Løsninger til eksamensopgaver på A-niveau 2023

22. maj 2023: Delprøve 1

22. maj 2023 Opgave 1: $f(x) = x^2 - 3x + 4 \qquad g(x) = 2^x$

a) Funktionsværdien for den sammensatte funktion bestemmes ved at indsætte funktionsværdien for g i forskriften for f:

$$f(g(3)) = f(2^3) = f(8) = 8^2 - 3\cdot 8 + 4 = 64 - 24 + 4 = \underline{\underline{44}}$$

22. maj 2023 Opgave 2: Det ubestemte integral bestemmes ved ledvis integration, og integrationskonstanten huskes (hvis man ikke kan huske stamfunktionen til den naturlige logaritmefunktion, kan man finde den i formelsamlingen):

a) $\int (\ln(x) + 6x)\,dx = \underline{\underline{x\cdot\ln(x) - x + 3x^2 + k}}$

22. maj 2023 Opgave 3: a) Det er et produkt, der giver nul, så ligningen løses ved hjælp af nulreglen:

$$\sqrt{x}\cdot(4x-12) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{x} = 0 \ \vee\ 4x - 12 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x = 0 \ \vee\ x = 3}}$$

b) $f(x) = \sqrt{x}\cdot(4x-12)$

Den afledede funktion bestemmes med produktreglen:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(4x-12) + \sqrt{x}\cdot 4 = \frac{4x}{2\sqrt{x}} - \frac{12}{2\sqrt{x}} + 4\sqrt{x} = 2\sqrt{x} - \frac{6}{\sqrt{x}} + 4\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - \frac{6}{\sqrt{x}} = \underline{\underline{6\cdot\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}}$$

22. maj 2023 Opgave 4: $f(x) = 2e^x + x \qquad y' = y - x + 1 \qquad P(0,2)$

a) Det undersøges, om f er en løsning til differentialligningen, ved at indsætte funktionsudtrykkene for f og den afledede funktion i differentialligningen og se, om man får en identitet:

$$f'(x) = 2e^x + 1$$

Indsat: $2e^x + 1 = 2e^x + x - x + 1 \quad\Leftrightarrow\quad 2e^x = 2e^x$

Da man får en identitet, **er f en løsning til differentialligningen.**

b) Man har allerede fået punktets koordinater (det er uvist, hvorfor man ikke bliver sat til at finde andenkoordinaten), så man mangler blot tangenthældningen for at kunne finde ligningen for tangenten til grafen for f i P. Tangenthældningen bestemmes ved at indsætte i den afledede funktion.

$$a_t = f'(0) = 2\cdot e^0 + 1 = 2\cdot 1 + 1 = 3$$

Så kan tangentens ligning bestemmes:

$$y - y_0 = a\cdot(x - x_0)$$

$$y - 2 = 3\cdot(x - 0) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{y = 3x + 2}}$$

22. maj 2023 Opgave 5: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$

a) Da ligningen for på ellipsen er på normalform $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, har man $a=10$ og $b=6$.

I F(5) i indstiksarket til formelsamlingen har man $F_1\left(-\sqrt{a^2-b^2},0\right)$ og $F_2\left(\sqrt{a^2-b^2},0\right)$.

$$F_1\left(-\sqrt{10^2-6^2},0\right)=F_1\left(-\sqrt{100-36},0\right)=F_1\left(-\sqrt{64},0\right)=\underline{\underline{F_1\left(-8,0\right)}}$$

$$F_2\left(\sqrt{10^2-6^2},0\right)=F_2\left(\sqrt{100-36},0\right)=F_2\left(\sqrt{64},0\right)=\underline{\underline{F_2\left(8,0\right)}}$$

22. maj 2023 Opgave 6: $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} t^2+2 \\ t^2-2t \end{pmatrix}$

a) Skæringer med førsteaksen er de punkter, hvor andenkoordinaten er 0. Den fremkomne ligning løses ved faktorisering og brug af nulreglen:

$t^2-2t=0 \quad \Leftrightarrow \quad t\cdot(t-2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{t=0 \ \vee \ t=2}}$

b) Først bestemmes den afledede funktion ved at differentiere koordinatvis: $\vec{s}\,'(t)=\begin{pmatrix} 2t \\ 2t-2 \end{pmatrix}$.

En vandret tangent findes i det punkt, hvor den afledede funktions andenkoordinat er 0:

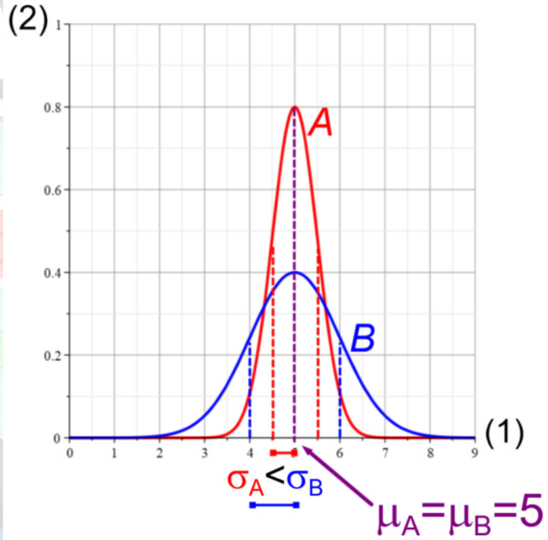
$2t-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2t=2 \quad \Leftrightarrow \quad t=1$

Koordinatsættet til punktet findes ved indsættelse i $\vec{s}(t)$: $\vec{s}(1)=\begin{pmatrix} 1^2+2 \\ 1^2-2\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2 \\ 1-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Dvs. at der er en vandret tangent til banekurven i punktet $\underline{\underline{(3,-1)}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>*22. maj 2023 Opgave 7:*</u> a) For en normalfordeling falder median og middelværdi sammen, og grafen er symmetrisk omkring den lodrette linje gennem middelværdien, dvs. middelværdien er stedet med største funktionsværdi. *A* og *B* har størst funktionsværdi samme sted – angivet med stiplet violet linje på grafen nedenfor – og dermed er det **korrekt, at *A* og *B* har samme middelværdi.**



68,3% af arealet under tæthedsfunktionen findes inden for én spredning fra middelværdien, så jo bredere og dermed lavere grafen er, jo større er spredningen. Så spredningen på *B* er større end på *A*, dvs. **det er ikke korrekt, at *A* og *B* har samme spredning**.

<u>*22. maj 2023 Opgave 8:*</u> $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4$

a) Funktionsværdien bestemmes ved indsættelse i forskriften:
$f(2,3) = 2^2 + 2\cdot 3^2 - 4 = 4 + 2\cdot 9 - 4 = \underline{\underline{18}}$

b) *x*-aksen består af de punkter, hvor både *y*- og *z*-koordinaten er 0, hvilket indsættes i funktionsforskriften:
$0 = x^2 + 2\cdot 0^2 - 4 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \ \vee \ x = 2$
Så koordinatsættene til skæringspunkterne er:
$\underline{\underline{(-2,0,0) \text{ og } (2,0,0)}}$

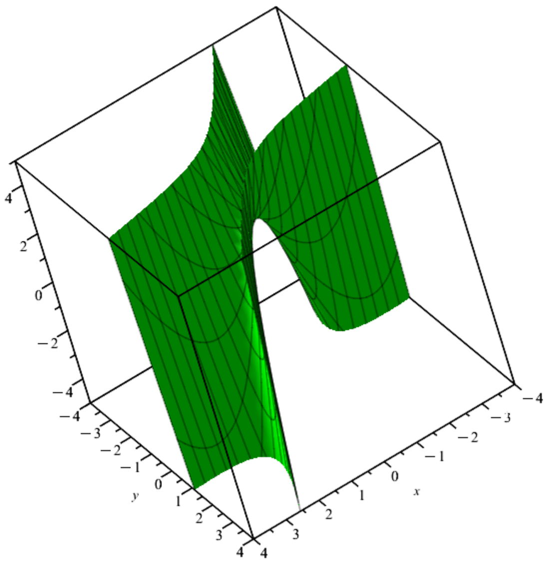
22. maj 2023: Delprøve 2

22. maj 2023 Opgave 9:

$f(x, y) := x^2 - 6\,x \cdot y + 3 \cdot y^2 + 2:$

a) Grafen tegnes i vinduet [-4;4]×[-4,4]×[-5,5] ved hjælp af 3D-plot:

$plot3d(f(x, y), x = -4..4, y = -4..4, view = [-4..4, -4..4, -5..5], color = green)$



b) Stationære punkter er de punkter, hvor gradienten er nulvektoren:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y)) = 0, \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y)) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 0, y = 0\}$$

Tredjekoordinaten til punktet bestemmes ved indsættelse i funktionsforskriften:

$f(0, 0) = 2$

Så $\underline{\underline{P(0, 0, 2)}}$

22. maj 2023 Opgave 10:

$$f(x) := \frac{1}{16} \cdot \sqrt{(16\,x - x^2) \cdot (x^2 - 24\,x + 164)} \;:\quad 0 \le x \le 16$$

a) Man kan sådan set godt løse ligningen $f(x) = 0$ i hånden, for en kvadratrod giver 0, netop når radikanden er nul, og her kan nulreglen bruges:

$16\,x - x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x \cdot (16 - x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\vee\; x = 16$

$x^2 - 24\,x + 164 = 0$

$d = b^2 - 4\,ac = (-24)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 164 = 576 - 656 = -80 < 0$, dvs. ingen løsninger.

