Løsninger til eksamensopgaver på A-niveau 2022

20. maj 2022: Delprøve 1

20. maj 2022 Opgave 1: Det ubestemte integral bestemmes ved at integrere ledvist og huske integrationskonstanten:

a) $\int \left(x^2+8x\right)dx = \underline{\underline{\frac{1}{3}x^3+4x^2+k}}$

20. maj 2022 Opgave 2: Da det er et produkt, der giver 0, kan man anvende nulreglen:

$a)\quad (x-3)\cdot(2x-5)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x-3=0 \ \vee\ 2x-5=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=3 \ \vee\ 2x=5 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=3 \ \vee\ x=\frac{5}{2}}}$

20. maj 2022 Opgave 3: Funktionsværdierne findes ved at indsætte i: $f(x)=x^2+5 \quad g(x)=4\cdot\sqrt{x}$

$a)\ f(2)=2^2+5=4+5=\underline{\underline{9}}$

$g(f(2))=g(9)=4\cdot\sqrt{9}=4\cdot 3=\underline{\underline{12}}$

20. maj 2022 Opgave 4: Parabel: $y^2=6\cdot x$

a) Det tjekkes ved indsættelse i parablens ligning, at punktet $P(6,-6)$ ligger på parablen:

$(-6)^2=6\cdot 6 \quad\Leftrightarrow\quad 36=36$. **Da udsagnet er sandt, ligger *P* på parablen**.

b) Vi mangler hældningen for tangenten for at kunne bestemme dens ligning. Den svarer til differentialkvotienten i 6, men for at kunne snakke om en differentialkvotient, skal vi først gå fra ligning til funktionsforskrift. Her skal vi være opmærksom på, at parablen er roteret med 90° omkring origo i forhold til vores ”normale” parabler, og derfor kan vi ikke få en entydig afbildning. Vi skal derfor skære det ene parabelben væk, og da punktet *P* har en negativ *y*-koordinat, har vi:

$y<0:\ y=-\sqrt{6\cdot x}$

Dvs. $f(x)=-\sqrt{6x}=-\sqrt{6}\cdot\sqrt{x}$

Så kan tangenthældningen bestemmes:

$f'(x)=-\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}=-\sqrt{\frac{6}{4x}}=-\sqrt{\frac{3}{2x}}$

$f'(6)=-\sqrt{\frac{3}{2\cdot 6}}=-\sqrt{\frac{1}{2\cdot 2}}=-\sqrt{\frac{1}{4}}=-\frac{1}{2}$

Tangentens ligning er så:

$y-y_0=a\cdot(x-x_0)$

$y-(-6)=-\frac{1}{2}\cdot(x-6) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{y=-\frac{1}{2}x-3}}$

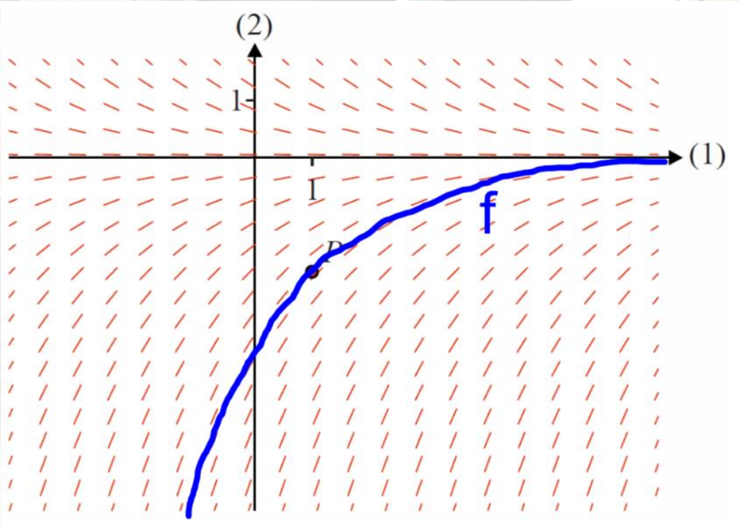
20. maj 2022 Opgave 5: $f(x)=x^4\cdot\sin(x)$

a) Produktreglen anvendes til at differentiere:

$$f'(x)=4x^3\cdot\sin(x)+x^4\cdot\cos(x)=\underline{\underline{x^3\cdot(4\cdot\sin(x)+x\cdot\cos(x))}}$$

20. maj 2022 Opgave 6: $y'=-\frac{1}{2}y \quad P(1,-2)$

a) Grafen for *f* tegnes ved at følge linjeelementerne. De viser, at førsteaksen er en vandret asymptote til grafen, og de antyder, at der ikke er nogen lodret asymptote.



b) Den fuldstændige løsning til en differentialligning $y'=k\cdot y$ er $f(x)=c\cdot e^{k\cdot x}$, så

$$f(x)=c\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x}$$

Koordinaterne for *P* indsættes i funktionsforskriften for at bestemme *c*:

$$-2=c\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot 1} \quad\Leftrightarrow\quad -2=c\cdot e^{-\frac{1}{2}} \quad\Leftrightarrow\quad -2\cdot e^{\frac{1}{2}}=c$$

Dvs.

$$\underline{\underline{f(x)}}=-2\cdot e^{\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x}=\underline{\underline{-2\cdot e^{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}}}$$

20. maj 2022 Opgave 7: $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x$

a) Koordinatsættet til det stationære punkt findes ved at løse ligningssystemet $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

$$\frac{\partial(x^2+y^2+2x)}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial(x^2+y^2+2x)}{\partial y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x+0+2=0 \wedge 0+2y+0=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1 \wedge y=0$$

Dvs. koordinatsættet for det stationære punkt er $\underline{\underline{(-1,0)}}$

b) For at bestemme arten af den stationære punkt udregnes determinanten for Hesse-matricen:

$$\det(H) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 2 \cdot 2 - 0^2 = 4 > 0$$, dvs. lokalt ekstremumspunkt.

Fortegnet for $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ bestemmes for at afgøre, om det er minimumspunkt eller maksimumspunkt:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$, dvs. **det stationære punkt er et lokalt minimumsspunkt**

20. maj 2022 Opgave 8: $f(x) = x^3 - 3x + 4$

a) Den afledede funktion af *f* bestemmes ved at differentiere ledvist: $\underline{\underline{f'(x) = 3x^2 - 3}}$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=-1 \vee x=1}}$$

b) $g(x) = x^3 + k \cdot x + 4$

Vandrette tangenter findes de steder, hvor den afledede funktion af *g* har nulpunkter, dvs. man skal finde de værdier af *k*, hvor den afledede funktion af *g* ikke har nulpunkter.

$g'(x) = 3x^2 + k$

Da første led kan antage alle værdier i intervallet [0,∞[, vil $g'(x) = 0$ for mindst én *x*-værdi, hvis *k* er negativ eller 0. Hvis *k* er positiv, er $g'(x) > 0$ for alle *x*-værdier, dvs. **der er ingen vandrette tangenter, når** $\underline{\underline{k > 0}}$.

Man kan også løse det ved at se på, at diskriminanten for $3x^2 + k$ skal være negativ:

$d = 0^2 - 4 \cdot 3 \cdot k = -12k < 0$

$$-12k < 0 \quad \Leftrightarrow \quad k > \frac{0}{-12} \quad \Leftrightarrow \quad k > 0$$

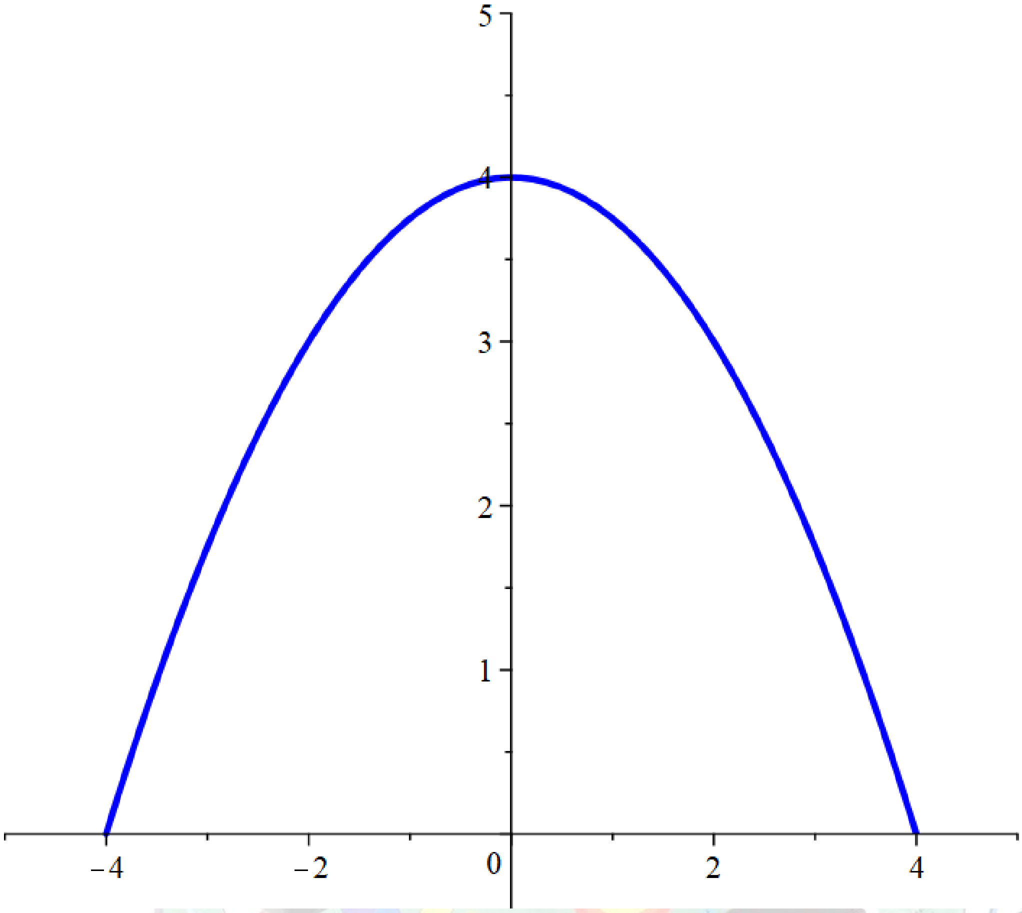
20. maj 2022: Delprøve 2

<u>*20. maj 2022 Opgave 9:*</u>

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot\cos(t) \\ 4\cdot\sin^2(t) \end{pmatrix} \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

a) Parameterkurven tegnes ved at lave et plot af en vektorfunktion:

$plot\left(\left[4\cdot\cos(t), 4\cdot\sin^2(t), t = 0\,..2\cdot\pi\right], view = [-5\,..5, -1\,..5], color = blue, thickness = 3\right)$



b) Hastighedsfunktionen bestemmes ved at differentiere koordinatvis. Det bemærkes, at y-koordinatfunktionen er en sammensat funktion:

$$\vec{s}\,'(t) = \begin{pmatrix} 4\cdot(-\sin(t)) \\ 4\cdot\cos(t)\cdot 2\cdot\sin(t) \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -4\cdot\sin(t) \\ 8\cdot\sin(t)\cdot\cos(t) \end{pmatrix}}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

__20. maj 2022 Opgave 10:__

with(*Gym*) :

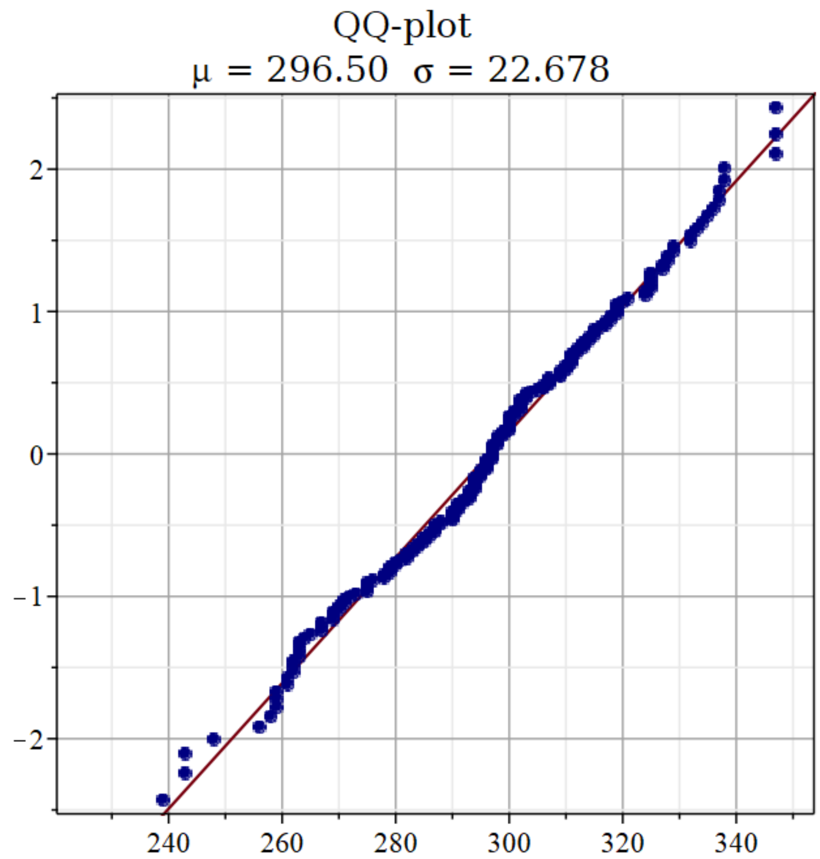
a) Først hentes tabellen med de 200 målinger af længder af tulipanstilke ind i Maple ved hjælp af Tools-Assistants-Import Data (målingerne ligger i cellerne B1-B200).

$$Stilklaengde := \begin{bmatrix} 300.0 \\ 271.0 \\ 264.0 \\ 337.0 \\ 267.0 \\ 287.0 \\ 309.0 \\ 284.0 \\ 259.0 \\ 329.0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

200 × 1 Matrix

Det undersøges, om længden af tulipanernes stilke tilnærmelsesvist er normalfordelte ved at lave et QQ-plot.

