Løsninger til eksamensopgaver på B-niveau 2011-2012

18. maj 2011: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: $5x+11=19x-17 \Leftrightarrow 11+17=19x-5x \Leftrightarrow 28=14x \Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$

Opgave 2: $T^2-K^2+(T+K)^2-2KT=T^2-K^2+T^2+K^2+2KT-2KT=\underline{\underline{2T^2}}$

Parentesen er udregnet ved hjælp af den første kvadratsætning.

Opgave 3: Da de to trekanter er ensvinklede, er forholdene mellem ensliggende sider konstant. Hermed er:

$$\frac{|FH|}{|AC|}=\frac{|GH|}{|BC|} \Leftrightarrow |FH|=\frac{|GH|}{|BC|}\cdot|AC|$$

$$|FH|=\frac{18}{6}\cdot 8=3\cdot 8=\underline{\underline{24}}$$

Da trekanterne desuden er retvinklede, kan hypotenusen i den lille trekant bestemmes ved:

$$|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$$

$$|AB|=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=\underline{\underline{10}}$$

Opgave 4: Det er en andengradsligning:

$$x^2-7x+10=0$$

$$d=b^2-4ac=(-7)^2-4\cdot 1\cdot 10=49-40=\underline{\underline{9}}$$

Da *d* er positiv, har ligningen 2 løsninger

Opgave 5: $f(x)=4\cdot 0{,}5^x \quad g(x)=4\cdot 2^x$

Der er tale om eksponentielle udviklinger.
Da fremskrivningsfaktoren 0,5 er under 1 for funktionen *f*, er det en aftagende funktion, dvs. grafen A hører til funktionen *f*.

Da fremskrivningsfaktoren 2 er over 1 for funktionen *g*, er det en voksende funktion, dvs. grafen B hører til funktionen *g*.

Opgave 6: Det er oplyst, at $\int_0^5 f(x)dx=12{,}5$ og $\int_0^5 g(x)dx=7{,}5$

Da grafen for *f* i intervallet [0,5] er ikke-negativ, svarer $\int_0^5 f(x)dx$ til arealet mellem grafen, førsteaksen og linjen x=0 (normalt skulle der også være en linje x = 5, men da grafen skærer førsteaksen på dette sted, skal man ikke bruge sådan en linje).

Arealet af trekant ABC svarer til arealet mellem graferne i intervallet [0,5], så man har:

$$T_{ABC} = A_f - A_g = \int_0^5 f(x)dx - \int_0^5 g(x)dx = 12{,}5 - 7{,}5 = \underline{\underline{5}}$$

18. maj 2011: Delprøven MED hjælpemidler

<u>*Opgave 7:*</u> I trekant ABC kendes alle sidelængderne: $|BC| = 11, \quad |AC| = 22 \quad \text{og} \quad |AB| = 13$.

a) Da man kender alle sidelængderne, kan man kun bruge cosinusrelationer til at bestemme vinklerne:

$$\cos A = \frac{|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2}{2 \cdot |AB| \cdot |AC|}$$

$$A = \cos^{-1}\left(\frac{13^2 + 22^2 - 11^2}{2 \cdot 13 \cdot 22}\right) = 21{,}5542815764° = \underline{\underline{21{,}6°}}$$

b) Man vinkel A og de to hosliggende sider, så arealet kan bestemmes ved ½-appelsinformlen:

$$T = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin(21{,}5542815764°) = 52{,}5357021463 = \underline{\underline{52{,}5}}$$

c) I trekant ABD benyttes sinusrelationerne:

$$\frac{|BD|}{\sin(\angle BAD)} = \frac{|AB|}{\sin(\angle ADB)} \Leftrightarrow |BD| = \frac{|AB|}{\sin(\angle ADB)} \cdot \sin(\angle BAD)$$

$$|BD| = \frac{13}{\sin(120°)} \cdot \sin(21{,}55428°) = 5{,}5148185 = \underline{\underline{5{,}5}}$$