Dvs. $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{x = 0 \;\vee\; x = 16}}$ Begge løsninger ligger i definitionsmængden

Man kan også bare bruge Maple:

$$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 0\}, \{x = 16\}, \{x = 12 - 2\,\mathrm{I}\sqrt{5}\}, \{x = 12 + 2\,\mathrm{I}\sqrt{5}\}$$

Her får man to komplekse løsninger, der skal forkastes.

b) Da man fra første spørgsmål kender de to skæringer med førsteaksen og dermed grænserne for integralet, kan man bestemme rumfanget af omdrejningslegemet med:

$$V = \int_0^{16} \pi \cdot f(x)^2 \, dx = \frac{1952\,\pi}{15} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 408.8259239$$

Dvs. rumfanget af legetøjskeglen er 408,8 cm^3

22. maj 2023 Opgave 11:

$$y' = 0.0768 \cdot y^{\frac{2}{3}} - 0.0102 \cdot y \qquad 1 \le x \le 750$$

y er bøflens vægt målt i kg, og x er antal døgn efter fødslen.

a) En vægt på 100 kg svarer til $y = 100$, så man har:

$$y' = 0.0768 \cdot 100^{\frac{2.}{3}} - 0.0102 \cdot 100 = 0.634605842$$

Så når bøflen vejer 100 kg, øges dens vægt med 0,63 kg i døgnet.

b) Den partikulære løsning svarende til $f(1) = 59$ bestemmes:

$$f'(x) = 0.0768 \cdot f(x)^{\frac{2}{3}} - 0.0102 \cdot f(x),\ f(1) = 59 \xrightarrow{\text{solve DE}}$$

$$f(x) = \frac{\left(835584\ 59^{1/3} - 110976\ 59^{2/3} - 1807285\right) e^{-\frac{51x}{5000} + \frac{51}{5000}}}{4913}$$
$$+ \frac{\left(-1671168\ 59^{1/3} + 110976\ 59^{2/3} + 6291456\right) e^{-\frac{17x}{2500} + \frac{17}{2500}}}{4913} + \frac{2097152}{4913}$$
$$+ \frac{\left(835584\ 59^{1/3} - 6291456\right) e^{-\frac{17x}{5000} + \frac{17}{5000}}}{4913}$$

Med afrundinger får man:

$$\xrightarrow{\text{at 10 digits}}$$

$$f(x) = -48.08619867\, e^{-0.01020000000\, x + 0.01020000000} + 298.6959040\, e^{-0.006800000000\, x + 0.006800000000}$$
$$+ 426.8577244 - 618.4674300\, e^{-0.003400000000\, x + 0.003400000000}$$

22. maj 2023 Opgave 12:

$$y^2 = -3x \qquad P(-12, 6)$$

a) Punktet ligger på parablen, netop når punktets koordinater indsat i ligningen giver et sandt udsagn:

$$6^2 = -3 \cdot (-12) \iff 36 = 36$$

Da dette er sandt, ligger *P* på parablen.

b) I indstiksarket til formelsamling giver F(11) ligningen for tangenten til parablen i et punkt, når parablen er på formen $y^2 = a \cdot x$, så i dette tilfælde har man $a = -3$:

$$y \cdot y_0 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(x + x_0\right)$$

$$y \cdot 6 = \frac{1}{2} \cdot (-3) \cdot (x - 12) \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = -\frac{x}{4} + 3$$

Dvs. tangentens ligning er $\underline{\underline{y = -\frac{1}{4} \cdot x + 3}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

22. maj 2023 Opgave 13:

$f(x) = a \cdot x + b$

x er farten af sølvmyrer målt i mm/s, og $f(x)$ er skridtlængden målt i mm.

a) Datasættet hentes ind i Maple med Tools-Assistants-Import Data:

$$Myrer := \begin{bmatrix} 59.0 & 5.3 \\ 63.0 & 6.5 \\ 66.0 & 5.0 \\ 69.0 & 5.6 \\ 73.0 & 4.7 \\ 78.0 & 5.7 \\ 81.0 & 7.3 \\ 86.0 & 5.1 \\ 86.0 & 5.4 \\ 86.0 & 7.6 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

126 × 2 Matrix

Så kan man med lineær regression bestemme en forskrift for f:

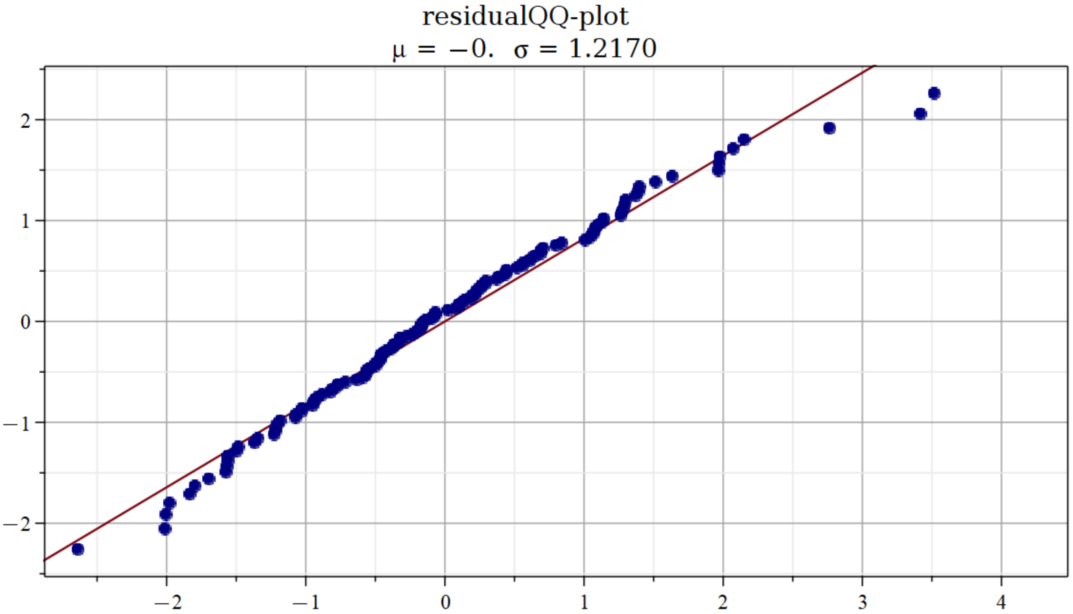
$f(x) := LinReg(Myrer, x) = x \rightarrow LinReg(Myrer, x)$

$f(x) = 0.0191204933816377\, x + 4.66980456186259$

Dvs. $\underline{\underline{f(x) = 0.0191 \cdot x + 4.6698}}$

b) Med et QQ-plot over residualerne kan man undersøge, om de er normalfordelte:

$residualQQplot(Myrer, f)$



Punkterne danner med god tilnærmelse en ret linje, så residualerne er med god tilnærmelse normalfordelte.
Afvigelserne findes hovedsageligt i enderne, så det er rimeligt at se bort fra dem.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

22. maj 2023 Opgave 14:

$\vec{s}(t) := \langle 2t^2+1, t^3-4t+4\rangle \; = t \rightarrow \langle 2t^2+1, t^3-4t+4\rangle$

$\vec{s}(t) = \begin{bmatrix} 2t^2+1 \\ t^3-4t+4 \end{bmatrix}$

a) Dobbeltpunkter findes, når to forskellige værdier for parameteren giver ens koordinater:

$2t^2+1 = 2\cdot s^2+1,\ t^3-4\cdot t+4 = s^3-4\cdot s+4 \xrightarrow{\text{solve}} \{s=t, t=t\}, \{s=-2, t=2\}, \{s=2, t=-2\}$

Det ses altså, at parameterværdierne -2 og 2 giver ens koordinater. Selve koordinaterne bestemmes:

$\vec{s}(-2) = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\vec{s}(2) = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$

Punktet $D(9, 4)$ ses altså at være et dobbeltpunkt.

