000000000001 & 168.20000000000002 \\ 146.5 & 196.0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

204 × 2 Matrix

Så kan der laves lineær regression for at bestemme konstanterne:

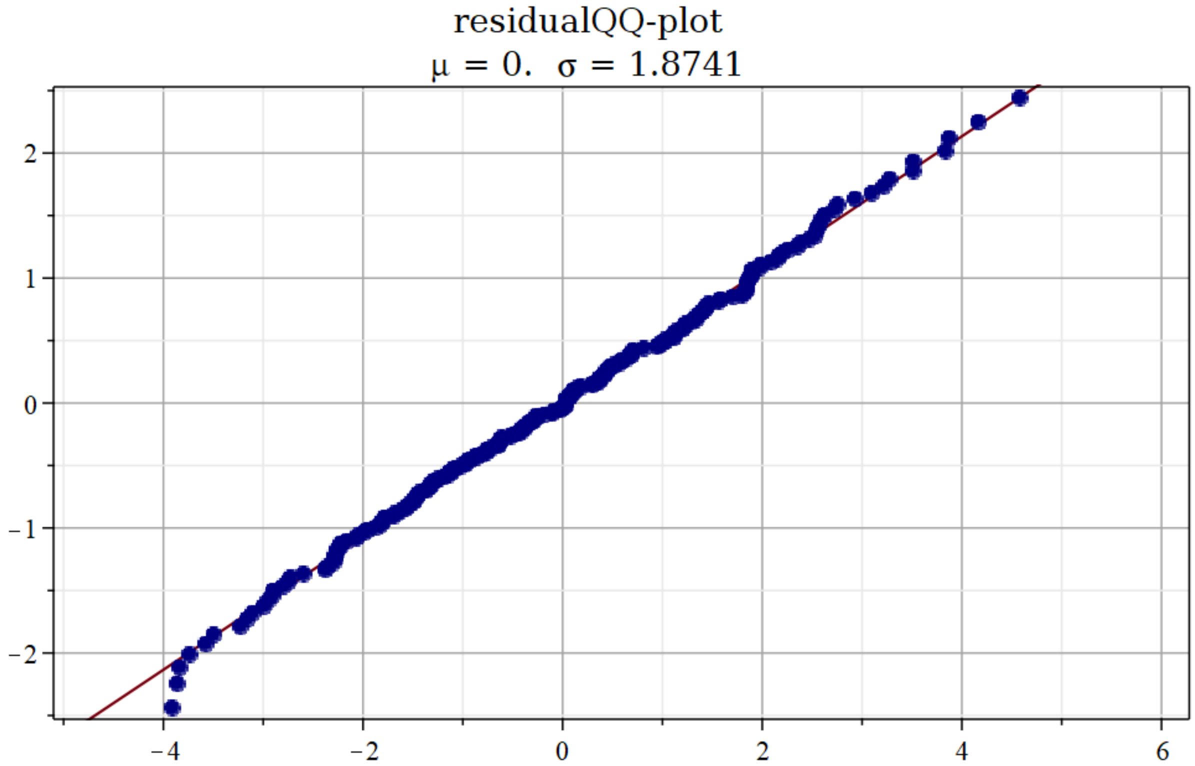
$M(V) := LinReg(N, V)$:

$M(V) = 1.32197994364904\, V + 1.30218024722752$

Dvs. $\underline{\underline{a = 1.322 \text{ og } b = 1.302}}$

b) For at undersøge, om residualerne er normalfordelte, skal man lave et QQ-plot af residualerne:

$residualQQplot(N, LinReg)$



Da punkterne med meget god tilnærmelse danner en ret linje (afvigelser helt ude i enderne kan altid forekomme i QQ-plot), **er residualerne med god tilnærmelse normalfordelte.**

28. maj 2021 Opgave 11: $y_{n+1} = g(y_n), \quad n = 0, 1, 2, ... \quad g(x) = \dfrac{4x}{1 + 0.02 \cdot x} \quad y_0 = 2$

a) Man kunne godt opstille et skema i Excel, men da det kun er y_5, der skal bestemmes, kan det godt klares i Maple.
Man bestemmer hele tiden den næste y-værdi ved at benytte udtrykket for $g(x)$:

$$y_1 = g(y_0) = g(2) = \frac{4 \cdot 2}{1 + 0.02 \cdot 2} = 7.692307692$$

$$y_2 = g(y_1) = g(7.692307692) = \frac{4 \cdot 7.692307692}{1 + 0.02 \cdot 7.692307692} = 26.66666666$$

$$y_3 = g(y_2) = g(26.66666666) = \frac{4 \cdot 26.66666666}{1 + 0.02 \cdot 26.66666666} = 69.56521736$$

$$y_4 = g(y_3) = g(69.56521736) = \frac{4 \cdot 69.56521736}{1 + 0.02 \cdot 69.56521736} = 116.3636363$$

$$y_5 = g(y_4) = g(116.3636363) = \frac{4 \cdot 116.3636363}{1 + 0.02 \cdot 116.3636363} = 139.8907104$$

Dvs. $\underline{\underline{y_5 = 139.89}}$

Man kan godt se, at man nærmer sig 150, som indgår i næste spørgsmål. Med Excel ville det være tydeligt, da man hurtigt kan få flere værdier med:

	A
1	2
2	7,692308
3	26,66667
4	69,56522
5	116,3636
6	139,8907
7	147,3381
8	149,3256
9	149,8308
10	149,9577
11	149,9894
12	149,9974
13	149,9993
14	149,9998
15	150
16	150
17	150
18	150
19	150

b) Man kan godt lige tjekke, at 150 er et fikspunkt, selvom det ikke er en del af spørgsmålet:

$g(150) = \dfrac{4 \cdot 150}{1 + 0.02 \cdot 150} = \dfrac{4 \cdot 150}{1 + 3} = \dfrac{4 \cdot 150}{4} = 150$, dvs. man får det samme, som man indsætter.

Værdien af den afledede funktion i fikspunktet afgør, om fikspunktet er stabilt:

$$g(x) := \frac{4x}{1 + 0.02 \cdot x} :$$

$g'(150) = 0.2500000000 < 1$

Da $|g'(150)| < 1$, er 150 et stabilt fikspunkt

28. maj 2021 Opgave 12

$f(x) := -0.0104 \cdot x^2 + 41.7 :$

a) Da det er oplyst, at kørebanen løber i højden 26 meter, skal man finde de steder, hvor funktionen antager denne værdi:

$f(x) = 26 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = -38.85376925\}, \{x = 38.85376925\}$

Så bredden b er:

$b = 38.85376925 - (-38.85376925) = 77.70753850$

Dvs. buens bredde målt langs kørebanen er 77,7 meter

b) Længden skal bestemmes fra bropille til bropille, så først skal man finde de steder, hvor buen rammer bropillerne:

$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = -63.32152387\}, \{x = 63.32152387\}$

Disse to steder er grænserne, når buelængden skal bestemmes:

$$l = \int_{-63.32152387}^{63.32152387} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = 157.0621738$$

Dvs. buens længde er 157,1 meter

28. maj 2021 Opgave 13

$f(x, y) := 0.88 \cdot y \cdot \sin(0.63 \cdot x) + 2.2 :$

$-7.5 \le x \le 7.5 \quad -2.5 \le y \le 2.5$

f angiver tagets højde over broen målt i meter.