<u>*Opgave 8:*</u> $y = 273 \cdot x + 8245$ (y er de årlige udgifter målt i millioner kr. og x er antal år efter 1987).

a) År 1997 svarer til x = 10, hvilket indsættes i ligningen:
$y = 273 \cdot 10 + 8245 = 10975$
Dvs. at <u>de årlige udgifter til ressourcesvage grupper i 1997 er på 10,975 milliarder kr.</u>

b) Tallet 8245 fortæller, at <u>udgifterne til ressourcesvage grupper i 1987 var på 8245 mio. kr.</u>
Tallet 273 fortæller, at <u>udgifterne til ressourcesvage grupper ifølge modellen vokser med 273 mio. kr. om året fra 1987 og frem.</u>

Opgave 9: a) Lad *t* være antal år efter 2006.
Lad A være antallet af tvangsopløste selskaber om året.
På TI n'spire åbnes "Lister og regneark", og t-værdierne (0,1,2 og 3) indtastes i søjle A, mens A indtastes i søjle B.
Der trykkes på Menu-knappen og vælges 'statistik'→'stat-beregninger'→'A:Eksponentiel regression'.
X-liste: a[]
Y-liste: b[]
Resultatet gemmes som f1.
Dette giver modellen:

$$\underline{\underline{A(t) = 2155 \cdot 1,35214^t}}$$

b) År 2012 svarer til t = 6, så på lommeregneren indtastes: f1(6), der giver 13168,10876
Dvs. at ifølge modellen vil der i 2012 være 13168 tvangsopløste selskaber.

c) Da det er en eksponentielt voksende funktion, kan fordoblingskonstanten bestemmes:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1,35214)} = 2,298$$

Dvs. at det årlige antal tvangsopløste selskaber kan forventes at være fordoblet efter 2,3år

Dette kunne også være bestemt ved på lommeregneren at indtaste:
$solve\left(f1(k+x) = 2 \cdot f1(k), x\right)$, der giver x = 2,29756123051

Opgave 10: a) Tallene er allerede opstillet i rækkefølge, så da antallet af rosinpakker er 30, er medianen gennemsnittet af observationerne 15 og 16. Dvs. medianen er:

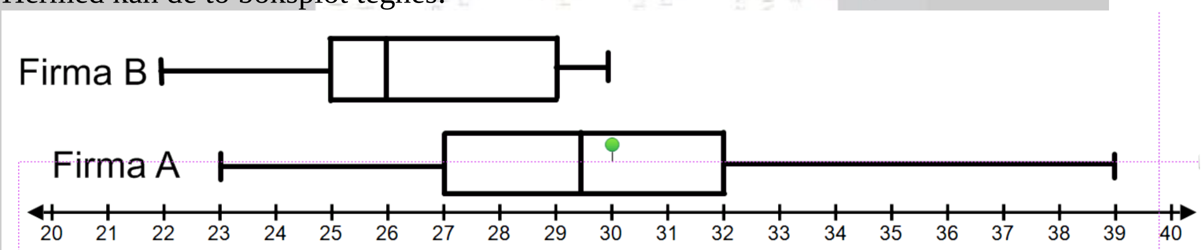
$$m = \frac{29+30}{2} = \underline{\underline{29,5}}$$

Medianen deler observationssættet i to lige store dele med 15 observationer i hver. I hver af disse findes kvartilen derfor som den 8. observation, dvs. hvis man betragter alle 30 observationer, vil den nedre kvartil være den 8. observation, mens den øvre kvartil vil være den 23. observation:

$$\text{Nedre kvartil} = \underline{\underline{27}}$$

$$\text{Øvre kvartil} = \underline{\underline{32}}$$

b) I det opgivne observationssæt har man mindste observation 23 og største observation 39.
Hermed kan de to boksplot tegnes:



Antallet af rosiner i pakkerne fra firma A kan variere mere end i pakkerne fra firma B, men oftest er der flere rosiner i en pakke fra firma A end i en pakke fra firma B (Halvdelen af pakkerne fra firma A indeholder flere rosiner end de 75% af pakkerne fra firma B, der

indeholder færrest rosiner). Halvdelen af pakkerne fra firma B indeholder højst 25 rosiner, mens 75% af pakkerne fra firma A indeholder mindst 27 rosiner.