QQplot(*Stilklaengde*)



Da punkterne med god tilnærmelse danner en ret linje, kan længden af tulipanernes stilke med god tilnærmelse beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel.

b) Middelværdien og spredningen for den stokastistiske variabel X kan bestemmes med Maple-kommandoer. Det er vigtigt at bemærke, at det er en stikprøve, vi arbejder med:

$\mathit{middel}(\mathit{Stilklaengde}) = 296.50500$

$\mathit{stikprøvespredning}(\mathit{Stilklaengde}) = 22.67777$

Dvs. $\underline{\underline{\mathit{middel}(X) = 296.5}}$ og $\underline{\underline{\sigma(X) = 22.6778}}$

c) Fordelingsfunktionen for normalfordelinger ligger i kommandoen *normalcdf* i Gym-pakken.

$P(270 \leq X \leq 330) = \mathit{normalcdf}(296.505, 22.67777, 330) - \mathit{normalcdf}(296.505, 22.67777, 270) = 0.8089127703$

Dvs. **sandsynligheden for, at stilklængden er mellem 270 og 330 mm, er 81%**

20. maj 2022 Opgave 11:

$f(x) := 3\cdot\sqrt{x-2} - x + 2:$

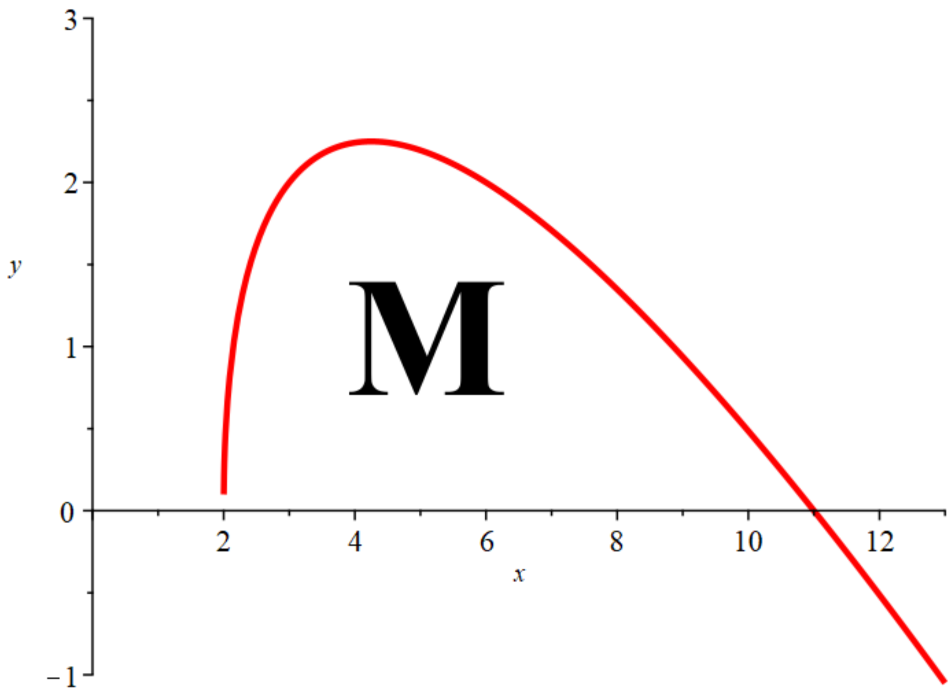
a) Maple kan beregne funktionens nulpunkter:

$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 2\}, \{x = 11\}$

Så funktionens nulpunkter er $\underline{\underline{x = 2 \ \vee \ x = 11}}$

b) Grafen tegnes, så punktmængden M identificeres:

$\mathit{plot}(f(x), x = 0..13, y = -1..3, \mathit{color} = \mathit{red}, \mathit{thickness} = 3)$



Nulpunkterne, der blev bestemt ovenfor, anvendes som grænser i det bestemte integral, der bruges til at finde rumfanget af omdrejningslegemet.

$$V = \int_2^{11} \pi\cdot f(x)^2 \, dx = \frac{243\,\pi}{10} \xrightarrow{\text{at 20 digits}} 76.340701482231975696$$

Dvs. **rumfanget er 76,341**

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

20. maj 2022 Opgave 12:

a) Ligning på normalform for en ellipse med centrum i origo er $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, hvor a er den halve storakse, og b er den halve lilleakse. Da bordpladen måler 180 cm på den lange led, er $a = 90$, og da den er 105 cm på den korte led, er $b = 52,5$.

$$\underline{\underline{\frac{x^2}{90^2}+\frac{y^2}{52.5^2}=1}}$$

b) Koordinatsættene for ellipsens brændpunkter er $F_1\left(-\sqrt{a^2-b^2}, 0\right)$ og $F_2\left(\sqrt{a^2-b^2}, 0\right)$

$a := 90 : b := 52.5 :$

$F_1\left(-\sqrt{a^2-b^2}, 0\right) = F_1(-73.10095759, 0)$

$F_2\left(\sqrt{a^2-b^2}, 0\right) = F_2(73.10095759, 0)$

Så brændpunkternes koordinater er $\underline{\underline{F_1(-73.101, 0)}}$ og $\underline{\underline{F_2(73.101, 0)}}$

20. maj 2022 Opgave 13:

$$\frac{dP}{dt} = 0.003641\cdot P\cdot(23.95-P)$$

P(t) er antallet af indbyggere i Taiwan (målt i millioner), og *t* er antal år efter 1996.
I 1996 var der 21,53 millioner indbyggere i Taiwan, dvs. $P(0) = 21.53$.

a) Den partikulære løsning til differentialligningen bestemmes:

$$P'(t) = 0.003641\cdot P(t)\cdot(23.95-P(t)),\ P(0) = 21.53 \xrightarrow{\text{solve DE}} P(t) = \frac{1031287}{20\left(242\,e^{-\frac{1744039\,t}{20000000}}+2153\right)}$$

Differentialligningen er en logistisk differentialligning, så man kan også bruge standardløsningen:

$$P(t) := \frac{23.95}{1+c\cdot e^{-0.003641\cdot 23.95\cdot t}} :$$

$solve(P(0) = 21.53, c) = 0.1124013005$

$-0.003641\cdot 23.95 = -0.08720195$

Dvs. $\underline{\underline{P(t) = \frac{23.95}{1+0.1124013005\cdot e^{-0.08720195\cdot t}}}}$

b) $P(t) := \frac{23.95}{1+0.1124013005\cdot e^{-0.08720195\cdot t}} :$

$P'(23) = 0.03065649188$

Dvs. at i 2019 voksede Taiwans befolkning med 30656 personer om året.

20. maj 2022 Opgave 14:

$f(t) := 0.084\cdot t + 2 :$

$f(t)$ er hastigheden, som vandstanden i verdenshavene stiger med, målt i mm pr. år, og t er antal år efter 1991.

a) År 2022 svarer til $t = 31$.

$f(31) = 4.604$

Dvs. at vandstanden i verdenshavene i 2022 vokser med 4,6 mm om året.

b) $\int_0^{31} f(t)\,dt = 102.3620000$

Dvs. at i perioden 1991-2022 er vandstanden i verdenshavene vokset med 102 mm.

24. maj 2022 original: Delprøve 1

24. maj 2022 original Opgave 1: $f(x,y) = x^2 + y$

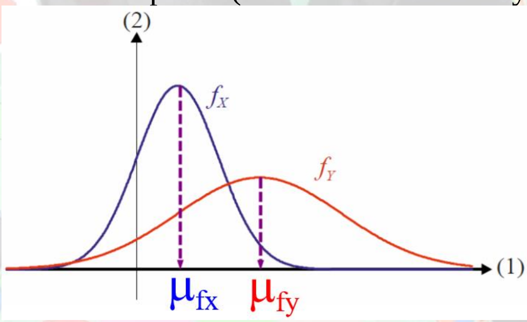
a) Funktionsværdien bestemmes ved indsættelse i funktionsudtrykket:

$$f(3,-2) = 3^2 - 2 = 9 - 2 = \underline{\underline{7}}$$

24. maj 2022 original Opgave 2: Det ubestemte integral bestemmes ved ledvis integration:

b) $\int \left(4e^x + 3x^2\right)dx = \underline{\underline{4e^x + x^3 + k}}$

24. maj 2022 original Opgave 3: c) For normalfordelte stokastiske variable svarer middelværdien til førstekoordinaten for det globale maksimumspunkt (eller tilsvarende for symmetriaksen).



Dvs. at f_Y *har den største middelværdi*

24. maj 2022 original Opgave 4: $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ \frac{1}{3}t^3 - 9t \end{pmatrix}$

a) Hastighedsfunktionen bestemmes ved at differentiere vektorfunktionen koordinatvis.

$$\vec{v}(t) = \vec{s}\,'(t) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2t \\ t^2 - 9 \end{pmatrix}}}$$

b) Banekurven har vandret tangent, når hastighedsfunktionens andenkoordinat er 0 (og førstekoordinaten ikke er 0).

$$t^2 - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{t = -3 \vee t = 3}}$$

Da førstekoordinaterne er forskellige fra 0 (henholdsvis -6 og 6), kan parameterværdierne bruges.

24. maj 2022 original Opgave 5: $\frac{dy}{dx} = 2x + y \quad P(0,1) \quad f(x) = 3\cdot e^x - 2\cdot(x+1)$

a) Tangenthældningen i punktet bestemmes ved indsættelse i differentialligningen: $\frac{dy}{dx} = 2\cdot 0 + 1 = 1$

Så linjeelementet er $\underline{\underline{(0,1;1)}}$

b) Funktionen differentieres og indsættes i differentialligningen: $f'(x) = 3\cdot e^x - 2$

Funktionsudtrykkene for funktionen og den afledede funktion indsættes:

$$3\cdot e^x - 2 = 2x + 3\cdot e^x - 2\cdot(x+1) \quad \Leftrightarrow \quad -2 = 2x - 2x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0$$

Da udsagnet er en identitet, er *f* en løsning til differentialligningen

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

24. maj 2022 original Opgave 6: $f(x) = (2x+3)\cdot \ln(x)$

a) Den afledede funktion af *f* bestemmes med produktreglen.

$$f'(x) = 2\cdot \ln(x) + (2x+3)\cdot \frac{1}{x} = \underline{\underline{2\cdot \ln(x) + 2 + \frac{3}{x}}}$$

b) For at kunne bestemme en ligning for tangenten skal man kende funktionsværdi og hældning:

$$f(1) = (2\cdot 1+3)\cdot \ln(1) = 5\cdot 0 = 0$$

$$f'(1) = 2\cdot \ln(1) + 2 + \frac{3}{1} = 0+2+3 = 5$$

Tangentens ligning kan så bestemmes:

$$y - y_0 = a\cdot(x - x_0)$$

$$y - 0 = 5\cdot(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = 5x - 5}}$$

24. maj 2022 original Opgave 7: $(x-4)^2 + (y+5)^2 - 23 = 0$

Den generelle andengradsligning i to variable for en cirkel er ifølge indstiksarket til formelsamlingen

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

a) Cirklens ligning omskrives til den generelle form:

$$(x-4)^2 + (y+5)^2 - 23 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 16 - 8x + y^2 + 25 + 10y - 23 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{x^2 + y^2 - 8x + 10y + 18 = 0}}$$

24. maj 2022 original Opgave 8: $f(x) = 4 - x^2$

a) Arealet af det farvede område (også kaldet *den punktmængde som grafen for f danner sammen med førsteaksen*) beregnes med det bestemte integral, hvor grænserne er nulpunkterne for *f*, så først bestemmes nulpunkterne for *f*.