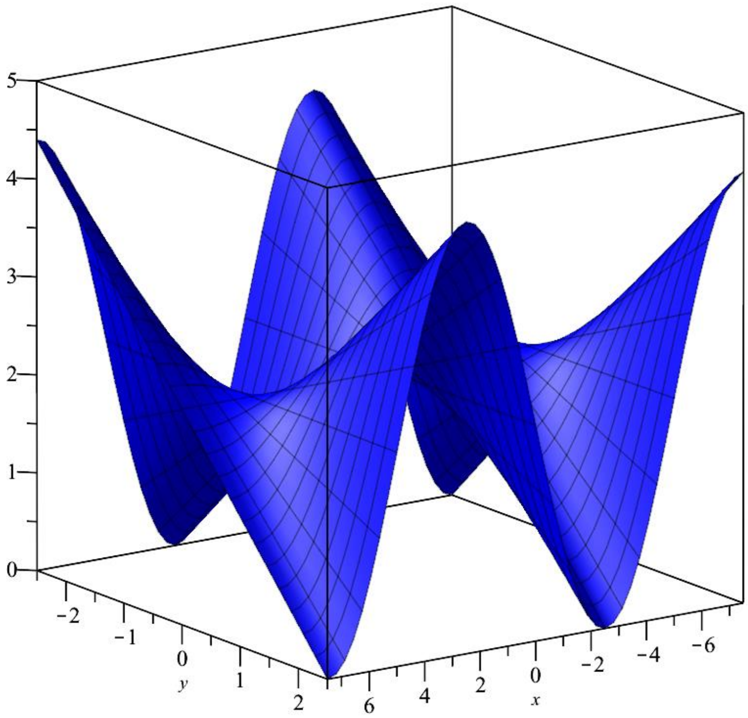
a) For $x = 0$ og $y = 0$ har man:

$f(0, 0) = 2.2$

Dvs. **her er tagets højde over broen 2,2 m**

b) Grafen kan tegnes med et 3D-plot, hvor det er vigtigt at holde sig inden for det angivne område:

$plot3d(f(x, y), x = -7.5..7.5, y = -2.5..2.5, view = [-7.5..7.5, -2.5..2.5, 0..5], color = blue)$



c) Når y-værdien fastholdes på 2,5, har man:

$g(x) := f(x, 2.5) = x \to f(x, 2.5)$

$g(x) = 2.200 \sin(0.63\,x) + 2.2$

For at bestemme den maksimale højde findes først de steder, hvor der er vandret tangent:

$intervalsolve(g'(x) = 0, x = -7.5\,..7.5) = [-7.479982509, -2.493327503, 2.493327503, 7.479982509]$

Da det er en sinusfunktion, hvor vi har fundet fire ekstremumssteder (der er ingen vandrette tangenter), kan man godt komme igennem ved at finde funktionsværdier de to første steder, da man så ved, at man får den maksimale værdi det ene sted og den minimale værdi det andet sted.

Men man kan også bruge standardmetoden, der altid kan bruges. Så med fortegnet for den anden afledede undersøges det, hvilken slags sted der er tale om:

$g''(-7.479982509) = -0.8731800 < 0$, dvs. lokalt maksimumssted

$g''(-2.493327503) = 0.8731800 > 0$, dvs. lokalt minimumssted

$g''(2.493327503) = -0.8731800 < 0$, dvs. lokalt maksimumssted

$g''(7.479982509) = 0.8731800 > 0$, dvs. lokalt minimumssted.

Man skal så bestemme funktionsværdier i de to lokale maksimumssteder samt det intervalendepunkt, der ligger efter det sidste lokale minimumssted. Det er de steder, hvor den maksimale værdi kan antages.

$g(-7.479982509) = 4.400$

$g(2.493327503) = 4.400$

$g(7.5) = 0.000174939$

Dvs. **mod syd er tagets maksimale højde over broen 4,4 m**

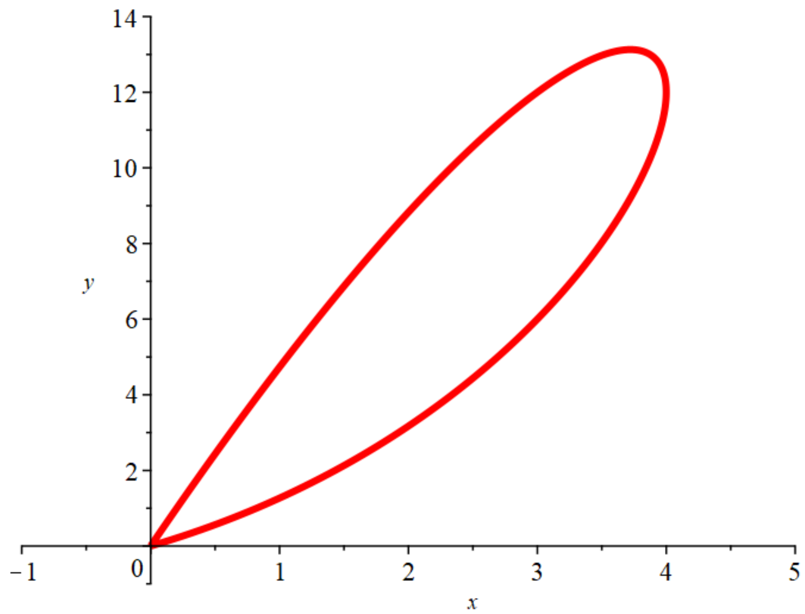
28. maj 2021 Opgave 14

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot t - t^2 \\ t^3 - 9 \cdot t^2 + 20 \cdot t \end{pmatrix} \quad ; \quad 0 \le t \le 4$$

Musehullet er placeret i (0,0), og længderne måles i meter og tiden t måles i minutter

a) Ruten skal tegnes i det angivne tidsinterval (0 til 4 minutter):

$plot\left(\left[4\,t - t^2, t^3 - 9 \cdot t^2 + 20 \cdot t, t = 0\,..4\right], x = -1\,..5, y = -1\,..14, color = red, thickness = 4\right)$



b) Først bestemmes hastighedsfunktionen ved at differentiere koordinatvis.

$$\vec{s}\,'(t) = \begin{pmatrix} 4-2t \\ 3t^2-18t+20 \end{pmatrix}$$

Så man har:

$$\vec{s}\,'(1) = \begin{pmatrix} 4-2\cdot 1 \\ 3\cdot 1^2-18\cdot 1+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Længden af denne vektor er:

$$|\vec{s}\,'(1)| = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29.} = 5.385164807$$

Dvs. **at 1 minut efter, at musen er kravlet ud af sit hul, bevæger den sig med farten 5,4 meter i minuttet.**

Hvis man vil lade Maple foretage udregningerne, kan det gøres ved:

$$s(t) := \langle 4t-t^2, t^3-9t^2+20t\rangle :$$

$$len(s'(t)) \xrightarrow{\text{evaluate at point}} \sqrt{29}$$

c) Længden af positionsvektoren svarer til afstanden til hullet. Så afstanden $d(t) = \sqrt{(x(t))^2+(y(t))^2}$

$$d(t) := \sqrt{(4\cdot t-t^2)^2+(t^3-9\cdot t^2+20\cdot t)^2} :$$

For at finde tidspunktet med størst afstand findes først de steder, hvor den afledede funktion er 0:

$$d'(t) = 0. \xrightarrow{\text{solve}}$$

$$\{t=1.503767719\}, \{t=4.748116141+0.7131611974\,\mathrm{I}\}, \{t=4.748116141-0.7131611974\,\mathrm{I}\}$$

De to sidste tider er komplekse, så de forkastes.

Ved hjælp af fortegnet for den anden afledede tjekkes det, at der er tale om et maksimumssted:

$d''(1.503767719) = -9.103204360 < 0$, dvs. lokalt maksimumssted.