Man kan også gøre rede for det ved at udnytte, at punktets koordinater er oplyst, og så finde de parameterværdier, der både passer med første- og andenkoordinaten:

$2t^2+1 = 9 \xrightarrow{\text{solve}} \{t=2\}, \{t=-2\}$

$t^3-4t+4 = 4 \xrightarrow{\text{solve}} \{t=0\}, \{t=2\}, \{t=-2\}$

Her ses det, at $t=-2$ og $t=2$ begge giver punktet D.

b) Da man kender parameterværdierne svarende til dobbeltpunktet, kan man finde tangentvektorerne ved at indsætte disse værdier i den afledede funktion:

$\vec{s}'(-2) = \begin{bmatrix} -8 \\ 8 \end{bmatrix}$

$\vec{s}'(2) = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix}$

Ved hjælp af prikproduktet kan man så undersøge, om tangentvektorerne står vinkelret på hinanden (eller også kan man med det samme bemærke, at den øverste vektor svarer til tværvektoren til den nederste):

$\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} = -8\cdot 8 + 8\cdot 8 = -64 + 64 = 0$

Da prikproduktet giver 0, og ingen af de to vektorer er nulvektoren, **står tangentvektorerne vinkelret på hinanden.**

c) Afstanden til origo fra et punkt på kurven kan bestemmes med afstandsformlen mellem to punkter, og den bliver til en funktion af parameteren t, når man indsætter koordinatfunktionerne som punkternes koordinater:

$f(t) := \sqrt{(2t^2+1-0)^2 + (t^3-4t+4-0)^2}$:

Egentlig behøver man ikke kvadratroden, for man søger blot den t-værdi, der gør udtrykket mindst, og ikke den korteste afstand i sig selv.

Først findes evt. ekstremumssteder ved at finde nulpunkter for den afledede funktion, og derefter afgøres typen af punkt ved hjælp af fortegnet for den anden afledede:

$f'(t) = 0. \xrightarrow{\text{solve}}$

$\{t = 0.6421325158\}, \{t = 1.264822455 + 1.186421044\,I\}, \{t = -1.585888713 + 0.4967135755\,I\}, \{t = -1.585888713 - 0.4967135755\,I\}, \{t = 1.264822455 - 1.186421044\,I\}$

Der er kun én løsning, der ikke er kompleks:

$f''(0.6421325158) = 11.26531229 > 0$, dvs. det er et lokalt minimumspunkt, hvilket netop er det, der søges, da man skal finde den korteste afstand.

Punktets koordinater findes ved at indsætte i vektorfunktionens forskrift:

$\vec{s}(0.6421325158) = \begin{bmatrix} 1.824668336 \\ 1.696243114 \end{bmatrix}$

Så punktet på banekurven med den korteste afstand til origo er $\underline{\underline{(1.825, 1.696)}}$

24. maj 2023: Delprøve 1

24. maj 2023 Opgave 1: $f(x,y) = x^2 \cdot y - 3y^2$

a) Funktionsværdien bestemmes ved indsættelse i funktionsudtrykket:

$f(3,1) = 3^2 \cdot 1 - 3 \cdot 1^2 = 9 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 9 - 3 = \underline{\underline{6}}$

b) Den partielt afledede med hensyn til x bestemmes ved at betragte y som en konstant:

$f'_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 0 = \underline{\underline{2xy}}$

24. maj 2023 Opgave 2: $y' = 6 - 2y \quad P(0,4)$

a) For at kunne angive linjeelementet i P, skal man kende tangenthældningen, og den bestemmes ved at indsætte punktets koordinater i differentialligningen.

$y' = 6 - 2 \cdot 4 = 6 - 8 = -2$

Så linjeelementet er $\underline{\underline{(0,4;-2)}}$

b) Det er en standarddifferentialligning af typen $y' = b - a \cdot y$ med den fuldstændige løsning:

$f(x) = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$

Så den fuldstændige løsning til differentialligningen er $f(x) = \frac{6}{2} + c \cdot e^{-2x} = 3 + c \cdot e^{-2x}$

Konstanten c bestemmes, så grafen for løsningen går gennem P:

$4 = 3 + c \cdot e^{-2 \cdot 0} \quad \Leftrightarrow \quad 4 - 3 = c \cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad c = 1$

Dvs. forskriften for den søgte partikulære løsning er: $\underline{\underline{f(x) = 3 + e^{-2x}}}$

24. maj 2023 Opgave 3: $\frac{3a^2 - 3a \cdot b}{a - b} = \frac{3a \cdot (a-b)}{(a-b)} = \underline{\underline{3a}}$

24. maj 2023 Opgave 4: $\int_0^2 (3x^2 + 4x)\,dx = \left[x^3 + 2x^2\right]_0^2 = (2^3 + 2 \cdot 2^2) - (0^3 + 2 \cdot 0^2) = 8 + 2 \cdot 4 = 8 + 8 = \underline{\underline{16}}$

24. maj 2023 Opgave 5: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 3} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-10}{3}\right)^2}$

a) Tæthedsfunktioner for normalfordelte stokastiske variable er $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$.

Så man kan aflæse, at $\underline{\underline{\sigma = 3}}$ og $\underline{\underline{\mu = 10}}$

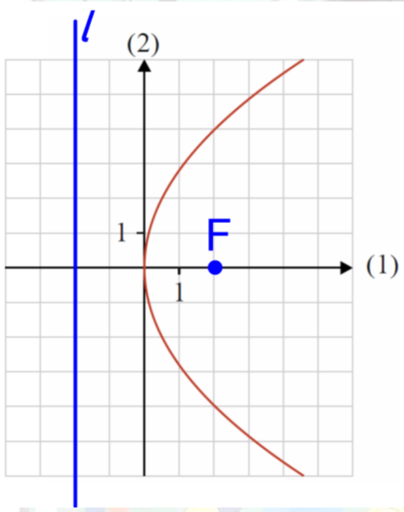
b) $P(7 \le x \le 13)$ angiver sandsynligheden for, at den stokastiske variabel antager en værdi i intervallet $[7,13]$, dvs. $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$, altså én spredning på hver side af middelværdien, og det er en standardværdi, så man ved, at $P(7 \le x \le 13) = \underline{\underline{68,3\%}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

24. maj 2023 Opgave 6: $y^2 = 8x$

a) Ifølge formel F(9) i indstiksarket, har parablen med ledelinjen givet ved $x = -\frac{1}{4}a$ ligningen $y^2 = a \cdot x$, og brændpunktet er placeret i $F\left(\frac{1}{4}a, 0\right)$.

Ud fra parablens ligning aflæses det, at $a = 8$, så ligningen for ledelinjen er $x = -\frac{1}{4} \cdot 8 = -2$, og brændpunktet er i $F\left(\frac{1}{4} \cdot 8, 0\right) = F(2,0)$.



24. maj 2023 Opgave 7: $f(t) = 2 \cdot \sin(3t) + 4$

a) For den harmoniske svingning $f(t) = A \cdot \sin(\omega t) + c$ er amplituden *A*, så $\underline{\underline{A = 2}}$

b) Sinusværdierne ligger i intervallet $[-1,1]$, så den mindste funktionsværdi er

$f_{\min} = 2 \cdot (-1) + 4 = -2 + 4 = 2$

Da den mindste funktionsværdi er 2, har ligningen $f(t) = 1$ ingen løsninger.