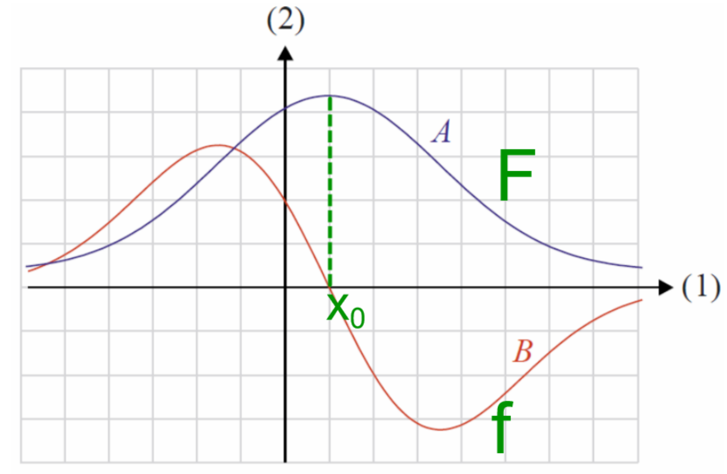
$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \ \vee \ x = 2$$

$$A = \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2} = \left(4\cdot 2 - \frac{1}{3}\cdot 2^3\right) - \left(4\cdot(-2) - \frac{1}{3}\cdot(-2)^3\right) =$$

$$\left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = 16 - \frac{16}{3} = \frac{48}{3} - \frac{16}{3} = \underline{\underline{\frac{32}{3}}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>*24. maj 2022 original Opgave 9:*</u> a) Man kan afgøre det ved at se på stedet x_0, hvor grafen *B* skærer førsteaksen, dvs. her er funktionsværdien 0, og tangenthældningen er negativ, dvs. den afledede funktions værdi i x_0 er negativ. Grafen *A* har vandret tangent i x_0, dvs. her har den afledede funktion værdien 0, mens selve funktionen har en positiv funktionsværdi (grafen ligger over førsteaksen).



Det kan altså ikke være graf *A*, der hører til *f*, og graf *B*, der hører til *F*, for så får man modstriden $F'(x_0) = f(x_0) < 0$ **og** $f(x_0) > 0$.

Altså må **graf *A* høre til *F*, og graf *B* høre til *f***, hvilket passer med: $F'(x_0) = f(x_0) = 0$.

24. maj 2022 original: Delprøve 2

24. maj 2022 original Opgave 10:

$with(Gym)$:

$f(x) := e^{0.25\,x} + e^{-0.5\,x}$:

a) Lokale ekstremumssteder bestemmes ved at finde de steder, hvor den afledede af f er 0.

$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} 0.9241962407$

Typen af ekstremumssted bestemmes ved at se på fortegnet for den anden afledede dette sted:

$f''(0.9241962407) = 0.2362351968 > 0$, dvs. lokalt minimumssted.

Da dette er det eneste ekstremumssted, og da funktionen er defineret for alle reelle tal, er det også et globalt minimumssted, og funktionens minimum er altså funktionsværdien dette sted:

$f_{\mathbf{min}} = f(0.9241962407) = \mathbf{1.889881575}$

b) Da området M afgrænses af de lodrette linjer med ligningerne $x = -2$ og $x = 3$, bruges disse værdier som nedre og øvre grænse i det bestemte integral, der bruges til at udregne rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om førsteaksen:

$$\int_{-2}^{3} \pi \cdot f(x)^2 \, dx = 78.46984061$$

Dvs. $\underline{\underline{V = 78.4698}}$

c) Det er de samme grænser, men et andet integral, der bruges til at bestemme kurvelængden:

$$\int_{-2}^{3.} \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx = 5.512309169$$

Dvs. **kurvelængden er 5,5123**

24. maj 2022 original Opgave 11:

Hæmoglobinkoncentrationen i blodet hos kvinder beskrives ved normalfordelt stokastisk variabel X.

Når koncentrationen måles i $\frac{\text{mmol}}{\text{L}}$, er $\mu := 8.4$: og $\sigma := 0.55$:

a) Normale udfald ligger inden for to spredninger fra middelværdien:

$\mu - 2 \cdot \sigma = 7.30$

$\mu + 2 \cdot \sigma = 9.50$

Dvs. **normale udfald ligger i intervallet [7,3 mmol pr. L ; 9,5 mmol pr. L]**

b) Fordelingsfunktionen for normalfordelinger ligger i Gym-pakken som *normalcdf*.

$P(X \leq 8.0) = normalcdf(\mu, \sigma, 8.0) = 0.233529450857586$

Dvs. **sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt kvinde har en koncentration på højst 8,0 mmol pr. L, er 23%**

24. maj 2022 original Opgave 12:

$$\frac{dy}{dx} = 0.71 \cdot \left(1 - \frac{y}{80.5}\right) \cdot y$$

$f(x)$ er den samlede biomasse for populationen af helleflyndere i et område af Stillehavet (målt i mio. kg)
x er tiden målt i år.
Det oplyses, at $f(0) = 20.1$

a) Til tidspunktet 0 er funktionsværdien 20.1, hvilket indsættes i differentialligningen for at bestemme hastigheden:

$$\frac{dy}{dx} = 0.71 \cdot \left(1 - \frac{20.1}{80.5}\right) \cdot 20.1 = 10.70768199$$

Dvs. at **den samlede biomasse vokser med 10,7 mio. kg. pr. år**

b) Den partikulære løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen, bestemmes:
restart :

$$f'(x) = 0.71 \cdot \left(1 - \frac{f(x)}{80.5}\right) \cdot f(x), f(0) = 20.1 \xrightarrow{\text{solve DE}} f(x) = \frac{804000000000}{9987577641 + 30012422359\,\mathrm{e}^{-\frac{71\,x}{100}}}$$

Man kan godt bruge dette som funktionsforskrift, men man kan også bemærke, at differentialligningen er logistisk vækst omskrevet til en lidt anden form, end vi plejer at se den:

$$\frac{dy}{dx} = 0.71 \cdot \left(1 - \frac{y}{80.5}\right) \cdot y = \frac{0.71}{80.5} \cdot y \cdot (80.5 - y) = 0.0088198758776 \cdot y \cdot (80.5 - y)$$

Den har den fuldstændige løsning $f(x) = \dfrac{80.5}{1 + c \cdot \mathrm{e}^{-0.71 \cdot x}}$

Og konstanten kan så bestemmes $fsolve\left(20.1 = \dfrac{80.5}{1 + c \cdot \mathrm{e}^{-0.71 \cdot 0}}, c\right) = 3.004975124$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{80.5}{1 + 3.004975124 \cdot \mathrm{e}^{-0.71 \cdot x}}}$$

c) En samlet biomasse på 75 mio. kg svarer til $f(x) = 75$:

$$75. = \frac{80.5}{1 + 3.004975124 \cdot \mathrm{e}^{-0.71 \cdot x}} \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 5.229590579]]$$

Så **den samlede biomasse er 75 mio. kg til tidspunktet 5,2 år**

24. maj 2022 original Opgave 13:

Den halve storakse er 17,8. Den halve lilleakse er 4,53. Afstande måles i AE. $A(-14.24, 2.718)$.

a) I indstiksarket til formelsamlingen har man tangentligningen F(6): $\dfrac{x_0 \cdot x}{a^2} + \dfrac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1$

$$-\frac{14.24 \cdot x}{17.8^2} + \frac{2.718 \cdot y}{4.53^2} = 1 \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = 7.550000001 + 0.3393258428\,x$$

Dvs. ligningen for tangenten til ellipsen i A er $\underline{\underline{y = 0.3393 \cdot x + 7.55}}$

b) Førstekoordinaten for brændpunktet med negativ førstekoordinat bestemmes med formel F(5):

$$F_{1,x} = -\sqrt{a^2 - b^2} = -\sqrt{17.8^2 - 4.53^2} = -17.21392169$$

Da førstekoordinaten for P er -17.8, har man:

$$|PF_1| = -17.21392169 - (-17.8) = 0.58607831$$

Dvs. **når Halleys komet er tættest på Solen, er afstanden mellem dem 0,586 AE**

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk   Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

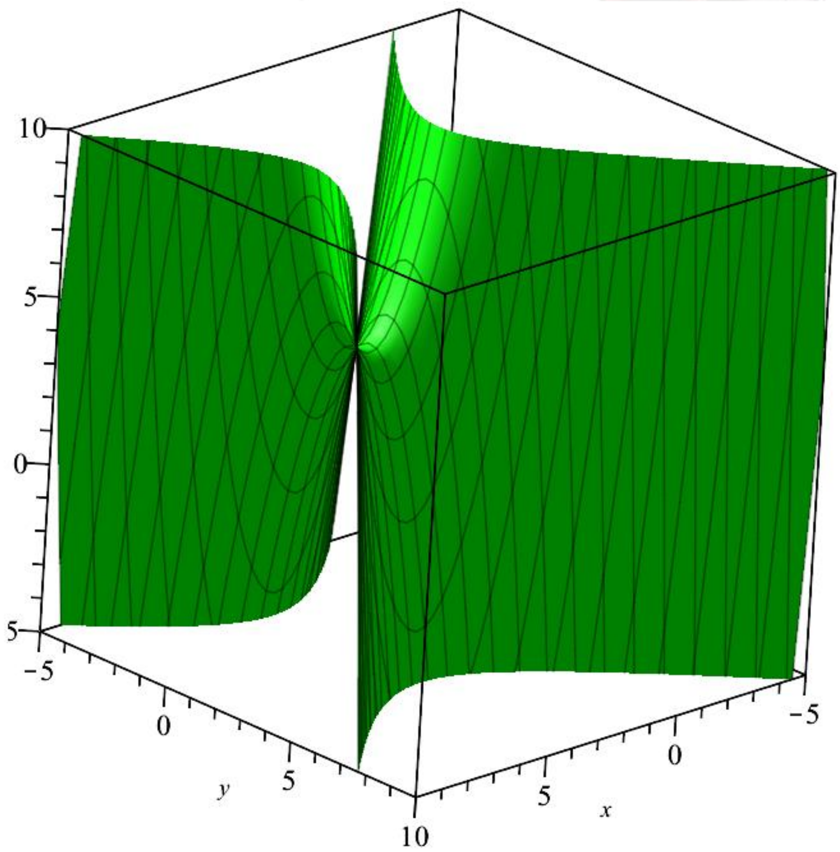
24. maj 2022 original Opgave 14:

restart

$f(x, y) := x^2 - 8x - y^2 + 2y + 19 :$

a) Grafen skal tegnes i vinduet $[-5, 10] \times [-5, 10] \times [-5, 10]$:

$plot3d(f(x, y), x = -5..10, y = -5..10, view = [-5..10, -5..10, -5..10], color = green)$



b) Stationære punkter bestemmes ved at finde de steder, hvor gradienten er nulvektoren:

$\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y)) = 0, \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y)) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 4, y = 1\}$

Arten af dette stationære punkt bestemmes ved at se på fortegnet for determinanten af Hesse-matricen, der udregnes i punktet (4,1):

$$det(H) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(f(x, y)) \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2}(f(x, y)) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(f(x, y))\right)^2 \xrightarrow{\text{evaluate at point}} -4 < 0, \text{ dvs. saddelpunkt}$$

Funktionsværdien i punktet bestemmes:

$f(4, 1) = 4$

Dvs. $\underline{\underline{P(4, 1, 4)}}$

c) Når man snitter med planen givet ved $y = k$, hvor k er en konstant, får man:

$f(x, k) = -k^2 + x^2 + 2k - 8x + 19$

Da k er en konstant, kan $-k^2 + 2k + 19$ erstattes af en ny konstant c:

$f(x) = x^2 - 8x + c$

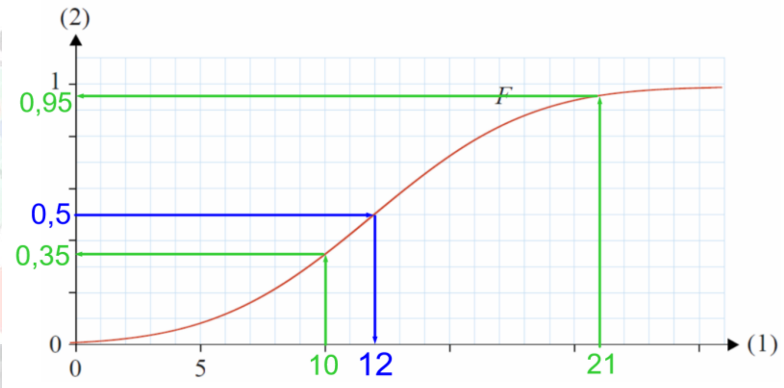
Funktionsudtrykket er uanset værdien af konstanten c et andengradspolynomium i x, så enhver af disse snitkurven er en parabel.