Opgave 11: $\int_{0,5}^{2}\left(4\cdot\sqrt{x}+\frac{1}{x}+3^x\right)dx$

Det bestemte integral bestemmes ved indtastning på TI n'spire:

$$\int_{0.5}^{2}\left(4\cdot\sqrt{x}+\frac{1}{x}+3^x\right)dx \qquad 14.6015301043$$

På TI-89 er indtastningen $\int\left(4\cdot\sqrt{x}+\frac{1}{x}+3^x,x,0.5,2\right)$

Dvs. at $\int_{0,5}^{2}\left(4\cdot\sqrt{x}+\frac{1}{x}+3^x\right)dx=\underline{\underline{14,6015301043}}$

Opgave 12: $f(x)=18\cdot\ln(x)-x^2\ ,\ x>0 \qquad (1, f(1))$

a) På en skitse af grafen for *f* skal man kunne se maksimumspunktet og de to skæringspunkter:

b) Funktionen differentieres ledvist (evt. kan den differentieres på lommeregneren):

$$f'(x)=18\cdot\frac{1}{x}-2\cdot x=\underline{\underline{\frac{18}{x}-2x}}$$

En ligning for tangenten til grafen for *f* i punktet kan bestemmes på TI n'spire ved "tangentline", men det kan også udregnes i hånden ved at bestemme funktionsværdien og hældningen:

$$f(1)=18\cdot\ln(1)-1^2=18\cdot 0-1=0-1=-1$$

$$f'(1)=\frac{18}{1}-2\cdot 1=18-2=16$$

Tangentligningen: $y-(-1)=16\cdot(x-1) \Leftrightarrow \underline{\underline{y=16x-17}}$

c) For at bestemme monotoniforholdene bestemmes først nulpunkterne for den afledede funktion:

$$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}\left(18\cdot\ln(x)-x^2\right)=0,x\right)\Big|x>0 \qquad x=3$$

Man kan altså se, at man på grafen skitseret i a) har fået alle ekstremumspunkter med.
Da maksimumsstedet er x=3, kan man ved hjælp af grafen og funktionens definitionsmængde (x>0) se:
<u>Funktionen er voksende i]0,3] og aftagende i [3 , ∞[</u>

24. maj 2011: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: $f(x) = 3x - 7$

Funktionsværdien i 2 bestemmes ved at sætte 2 ind på *x*'s plads:

$$f(2) = 3\cdot 2 - 7 = 6 - 7 = \underline{\underline{-1}}$$

$$f(x) = 17 \Leftrightarrow$$
$$3x - 7 = 17 \Leftrightarrow$$
$$3x = 17 + 7 \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{24}{3} = \underline{\underline{8}}$$

Opgave 2: $f(x) = b \cdot a^x \quad P(0,8) \quad Q(3,64)$

Metode 1 (standardmetoden): For at bestemme konstanterne indsættes punkternes koordinater i funktionsforskriften:

$$\left.\begin{aligned} 64 &= b \cdot a^3 \\ 8 &= b \cdot a^0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{64}{8} = \frac{b \cdot a^3}{b \cdot a^0} \Leftrightarrow$$

$$8 = \frac{a^3}{a^0} \quad \Leftrightarrow \quad 8 = a^{3-0} \quad \Leftrightarrow \quad 8 = a^3 \quad \Leftrightarrow \quad a = \sqrt[3]{8} = \underline{\underline{2}}$$

Værdien for *a* indsættes i den nederste ligning for at finde *b*-værdien:

$$8 = b \cdot 2^0 \quad \Leftrightarrow \quad 8 = b \cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad b = \underline{\underline{8}}$$

Metode 2 (med formler):

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = \sqrt[3-0]{\frac{64}{8}} = \sqrt[3]{8} = \underline{\underline{2}}$$