Dvs. **musen er længst væk fra hullet 1,5 minutter efter at være kravlet ud af hullet.**

13. august 2021: Første delprøve

13. august 2021 Opgave 1: $x \cdot (3x-9) = 0$

a) Det er et produkt, der skal give nul, så man kan anvende nulreglen:

$$x \cdot (3x-9) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ 3x - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 0 \ \vee \ x = 3}}$$

13. august 2021 Opgave 2: $y' = x \cdot y \quad P(2,7)$

a) Da *f* er en løsning, hvor grafen går gennem *P*, kan man finde hældningen for tangenten til grafen for *f* i *P* ved at indsætte punktets koordinater i differentialligningen:

$$a_{\text{tangent}} = y' = 2 \cdot 7 = 14$$

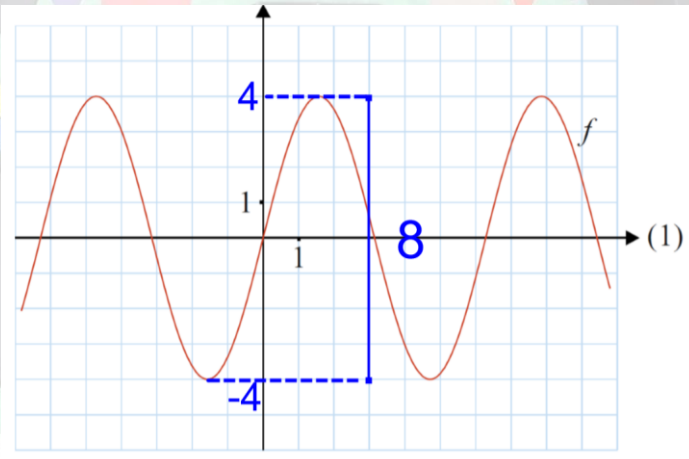
Da man desuden kender røringspunktet *P*'s koordinater, kan tangentligningen bestemmes:

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

$$y - 7 = 14 \cdot (x-2) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = 14x - 21}}$$

13. august 2021 Opgave 3: $f(x) = A \cdot \sin(x)$

a) *A* står som koefficient foran sinusfunktionen, så det er amplituden, dvs. halvdelen af forskellen mellem største og mindste funktionsværdi:



Størsteværdien aflæses til 4 og mindsteværdien til -4, så amplituden bliver:

$$A = \frac{f_{\max} - f_{\min}}{2} = \frac{4-(-4)}{2} = \frac{8}{2} = \underline{\underline{4}}$$

13. august 2021 Opgave 4: $f(x) = x^2 \cdot \ln(x) \quad , \ x > 0$

a) Der differentieres ved hjælp af produktreglen:

$$f'(x) = (x^2)' \cdot \ln(x) + x^2 \cdot (\ln(x))' = 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln(x) + x = \underline{\underline{x \cdot (2\ln(x) + 1)}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

13. august 2021 Opgave 5: $f(x)=\mathrm{e}^{x^2-9}$, $x>0$ $g(x)=\sqrt{\ln(x)+9}$, $x>\mathrm{e}^{-9}$ (fejl i opgaveteksten)

Definitionsmængden for *g* kunne godt udvides til et svagt ulighedstegn, men det skarpe ulighedstegn passer med den angivne definitionsmængde for *f*. Opgavetekstens $x>0$ for *g* er forkert, da $0<x<\mathrm{e}^{-9}$ giver negative tal under kvadratroden.

a) $f(3)=\mathrm{e}^{3^2-9}=\mathrm{e}^{9-9}=\mathrm{e}^0=\underline{\underline{1}}$

b) $g(f(x))=g\left(\mathrm{e}^{x^2-9}\right)=\sqrt{\ln\left(\mathrm{e}^{x^2-9}\right)+9}=\sqrt{\left(x^2-9\right)+9}=\sqrt{x^2}=\underline{\underline{x}}$ (sidste skridt gælder, da $x>0$)

Definitionsmængden for den sammensatte funktion er $x>0$.

f og *g* er omvendte funktioner, da sammensætningen giver en identitetsfunktion.

13. august 2021 Opgave 6: $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}5+7\cdot\cos(t)\\-1+7\cdot\sin(t)\end{pmatrix}$, $0\le t\le 2\pi$

a) $\vec{s}(0)=\begin{pmatrix}5+7\cdot\cos(0)\\-1+7\cdot\sin(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5+7\cdot 1\\-1+7\cdot 0\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}12\\-1\end{pmatrix}}}$

b) Ud fra parameterfremstillingen kan man aflæses, at cirklens radius er 7, og at den har centrum i $(5,-1)$. Og dermed bliver ligningen:

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

$\underline{\underline{(x-5)^2+(y+1)^2=49}}$

Hvis man ikke kan huske, hvordan man aflæses parameterfremstillingen, må man regne sig frem til ligningen. Koordinatfunktionerne skrives ud:

$x=5+7\cdot\cos(t)$

$y=-1+7\cdot\sin(t)$

Konstantleddene trækkes over på venstresiden, og der kvadreres:

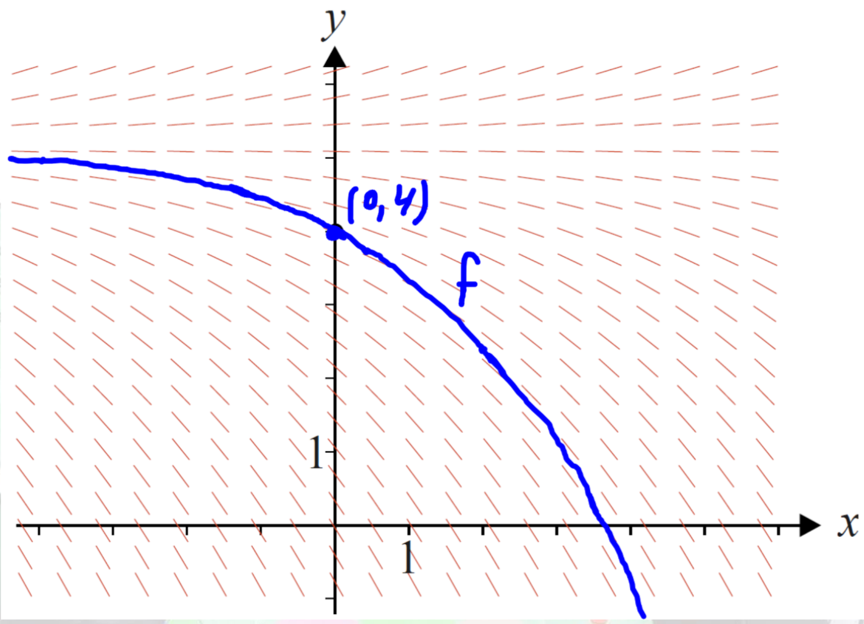
$$\left.\begin{aligned}(x-5)^2&=(7\cdot\cos(t))^2\\(y+1)^2&=(7\cdot\sin(t))^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow(x-5)^2+(y+1)^2=49\cdot\cos^2(t)+49\cdot\sin^2(t)=49\cdot\left(\cos^2(t)+\sin^2(t)\right)=49$$

13. august 2021 Opgave 7: $y_{n+1}=1{,}5\cdot y_n+2$ $y_0=4$

a) $y_1=1{,}5\cdot y_0+2=1{,}5\cdot 4+2=6+2=\underline{\underline{8}}$

$y_2=1{,}5\cdot y_1+2=1{,}5\cdot 8+2=12+2=\underline{\underline{14}}$

13. august 2021 Opgave 8: Linjeelementerne angiver tangenthældningen, og det bemærkes, at hældningerne kun afhænger af andenkoordinaten. Hvis man på et lille område tilnærmer et stykke af grafen med et ret linjestykke, skal dette altså være parallelt med linjeelementerne i samme højde.