24. maj 2023 Opgave 8: $f(0) = 3 \qquad \int_0^4 f(x)\,dx = 24 \qquad f$ er lineær

a) Da *f* er lineær, og da skæringen med andenaksen er 3, har man:

$$\int_0^4 (a \cdot x + 3)\,dx = 24 \Leftrightarrow \left[\frac{1}{2}ax^2 + 3x\right]_0^4 = 24 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot 4^2 + 3 \cdot 4\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot 0^2 + 3 \cdot 0\right) = 24 \Leftrightarrow$$

$$(8a + 3 \cdot 4) - 0 = 24 \Leftrightarrow 8a = 24 - 12 \Leftrightarrow 8a = 12 \Leftrightarrow a = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

Dvs. at forskriften for *f* er $\underline{\underline{f(x) = \frac{3}{2}x + 3}}$

24. maj 2023: Delprøve 2

<u>24. maj 2023 Opgave 9:</u>

$f(x) := (2-x)\cdot e^{x}$:

a) Punktmængden M ligger i første kvadrant og dermed over førsteaksen, så arealet af M svarer til det bestemte integral med den nedre grænse 0 og den øvre grænse svarende til grafens skæring med førsteaksen. Denne skæring kan bestemmes med nulreglen:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow (2-x)\cdot e^{x}=0 \Leftrightarrow 2-x=0 \lor e^{x}=0 \Leftrightarrow x=2$$

$$A_M = \int_0^2 f(x)\,dx = -3+e^2 \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 4.389056099$$

Dvs. $\underline{\underline{A_M = e^2 - 3}}$

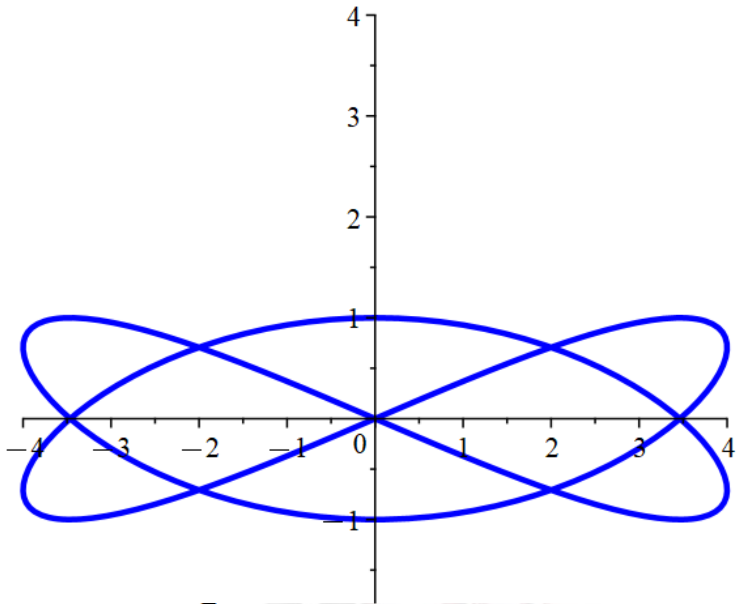
<u>24. maj 2023 Opgave 10:</u>

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 4\cdot\sin(2t) \\ \cos(3t) \end{pmatrix} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

a) Først lægges funktionen ind i Maple: $\vec{s}(t) := \langle 4\cdot\sin(2t), \cos(3t)\rangle$:

Banekurven tegnes, og det bemærkes, at $t \in [0, 2\pi]$:

$plot([\vec{s}(t)[1], \vec{s}(t)[2], t = 0..2\cdot\pi], view = [-4..4, -4..4], color = blue, thickness = 3)$



b) Hastighedsvektoren er differentialkvotienten i $\frac{\pi}{2}$:

$$\vec{v}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \vec{s}\,'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Dvs. $\underline{\underline{\vec{v}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}}}$

c) Der er flere måder at finde den spidse vinkel mellem hastighedsvektoren og vandret.

En retningsvektor svarende til vandret er $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, så man kan finde en vinkel mellem de to vektorer med $\cos(w) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

$\vec{v} := \langle -8, 3 \rangle : \vec{e} := \langle 1, 0 \rangle :$

$$Cos(w) = \frac{dotP(\vec{v}, \vec{e})}{len(\vec{v}) \cdot len(\vec{e})} \xrightarrow{\text{solve for } w} [[w = 159.4439548]]$$

Denne vinkel er stump, så den søgte spidse vinkel er supplementvinklen:

$v_{spids} = 180 - 159.4439548 = 20.5560452$

$$\underline{\underline{v_{spids} = 20.56°}}$$

Man kan også udnytte, at hældningen er $a = \dfrac{-3}{8}$

$v_{spids} = \tan^{-1}(|a|)$

$v_{spids} = arcTan\left(\left|-\frac{3}{8}\right|\right) = 20.55604522$

<u>*24. maj 2023 Opgave 11:*</u>

Da middelværdien er 8 kg og spredningen 0,07 kg, har man $\mu := 8 : \sigma := 0.07 :$

a) Exceptionelle udfald er de udfald, der ligger mere end tre spredninger fra middelværdien.

$\mu - 3 \cdot \sigma = 7.79$

Da sækken vejer 7,75 kg, og $7.75 < 7.79$, ligger udfaldet mere end tre spredninger fra middelværdien, **så vægten af denne sæk er et exceptionelt udfald.**

b) Tæthedsfunktionen for den pågældende normalfordeling er:

$$f(x) := \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} :$$

Så sandsynligheden for at få et udfald på 7,90 kg eller derover er:

$$P(X \geq 7.9) = \int_{7.9}^{\infty} f(x)\, dx = 0.9234362745$$

Da 0,92 > 0,90, **lever firmaet op til standarden, at mindst 90% af sækkene skal have en vægt på 7,90 kg eller derover.**

Man kan også finde sandsynligheden med Gym-pakkens *normalcdf*:

$with(Gym) :$

$1 - normalcdf(\mu, \sigma, 7.9) = 0.923436274490165$

24. maj 2023 Opgave 12:

Storaksen i modellen for The Ellipse er 322 meter, og lilleaksen er 275 meter.

Centrum er i $O(0,0)$, og dermed kan formlerne F(4) - F(6) i indstiksarket bruges.

a) I ligningen for ellipsen på normalform F(4) skal man bruge den halve

storakse $a := \frac{322}{2} = 161$ og den halve lilleakse $b := \frac{275.}{2} = 137.5000000$

Så en ligning er: $\frac{x^2}{161^2} + \frac{y^2}{137.5^2} = 1$ (evt. $\frac{x^2}{25921} + \frac{y^2}{18906.25} = 1$)

b) Koordinatsættene for brændpunkterne kan ifølge F(5) beregnes ved

$F_1\left(-\sqrt{a^2-b^2}, 0\right) = F_1(-83.75410438, 0)$ og

$F_2\left(\sqrt{a^2-b^2}, 0\right) = F_2(83.75410438, 0)$

Så afstanden mellem brændpunkterne er:

$|F_1F_2| = 83.75410438 - (-83.75410438) = 167.5082088$

Så modellens afstand mellem brændpunkterne passer med de oplyste 168 m

24. maj 2023 Opgave 13:

$$\frac{dm}{dt} = m\cdot\left(0.156 - 8.6\cdot 10^{-5}\cdot m\right)$$

t er kyllingens alder målt i døgn. $m(t)$ er kyllingens vægt målt i gram.

Modellen gælder de første 4 uger af kyllingens levetid.

Da kyllingen efter 10 døgn vejer 254 gram, har man $m(10) = 254$

a) Da man kender kyllingens vægt efter 10 døgn, kan man også finde dens væksthastighed ved at indsætte direkte i differentialligningen:

$$\frac{dm}{dt} = 254\cdot\left(0.156 - 8.6\cdot 10^{-5}\cdot 254\right) = 34.07562400$$

Dvs. **efter 10 døgn vokser kyllingens vægt med 34 gram i døgnet.**

b) Den partikulære løsning svarende til den oplyste vægt efter 10 døgn bestemmes:

$$m'(t) = m(t)\cdot\left(0.156 - 8.6\cdot 10^{-5}\cdot m(t)\right),\ m(10) = 254 \xrightarrow{\text{solve DE}}$$

$$m(t) = \frac{9906000}{5461 + 33539\, e^{-\frac{39\,t}{250}}\, e^{\frac{39}{25}}}$$

Man kan godt benytte dette som forskrift, men da det er logistisk vækst, kan det være en fordel at have forskriften på en form, hvor første led i nævneren er 1:

$$\frac{9906000}{5461.} = 1813.953488$$

$$\frac{33539\cdot e^{\frac{39.}{25}}}{5461.} = 29.22653465$$

Dvs. $m(t) = \frac{1813.953488}{1 + 29.22653465\cdot e^{-\frac{39}{250}\cdot t}}$

c) Hvis man benytter forskriften, der fremkom ved Maples løsning af differentialligningen, kan man finde lokale ekstremumssteder **for væksthastigheden** ved hjælp af anden og tredje afledede:

$$m(t) := \frac{9906000.}{5461 + 33539\,\mathrm{e}^{-\frac{39\,t}{250.}}\,\mathrm{e}^{\frac{39.}{25}}} :$$

$$m''(t) = 0. \xrightarrow{\text{solve}} \{t = 21.63510909\}$$

Med fortegnet for tredje afledede undersøges typen af punkt:

$m'''(21.63510909) = -0.860815255 < 0$, dvs. lokalt maksimumssted.