24. maj 2022 erstatning: Delprøve 1

24. maj 2022 erstatning Opgave 1: $f(x,y) = x^2 - y^2 - 11$

a) Funktionsværdien bestemmes ved indsættelse i forskriften: $f(5,2) = 5^2 - 2^2 - 11 = 25 - 4 - 11 = \underline{\underline{10}}$

24. maj 2022 erstatning Opgave 2:



a) For en normalfordelt stokastisk variabel svarer middelværdien til medianen, så middelværdien kan aflæses ved at gå vandret ind fra 50% på andenaksen (den blå pil) til grafen og lodret ned til middelværdien/medianen. Så $\underline{\underline{\mu = 12}}$.

b) Sandsynligheden for, at den stokastiske variabel antager værdier i intervallet [10,21] bestemmes ved de grønne aflæsninger på figuren, der giver:
$P(10 \leq X \leq 21) = P(X \leq 21) - P(X \leq 10) = 0{,}95 - 0{,}35 = 0{,}60 = \underline{\underline{60\%}}$

24. maj 2022 erstatning Opgave 3: $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 9 \\ t + 6 \end{pmatrix}$

a) $\vec{s}(-1) = \begin{pmatrix} (-1)^2 - 9 \\ -1 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}}}$

b) Da P_0 svarer til parameterværdien -1, har man fra ovenstående spørgsmål, at $P_0(-8,5)$.

For at bestemme en ligning for tangenten til banekurven for $\vec{s}$ i P_0 mangler man altså kun tangenthældningen. Den kan bestemmes ved først at finde tangentvektoren i punktet:

$$\vec{s}\,'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{s}\,'(-1) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Så tangenthældningen er: $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{-2} = -\dfrac{1}{2}$

Og hermed bliver tangentligningen:

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

$$y - 5 = -\frac{1}{2} \cdot (x - (-8)) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = -\frac{1}{2} \cdot x + 1}}$$

24. maj 2022 erstatning Opgave 4: $f(x)=\ln\left(4\cdot x^2+1\right)$

a) Det er en sammensat funktion, så den afledede funktion bestemmes ved hjælp af kædereglen:

$$f'(x)=4\cdot 2x\cdot\frac{1}{4x^2+1}=\underline{\underline{\frac{8x}{4x^2+1}}}$$

24. maj 2022 erstatning Opgave 5: $\dfrac{\left(a^2-b^2\right)\cdot 5}{(a+b)\cdot 10}$

a) Det bemærkes, at man kan forkorte brøken med 5 (dividere med 5 i både tæller og nævner), samt at tælleren kan omskrives med den tredje kvadratsætning:

$$\frac{\left(a^2-b^2\right)\cdot 5}{(a+b)\cdot 10}=\frac{\left(a^2-b^2\right)}{(a+b)\cdot 2}=\frac{(a+b)\cdot(a-b)}{(a+b)\cdot 2}=\underline{\underline{\frac{a-b}{2}}}$$

24. maj 2022 erstatning Opgave 6: $f(x)=4x^3-2x \quad P(2{,}18)$

a) Først bestemmes familien af stamfunktioner ved at integrere ledvist:

$F_k(x)=x^4-x^2+k$

Værdien af k bestemmes ved at indsætte punktets koordinater i forskriften:

$18=2^4-2^2+k \quad\Leftrightarrow\quad 18=16-4+k \quad\Leftrightarrow\quad k=6$

Så den søgte stamfunktion F til f har forskriften:

$\underline{\underline{F(x)=x^4-x^2+6}}$

24. maj 2022 erstatning Opgave 7: $f(t)=4\cdot\sin(t)+10$

a) Størsteværdien og mindsteværdien for f bestemmes ved at udnytte, at sinusfunktionen netop antager alle værdier i intervallet [-1,1]:

$f_{\min}=4\cdot(-1)+10=-4+10=\underline{\underline{6}}$

$f_{\max}=4\cdot 1+10=4+10=\underline{\underline{14}}$

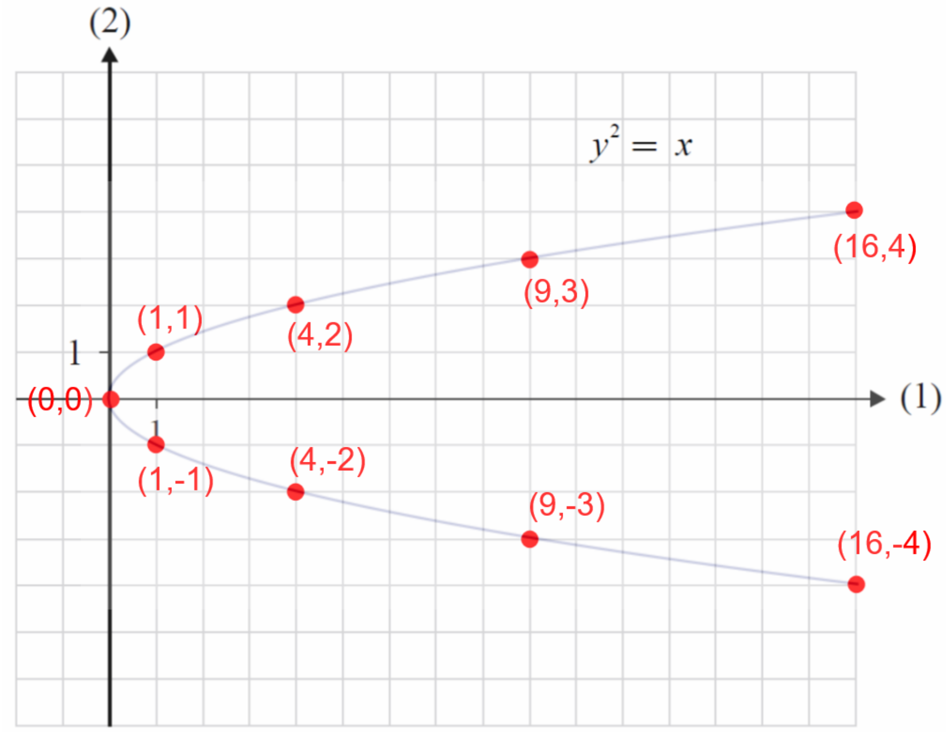
Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>*24. maj 2022 erstatning Opgave 8:*</u> Parabel: $y^2 = x$

a) I indstiksarket til formelsamlingen ses i formel F(9), at ligningen for ledelinjen for parablen $y^2 = a \cdot x$ er $x = -\frac{1}{4}a$, så da $a = 1$ i dette tilfælde, er **ligningen for ledelinjen** $\underline{\underline{x = -\frac{1}{4}}}$.

Formel F(10) giver koordinatsættet til brændpunktet for parablen: $F\left(\frac{1}{4}a, 0\right) = \underline{\underline{F\left(\frac{1}{4}, 0\right)}}$

b) Man kan udregne nogle hjælpepunkter eller gennemskue, at parablen består af grafen for kvadratrodsfunktionen samt dennes spejling i førsteaksen:



<u>*24. maj 2022 erstatning Opgave 9:*</u>

B: Antallet af en bestemt type bakterier i en madrest.

t: Tiden målt i minutter.

a) $B'(t)$: Den hastighed, hvormed antallet af bakterier vokser.

Da hastigheden skal være proportional med antallet af bakterier, har man: $B'(t) = k \cdot B(t)$.

Da proportionalitetskonstanten er oplyst til $k = 0{,}035$, bliver differentialligningen:

$$\underline{\underline{B'(t) = 0{,}035 \cdot B(t)}}$$

24. maj 2022 erstatning: Delprøve 2

24. maj 2022 erstatning Opgave 10:

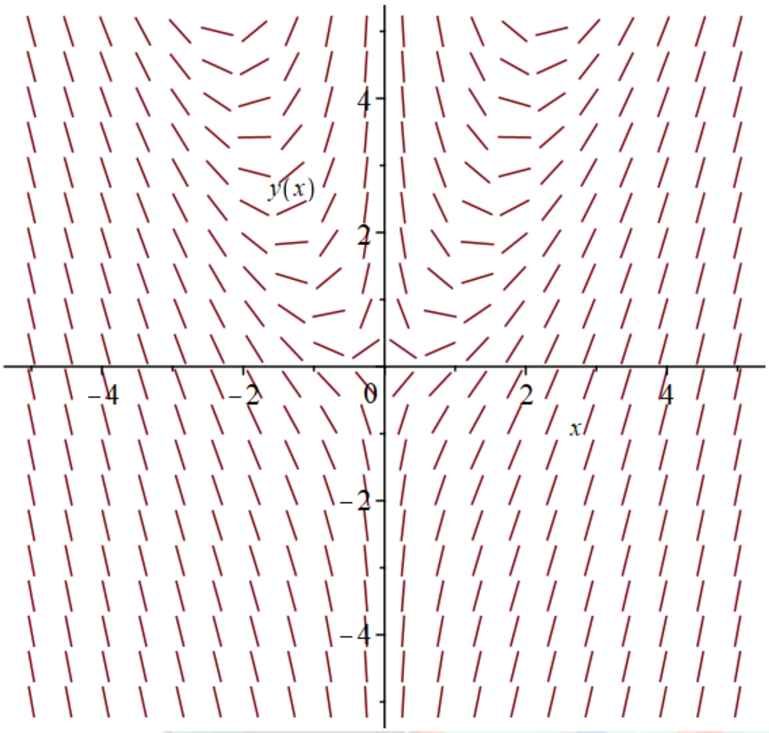
$$\frac{dy}{dx} = x - \frac{y}{x}$$

restart

with(Gym) :

a) Et hældningsfelt kan tegnes med Gym-pakkens kommando *hældningsfelt*:

$$hældningsfelt\left(y'(x) = x - \frac{y(x)}{x}, y(x), x = -5..5, y = -5..5\right)$$



b) Da grafen for f, der er en løsning til differentialligningen, går gennem $P(2, 3)$, kan differentialkvotienten i 2 bestemmes ved at indsætte P's koordinater i differentialligningen:

$$f'(2) = \frac{dy}{dx} = 2 - \frac{3}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

24. maj 2022 erstatning Opgave 11:

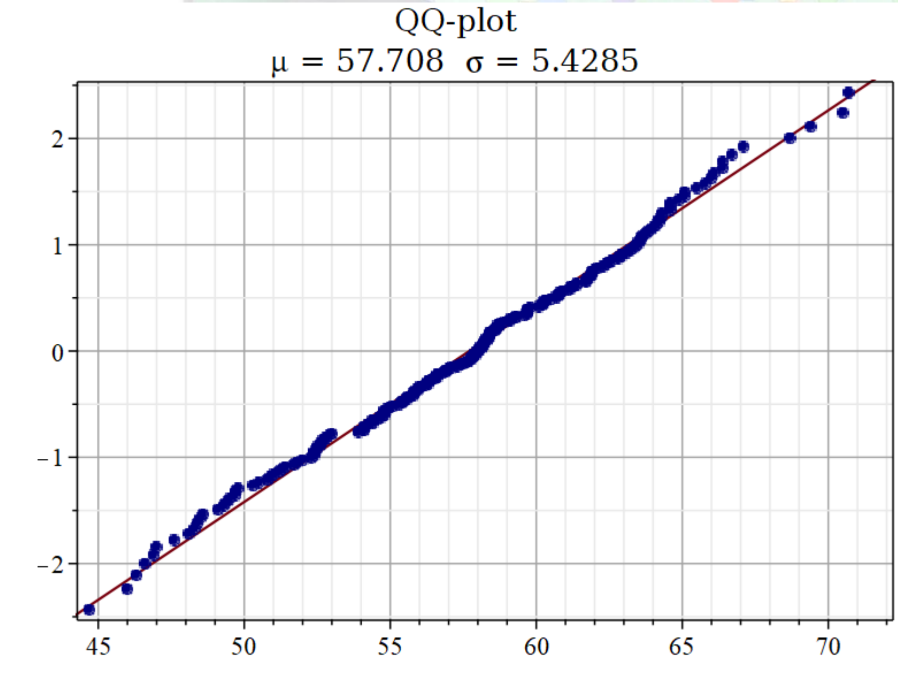
Vægten for de 200 tilfældigt udvalgte attenårige mænd fra Hongkong hentes ind i Maple med Tools-Assistants-Import Data, hvor man henter cellerne A2:A201:

$$VaegtHongkongMaend := \begin{bmatrix} 51.3 \\ 61.9 \\ 69.4 \\ 64.6 \\ 65.5 \\ 55.9 \\ 64.2 \\ 61.9 \\ 51.0 \\ 54.7 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

200 × 1 Matrix

a) Det undersøges, om mændenes vægt er normalfordelt, ved at lave et QQ-plot:

QQplot(*VaegtHongkongMaend*)



Da punkterne med god tilnærmelse danner en ret linje, er mændenes vægt med god tilnærmelse normalfordelt.

b) Middelværdien og spredningen for normalfordelingen bestemmes med Maple-kommandoer. Man skal være opmærksom på, at det er en stikprøve, man arbejder med, så den estimerede spredning for normalfordelingen findes med kommandoen *stikprøvespredning*.