13. august 2021 Opgave 9: a) Når f er tæthedsfunktionen for en normalfordelt stokastisk variabel X, angiver $\int_{-\infty}^{13} f(x)\,dx$ **sandsynligheden for, at den stokastiske variabel antager en værdi på højst 13.**

13. august 2021 Opgave 10: $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x}$, $x > 0$

a) Hvis man integrerer med integrationsvariabelskift, bliver udregningen:

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx = \int \frac{2x+3}{x^2+3x} \cdot \frac{d\left(x^2+3x\right)}{2x+3} = \int \frac{1}{x^2+3x}\,d\left(x^2+3x\right) = \ln\left|x^2+3x\right| + k = \underline{\underline{\ln\left(x^2+3x\right)+k}}$$

Numerisktegnet fjernes, da argumentet i logaritmen er positivt, når x er positivt.

Hvis man bruger substitutionsmetoden, er udregningen:

$t = x^2 + 3x$

$\dfrac{dt}{dx} = 2x + 3$

$dt = (2x+3)\,dx$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + k = \ln\left|x^2+3x\right| + k = \underline{\underline{\ln\left(x^2+3x\right)+k}}$$

13. august 2021: Anden delprøve

13. august 2021 Opgave 11:

$with(Gym)$:

$f(x) = a \cdot x + b$

x er kilometerstanden målt i 1000 km

$f(x)$ er brugtvognsprisen målt i 1000 kr.

a) Funktionsforskriften viser, at man skal anvende lineær regression.

Datasættet hentes med Tools - Assistants - Import Data (Cell Range A2:B131):

$$M := \begin{bmatrix} 58.0 & 173.3 \\ 56.0 & 152.7 \\ 54.0 & 172.4 \\ 29.0 & 179.1 \\ 77.0 & 145.4 \\ 59.0 & 179.9 \\ 69.0 & 157.1 \\ 45.0 & 176.60000000000002 \\ 78.0 & 150.1 \\ 28.0 & 197.70000000000002 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

130 × 2 Matrix

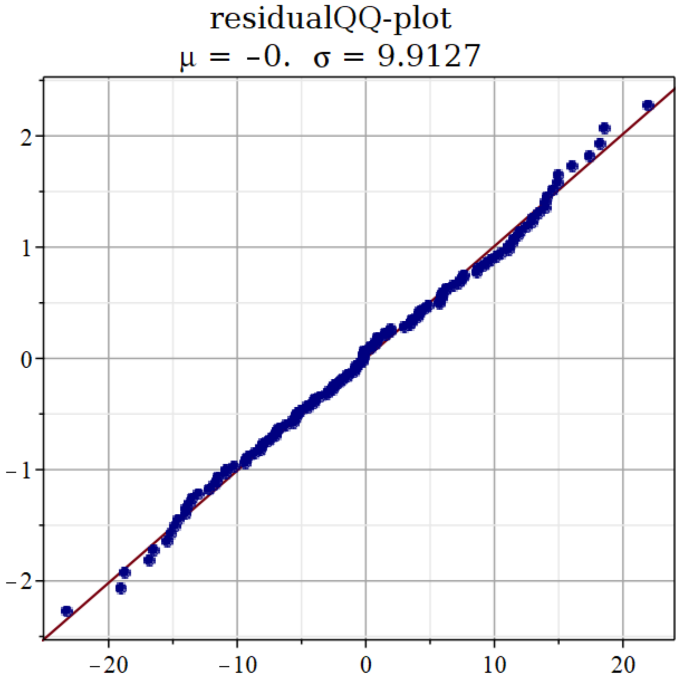
$f(x) := LinReg(M, x) = x \to LinReg(M, x)$

$f(x) = -0.774234428199097\,x + 210.630013195376$

Dvs. $\underline{\underline{a = -0.774 \text{ og } b = 210.63}}$

b) Der laves et QQ-plot af residualerne:

$residualQQplot(M, LinReg)$



Da punkterne med god tilnærmelse danner en ret linje, når man laver et QQ-plot, er residualerne med god tilnærmelse normalfordelte.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

13. august 2021 Opgave 12:

$f(x) := e^x - 2x + 5:$

a) Først bestemmes ved ledvis integration den form samtlige stamfunktioner er på:

$F_k(x) = e^x - x^2 + 5x + k$ (hvis man benytter Maple til udregningen, skal man huske at tilføje integrationskonstanten)

Da grafen skal gå gennem punktet $P(0, 10)$ får man:

$10 = e^0 - 0^2 + 5 \cdot 0 + k \Leftrightarrow 10 = 1 + k \Leftrightarrow k = 9$

Dvs. den søgte stamfunktion er:

$\underline{\underline{F(x) = e^x - x^2 + 5x + 9}}$

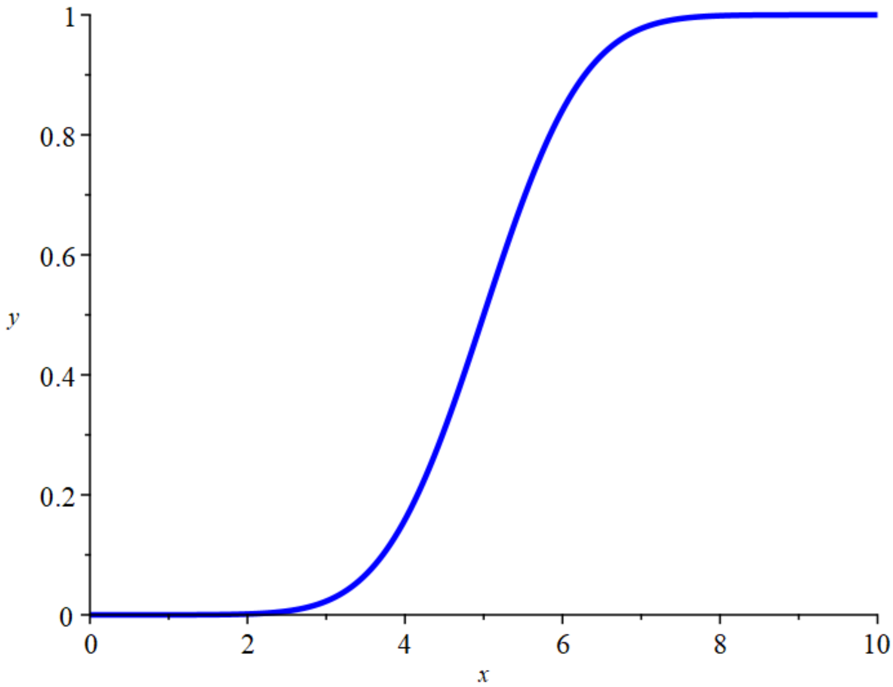
13. august 2021 Opgave 13:

X er en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi 5 og spredning 1 $(X \sim N(5, 1))$

$with(Gym):$

a) Fordelingsfunktionen $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot 1} \cdot e^{-\frac{(t-5)^2}{2 \cdot 1^2}} dt$ findes i Gym-pakken som *normalcdf*.