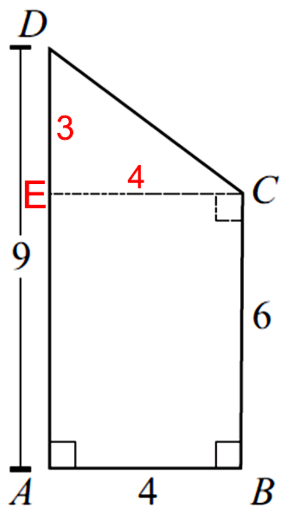
$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}} = \frac{8}{2^0} = \frac{8}{1} = \underline{\underline{8}}$$

Metode 3 (smarteste metode):
Konstanten *b* angiver begyndelsesværdien (grafens skæring med y-aksen), og da grafen går gennem (0,8), har man dermed, at $b = \underline{\underline{8}}$

Dette indsættes sammen med punktet Q's koordinater i forskriften for at bestemme a-værdien:

$$64 = 8 \cdot a^3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{64}{8} = a^3 \quad \Leftrightarrow \quad 8 = a^3 \quad a = \sqrt[3]{8} = \underline{\underline{2}}$$

Opgave 3: Punktet, hvor den stiplede linje fra C rammer siden DA kaldes E:



$$|DE| = |DA| - |CB| = 9 - 6 = 3$$

$$|EC| = |AB| = 4$$

Da figuren ABCE er et parallelogram (det er endda et rektangel eller endnu mere specifikt en aflang, men det er ikke relevant i denne sammenhæng), er siden AE lige så lang som CB og EC er lige så lang som AB.
Dermed gælder:

$$|DE| = |DA| - |EA| = |DA| - |CB| = 9 - 6 = 3$$

$$|EC| = |AB| = 4$$

Og da trekant CDE er retvinklet, kan man bruge Pythagoras til at finde længden af hypotenusen:

$$|CD|^2 = |CE|^2 + |DE|^2$$

$$|CD| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = \underline{\underline{5}}$$

Opgave 4: $x^2 - 3x + 2 = 0$

Det er en andengradsligning, der enten kan løses ved diskriminantmetoden eller ved faktorisering og nulreglen, hvor man skal finde to tal, hvis produkt er 2 og sum -3:

Nulreglen: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1 \vee x = 2}}$

Diskriminantmetoden: $d = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$ dvs. 2 løsninger

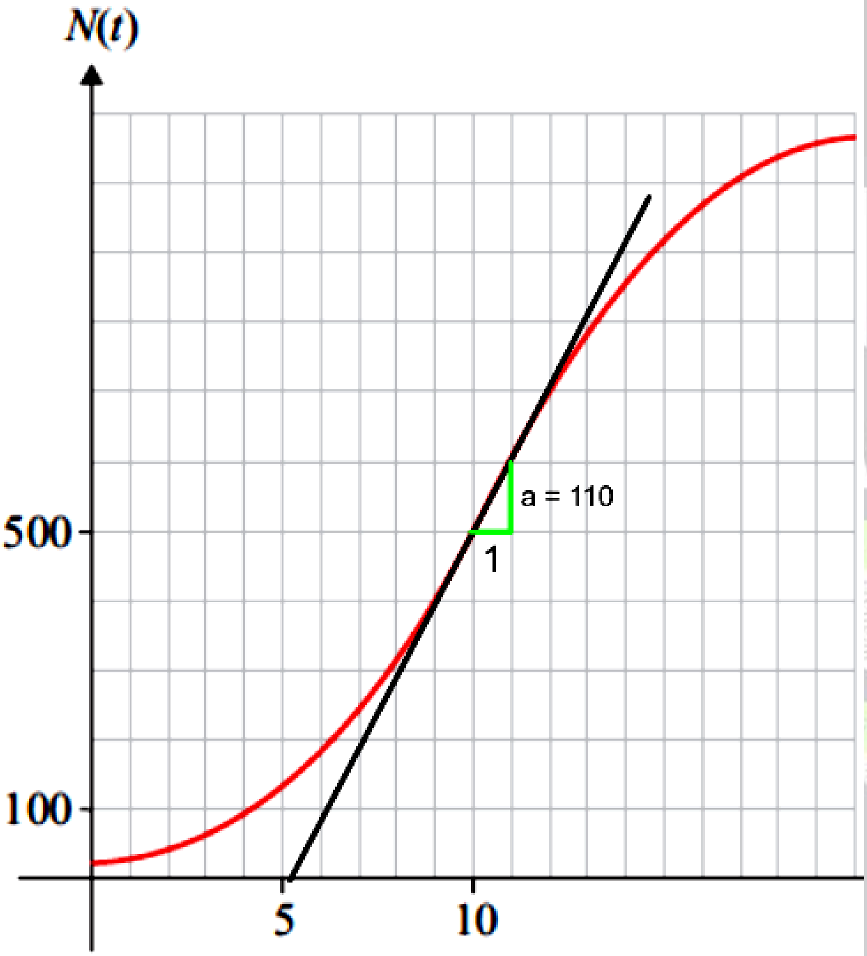
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2\cdot a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2\cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \quad dvs.\ \underline{\underline{x = 1 \vee x = 2}}$$