Væksthastigheden er altså størst, når kyllingen er 21,6 døgn gammel

Hvis man har omregnet forskriften til formen med 1 i første led i nævneren, kan man se, at den øvre grænse er 1813,953488, og da det er logistisk vækst, ved man, at den højeste væksthastighed antages på det tidspunkt, hvor vægten af kyllingen er halvdelen af den øvre grænse:

$$\frac{1813}{2} = \frac{1813.953488}{1 + 29.22653465\cdot\mathrm{e}^{-\frac{39}{250}\cdot t}} \xrightarrow{\text{solve}} \{t = 21.62837010\}$$

24. maj 2023 Opgave 14:

$$f(x, y) := \mathrm{e}^{1 - (x^2 - 1)^2 - y^2} :$$

Det oplyses, at der er tre stationære punkter *A, B* og *C*.

a) Stationære punkter er de punkter, hvor gradienten er nulvektoren:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y)) = 0., \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y)) = 0. \xrightarrow{\text{solve}}$$

$$\{x = 0., y = 0.\}, \{x = 1., y = 0.\}, \{x = -1., y = 0.\}$$

De tilsvarende funktionsværdier bestemmes:

$f(0, 0) = 1$

$f(1, 0) = \mathrm{e}$

$f(-1, 0) = \mathrm{e}$

På figuren ses det, at *A* har den mindste *x*-værdi og *B* den største, dvs.

$$\underline{\underline{A(-1, 0, \mathrm{e}) \ , B(1, 0, \mathrm{e}) \ \text{og} \ C(0, 0, 1)}}$$

b) Snitkurven er et snit med planen givet ved ligningen $y = 0$, så forskriften for snitkurven er:

$g(x) := f(x, 0) = x \to f(x, 0)$

$g(x) = \mathrm{e}^{1 - (x^2 - 1)^2}$

Så kan længden bestemmes med buelængdeformlen, hvor grænserne er førstekoordinaterne til punkterne *A* og *B*:

$$\int_{-1}^{1.} \sqrt{1. + (g'(x))^2}\, dx = 4.142057434$$

Dvs. at **længden af snitkurven fra *A* til *B* er 4,142**

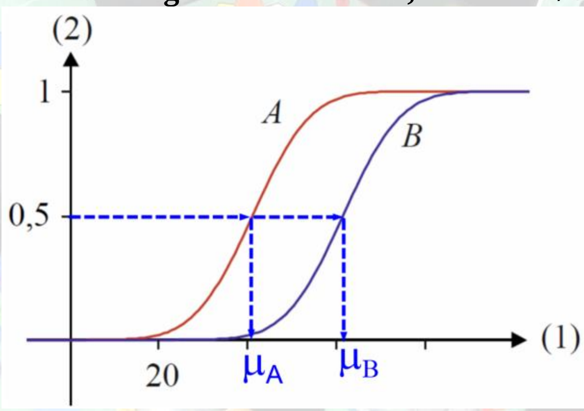
10. august 2023: Delprøve 1

10. august 2023 Opgave 1: $f(x) = 3 \cdot \sin(4x+5)$

a) Når den harmoniske svingning er angivet som $f(x) = A \cdot \sin(k \cdot x + \varphi)$, er amplituden *A*, mens perioden *T* er $T = \frac{2\pi}{k}$.

Dvs. $\underline{\underline{A = 3}}$ og $T = \frac{2\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$

10. august 2023 Opgave 2: Da det er normalfordelinger, er middelværdierne sammenfaldende med medianerne, og derfor kan middelværdierne aflæses ved at gå vandret ind fra 0,5 på andenaksen og derfra fra graferne lodret ned til førsteaksen. Så det er **normalfordelingen svarende til B, der har størst middelværdi.**



10. august 2023 Opgave 3: $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 2t + 3 \\ -t^3 + 8 \end{pmatrix}$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Hastighedsvektoren findes ved at differentiere koordinatvis, og i hver koordinat anvendes ledvis differentiation:

$$\vec{s}\,'(t) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2t - 2 \\ -3t^2 \end{pmatrix}}}$$

b) To egentlige vektorer står vinkelret på hinanden, netop når prikproduktet er 0 (og hastighedsvektoren er en egentlig vektor, da ingen *t*-værdier giver nulvektoren):

$$\vec{s}\,'(t) \perp \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{s}\,'(t) \bullet \vec{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2t - 2 \\ -3t^2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6 \cdot (2t-2) + 1 \cdot (-3t^2) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$12t - 12 - 3t^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 4t + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t-2)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{t = 2}}$$

10. august 2023 Opgave 4: $f(x) = x^3 \cdot \cos(x)$

a) Den afledede funktion bestemmes ved produktreglen:

$$f\,'(x) = 3x^2 \cdot \cos(x) + x^3 \cdot (-\sin(x)) = \underline{\underline{x^2 \cdot (3\cos(x) - x \cdot \sin(x))}}$$

10. august 2023 Opgave 5: $\begin{matrix} 3x-y=2 \\ 4x+2y=16 \end{matrix}$

a) Ligningssystemet løses ved at forlænge den øverste ligning med 2, hvorefter man kan få leddene med y til at forsvinde ved at lægge ligningerne sammen.

$$\left.\begin{matrix} 3x-y=2 \\ 4x+2y=16 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 6x-2y=4 \\ 4x+2y=16 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (6x-2y)+(4x+2y)=4+16 \quad \Leftrightarrow \quad 10x=20 \quad \Leftrightarrow \quad x=2$$

Denne værdi indsættes i den øverste ligning for at finde y-værdien:

$3\cdot 2-y=2 \quad \Leftrightarrow \quad 6-y=2 \quad \Leftrightarrow \quad y=4$

Dvs. $\underline{\underline{(x,y)=(2,4)}}$

10. august 2023 Opgave 6: $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{81}=1$

a) Når ellipsen er på formen $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, er a den halve storakse og b den halve lilleakse, og da både a og b er positive, har man altså $a=13$ og $b=9$, dvs. **storaksen er 26 og lilleaksen er 18.**

b) Arealet af en ellipse er $A=\pi\cdot a\cdot b=\pi\cdot 13\cdot 9=\underline{\underline{117\pi}}$

10. august 2023 Opgave 7: $A_{M_1}=0{,}625 \quad A_{M_2}=4$

a) Da området M_1 ligger under førsteaksen, skal arealet regnes negativt, når det indgår i udregningen af det bestemte integral, så man har:

$$\int_1^4 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx=-A_{M_1}+A_{M_2}=-0{,}625+4=\underline{\underline{3{,}375}}$$

10. august 2023 Opgave 8: $y'=x+y+5 \qquad P(0,1)$

a) Man mangler at finde hældningen for tangenten til grafen i P for den funktion, der er løsning til differentialligningen, og hvis graf går gennem P. Denne hældning findes ved at indsætte punktets koordinater i differentialligningen:

$y'=0+1+5=6$

Dvs. linjeelementet i punktet er $\underline{\underline{(0,1;6)}}$

b) $f(x)=7e^x-x-6$

Det undersøges, om f er en løsning til differentialligningen, ved at indsætte funktionsudtrykkene for f og den afledede til f i differentialligningen og se, om man får en identitet.

$f'(x)=7e^x-1$

Indsættelse i differentialligningen:

$7e^x-1=x+7e^x-x-6+5 \quad \Leftrightarrow$

$7e^x-1=7e^x+x-x-6+5 \quad \Leftrightarrow$

$7e^x-1=7e^x-1$

Da dette er en identitet, **er f en løsning til differentialligningen.**

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>10. august 2023 Opgave 9:</u> $f(x) = 2x - 6$ $\qquad l : y = 1$

a) Først bestemmes ved ledvis integration den form, alle stamfunktioner er på:

$F_k(x) = x^2 - 6x + k$

Det er oplyst, at linjen *l* skal være tangent til grafen for *F*, og da *l* er en vandret linje (dvs. hældningen er 0), skal den afledede funktion af *F* have værdien 0 i røringspunktet:

$F'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$

Dvs. førstekoordinaten for røringspunktet er 3, og andenkoordinaten er 1, da linjen *l* har ligningen $y = 1$.