$plot(normalcdf(5, 1, x), x = 0..10, y = 0..1, color = blue, thickness = 3)$



b) $P(X \le k) = 0.4$ betyder, at den øvre grænse i ovenstående integral skal vælges, så fordelingsfunktionen antager værdien 0,4. Hvilket vil sige, at der skal være 40% chance for, at den stokastiske variabel antager en værdi, der højst er k.

$$fsolve\left(\int_{-\infty}^{k} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot 1} \cdot e^{-\frac{(x-5)^2}{2 \cdot 1^2}} dx = 0.4, k\right) = 4.746652897$$

Dvs. $\underline{\underline{k = 4.747}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

13. august 2021 Opgave 14:

$y' = y + x - x^2 \qquad P(1,3)$

a) Dette kan omskrives til en lineær førsteordens differentialligning, der kan løses med panserformlen, men Maple kan også klare udregningerne:

$y'(x) = y(x) + x - x^2, y(1) = 3 \xrightarrow{\text{solve DE}} y(x) = x^2 + x + 1$

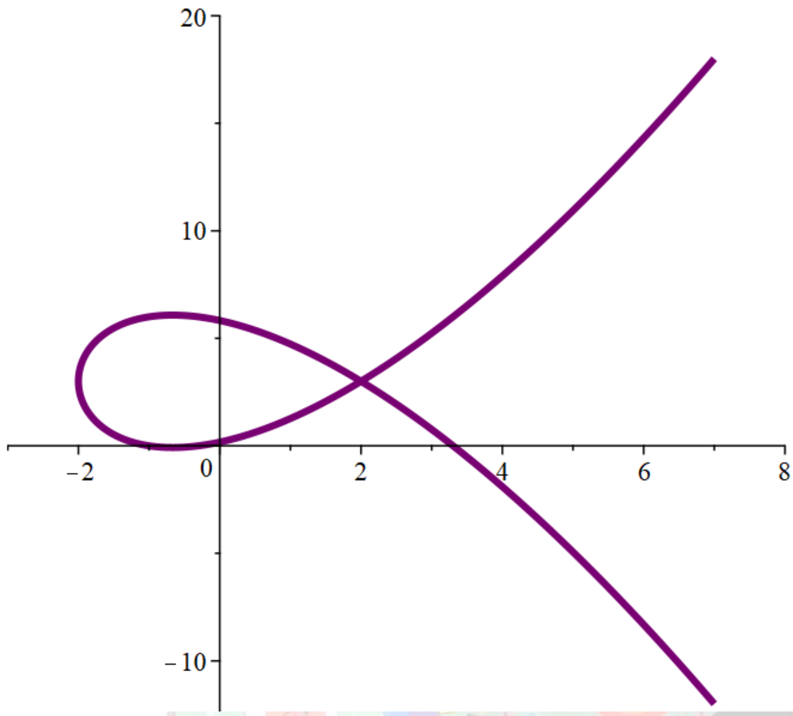
Dvs. $\underline{\underline{f(x) = x^2 + x + 1}}$

13. august 2021 Opgave 15:

$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 2 \\ t^3 - 4t + 3 \end{pmatrix} \qquad -3 \le t \le 3$

a) Parameterkurven skal tegnes med det angivne interval for t-værdiern, og samtidig skal grafvinduet være stort nok til, at hele grafen kommer med:

$plot\left(\left[t^2 - 2, t^3 - 4t + 3, t = -3..3\right], view = [-3..8, -15..20], color = purple, thickness = 4\right)$



b) Parameterværdien 2 giver punktet:

$\vec{s}(2) = \begin{pmatrix} 2^2 - 2 \\ 2^3 - 4\cdot 2 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Parameterværdierne svarende til dette punkt skal være løsninger til begge nedenstående ligninger:

$t^2 - 2 = 2 \Leftrightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow t = -2 \vee t = 2$

$t^3 - 4t + 3 = 3 \Leftrightarrow t^3 - 4t = 0 \Leftrightarrow t\cdot\left(t^2 - 4\right) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t^2 = 4 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = -2 \vee t = 2$

Der er to parameterværdier, der er løsninger til begge ligninger, men 2 er allerede nævnt, så den **anden parameterværdi er -2**

Maple kan også finde begge værdier, uden at man kender den første:

$t^2 - 2 = s^2 - 2, t^3 - 4\cdot t + 3 = s^3 - 4\cdot s + 3 \xrightarrow{\text{solve}} \{s = t, t = t\}, \{s = -2, t = 2\}, \{s = 2, t = -2\}$

c) Tangentvektorerne, der er retningsvektorer for de to tangenter, bestemmes, da den ene af vinklerne mellem tangenterne svarer til vinklen mellem tangentvektorerne (den anden er supplementvinklen).
Tangentvektorerne svarer til differentialkvotienterne i punktet, når den ikke er nulvektoren:

$$\vec{s}\,'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 - 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{s}\,'(-2) = \begin{pmatrix} 2\cdot(-2) \\ 3\cdot(-2)^2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{s}\,'(2) = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 \\ 3\cdot 2^2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Så kan vinklen bestemmes med $\cos(v) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

$$Cos(V) = \frac{dotP(\langle -4, 8\rangle, \langle 4, 8\rangle)}{len(\langle -4, 8\rangle)\cdot len(\langle 4, 8\rangle)} \xrightarrow{\text{solve for V}} [[V = 53.13010235]]$$

Dvs. den spidse vinkel mellem tangenterne er $\underline{\underline{53.13°}}$

13. august 2021 Opgave 16:

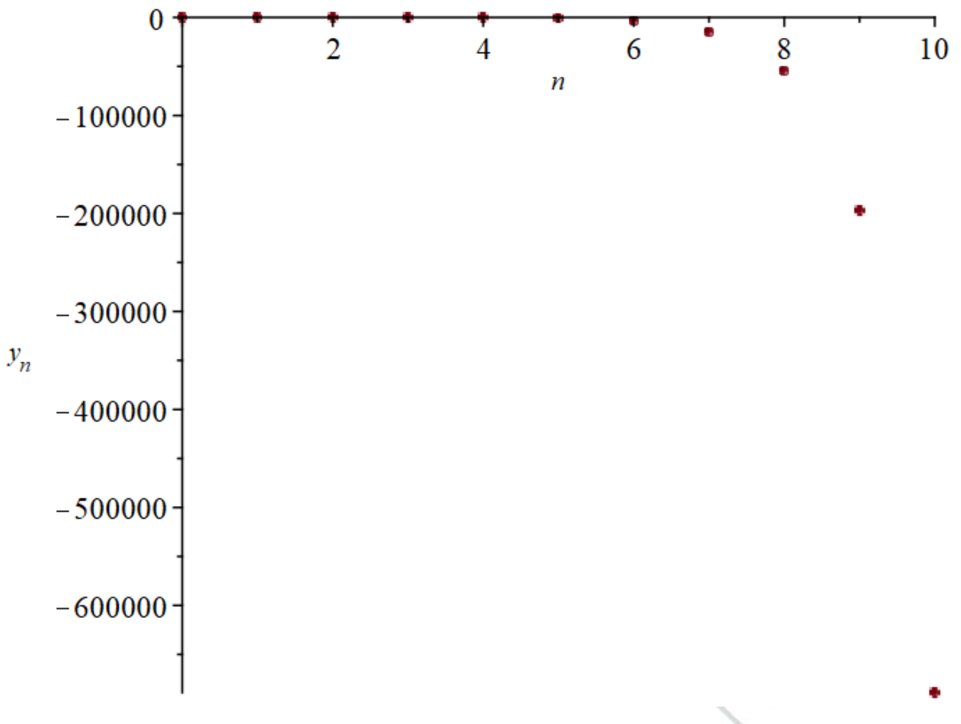
$y_{n+1} = 6\cdot y_n - 9\cdot y_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3 \qquad y_0 = 5 \quad y_1 = 10$

a) For at tegne et punktplot følges fremgangsmåden bagest i hæftet om differensligninger:

```
y := proc(n) option remember; 6·y(n − 1) − 9·y(n − 2); end;
```

```
y := proc(n) option remember; 6*y(n − 1) − 9*y(n − 2) end proc
```

```
y(0) := 5 : y(1) := 10 :
plot([seq([n, y(n)], n = 0 ..10)], style = point, labels = [n, y_n], symbol = solidcircle)
```



b) Det er en differensligning af typen fra definition 5 i hæftet (dvs. en generel homogen lineær andenordens differensligning med konstante koefficienter). Det karakteriske polynomium er:

$P(x) = x^2 - 6x + 9$

Det har diskriminanten:

$d = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$

Dobbeltroden bestemmes:

$x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{(-6)}{2 \cdot 1} = 3$

Da diskrimanten ikke er negativ, kan differensligningen skrives på lukket form, og da $d = 0$ har man:

$y_n = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot n \cdot 3^n$

Da man kender y_0 og y_1, kan konstanterne bestemmes:

$5 = C_1 \cdot 3^0 + C_2 \cdot 0 \cdot 3^0,\ 10 = C_1 \cdot 3^1 + C_2 \cdot 1 \cdot 3^1 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{C_1 = 5, C_2 = -\dfrac{5}{3}\right\}$

Dvs. $\underline{\underline{y_n = 5 \cdot 3^n - \dfrac{5}{3} \cdot n \cdot 3^n}}$

13. august 2021 Opgave 17:

$f(x,y) := \dfrac{24x}{x^2 + y^2 + 4}$:

a) Der er stationære punkter de steder, hvor gradienten er nulvektoren:

$\dfrac{\partial}{\partial x}(f(x,y)) = 0,\ \dfrac{\partial}{\partial y}(f(x,y)) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 2, y = 0\}, \{x = -2, y = 0\}$

De tilsvarende funktionsværdier bestemmes:

$f(2,0) = 6$

$f(-2,0) = -6$

Dvs. koordinatsættene for de to stationære punkter er $\underline{\underline{(2,0,6) \text{ og } (-2,0,-6)}}$

b) Man kan finde en ligning for niveaukurven bestemt ved $f(x,y) = 4$:

$4 = \dfrac{24x}{x^2 + y^2 + 4} \Leftrightarrow 1 = \dfrac{6x}{x^2 + y^2 + 4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4 = 6x \Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 = -4 \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = -4 + 9 = 5$

Dette er ligningen for en cirkel med centrum i $(3,0)$ og radius $\sqrt{5}$, så niveaukurven er en cirkel.

7. december 2021: Første delprøve

7. december 2021 opgave 1: Det ubestemte integral bestemmes ved ledvis integration:

$$\text{a)}\ \int\left(e^x+6\cdot x^2+4\right)dx=\underline{\underline{e^x+2x^3+4x+k}}$$

7. december 2021 opgave 2: $f(x)=4x-1 \quad g(x)=x^3$

Den indre funktion i den sammensatte funktion er *g*, så først indsættes i den:

a) $f(g(2))=f\left(2^3\right)=f(8)=4\cdot 8-1=32-1=\underline{\underline{31}}$

7. december 2021 opgave 3: $f(x,y)=3x^2+8y^2-2y+3$

a) Der skal differentieres med hensyn til *y*, så *x*-værdien betragtes som en konstant:

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2+8y^2-2y+3\right)=0+8\cdot 2y-2+0=\underline{\underline{16y-2}}$$

7. december 2021 opgave 4: $E(X)=25$

a) Da det er tæthedsfunktionen *f* for den stokastiske variabel *X*, der er angivet, og dermed svarer arealerne under grafen til sandsynlighederne for, at den stokastiske variabel antager værdier i det pågældende interval. Arealet under grafen for *f* i intervallet [24,25] fortæller os altså, at:

$P(24\leq X\leq 25)=0{,}28=\underline{\underline{28\%}}$

b) Da middelværdien er 25 og tæthedsfunktionen er symmetrisk omkring denne værdi, vil

$P(25\leq X\leq 26)=P(24\leq X\leq 25)=0{,}28$

Man har derfor:

$$P(X\geq 27)=1-P(X\leq 27)=1-\left(P(X<25)+P(25\leq X\leq 26)+P(26\leq X\leq 27)\right)=$$

$$1-(0{,}5+0{,}28+0{,}16)=1-0{,}94=0{,}06=\underline{\underline{6\%}}$$

Det svage ulighedstegn markeret med rødt kan også være et skarpt ulighedstegn, da normalfordelingen er en kontinuert (dvs. ikke diskret) fordeling.

7. december 2021 opgave 5: $\left(x^2-9\right)\cdot\ln(x)=0 \quad , \quad x>0$

a) Det er et produkt, der skal give 0, så nulreglen benyttes til at løse ligningen:

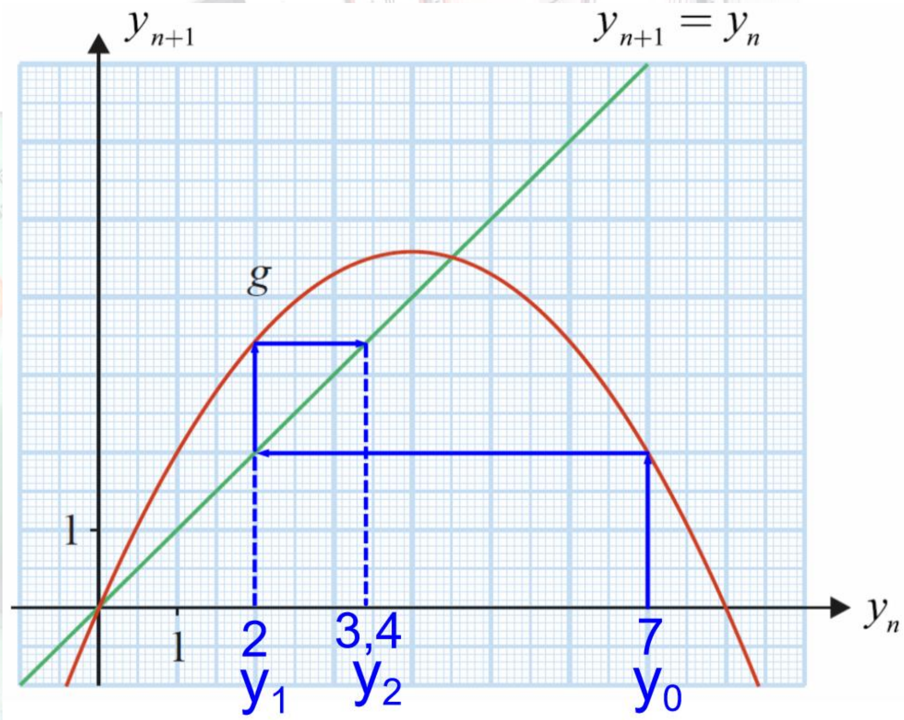
$x^2-9=0 \ \vee\ \ln(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=-3\ \vee\ x=3\ \vee\ x=1$

Men da grundmængden er alle positive tal (fordi man kun kan tage logaritmen til positive tal), er løsningen:

$\underline{\underline{x=1\ \vee\ x=3}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

7. december 2021 opgave 6: Fra $y_0 = 7$ går man lodret op til grafen for *g*, derefter vandret ud til den rette linje med ligningen $y = x$, hvor man på førsteaksen (eller andenaksen) aflæser $\underline{\underline{y_1 = 2}}$, derefter går man igen lodret til grafen og vandret til den rette linje, hvor man aflæser $\underline{\underline{y_2 = 3{,}4}}$.



7. december 2021 opgave 7: $f(x) = 2x + \sin(x) + 4$, $P(0, f(0))$

a) Den afledede funktion bestemmes ved ledvis differentiation:

$$f'(x) = 2 + \cos(x) + 0 = \underline{\underline{2 + \cos(x)}}$$

b) For at kunne bestemme en ligning for tangenten skal man kende tangenthældningen og koordinatsættet for røringspunktet.