<u>*Opgave 5:*</u> $f(x) = 3 \cdot e^x + 5 \cdot x^7$

Funktionen differentieres ledvist:

$$f'(x) = 3 \cdot e^x + 5 \cdot 7 \cdot x^{7-1} = \underline{\underline{3e^x + 35x^6}}$$

<u>*Opgave 6:*</u> N'(10) er differentialkvotienten i t = 10, og den angiver hældningen for tangenten til grafen dette sted. Så først skal der efter bedste evne tegnes en tangent på figuren:



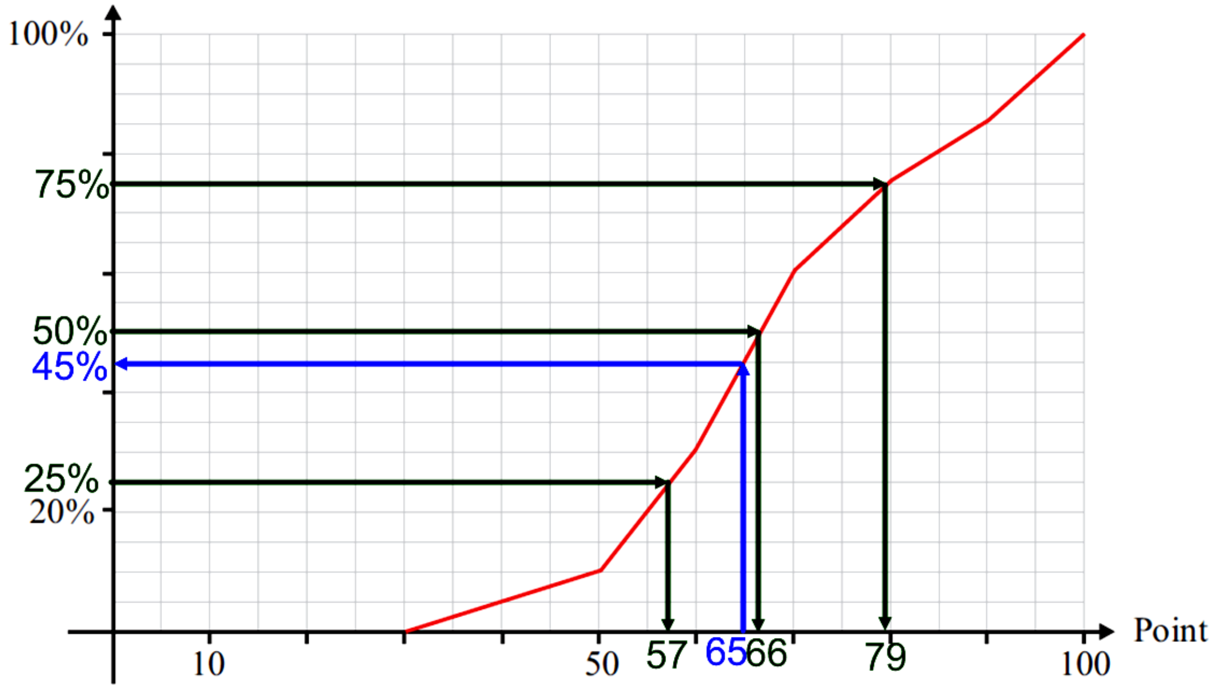
Hældningen for tangenten er aflæst ved at gå 1 enhed ud på førsteaksen, hvorefter hældningen kan aflæses til 110.