Altså skal grafen for stamfunktionen *F* gå gennem punktet $(3,1)$:

$F(3) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 3^2 - 6 \cdot 3 + k \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 9 - 18 + k \quad \Leftrightarrow \quad k = 10$

Så den søgte stamfunktion er: $\underline{\underline{F(x) = x^2 - 6x + 10}}$

10. august 2023: Delprøve 2

10. august 2023 Opgave 10:

$with(Gym):$

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} -t^3 - t^2 + 2t + 5 \\ 2t^2 - 8 \end{pmatrix}$$

a) Vektorfunktionens forskrift lægges ind i Maple:

$\vec{s}(t) := \langle -t^3 - t^2 + 2t + 5, 2t^2 - 8 \rangle :$

Så kan funktionsbilledet bestemmes:

$$\vec{s}(3) = \begin{bmatrix} -25 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Dvs. $\underline{\underline{\vec{s}(3) = \begin{pmatrix} -25 \\ 10 \end{pmatrix}}}$

b) Andenaksen skæres i de punkter, hvor førstekoordinaten er 0:

$solve(\vec{s}(t)[1] = 0., t)$

$$1.757278921, -1.378639461 + 0.9719369148\,I, -1.378639461 - 0.9719369148\,I$$

De komplekse løsninger forkastes, dvs. $t = 1.757278921$

Koordinatsættet for det pågældende punkt P er så:

$$\vec{s}(1.757278921) = \begin{bmatrix} 5. \times 10^{-9} \\ -1.823941588 \end{bmatrix}$$

Dvs. $\underline{\underline{P(0, -1.82394)}}$

10. august 2023 Opgave 11:

Tabellen over agurkernes længde x (målt i cm) og vægt $f(x)$ (målt i g) hentes med Tools-Assistants-Import Data (henter A2:B34).

$$M := \begin{bmatrix} 23. & 242. \\ 24. & 245. \\ 24. & 250. \\ 24. & 247. \\ 25. & 259. \\ 25. & 255. \\ 26. & 268. \\ 26. & 266. \\ 26. & 258. \\ 27. & 273. \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

33 × 2 Matrix

Modellen er på formen $f(x) = a \cdot x + b$, så der skal anvendes lineær regression:

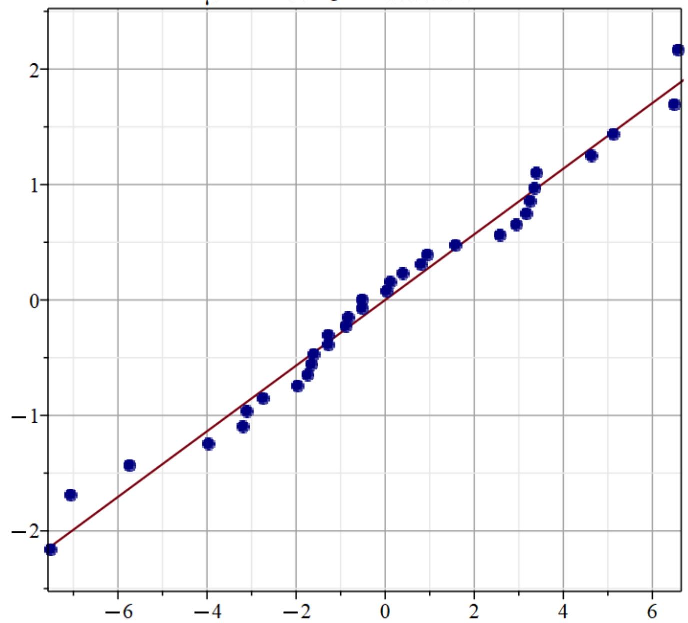
$f(x) := LinReg(M, x)$:

$f(x) = 9.22791784939054\, x + 25.1245616964437$

Dvs. $\underline{\underline{a = 9.228 \text{ og } b = 25.125}}$

b) Man undersøger, om residualerne er normalfordelte, ved at lave et QQ-plot over residualerne:

$residualQQplot(M, f)$



Da punkterne med god tilnærmelse danner en ret linje, **er residualerne normalfordelte.**

10. august 2023 Opgave 12:

restart

with(Gym) :

$y' = y - \frac{1}{2} \cdot x^3 \qquad P\left(0, \frac{1}{2}\right)$

a) Den partikulære løsning til differentialligningen bestemmes:

$$y'(x) = y(x) - \frac{1}{2} \cdot x^3,\ y(0) = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{solve DE}} y(x) = \frac{3\,x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + 3\,x + 3 - \frac{5\,e^x}{2}$$

Dvs. $\underline{\underline{f(x) = \frac{3\,x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + 3\,x + 3 - \frac{5\,e^x}{2}}}$

b) Maksimum for funktionen f bestemmes ved først at finde de steder, hvor grafen har vandret tangent:

$f(x) := \frac{3\,x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + 3\,x + 3 - \frac{5\,e^x}{2}$:

$f'(x) = 0. \xrightarrow{\text{solve}}$

$\{x = 1.400680201\}, \{x = -0.5575881875 + 0.6684140427\,\mathrm{I}\}, \{x = -0.5575881875 - 0.6684140427\,\mathrm{I}\}$

De to komplekse løsninger forkastes, og ved at se på fortegnet for den anden afledede afgøres det, om der er tale om et minimums- eller maksimumssted.

$f''(1.400680201) = -2.942857537 < 0$, dvs. det er et maksimumssted.

Maksimum er det samme som maksimums**værdien**, så funktionsværdien det pågældende sted bestemmes:

$f(1.400680201) = 1.37400076$

Dvs. $\underline{\underline{f_{max} = 1.374}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

10. august 2023 Opgave 13:

$y^2 = 20 \cdot x$

a) I indstiksarket til formelsamlingen kan man i formlerne F(9) og F(10) se ligning for ledelinje og koordinatsæt for brændpunkt, når parablen er på formen $y^2 = a \cdot x$.

Da brændpunktet er $F\left(\frac{1}{4}a, 0\right)$ og $a = 20$, har man $\underline{\underline{F(5, 0)}}$

Da ligningen for ledelinjen er $x = -\frac{1}{4}a$, har man $\underline{\underline{x = -5}}$

b) Formlen F(11) giver ligningen for tangenten i punktet (x_0, y_0): $y \cdot y_0 = \frac{1}{2}a(x + x_0)$.

Da punktet er $P(5, 10)$, har man: $y \cdot 10 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot (x + 5) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = x + 5}}$

10. august 2023 Opgave 14:

$f(x, y) := 9 - 0.3 \cdot x + 0.03 \cdot x^2 - 0.04 \cdot y^2$:

Funktionsværdien angiver højden af kirkens tag over *xy*-planen målt i meter.

Korset er placeret i punktet $A(-0.5, 0, f(-0.5, 0))$

Tagets højeste punkt er $B(20.5, 0, f(20.5, 0))$

a) Tredjekoordinaterne for de to punkter bestemmes:

$f(-0.5, 0) = 9.1575$

$f(20.5, 0) = 15.4575$

$\underline{\underline{A(-0.5, 0, 9.1575) \text{ og } B(20.5, 0, 15.4575)}}$

b) Det undersøges, om funktionen har stationære punkter, ved at se, om der er punkter, hvor gradienten er nulvektoren:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y)) = 0, \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y)) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 5., y = 0.\}$$

Der er altså et enkelt stationært punkt, og arten af dette bestemmes ved at finde fortegnet for determinanten af Hesse-matricen i punktet $(5, 0)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(f(x, y)) \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2}(f(x, y)) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(f(x, y))\right)^2 \xrightarrow{\text{evaluate at point}} -0.0048$$

Da $det(H) < 0$, **er det stationære punkt et saddelpunkt.**

c) Snitkurven for *f* i *x*-retningen, når $y = 0$, kan beskrives som en funktion af én variabel:

$g(x) := f(x, 0) = x \rightarrow f(x, 0)$

$g(x) = 9. - 0.3\,x + 0.03\,x^2$

Førstekoordinaterne for henholdsvis *A* og *B* er -0.5 og 20.5, og de fungerer som nedre og øvre grænse i det bestemte integral, der bruges til at beregne kurvelængden:

$$l_{kurve} = \int_{-0.5}^{20.5} \sqrt{1 + (g'(x))^2}\, dx = 23.10675935$$

Dvs. $\underline{\underline{l_{kurve} = 23.1 \text{ meter}}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>10. august 2023 Opgave 15:</u>

$f(x) := k \cdot x - x^2 : \quad k > 0$

a) Ved at faktorisere polynomiet $k \cdot x - x^2 = x \cdot (k - x)$ kan man se, at nulpunkterne for funktionen er 0 og k, og da grafen er en parabel med grenene pegende nedad (negativ koefficient i andengradsleddet), ligger punktmængden M i første kvadrant, og arealet kan altså bestemmes som det bestemte integral med nedre grænse 0 og øvre grænse k.