Tangenthældningen: $a = f'(0) = 2 + \cos(0) = 2 + 1 = 3$

Røringspunktets andenkoordinat: $y_0 = f(0) = 2 \cdot 0 + \sin(0) + 4 = 0 + 0 + 4 = 4$

Så tangentens ligning er:

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

$$y - 4 = 3 \cdot (x - 0) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = 3x + 4}}$$

7. december 2021 opgave 8: $y' = 20 - 4 \cdot y \quad ; \quad P_0(x_0, y_0) = (0,3)$

a) Linjeelementet i P_0 skal ud over punktets koordinatsæt angive hældningen for tangenten til grafen for den partikulære løsning til differentialligningen, og hældningen findes ved indsættelse i differentialligningen:
$y' = 20 - 4 \cdot 3 = 20 - 12 = 8$.

Så linjeelementet er $\underline{\underline{(0,3;8)}}$

b) Det er en standarddifferentialligning (nr. 177 i formelsamlingen) $y' = b - a \cdot y$ med den fuldstændige løsning $y = \frac{b}{a} + c \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot x}$.

Så forskriften for den fuldstændige løsning er: $f(x) = \frac{20}{4} + c \cdot \mathrm{e}^{-4 \cdot x}$.

c-værdien for den partikulære løsning bestemmes ved indsættelse af punktets koordinater:

$$3 = \frac{20}{4} + c \cdot \mathrm{e}^{-4 \cdot 0} \quad \Leftrightarrow \quad 3 = 5 + c \cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad c = -2$$

Dvs. at forskriften for den partikulære løsning, hvis graf går gennem P_0, er $\underline{\underline{f(x) = 5 - 2 \cdot \mathrm{e}^{-4 \cdot x}}}$

7. december 2021 opgave 9: $f(x) = x^2 - 3x - 4$

a) For at bestemme monotoniforholdene for stamfunktionen *F* til *f*, skal man først finde de steder, hvor den afledede funktion af stamfunktionen er 0, dvs. $F'(x) = f(x) = 0$.

$$0 = x^2 - 3x - 4 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = (x-4) \cdot (x+1) \quad \Leftrightarrow \quad x = 4 \ \vee \ x = -1$$

Grafen for *F* har altså vandret tangent disse to steder, og typen af stederne bestemmes ved at indsætte i den anden afledede af *F*:

$F''(x) = f'(x) = 2x - 3$

$F''(-1) = 2 \cdot (-1) - 3 = -2 - 3 = -5 < 0$, dvs. lokalt maksimumssted.

$F''(4) = 2 \cdot 4 - 3 = 5 > 0$, dvs. lokalt minimumssted.

Dermed er ***F*** **voksende i intervallet]-∞,-1], aftagende i intervallet [-1,4] og voksende i intervallet [4,∞[.**

7. december 2021: Anden delprøve

7. december 2021 opgave 10:

$y' = 0.5 \cdot y \cdot (1 - 0.0002 \cdot y) - 0.06 \cdot y$

y angiver antal fisk i bassinet, og den uafhængige variabel er t, der måles i antal år efter undersøgelsens start.
Det oplyses, at der ved undersøgelsens start er 3500 fisk i bassinet, dvs. $y_0 = 3500$

a) Hastigheden kan bestemmes ved at indsætte den kendte y-værdi i differentialligningen:

$y' = 0.5 \cdot 3500 \cdot (1 - 0.0002 \cdot 3500) - 0.06 \cdot 3500 = 315.00000$

Dvs. at **ved undersøgelsens start vokser antallet af fisk i bassinet med 315 om året.**

b) Først bestemmes den partikulære løsning til differentialligningen:

$$y'(t) = 0.5 \cdot y(t) \cdot (1 - 0.0002 \cdot y(t)) - 0.06 \cdot y(t), y(0) = 3500 \xrightarrow{\text{solve DE}} y(t) = \frac{154000}{35 + 9\,e^{-\frac{11\,t}{25}}}$$

Antallet af fisk i bassinet efter 5 år kan så bestemmes ved at indsætte $t = 5$:

$$y(5) = \frac{154000.}{35 + 9\,e^{-\frac{11 \cdot 5}{25}}} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 4278.107141$$

Dvs. at **efter 5 år er der 4278 fisk i bassinet.**

7. december 2021 opgave 11:

$f(x) := 2x - \frac{1}{2} \cdot x^3$:

a) Det er angivet på figuren, at grafen for f skærer førsteaksen i 0 og 2, og det kan tjekkes med:

$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 0\}, \{x = 2\}, \{x = -2\}$

De to ikke-negative nulpunkter fungerer som grænser i det bestemte integral, der giver arealet:

$$A_M = \int_0^2 f(x)\,dx = 2$$

$$\underline{\underline{A_M = 2}}$$

b) Da de to dele skal have samme areal, skal hver af dem have halvdelen af ovenstående areal, dvs. arealet 1:

$$\int_0^k f(x)\,dx = 1. \xrightarrow{\text{solve}} \{k = 1.082392200\}, \{k = -1.082392200\}, \{k = 2.613125930\}, \{k = -2.613125930\}$$

Tre af løsningerne ligger uden for intervallet [0,2], så de forkastes, dvs. $\underline{\underline{k = 1.0824}}$

Man kan også direkte angive, at arealerne skal være lige store:

$$\int_{0.}^k f(x)\,dx = \int_k^{2.} f(x)\,dx \xrightarrow{\text{solve}} \{k = 1.082392200\}, \{k = -1.082392200\}, \{k = 2.613125930\}, \{k = -2.613125930\}$$

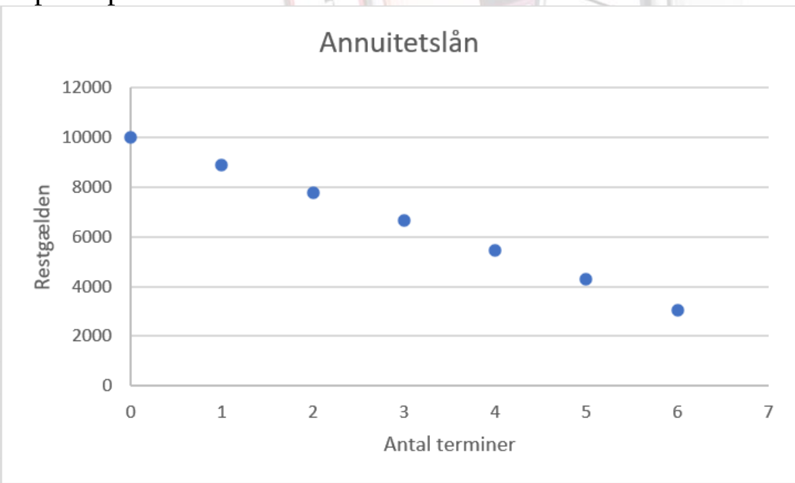
Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

7. december 2021 opgave 12:

$y_{n+1} = 1{,}02 \cdot y_n - 1300 \quad , \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

a) I cellen B4 indtastes *fx* =1,02*B3-1300 (der giver 8900), og derefter trækkes formlen ned. Derefter tegnes et punktplot.