Dvs. $\underline{\underline{N'(10) = 110}}$, hvilket vil sige, at <u>efter 10 døgn vokser populationen med 110 individer pr. døgn.</u>

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

24. maj 2011: Delprøven MED hjælpemidler

Opgave 7: a) Kvartilsættet bestemmes ved at gå ind fra 25%, 50% og 75% (de grønne pile) og aflæse de tilsvarende pointtal:



Dvs. at kvartilsættet er (57,66,79)

Nedre kvartil: 57
Median: 66
Øvre kvartil: 79

b) Det aflæses på sumkurven (de blå pile), at 45% af eleverne har fået 65 point og derunder.
Dvs. at 55% af eleverne har fået over 65 point.

Opgave 8: a) Det er oplyst, at sammenhængen har formen $f(x) = b \cdot x^a$, dvs. det er en potensfunktion ganget med en konstant, og da man har mere end to sæt sammenhørende værdier, skal der altså laves potensregression:
På TI-nspire vælges ”Tilføj lister og regneark”, isoleringstykkelsen målt i mm indtastes i søjle A, mens det årlige varmetab målt i kWh/år indtastes i søjle B.
Der trykkes på ’menu’-knappen, hvor der vælges ’statistik’→’Stat-beregning’→ ’Potensregression’:
X-liste: a[]
Y-liste: b[]
Gem RegEqn i: f1
Lommeregneren anvender forskriften $f_1(x) = a \cdot x^b$ og giver a = 74418,473 og b = -0,623199, dvs. den har byttet om på a og b, og svaret er dermed:
$\underline{\underline{a = -0,623 \text{ og } b = 74418}}$

b) Hvis det årlige varmetab skal ned på 1700 kWh/år, skal f(x) = 1700. Da forskriften er gemt som f1, løses dette på lommeregneren ved at skrive:

solve(f1(x)=1700,x), og lommeregneren giver x = 430,08909.
<u>Dvs. isoleringen skal være på 430 mm for at det årlige varmetab kommer ned på 1700 kWh/år.</u>

<u>Opgave 9:</u> a) Lad *t* være antallet af år EFTER 2004 og lad *A(t)* være antallet af elever, der tog en studentereksamen på stx.
Så vil de 16259 være begyndelsesværdien og stigningen på 850 elever pr. år er hældningen, dvs. den lineære model bliver:

$$\underline{\underline{A(t) = 850 \cdot t + 16259}}$$

b) År 2008 svarer til *t=4*, dvs. antallet af elever, der tog en studentereksamen på stx i 2008 er:

$$A(4) = 850 \cdot 4 + 16259 = 3400 + 16259 = \underline{\underline{19659}}$$

c) Hvis modellen holder, kan man bestemme, hvornår antallet af elever er oppe på 25000 ved at løse ligningen:

$$A(t) = 25000$$
$$25000 = 850 \cdot t + 16259 \Leftrightarrow$$
$$25000 - 16259 = 850 \cdot t \Leftrightarrow$$
$$t = \frac{8741}{850} = 10,28$$

Dette svarer til år 2014,28, dvs. at
<u>i år 2015 er antallet af elever, der tager en studentereksamen på stx oppe på 25000.</u>