$\mu := middel(VaegtHongkongMaend) = 57.70800$

$\sigma := stikprøvespredning(VaegtHongkongMaend) = 5.42851$

Normale udfald ligger inden for to spredninger fra middelværdien:

$\mu - 2\cdot\sigma = 46.85098$

$\mu + 2\cdot\sigma = 68.56502$

Så intervallet for de normale udfald (målt i kg) er: $\underline{\underline{[46.9, 68.6]}}$

24. maj 2022 erstatning Opgave 12:

Ellipsen har centrum i origo.

Storaksen er 67 meter, så den halve storakse er (målt i meter): $a := \frac{67}{2}$:

Lilleaksen er 34 meter, så den halve lilleakse er (målt i meter): $b := \frac{34}{2}$:

a) Ligningen for ellipsen kan så bestemmes i fra formel F(4) i indstiksarket:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 = \frac{4\,x^2}{4489} + \frac{y^2}{289} = 1$$

Det kan også skrives: $\underline{\underline{\frac{x^2}{33.5^2} + \frac{y^2}{17^2} = 1}}$

b) Arealet kan bestemmes med formel F(3):

$$A = \pi \cdot a \cdot b = \frac{1139\,\pi}{2} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 1789.137016$$

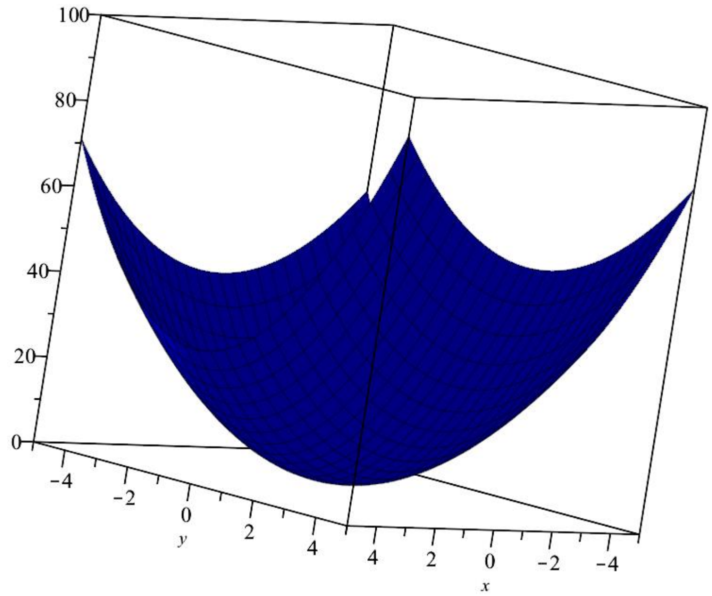
Dvs. **arealet er 1789,14 m^2**

24. maj 2022 erstatning Opgave 13:

$f(x, y) := x^2 + 2\,y^2 + x + 2\,y + 1$:

a) Grafen tegnes med et 3D-plot:

$plot3d(f(x, y), x = -5..5, y = -5..5, view = [-5..5, -5..5, 0..100], color = blue)$



b) De stationære punkter bestemmes som de punkter, hvor gradienten er nulvektoren:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y)) = 0, \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y)) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}\right\}$$

Arten af stedet undersøges ved at se på fortegnet for determinanten af Hesse-matricen i dette punkt:

$$det(H) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(f(x, y)) \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2}(f(x, y)) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(f(x, y))\right)^2 \xrightarrow{\text{evaluate at point}} 8 \;> 0, \text{dvs. ekstremumspunkt.}$$

Så undersøges det, om der er et maksimumspunkt eller minimumspunkt ved at se på fortegnet for en af de dobbeltafledede:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(f(x, y)) \xrightarrow{\text{evaluate at point}} 2 \;> 0, \text{dvs. minimumspunkt.}$$

Tredjekoordinaten for punktet P bestemmes ved indsættelse i forskriften:

$$f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Dvs. $\underline{\underline{P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

24. maj 2022 erstatning Opgave 14:

$y' = 0.0069 \cdot y \cdot (26.6 - y)$

y angiver hundens (Basset Hound) vægt i kg.

x angiver antal uger efter fødslen.

Det oplyses, at hundens vægt efter 6 uger er 1,3 kg, dvs. $f(6) = 1.3$

a) Den partikulære løsning bestemmes:

restart

$$f'(x) = 0.0069 \cdot f(x) \cdot (26.6 - f(x)), f(6) = 1.3 \xrightarrow{\text{solve DE}} f(x) = \frac{1729\, e^{-\frac{27531}{25000}}}{5\left(253\, e^{-\frac{9177\, x}{50000}} + 13\, e^{-\frac{27531}{25000}}\right)}$$

Hvis man vil have forskriften på en lidt pænere form, kan man bemærke, at der er tale om logistisk vækst med den fuldstændige løsning:

$$f(x) := \frac{26.6}{1 + c \cdot e^{-0.0069 \cdot 26.6 \cdot x}} :$$

Konstanten c bestemmes ud fra den kendte vægt efter 6 uger:

$c := solve(f(6) = 1.3, c) :$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{26.6}{1 + 58.53823504\, e^{-0.18354\, x}}}$$

b) Da det er logistisk vækst, vokser hunden hurtigst, når den vejer halvdelen af den øvre grænse på 26,6 kg.

$f(x) = 13.3 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 22.17325995]]$

Dvs. at hunden vokser hurtigst, når den er 22 uger gammel.

24. maj 2022 erstatning Opgave 15:

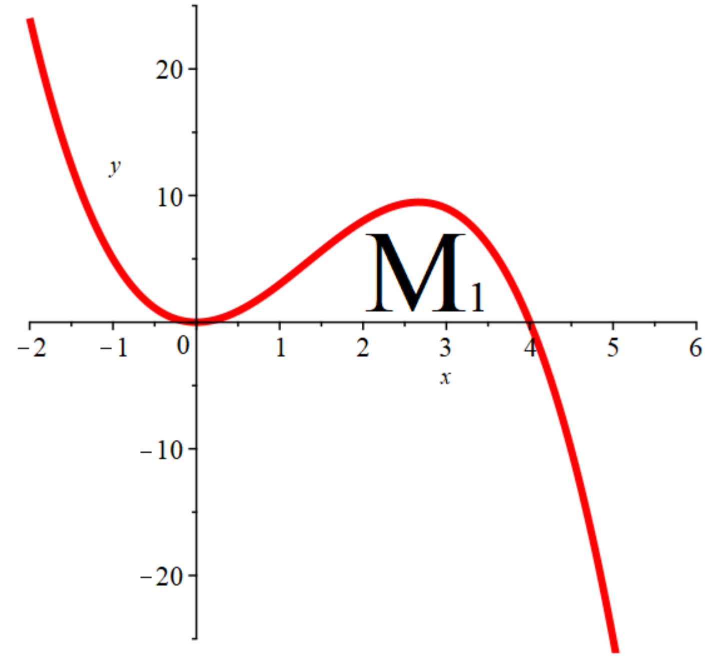
$f(x) := 4x^2 - x^3:$

a) Man kan godt bestemme nulpunkterne med Maple ($f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 4\}, \{x = 0\}, \{x = 0\}$), men man kan også bruge nulreglen:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (4 - x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee 4 - x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0 \vee x = 4}}$

b) For at få et overblik tegnes grafen for f:

$plot(f(x), x = -2..6, y = -25..25, color = red, thickness = 4)$



Arealet af punktmængden M_1 svarer til værdien af det bestemte integral med grænserne, der blev fundet i a):

$$A_{M_1} = \int_0^4 f(x)\,dx = \frac{64}{3}$$

c) $g(x) := k \cdot x^2 - x^3: \quad k > 0$

Nulpunkterne for g kan ligesom før bestemmes enten i hånden med nulreglen eller med Maple:

$g(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{k = k, x = 0\}, \{k = x, x = x\}$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow k \cdot x^2 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (k - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = k$

Det bemærkes også, at punktmængden altid vil dannes i første kvadrant, når k er positiv, da $g''(0) = 2 \cdot k > 0$, dvs origo er et minimumspunkt.

Når arealet skal være 44, har man:

$$fsolve\left(\int_0^k g(x)\,dx = 44., k\right) = -4.793563454, 4.793563454$$

Da k er positiv, er $\underline{\underline{k = 4.7936}}$

12. august 2022: Delprøve 1

12. august 2022 opgave 1: $f(x,y) = x^2 - y^2 + 4x$

a) $f(3,1) = 3^2 - 1^2 + 4 \cdot 3 = 9 - 1 + 12 = \underline{\underline{20}}$

b) Det stationære punkt er det punkt, hvor gradienten er nulvektoren, dvs. hvor de partielt afledede efter x og y begge er 0:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 0 + 4 = 2x + 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 - 2y + 0 = -2y$$

$$2x + 4 = 0 \ \wedge \ -2y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \ \wedge \ y = 0$$

Tredjekoordinaten bestemmes: $f(-2,0) = (-2)^2 - 0^2 + 4 \cdot (-2) = 4 - 0 - 8 = -4$

Dvs. $\underline{\underline{P_0(-2,0,-4)}}$

12. august 2022 opgave 2: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ \frac{1}{3}t^3 - 4t \end{pmatrix} \quad ; \quad -4 \le t \le 4$

a) Hastighedsfunktionen er den afledede af vektorfunktionen, og den bestemmes ved at differentiere koordinatvis:

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} 2t - 0 \\ \frac{1}{3} \cdot 3t^2 - 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2t \\ t^2 - 4 \end{pmatrix}}}$$

b) En lodret tangent findes i det punkt, hvor hastighedsfunktionens førstekoordinat er 0, så parameterværdien svarende til dette punkt bestemmes: $2t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0$

Punktets koordinater bestemmes ved indsættelse i vektorfunktionen $\vec{r}(t)$: $\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0^2 - 1 \\ \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dvs. koordinatsættet til punktet, hvor banekurven har lodret tangent, er $\underline{\underline{(-1,0)}}$

12. august 2022 opgave 3: $(2x - 6) \cdot (x^2 + 7x + 10) = 0$

a) Det er et produkt, der giver 0, så nulreglen bruges til at løse ligningen:

$$(2x - 6) \cdot (x^2 + 7x + 10) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$2x - 6 = 0 \ \vee \ x^2 + 7x + 10 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$2x = 6 \ \vee \ (x + 5) \cdot (x + 2) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x = 3 \ \vee \ x + 5 = 0 \ \vee \ x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{x = 3 \ \vee \ x = -5 \ \vee \ x = -2}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

12. august 2022 opgave 4: $f(x) = x^3 \cdot \ln(x)$ $\qquad y' = 3 \cdot \frac{y}{x} + x^2$

a) Det undersøges, om funktionen er en løsning til differentialligningen, ved at indsætte funktionsudtrykkene for funktionen og den afledede funktion i differentialligningen og se, om man får en identitet. Så først skal den afledede funktion af *f* bestemmes (med produktreglen):

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \ln(x) + x^3 \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 \cdot \ln(x) + x^2$$

Så indsættes i differentialligningen:

$$3x^2 \cdot \ln(x) + x^2 = 3 \cdot \frac{x^3 \cdot \ln(x)}{x} + x^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$3x^2 \cdot \ln(x) + x^2 = 3x^2 \cdot \ln(x) + x^2$$

Dette er en identitet, så ***f* er en løsning til differentialligningen.**

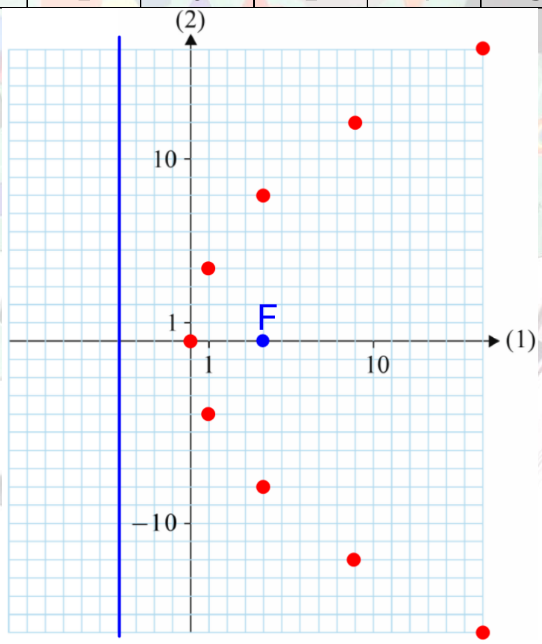
12. august 2022 opgave 5: $y^2 = 16x$

a) Ledelinjen for parablen, der er på formen $y^2 = a \cdot x$, har ligningen $x = -\frac{1}{4}a = -\frac{1}{4} \cdot 16 = -4$

Og koordinatsættet for brændpunktet er $F\left(\frac{1}{4}a, 0\right) = F\left(\frac{1}{4} \cdot 16, 0\right) = F(4,0)$.