Så når $k = 2$ har man:

$$A_M = \int_0^2 (2 \cdot x - x^2)\, dx = \frac{4}{3}$$

Dvs. $\underline{\underline{A_M = \frac{4}{3}}}$

b) Når arealet af punktmængden skal være 20, har man:

$$\int_0^k (k \cdot x - x^2)\, dx = 20. \xrightarrow{\text{solve for } k}$$

$[[k = 4.932424149], [k = -2.466212074 + 4.271604615\,I], [k = -2.466212074 - 4.271604615\,I]]$

De komplekse løsninger forkastes, dvs. $\underline{\underline{k = 4.932}}$

6. december 2023: Delprøve 1

<u>*6. december 2023 opgave 1*</u>: $f(x,y) = 2x^4 \cdot y + 7x - y$

a) Funktionsværdien bestemmes ved indsættelse i forskriften:
$f(1,-3) = 2 \cdot 1^4 \cdot (-3) + 7 \cdot 1 - (-3) = -6 + 7 + 3 = \underline{\underline{4}}$

b) Den partielt afledede efter x bestemmes ved at differentiere ledvist og betragte y som en konstant:
$$f'_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2 \cdot 4x^3 \cdot y + 7 - 0 = \underline{\underline{8x^3 \cdot y + 7}}$$

<u>*6. december 2023 opgave 2:*</u> $f(t) = 4{,}2 \cdot \sin(0{,}262 \cdot t + 3{,}5) + 22{,}7 \quad ; \quad 0 \le t \le 24$

a) f angiver temperaturen målt i grader celsius, og t er tiden målt i timer efter midnat.
Sinusværdierne ligger i intervallet [-1,1], og som det fremgår af figuren, når funktionen både at antage sin maksimale og minimale værdi med den angivne definitionsmængde. Dette ses også ud fra forskriften, da $0{,}262 \cdot 24 = 6{,}288 \approx 2\pi$, dvs. man kommer én hel gang rundt på enhedscirklen ud fra et givet startpunkt.

$f_{\max} = 4{,}2 \cdot 1 + 22{,}7 = 26{,}9$

$f_{\min} = 4{,}2 \cdot (-1) + 22{,}7 = 18{,}5$

Dvs. i dette døgn var den højeste og laveste temperatur i Lissabon henholdsvis 26,9°C og 18,5°C.

<u>*6. december 2023 opgave 3:*</u> $y' = 28 - 7 \cdot y \qquad P(0,2)$

a) P's koordinater (i dette tilfælde er det kun andenkoordinaten, der indgår) indsættes i differentialligningen for at bestemme hældningen for tangenten til grafen for løsningen f i punktet P:
$a_{\text{tangent}} = y' = 28 - 7 \cdot 2 = 28 - 14 = \underline{\underline{14}}$

b) Det er en standarddifferentialligning af typen $y' = b - a \cdot y$ (nr. 177 i formelsamlingen) med den fuldstændige løsning $y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$, så den fuldstændige løsning til den angivne differentialligning er:
$$f(x) = \frac{28}{7} + c \cdot e^{-7 \cdot x} = 4 + c \cdot e^{-7x}$$
Konstanten c bestemmes ved at indsætte punktet P's koordinater i funktionsforskriften:
$$2 = 4 + c \cdot e^{-7 \cdot 0} \quad \Leftrightarrow \quad -2 = c \cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad c = -2$$
Dvs. forskriften for f er:
$$\underline{\underline{f(x) = 4 - 2 \cdot e^{-7x}}}$$

<u>*6. december 2023 opgave 4:*</u>

a) Udtrykket reduceres ved først at benytte første kvadratsætning i tælleren og derefter forkorte brøken med a (samtlige led divideres med a):
$$\frac{(a+b)^2 - b^2}{a} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab - b^2}{a} = \frac{a^2 + 2ab}{a} = \underline{\underline{a + 2b}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>*6. december 2023 opgave 5:*</u> $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^3+t^2+4t+5 \\ \frac{1}{3}t^3-2t^2+3t+4 \end{pmatrix}$

a) Hastighedsvektoren bestemmes ved at differentiere koordinatvis (og ledvist i hver koordinat):

$$\vec{v}(t)=\vec{s}\,'(t)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cdot 3t^2+2t+4 \\ \frac{1}{3}\cdot 3t^2-2\cdot 2t+3 \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t^2+2t+4 \\ t^2-4t+3 \end{pmatrix}}}$$

b) Der er vandret tangent, når hastighedsvektorens andenkoordinat er 0 (og førstekoordinaten ikke er 0, dvs. det må ikke være nulvektoren), så man får en andengradsligning, der løses ved at faktorisere og anvende nulreglen: $t^2-4t+3=0 \Leftrightarrow (t-1)\cdot(t-3)=0 \Leftrightarrow t-1=0 \vee t-3=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{t=1 \vee t=3}}$

<u>*6. december 2023 opgave 6:*</u> $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-20}{2}\right)^2}$; $g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 4}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-20}{4}\right)^2}$; $h(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-10}{2}\right)^2}$

a) Tæthedsfunktionen for en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdien μ og spredningen σ er

$$n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Så for de tre angivne funktioner kan man i forskrifterne aflæse:

$$\sigma_f=2\ ;\ \mu_f=20$$
$$\sigma_g=4\ ;\ \mu_g=20$$
$$\sigma_h=2\ ;\ \mu_h=10$$

For graferne kan man aflæse middelværdierne som førstekoordinaten for maksimumspunkterne, dvs. grafen for *B* viser, at den søgte funktion skal have middelværdien 20, dvs. det er *f* eller *g*.
Graferne for *A* og *B* er lige høje og dermed også lige smalle, så graferne *A* og *B* svarer til funktioner med samme spredning, dvs. det må være *f* og *h*.
Altså må grafen *B* svare til funktionen *f*.

<u>*6. december 2023 opgave 7:*</u> $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Dette er normalformen for en ellipse med centrum i (0,0).

a) I ligningen aflæses den halve storakse *a* og den halve lilleakse *b* til $a=5$ og $b=4$.

I formel F(5) i indstiksarket til formelsamlingen er brændpunkterne angivet til $F_{2,1}\left(\pm\sqrt{a^2-b^2},0\right)$.

$\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$

Dvs. koordinatsættene til brændpunkterne er $(-3,0)$ og $(3,0)$

b) I formel F(6) er angivet ligningen for tangenten i $P(x_0,y_0)$: $\frac{x_0\cdot x}{a^2}+\frac{y_0\cdot y}{b^2}=1$

Da $P\left(4,\frac{12}{5}\right)$ har man: $\frac{4\cdot x}{25}+\frac{\frac{12}{5}\cdot y}{16}=1 \Leftrightarrow \frac{4x}{25}+\frac{3y}{5\cdot 4}=1 \Leftrightarrow \underline{\underline{16x+15y=100}}$

6. december 2023 opgave 8: $\int x\cdot\cos\left(x^2+1\right)dx$

a) Det bemærkes, at integranden indeholder en sammensat funktion, og det ubestemte integral bestemmes så ved substitutionsmetoden, hvor den indre funktion i den sammensatte funktion sættes til t:

$t=x^2+1$

$\frac{dt}{dx}=2x$

$\frac{1}{2}dt=x\cdot dx$

Dermed er:

$$\int x\cdot\cos\left(x^2+1\right)dx=\int\frac{1}{2}\cdot\cos(t)\,dt=\frac{1}{2}\cdot\sin(t)+k=\underline{\underline{\frac{1}{2}\cdot\sin\left(x^2+1\right)+k}}$$

6. december 2023: Delprøve 2

6. december 2023 opgave 9:

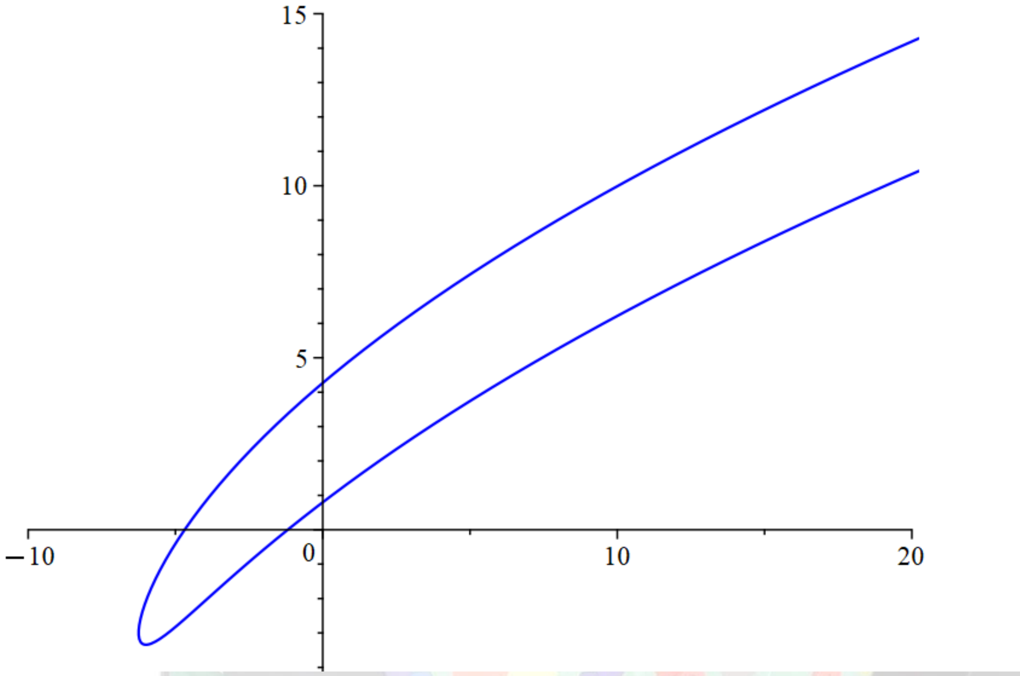
$with(Gym):$

Forskriften for vektorfunktionen er: $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + t - 6 \\ 4 \cdot \sqrt{t^2 + 2} - 9 \end{pmatrix}$

a) Banekurven tegnes med Gym-pakkens *vektorPlot* :

$s(t) := \langle t^2 + t - 6, 4 \cdot \sqrt{t^2 + 2} - 9 \rangle :$

$vektorPlot(s(t), t = -10..10, vindue = [-10..20, -5..15], farve = \text{"blue"})$



b) Førsteaksen skæres, når andenkoordinaten er 0, så t-værdierne svarende til skæringspunkterne findes ved:

$solve(s(t)[2] = 0, t) = \frac{7}{4}, -\frac{7}{4}$

Koordinatsættene til disse punkter er:

$$s\left(\frac{7}{4}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{19}{16} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$s\left(-\frac{7}{4}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{75}{16} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dvs. koordinatsættene for skæringspunkterne er $\underline{\underline{\left(-\frac{19}{16}, 0\right) \text{ og } \left(-\frac{75}{16}, 0\right)}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

6. december 2023 opgave 10:

Tykkelsen af isen h (målt i mm) til tidspunktet t (målt i timer efter den første måling af isens tykkelse) kan beskrives ved:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{93.5}{h}$$

Når $t = 0$ er tykkelsen 74 mm, dvs. $h(0) = 74$

a) Da man kender isens tykkelse til tidspunktet $t = 0$, kan man bestemme væksthastigheden ved indsættelse i differentialligningen:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{93.5}{74} = 1.263513514$$

Dvs. væksthastigheden for isens tykkelse til tidspunktet $t = 0$ er **1,26 mm pr. time**

b) Den partikulære løsning til differentialligningen svarende til starttykkelsen 74 mm bestemmes:

$$h'(t) = \frac{93.5}{h(t)},\ h(0) = 74 \xrightarrow{\text{solve DE}} h(t) = \sqrt{187\,t + 5476}$$

$\underline{\underline{h(t) = \sqrt{187 \cdot t + 5476}}}$

c) $h(t) := \sqrt{187 \cdot t + 5476}$:

Det bestemmes, hvornår tykkelsen er 150 mm, dvs. $h(t) = 150$.

$$h(t) = 150. \xrightarrow{\text{solve for } t} [[t = 91.03743316]]$$

Dvs. at **91 timer efter den første måling af isens tykkelse er den sikker at skøjte på.**

6. december 2023 opgave 11:

$f(x) := -x^3 + 3\,x^2 + x - 3 : g(x) := 0.75\,x + 0.75 :$

a) Førstekoordinaterne til skæringspunkterne mellem graferne bestemmes:

$$f(x) = g(x) \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 1.500000000\}, \{x = 2.500000000\}, \{x = -1.\}$$

Da det er et førstegradspolynomium og et tredjegradspolynomium, kan der højst være 3 skæringspunkter, så alle skæringspunkter er fundet. De tilsvarende andenkoordinater kan bestemmes ved at indsætte førstekoordinaterne i enten f eller g (her benyttes f).

$f(-1) = 0$

$f(1.5) = 1.875$

$f(2.5) = 2.625$

Dvs. at koordinatsættene til skæringspunkterne er $\mathbf{(-1, 0)}$ **,** $\mathbf{(1.5, 1.875)}$ **og** $\mathbf{(2.5, 2.625)}$

b) Det fremgår af grafen, at det er grafen for f, der ligger øverst i det relevante interval $[1.5, 2.5]$, men det kan også tjekkes ved at udregne funktionsværdier i intervallet:

$f(2) = 3$

$g(2) = 2.25$

Så arealet er:

$$A_M = \int_{1.5}^{2.5} (f(x) - g(x))\,dx = 0.5000000000$$

Dvs. $\underline{\underline{A_M = 0.5}}$

c) Omkredsen af M bestemmes ved at udregne buelængderne af graferne for f og g i intervallet:

$$O_M = \int_{1.5}^{2.5} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx + \int_{1.5}^{2.5} \sqrt{1 + (g'(x))^2}\,dx = 3.266949143$$

Dvs. $\underline{\underline{O_M = 3.267}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

6. december 2023 opgave 12:

$y^2 = 81.6 \cdot x$ er ligningen for en parabel, der beskriver tværsnittet af et solkomfur. Enhed: cm.

a) Som det fremgår af formlerne F(9) og F(10) i indstiksarket til formelsamlingen, har man

$a = 81.6$ og dermed brændpunktet $F\left(\frac{1}{4} \cdot 81.6,\ 0\right) = F(20.40000000,\ 0)$

Dvs. $\underline{\underline{F(20.4\text{ cm}, 0)}}$

6. december 2023 opgave 13:

$f(x, y) := y^3 + x^2 + x \cdot y - 4\,y :$

a) Gradienten $\nabla f(1, 2)$ bestemmes med Evaluate at a Point og vælge $x = 1$ og $y = 2$.

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x}(f(x, y)),\ \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y)) \right\rangle \xrightarrow{\text{evaluate at point}} \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Det undersøges, om to egentlige vektorer er ortogonale, ved at se, om deres prikprodukt giver 0:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} = 4 \cdot 7 + 9 \cdot (-3) = 28 - 27 = 1 \neq 0$$

Da prikproduktet ikke er 0, **er vektorerne ikke ortogonale.**

6. december 2023 opgave 14:

Bilernes fart målt i km/t beskrives ved normalfordelt stokastisk variabel *X* med $\mu = 76.1$ og $\sigma = 7.2$

Fartgrænsen er 80 km/t.

$with(Gym) :$

a) Fordelingsfunktionen for normalfordelingen hedder *normalcdf* i Gym-pakken, så andelen af biler med **mindst** farten 80 km/t er:

$1 - normalcdf(76.1, 7.2, 80) = 0.2940240784$

Dvs. **29% af bilerne kører hurtigere end de tilladte 80 km/t**

b) For at bestemme farten for de 2% af bilerne, der kører hurtigst, benyttes igen fordelingsfunktionen. Da man ved, at 99,7% af udfaldene i en normalfordeling ligger inden for tre spredninger fra middelværdien, ved man, at den søgte værdi er mindre end 100 km/t:

$intervalsolve(1 - normalcdf(76.1, 7.2, x) = 0.02, x = 80 .. 100) = [90.88699218]$

Dvs. at **de 2% af bilerne, der kører hurtigst, kører mindst 91 km/t**

6. december 2023 opgave 15:

$f(x) := x^3 - 9\,x^2 + k \cdot x + 2 :$

a) *f* er en voksende funktion, når den afledede funktion af *f* ikke er negativ nogen steder.

$f'(x) = 3\,x^2 + k - 18\,x$

Dette er et andengradspolynomium med positiv *a*-værdi, dvs. grafen er en parabel med grenene opad. Funktionsværdien for den afledede funktion vil altså ikke blive negativ, hvis parablen ikke skærer førsteaksen, dvs. hvis diskriminanten for den tilsvarende andengradsligning ikke er positiv.

$d = b^2 - 4\,ac = (-18)^2 - 4 \cdot 3 \cdot k = 324 - 12\,k$

$solve(324 - 12\,k \leq 0, k) = [27, \infty)$

Dvs. $\underline{\underline{k \geq 27}}$