<u>Opgave 10:</u> De opgivne sidelængder i de retvinklede og ensvinklede trekanter CEF og GDF er:
$|CE| = 34$, $|CF| = 12$ og $|DG| = 26$.

a) Da trekant CEF er retvinklet, og man i forhold til vinkel C kender den hosliggende katete og hypotenusen, bestemmes vinkel C ved:

$$\cos(\angle ECF) = \frac{12}{34} \quad \Leftrightarrow \quad \angle ECF = \cos^{-1}\left(\frac{12}{34}\right) = 69,33268° = \underline{\underline{69,3°}}$$

b) Som nævnt er trekanterne CEF og GDF ensvinklede, og sidestykket FG er ensliggende med sidestykket CF, mens sidestykket DG er ensliggende med sidestykket CE. Dermed gælder:

$$\frac{|FG|}{|CF|} = \frac{|DG|}{|CE|} \quad \Leftrightarrow \quad |FG| = \frac{|DG|}{|CE|} \cdot |CF| = \frac{26}{34} \cdot 12 = \frac{26 \cdot 6}{17} = \frac{156}{\underline{\underline{17}}} = 9,2$$

Først bestemmes længden af sidestykket EF med Pythagoras, da trekant CEF er retvinklet:

$$|CE|^2 = |CF|^2 + |EF|^2 \quad \Leftrightarrow \quad |EF| = \sqrt{|CE|^2 - |CF|^2}$$
$$|EF| = \sqrt{34^2 - 12^2} = \sqrt{1012} \approx 31,8$$

Så kan længden af sidestykket EG bestemmes:

$$|EG| = |EF| - |FG| = \sqrt{1012} - \frac{156}{17} = 22{,}6354768529 = \underline{\underline{22{,}6}}$$

Opgave 11: $f(x) = x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36$.

a) For at løse ligningen f(x)=0, dvs. $0 = x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36$, indtastes på TI n'spire:

$$\text{solve}\left(x^4 + 2\cdot x^3 - 11\cdot x^2 - 12\cdot x + 36 = 0, x\right)$$
$$x = -3 \text{ or } x = 2$$

Dvs. løsningerne er $\underline{\underline{x = -3 \vee x = 2}}$

b) Ligningen for tangenten til grafen i P(1,f(1)) bestemmes ved indtastningen:

$$\text{tangentLine}\left(x^4 + 2\cdot x^3 - 11\cdot x^2 - 12\cdot x + 36, x, 1\right)$$
$$40 - 24\cdot x$$

Dvs. tangenten har ligningen $\underline{\underline{y = -24x + 40}}$

c) For at bestemme monotoniforholdene laves funktionsanalyse:
Først bestemmes den afledede funktion:
$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 22x - 12$
Nulpunkter for den afledede funktion bestemmes på TI n'spire:

$$\text{solve}\left(4\cdot x^3 + 6\cdot x^2 - 22\cdot x - 12 = 0, x\right)$$
$$x = -3 \text{ or } x = \frac{-1}{2} \text{ or } x = 2$$

Dvs. den afledede funktion har værdien 0, når $x = -3 \vee = -0{,}5 \vee x = 2$

Disse tre steder er den afledede funktion 0, og de bruges til i et fortegnsskema at opdele x-aksen i monotoniintervaller, hvor fortegnene for den afledede funktion i de enkelte intervaller er bestemt ved at tage værdien et (vilkårligt) sted i intervallet:

x		-3		-0,5		2	
f'(x)	-	0	+	0	-	0	+
f(x)	↘		↗		↘		↗

$f'(-4) = -84 < 0$

$f'(-1) = 12 > 0$

$f'(0) = -12 < 0$

$f'(3) = 84 > 0$

Dvs. at:
f er voksende i intervallerne [-3;-0,5] og [2,∞[
f er aftagende i intervallerne]-∞,-3] og [-0,5;2]

Opgave 12: $f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + 45$

a) Facadens højde svarer til y-værdien for parablens toppunkt. Da der ikke er noget førstegradsled (b-værdien er 0), er parablen symmetrisk omkring y-aksen, og toppunktets y-værdi er dermed skæringen med y-aksen, der er 45 (c-værdien).
Dvs. at facadens højde er 45m

Man kunne også have udregnet det ved at sætte ind i udtrykket for parablens toppunkt

$T\left(\frac{-b}{2a};\frac{-d}{4a}\right): \ -\frac{d}{4a} = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{0^2-4\cdot\left(-\frac{1}{20}\right)\cdot 45}{4\cdot\left(-\frac{1}{20}\right)} = 45$, eller man kunne have indtegnet en graf og fundet maksimumsværdien.