Disse kan bruges til at skitsere parablen, men hvis man skal tegne den mere præcist, skal man bruge et sildeben, hvor man skal være opmærksom på, at det er *y*-værdierne, man skal tage udgangspunkt i, da én *x*-værdi kan svare til to *y*-værdier. Det vil være tallene i 4-tabellen, der vil give hele tal for *x*-værdien, fordi *y*-værdien kvadreres, og man skal dele med 16 for at få *x*-værdien:

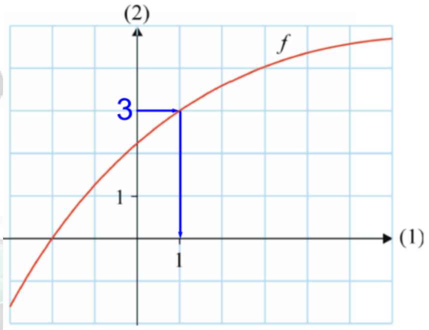
y	-16	-12	-8	-4	0	4	8	12	16
x	16	9	4	1	0	1	4	9	16



Man skal så tegne grafen gennem de røde punkter.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>*12. august 2022 opgave 6:*</u> Da det er oplyst, at funktionen *f* er defineret i intervallet [-3,6], kan man se hele grafen for *f* i bilaget. For at bestemme funktionsværdien for den omvendte funktion, skal man bytte rundt på *x*- og *y*-værdierne:



Man aflæser altså, at $\underline{\underline{f^{-1}(3)=1}}$

<u>*12. august 2022 opgave 7:*</u> $y'=0{,}01\cdot y\cdot(20-y)\quad P(0{,}10)$

a) Man mangler kun tangenthældningen for at kunne angive linjeelementet i *P*. Tangenthældningen findes ved at indsætte punktets koordinater i differentialligningen:

$$y'=0{,}01\cdot 10\cdot(20-10)=0{,}01\cdot 10\cdot 10=1$$

Dvs. linjeelementet i *P* er $\underline{\underline{(0{,}10;1)}}$

b) Det er en differentialligning af typen $y'=a\cdot y\cdot(M-y)$ (nr. 179 i formelsamlingen).

Den fuldstændige løsning er $y=\dfrac{M}{1+c\cdot e^{-a\cdot M\cdot x}}$, dvs. i dette tilfælde $y=\dfrac{20}{1+c\cdot e^{-0{,}01\cdot 20\cdot x}}=\dfrac{20}{1+c\cdot e^{-0{,}2\cdot x}}$

For at finde værdien af *c* udnyttes det, at grafen for *f* går gennem punktet *P*:

$$10=\frac{20}{1+c\cdot e^{-0{,}2\cdot 0}}\quad\Leftrightarrow\quad 10=\frac{20}{1+c\cdot 1}\quad\Leftrightarrow\quad 1+c=2\quad\Leftrightarrow\quad c=1$$

Dvs. $\underline{\underline{f(x)=\dfrac{20}{1+e^{-0{,}2\cdot x}}}}$

<u>*12. august 2022 opgave 8:*</u> $f(x)=x^3$

a) Arealet bestemmes ved at udregne det bestemte integral:

$$A_{M_1}=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 x^3\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2=\frac{1}{4}\cdot 2^4-\frac{1}{4}\cdot 0^4=\frac{16}{4}=\underline{\underline{4}}$$

b) Arealet af trekant *OPQ* er: $T=\dfrac{1}{2}\cdot h\cdot g=\dfrac{1}{2}\cdot f(k)\cdot k=\dfrac{1}{2}\cdot k^3\cdot k=\dfrac{k^4}{2}$

Arealet af området M_2 er: $A_{M_2}=\displaystyle\int_0^k x^3\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^k=\frac{1}{4}\cdot k^4-\frac{1}{4}\cdot 0=\frac{k^4}{4}$

Det ses altså, at $A_{M_2}=\dfrac{1}{2}\cdot T$, da $\dfrac{k^4}{4}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{k^4}{2}$

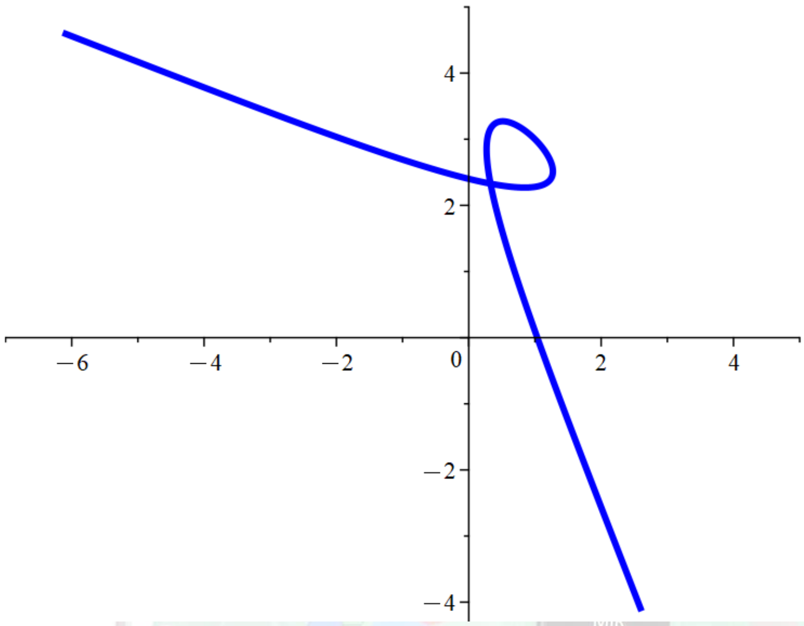
12. august 2022: Delprøve 2

12. august 2022 opgave 9:

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - e^t + 2 \\ -t^3 - e^{-t} + 4 \end{pmatrix} \quad , \quad -2 \le t \le 2$$

a) Det er oplyst, at parameterværdierne ligger mellem -2 og 2, og man kan så tilpasse vinduet, så alt kommer med:

$plot([t^3 - e^t + 2, -t^3 - e^{-t} + 4, t = -2..2], view = [-7..5, -7..5], color = blue, thickness = 4)$



b) Parameterkurven skærer andenaksen, når førstekoordinaten er 0:

$t^3 - e^t + 2 = 0. \xrightarrow{\text{solve}}$

$\{t = -1.192685765\}, \{t = 4.595863565\}, \{t = 0.9428988884 - 0.4162458991\,I\}, \{t = 0.9428988884 + 0.4162458991\,I\}$

To af løsningerne er komplekse, og en falder udenfor definitionsmængden, dvs. $\underline{\underline{t = -1.192685765}}$

12. august 2022 opgave 10:

$f(x) := 1.2 \cdot \left(\sqrt{5} \cdot x - x^{1.5}\right)^{0.5} : \qquad 0 \le x \le 5$

a) $f(x) = 0. \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 0.\}, \{x = 5.\}$

Dvs. $\underline{\underline{x = 0 \ \vee \ x = 5}}$

b) Da man har fundet de to steder, hvor grafen skærer førsteaksen, har man grænserne til det bestemte integral:

$$V = \int_0^{5.} \pi \cdot f(x)^2 \, dx = 25.28933304$$

Da man måler i enheden cm, har man altså: $\underline{\underline{V = 25.29 \text{ cm}^3}}$

c) For at bestemme bredden af ægget skal man først finde den maksimale funktionsværdi for *f*.

$f'(x) = 0. \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 2.222222222\}$

Med fortegnet for den anden afledede tjekkes det, at det er et lokalt maksimum:

$$f''(2.2222222222222) = -\frac{0.300\left(\sqrt{5} - 2.236067978\right)^2}{\left(2.2222222222222\sqrt{5} - 3.312693300\right)^{1.5}} - \frac{0.3018691770}{\sqrt{2.2222222222222\sqrt{5} - 3.312693300}} \xrightarrow{\text{at 10 digits}}$$

$-0.2345541677 < 0$, dvs. lokalt maksimum.

Bredden er det dobbelte af den maksimale funktionsværdi:

$b = 2 \cdot f(2.22222222222) = 2.4\sqrt{2.22222222222\sqrt{5} - 3.312693300} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 3.088779158$

Dvs. $\underline{\underline{b = 3.089 \text{ cm}}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

12. august 2022 opgave 11:

a) Først hentes datasættet ind i Maple med Tools-Assistants-Import Data (cellerne A2:A101).

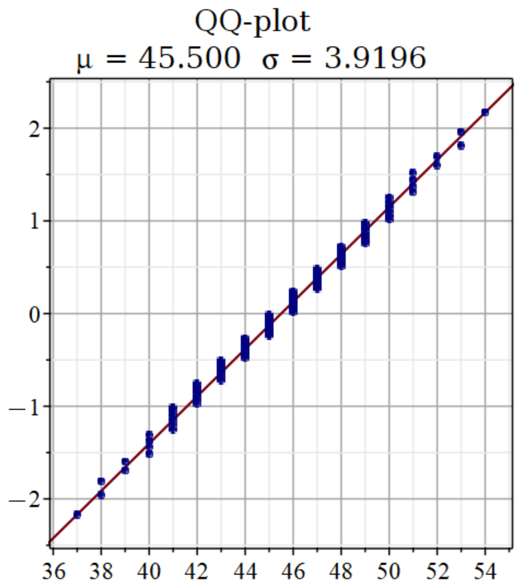
$$Vingelængde := \begin{bmatrix} 36.0 \\ 41.0 \\ 42.0 \\ 43.0 \\ 45.0 \\ 46.0 \\ 47.0 \\ 48.0 \\ 49.0 \\ 51.0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

100 × 1 Matrix

with(*Gym*) :

For at undersøge, om vingelængderne med god tilnærmelse kan beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel, tegnes et QQ-plot:

QQplot(*Vingelængde*)



standardafvigelse(*Vingelængde*) = 3.91965

middel(*Vingelængde*) = 45.50000

Da punkterne med god tilnærmelse ligger på en ret linje, kan vingelængden med god tilnærmelse beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel (med middelværdien 45,5 og spredningen 3,91965).

b) I Gym-pakken er fordelingsfunktionen for normalfordelingen givet ved *normalcdf*, så sandsynligheden for at få et udfald større end 52 bestemmes ved:

$P(X \geq 52) = 1 - normalcdf(45.5, 3.91965, 52) = 0.0486273218$

Dvs. $\underline{\underline{P(X \geq 52) = 0.04863}}$

c) Normale udfald ligger inden for to spredninger fra middelværdien:

$\mu - 2 \cdot \sigma = 45.5 - 2 \cdot 3.91965 = 37.66070$

$\mu + 2 \cdot \sigma = 45.5 + 2 \cdot 3.91965 = 53.33930$

$\min(Vingelængde) = 36.0$

$\max(Vingelængde) = 55.0$

Så de udfald, der ikke er normale udfald, er **36, 37, 54 og 55**

(som det ses i QQ-plottet og Excelfilen er der også vingelængder på 37 og 54)

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

12. august 2022 opgave 12:

a) Når man regner i cm, er ellipsens storakse 130, og den halve storakse dermed $a := \frac{130}{2} = 65$