2	n	y
3	0	10000
4	1	8900
5	2	7778
6	3	6633,56
7	4	5466,231
8	5	4275,556
9	6	3061,067
10	7	1822,288
11	8	558,734
12	9	-730,091
13	10	-2044,69
14	11	-3385,59
15	12	-4753,3
16	13	-6148,36
17	14	-7571,33



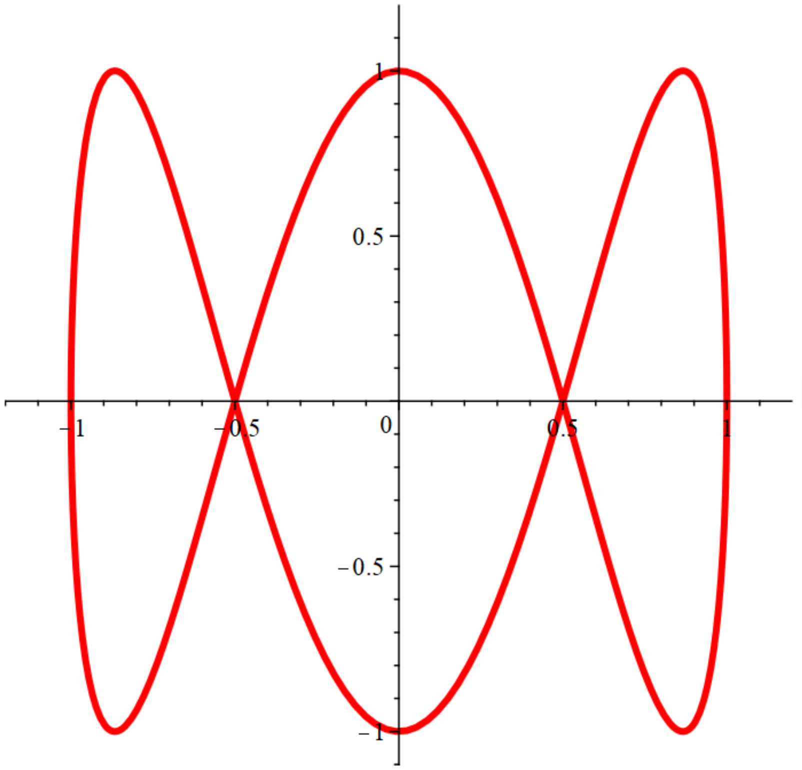
b) Som det ses i tabellen kommer restgælden under 1300 kr. efter **8 terminer** (558,73 kr.)

7. december 2021 opgave 13:

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix} \quad , \; 0 \le t \le 2\pi$

a) Parameterkurven skal tegnes med de angivne parameterværdier:

$plot([\cos(t), \sin(3t), t = 0..2\cdot\pi], view = [-1.2..1.2, -1.2..1.2], color = red, thickness = 4)$



Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

$with(Gym):$

b) Skæringspunkter med andenaksen har førstekoordinaten 0, så man skal løse ligningen $\cos(t) = 0$.

$$intervalsolve(\cos(t) = 0, t = 0..2\cdot\pi) = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

Andenkoordinaten for disse parameterværdier bestemmes:

$$\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\sin\left(3\cdot\frac{3\cdot\pi}{2}\right) = 1$$

Dvs. parameterkurvens skæringspunkter med andenaksen er $\underline{\underline{(0,-1) \text{ og } (0,1)}}$

---

c) Hastighedsfunktionen bestemmes ved at differentiere koordinatvis (kædereglen bruges på y-koordinaten):

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 3\cdot\cos(3t) \end{pmatrix}$$

Hastighedsvektorerne i dobbeltpunktet kan bestemmes, da parameterværdierne kendes: $t = \frac{\pi}{3}$ og $t = \frac{5\pi}{3}$:

$$v_1 := \left\langle -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right), 3\cdot\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right\rangle = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$v_2 := \left\langle -\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right), 3\cdot\cos\left(3\cdot\frac{5\pi}{3}\right)\right\rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -3 \end{bmatrix}$$

Vinklen w mellem disse vektorer bestemmes med $\cos(w) = \dfrac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1|\cdot|\vec{v}_2|}$

$$Cos(w) = \frac{dotP(v_1, v_2)}{len(v_1)\cdot len(v_2)} \xrightarrow{\text{solve for w}} [[w = 32.20422750]]$$

Dvs. $\underline{\underline{w = 32.204°}}$

7. december 2021 opgave 14:

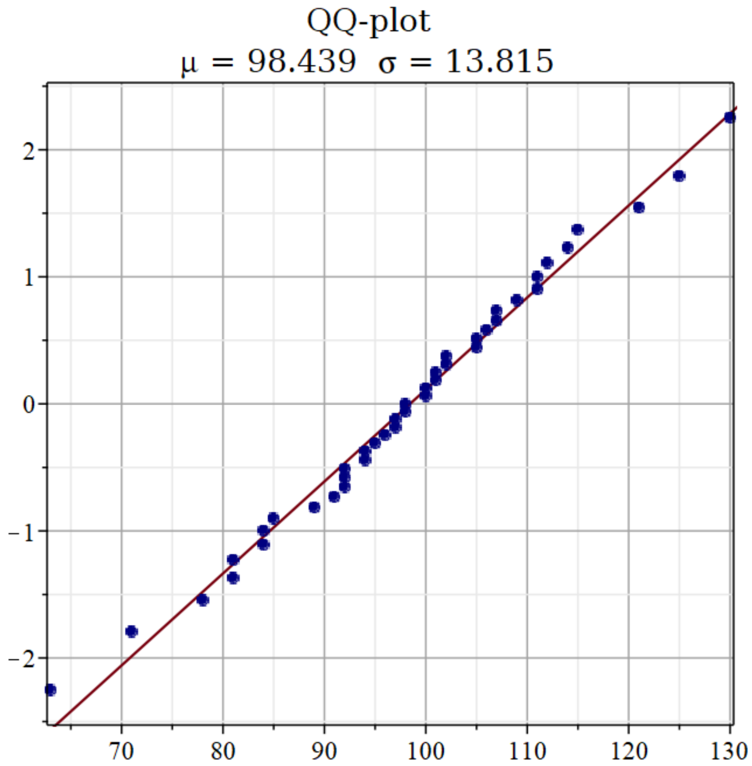
a) Datasættet hentes ind i Maple med 'Tools'-'Assistants'-'Import Data' (cellerne A2:A42):

$$Tommelfinger := \begin{bmatrix} 63.0 \\ 91.0 \\ 89.0 \\ 97.0 \\ 100.0 \\ 101.0 \\ 98.0 \\ 100.0 \\ 92.0 \\ 94.0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

41 × 1 Matrix

Med et QQ-plot kan det så undersøges, om længderne af tommelfingrene er normalfordelt:

QQplot(*Tommelfinger*)



Da punkterne med god tilnærmelses følger en ret linje, er længden af elevernes venstre tommelfinger med god tilnærmelse normalfordelt.

b) I QQ-plottet har man også fået middelværdien og spredningen for normalfordelingen. Exceptionelle udfald ligger mere end tre spredninger fra middelværdien, så den nedre grænse er:

$\mu - 3\cdot\sigma = 98.439 - 3\cdot 13.815 = 56.994$

Den mindst tommelfingerlængde var 63 mm.

Da $63 > 56.994$, er **63 mm IKKE et exceptionelt udfald.**

7. december 2021 opgave 15:

a) $f(x, y) := e^{-x^2 - y^2}$:

Lampeskærmen er grafen i vinduet $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ (enhederne på akserne er meter)

$A(1, -1, f(1, -1)) = A(1, -1, e^{-2})$

$B(1, 1, f(1, 1)) = B(1, 1, e^{-2})$

Dvs. $\underline{\underline{A(1, -1, e^{-2}) \text{ og } B(1, 1, e^{-2})}}$

b) Snitkurven består af skæringen mellem grafen for f og planen med ligningen $x = 1$ (førstekoordinaten for punkterne A og B).

Dvs. man får en funktion af én variabel:

$g(y) := f(1, y) = y \to f(1, y)$

$g(y) = e^{-y^2 - 1}$

Så kan buelængden bestemmes (nedre og øvre grænse kommer fra punkternes andenkoordinater):

$$\int_{-1}^{1.} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dy}(g(y))\right)^2}\, dy = 2.061403427$$

Dvs. længden af lampeskærmens kant fra A til B er **2,06 m**