Tilsvarende er lilleaksen 118 og den halve lilleakse dermed $b := \frac{118}{2} = 59$

En ligning (på normalform) for ellipsen er så ifølge F(4) fra indstiksarket til formelsamlingen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\mathbf{\frac{x^2}{4225} + \frac{y^2}{3481} = 1}$$

b) F(6) fra indstiksarket til formelsamlingen kan bruges til at bestemme en ligning for tangenten til ellipsen i $P\left(60, \frac{295}{13}\right)$. $\frac{x_0 \cdot x}{a^2} + \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1$

$$\frac{60 \cdot x}{a^2} + \frac{\frac{295}{13} \cdot y}{b^2} = 1 \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = \frac{767}{5} - \frac{708\,x}{325}$$

Dvs. en ligning for tangenten er $\underline{\underline{y = -\frac{708}{325}x + \frac{767}{5}}}$

c) Koordinatsættet for brændpunktet F_2 bestemmes: $F_2\left(\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right) = F_2\left(2\sqrt{186}, 0\right)$

Tangentens skæring med førsteaksen bestemmes: $0 = \frac{767}{5} - \frac{708\,x}{325} \xrightarrow{\text{solve}} \left\{x = \frac{845}{12}\right\}$

Nu angives stedvektorerne til punktet P, punktet F_2 og tangentens skæringspunkt S med førsteaksen.

$$\overrightarrow{OP} := \left\langle 60, \frac{295}{13} \right\rangle : \overrightarrow{OF} := \left\langle 2 \cdot \sqrt{186}, 0 \right\rangle : \overrightarrow{OS} := \left\langle \frac{845}{12}, 0 \right\rangle :$$

Den søgte spidse vinkel er vinklen mellem vektorerne $\overrightarrow{PF}$ og $\overrightarrow{PS}$, så den bestemmes:

$$\overrightarrow{PF} := \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{186} - 60 \\ -\frac{295}{13} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{PS} := \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} \frac{125}{12} \\ -\frac{295}{13} \end{bmatrix}$$

$$\cos(v) = \frac{\overrightarrow{PF} \bullet \overrightarrow{PS}}{|\overrightarrow{PF}| \cdot |\overrightarrow{PS}|}$$

$$Cos(v) = \frac{\overrightarrow{PF} \bullet \overrightarrow{PS}}{len(\overrightarrow{PF}) \cdot len(\overrightarrow{PS})} \xrightarrow{\text{solve for v}} [[v = 79.91750037]]$$

Dvs. $\underline{\underline{v = 79.92°}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>12. august 2022 opgave 13:</u>

$\frac{dV}{dt} = -1.1 \cdot V^{\frac{2}{3}} \qquad V(0) = 0.44$

a) Den partikulære løsning til differentialligningen bestemmes:

$V'(t) = -1.1 \cdot V(t)^{\frac{2}{3}}, V(0) = 0.44 \xrightarrow{\text{solve DE}} V(t) = -\frac{1331\, t^3}{27000} + \frac{121\, t^2\, 55^{1/3}}{1500} - \frac{11\, t\, 55^{2/3}}{250} + \frac{11}{25}$

(med afrundinger: $-0.04929629630\, t^3 + 0.3067714985\, t^2 - 0.6363476865\, t + 0.4400000000$)

b) *restart*

Nu kender man rumfanget efter 2,3 minutter, da den er opløst: $V(2.3) = 0$

Først bestemmes den fuldstændige løsning:

$V'(t) = -1.1 \cdot V(t)^{\frac{2}{3}} \xrightarrow{\text{solve DE}} \left[\left\{V(t)^{1/3} + \frac{11\, t}{30} - \_C1 = 0\right\}\right]$

Så udnyttes oplysningen om, at tabletten er opløst efter 2,3 minutter, til at bestemme konstantenk:

$0^{\frac{1}{3}} + \frac{11}{30} \cdot 2.3 - k = 0 \xrightarrow{\text{solve for k}} [[k = 0.8433333333]]$

Dvs. $V(t) := \left(-\frac{11}{30} \cdot t + 0.8433333333\right)^3 :$

$V(0) = 0.5997880370$

Så fra start var rumfanget af den store tablet **0,600 cm^3**

5. december 2022: Delprøve 1

5. december 2022 opgave 1: $\frac{dy}{dx} = e^y \cdot (x-4) \quad , \quad P(9,0)$

a) Man mangler at kende differentialkvotienten i 9 for at kunne angive linjeelementet, og den bestemmes ved at indsætte P's koordinater i differentialligningen:

$$\frac{dy}{dx} = e^0 \cdot (9-4) = 1 \cdot 5 = 5$$

Dvs. linjeelementet er $\underline{\underline{(9,0;5)}}$

5. december 2022 opgave 2: $f(x,y) = 4x + 2y + 3x^2 y$

a) $f(5,1) = 4 \cdot 5 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5^2 \cdot 1 = 20 + 2 + 3 \cdot 25 = 22 + 75 = \underline{\underline{97}}$

b) Den partielt afledede bestemmes ved at differentiere polynomiet, hvor y betragtes som en konstant. Der anvendes ledvis differentiation:

$$f_x'(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 4 + 0 + y \cdot 6x = \underline{\underline{4 + 6xy}}$$

5. december 2022 opgave 3: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \cdot \cos(t) \\ 5 \cdot \sin(t) \end{pmatrix} \qquad P(1,7)$

a) En cirkel med centrum (a,b) og radius r er givet ved parameterfremstillingen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot \cos(t) \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$

Så man kan i parameterfremstillingen aflæse $\underline{\underline{C(-2,3)}}$ og $\underline{\underline{r=5}}$

b) Vektoren $\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} 1-(-2) \\ 7-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ er en normalvektor til tangenten til cirklen i P. En tværvektor til $\overrightarrow{CP}$ er en retningsvektor for tangenten: $\vec{r} = \widehat{CP} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Da man nu kender et punkt P på tangenten og en retningsvektor for den, kan man opskrive en parameterfremstilling: $\underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \; t \in \mathbb{R}}}$

5. december 2022 opgave 4: $y^2 = -9x \qquad P(-1,3)$

a) I indstiksarket til formelsamlingen findes ligningen for tangenten til parablen på formen $y^2 = ax$ i formel F(11):

$$y \cdot y_0 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (x + x_0)$$

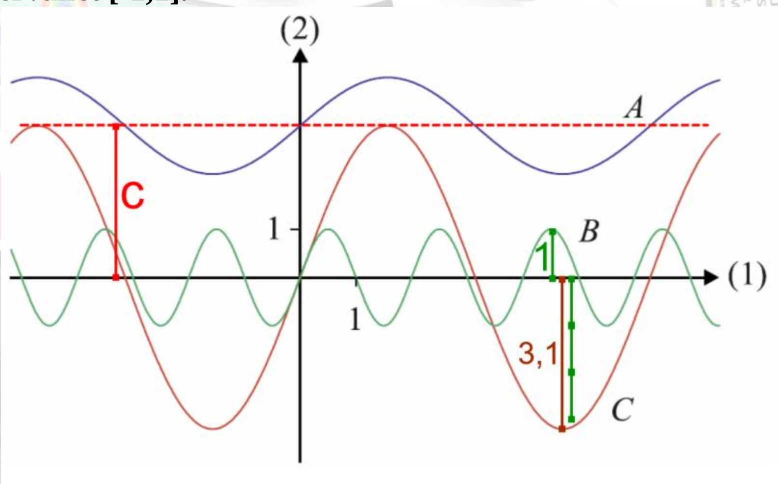
$$y \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot (-9) \cdot (x-1) \iff 3y = -\frac{9}{2} \cdot (x-1) \iff \underline{\underline{y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

5. december 2022 opgave 5: $f(x) = \pi \cdot \sin(x)$.

a) $f(0) = \pi \cdot \sin(0) = \pi \cdot 0 = 0$, så **grafen skal gå gennem origo, og dermed er graf *A* udelukket** (grafen er forskudt med *c* op ad andenaksen i forhold til grafen for en funktion med forskriften $g(x) = A \cdot \sin(x)$.

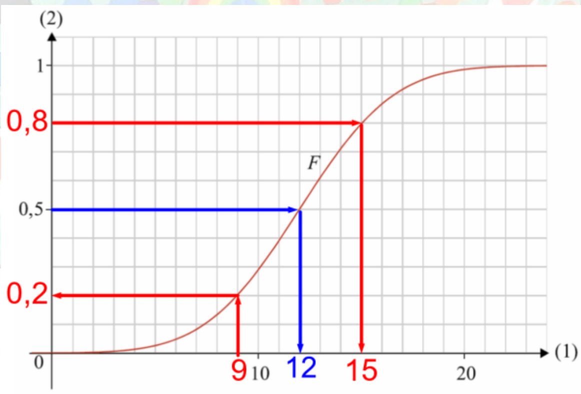
Sinusværdier ligger i intervallet [-1,1], så *f* 's funktionsværdier ligger i intervallet $[-\pi, \pi]$, og dermed **er det graf *C*, der er grafen for *f***. Det er **ikke graf *B*, da funktionsværdierne for dens tilhørende funktion ligger i intervallet [-1,1].**



5. december 2022 opgave 6: Man ser, at tælleren kan faktoriseres (første kvadratsætning):

a) $\dfrac{6a \cdot (a^2 + b^2 + 2ab)}{2 \cdot (a+b)} = \dfrac{6a \cdot (a+b) \cdot (a+b)}{2 \cdot (a+b)} = \underline{\underline{3 \cdot a \cdot (a+b)}}$

5. december 2022 opgave 7: a) Da det er en normalfordelt stokastisk variabel *X*, svarer middelværdien til medianen, og den kan dermed aflæses ved at gå vandret ind fra 0,5 på andenaksen (den blå linje) og derefter fra grafen ned til førsteaksen, hvor man aflæser $\underline{\underline{\mu = 12}}$.



b) $P(9 \le X \le k) = 0{,}60 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \le k) - P(X \le 9) = 0{,}60$

Som angivet med røde pile ses det, at sandsynligheden for, at den stokastiske variabel antager en værdi på højst 9, er 20%., dvs. $P(X \le 9) = 0{,}20$. Dvs. $P(X \le k) - 0{,}20 = 0{,}60 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \le k) = 0{,}80$.

På grafen aflæses det derefter (igen med røde pile), at $\underline{\underline{k = 15}}$.

5. december 2022 opgave 8: $f(x)=x^2-1 \quad g(x)=x+1$

a) Først bestemmes førstekoordinaten til de punkter, hvor graferne skærer:

$$f(x)=g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x^2-1=x+1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-x-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)\cdot(x+1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2 \vee x=-1$$

Andenkoordinaten bestemmes ved at sætte ind i en af forskrifterne for *f* og *g* (her vælges *g*):

$$g(-1)=-1+1=0$$

$$g(2)=2+1=3$$

Dvs. koordinatsættene til skæringspunkterne er $\underline{\underline{(-1,0)\text{og } (2,3)}}$

b) Ved at sammenligne funktionsværdier for et sted (her vælges $x=0$) mellem de to skæringer kan man se, hvilken funktion der ligger øverst i intervallet:

$$f(0)=0^2-1=-1$$

$$g(0)=0+1=1$$

Da grafen for *g* ligger øverst i intervallet, finder man arealet af *M* ved:

$$A_M=\int_{-1}^{2}\left(g(x)-f(x)\right)dx=\int_{-1}^{2}\left((x+1)-(x^2-1)\right)dx=\int_{-1}^{2}\left(-x^2+x+2\right)dx=$$

$$\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}=\left(-\frac{1}{3}\cdot 2^3+\frac{1}{2}\cdot 2^2+2\cdot 2\right)-\left(-\frac{1}{3}\cdot(-1)^3+\frac{1}{2}\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)\right)=$$

$$\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=\left(-\frac{8}{3}+\frac{6}{3}+\frac{12}{3}\right)-\left(\frac{2}{6}+\frac{3}{6}-\frac{12}{6}\right)=\frac{10}{3}-\left(-\frac{7}{6}\right)=\frac{20}{6}+\frac{7}{6}=\frac{27}{6}=\underline{\underline{\frac{9}{2}}}$$

5. december 2022: Delprøve 2

5. december 2022 opgave 9:

$with(Gym)$:

$f(x) := 9x^2 \cdot \ln(x)$: $P(1, 10)$

Først bestemmes den form samtlige stamfunktioner er på:

$F_k(x) = \int f(x)\,dx = 3x^3 \ln(x) - x^3 + k$ (Maple giver ikke selv integrationskonstanten, så den tilføjes)

.

Punktets koordinater indsættes for at finde konstanten:

$10 = 3 \cdot 1^3 \cdot \ln(1) - 1^3 + k \xrightarrow{\text{solve}} \{k = 11\}$

Så den søgte stamfunktion er: $\underline{\underline{F(x) = 3 \cdot x^3 \cdot \ln(x) - x^3 + 11}}$

5. december 2022 opgave 10:

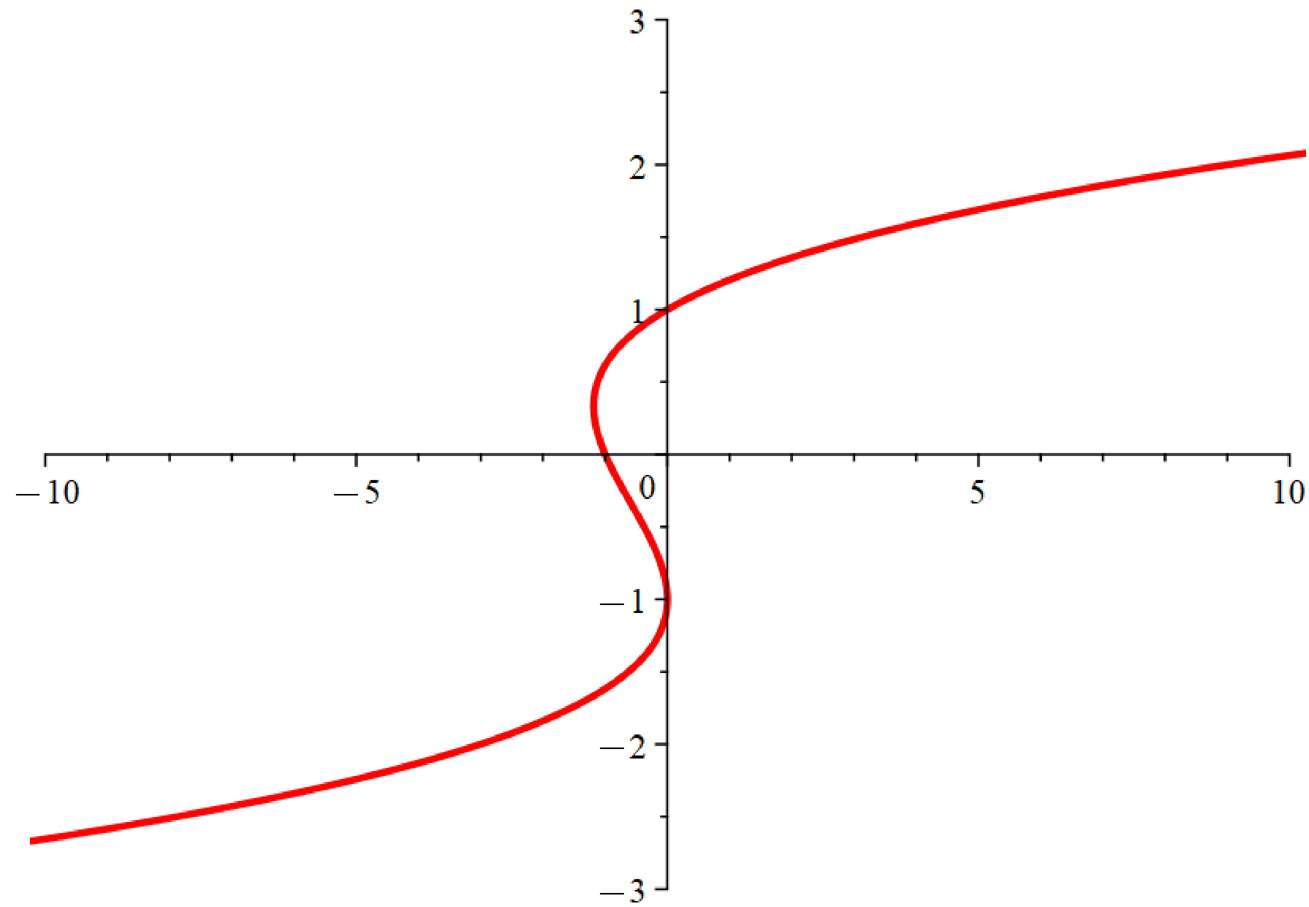
$with(Gym)$:

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 2t^2 \\ t - 1 \end{pmatrix}$$

a) $s(t) := \langle t^3 - 2t^2, t - 1 \rangle$:

Banekurven tegnes i et passende vindue:

$plot([s(t)[1], s(t)[2], t = -5..5], view = [-10..10, -3..3], color = red, thickness = 3)$



b) Hastighedsfunktionen bestemmes ved at differentiere stedfunktionen:

$$v(t) := s'(t) = t \to \left.\frac{d}{dx}\, s(x)\right|_{x=t}$$

$$v(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 - 4t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v(2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dvs. $\vec{v}(2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Da hastighedsvektorens andenkoordinat er 1, bliver den aldrig nulvektoren, og vektoren $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ er ikke nulvektoren. To egentlige vektorer er ortogonale, netop når deres prikprodukt er 0:

$$v(t) \cdot \langle -3, 4\rangle = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{t = \frac{2}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right\}, \left\{t = \frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right\}$$

Dvs. $t = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{3} \quad \vee \quad t = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{3}$

5. december 2022 opgave 11:

$f(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c :$

a) P er i origo, og da rækkevidden er 2400 km, har man altså $P(0, 0)$ og $Q(2400, 0)$.
Toppunktets førstekoordinat er midt mellem nulpunkternes førstekoordinater, og da den maksimale højde er 560 km, har man altså toppunktet $T(1200, 560)$.
Punktet P giver $c := 0 :$
Punkterne Q og T benyttes til at bestemme konstanterne a og b.

$$solve([f(2400) = 0, f(1200) = 560], \{a, b\}) = \left\{a = -\frac{7}{18000}, b = \frac{14}{15}\right\}$$

$$a := -\frac{7}{18000} : b := \frac{14}{15} :$$

Dermed er den søgte forskrift: $\boldsymbol{f(x) = -\frac{7}{18000}x^2 + \frac{14}{15}x}$

b) Da man nu kender forskriften, kan kurvelængden bestemmes:

$$l_{raketbane} = \int_0^{2400.} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = 2713.027151$$

$l_{raketbane} = 2713.027$ km

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

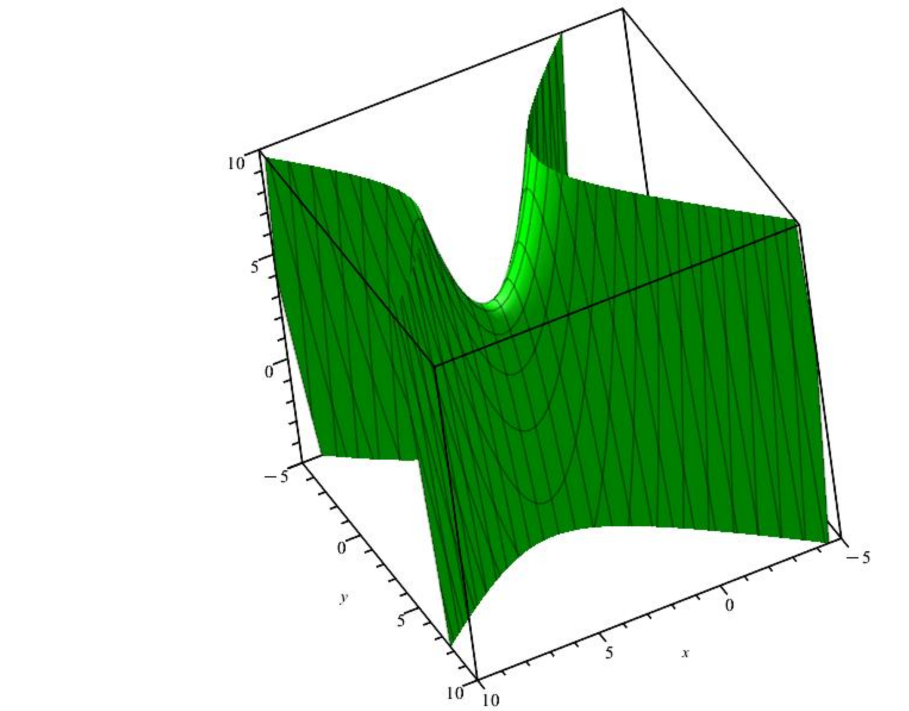
5. december 2022 opgave 12:

$with(Gym):$

$f(x,y) := (x-4)^2 - (y-1)^2 + 4:$

a) Det er oplyst, at vinduet skal være $[-5, 10] \times [-5, 10] \times [-5, 10]$:

$plot3d(f(x,y), x=-5..10, y=-5..10, view=[-5..10, -5..10, -5..10], color=green)$



b) Stationære punkter er de punkter, hvor gradienten er nulvektoren:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)) = 0, \ \frac{\partial}{\partial y}(f(x,y)) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x=4, y=1\}$$

Funktionsværdien bestemmes:

$f(4,1) = 4$

Dvs. $\underline{\underline{P(4,1,4)}}$

Hvis man vil vise, at punktet er et saddelpunkt, bestemmer man værdien for determinanten af Hesse-matricen i (4,1):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(f(x,y)) \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2}(f(x,y)) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y}(f(x,y))\right)^2 \xrightarrow{\text{evaluate at point}} -4 \ < 0 \text{, dvs. saddelpunkt.}$$

Men det bliver der ikke spurgt om i opgaven.

5. december 2022 opgave 13:

$with(Gym)$:

a) Ud fra de oplyste tal på figuren ses det, at $a = 400$ og $b = 250$. Så ellipsens ligning er:

$$\underline{\underline{\frac{x^2}{400^2} + \frac{y^2}{250^2} = 1}} \quad \text{(den kan også angives } \frac{x^2}{160000} + \frac{y^2}{62500} = 1 \text{)}$$

b) Brændpunkternes koordinater bestemmes med formel F(5) fra indstiksarket til formelsamlingen:

$A\left(-\sqrt{400.^2 - 250^2}, 0\right) = A(-312.2498999, 0)$

$B\left(\sqrt{400.^2 - 250^2}, 0\right) = B(312.2498999, 0)$

$\underline{\underline{A(-312.25, 0) \;\; og \;\; B(312.25, 0)}}$

5. december 2022 opgave 14:

$p' = 0.015 \cdot p^{1.2}$

$p(x)$ er Jordens befolkningstal målt i milliarder, hvor x er antal år efter 1990.
Da befolkningstallet i 1990 var 5,28 milliarder, har man $p(0) = 5.28$.

a) Væksthastigheden i 1990 (hvor man kender funktionsværdien) bestemmes ved at indsætte i differentialligningen:

$p' = 0.015 \cdot 5.28^{1.2} = 0.1104719363$

Dvs. **befolkningstallet voksede med 110,5 millioner mennesker om året i 1990**

b) Den partikulære løsning til differentialligningen bestemmes:

$dsolve\left(\left[p'(x) = 0.015 \cdot p(x)^{1.2}, p(0) = 5.28\right]\right) =$

$$p(x) = -330000000000000000 \Big/ \left(67500000\, x^3\, 5^{4/5}\, 132^{3/5} - 101250\, x^4\, 5^{2/5}\, 132^{4/5} - 112500000000\, x^2\, 132^{2/5}\, 5^{1/5} + 18750000000000\, x\, 132^{1/5}\, 5^{3/5} + 8019\, x^5 - 62500000000000000\right)$$

$$p(x) := -330000000000000000 \Big/ \left(67500000\, x^3\, 5^{4/5}\, 132^{3/5} - 101250\, x^4\, 5^{2/5}\, 132^{4/5} - 112500000000\, x^2\, 132^{2/5}\, 5^{1/5} + 18750000000000\, x\, 132^{1/5}\, 5^{3/5} + 8019\, x^5 - 62500000000000000\right) :$$

År 2030 svarer til $x = 40$:

$p(40.) \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 13.19484275$

Dvs. at **ifølge model 1 vil Jordens befolkningstal i 2030 være 13,2 milliarder**

c) $f(x) := 5.28 \cdot e^{0.015 \cdot x}$:

50% større svarer til en fremskrivningsfaktor på 1,5. Man kan evt. tegne graferne for de to modeller, så man får en idé om, hvad årstallet skal være. Der anvendes intervalsolve med den nedre grænse 0 (hvis den øvre grænse på 100 ikke havde været stor nok, kunne den gøres større):

$intervalsolve(p(x) = 1.5 \cdot f(x), x = 0..100) = [48.39092081]$

Dvs. **i år 2038 vil befolkningstallet ifølge model 1 være 50% større end ifølge model 2.**