Facadens bredde svarer til afstanden mellem funktionens nulpunkter (skæringer med førsteaksen). Disse bestemmes:

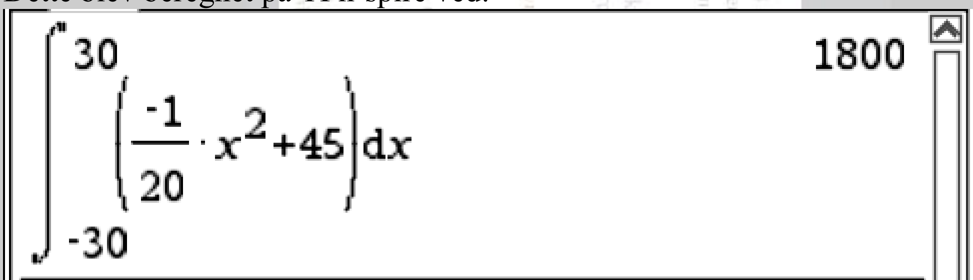
$$0 = -\frac{1}{20}x^2 + 45 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{20}x^2 = 45 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 20\cdot 45 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{900} = \pm 30$$

Dvs. facadens bredde er (30-(-30))m=60m

b) Facadens areal svarer til det bestemte integral af funktionen, hvor nulpunkterne er anvendt som grænser:

$$A_{facade} = \int_{-30}^{30} f(x)dx = \int_{-30}^{30}\left(-\frac{1}{20}x^2 + 45\right)dx = 1800$$

Dette blev beregnet på TI n'spire ved:



Dvs. facadens areal er 1800m^2

11. august 2011: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: $a^2+b^2-a(a+b)=a^2+b^2-a^2-ab=b^2-ab=\underline{\underline{b(b-a)}}$

Opgave 2: $f(x)=\dfrac{4}{x}+3x$

Funktionsværdien i 4 bestemmes ved indsættelse i forskriften:

$$f(4)=\frac{4}{4}+3\cdot 4=1+12=\underline{\underline{13}}$$

Opgave 3: Andengradsligningen løses på to forskellige måder:

Metode 1 (diskriminantmetoden):

$$x^2-4x+3=0$$

$$d=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3=16-12=4>0 \quad \text{dvs. 2 løsninger}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{d}}{2\cdot a}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{4}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}3\\1\end{cases}$$

Altså er:

$$\underline{\underline{x=1 \quad \vee \quad x=3}}$$

Metode 2 (gennemskue ligningen):

Produktet af de to løsninger skal give 3, mens summen skal give 4, og dette passer med:

$$\underline{\underline{x=1 \quad \vee \quad x=3}}$$

Dette kunne også udtrykkes ved en faktorisering:

$$x^2-4x+3=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x-3)(x-1)=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{x=3 \quad \vee \quad x=1}}$$

Opgave 4: Ligningen er givet ved $y=1{,}6-0{,}2x$, hvor y er alkoholpromillen og x er tiden målt i timer.

Fra start er x = 0, hvilket giver y = 1,6.

Dermed er betydningen af tallet 1,6, at fra start har personen en alkoholpromille på 1,6

Hældningen for grafen for ligningen er -0,2, så tallet 0,2 betyder, at:

Personens alkoholpromille falder med 0,2 pr. time.

Opgave 5: $f(x)=2x^3+4\cdot\ln(x)$

Funktionen differentieres ledvist:

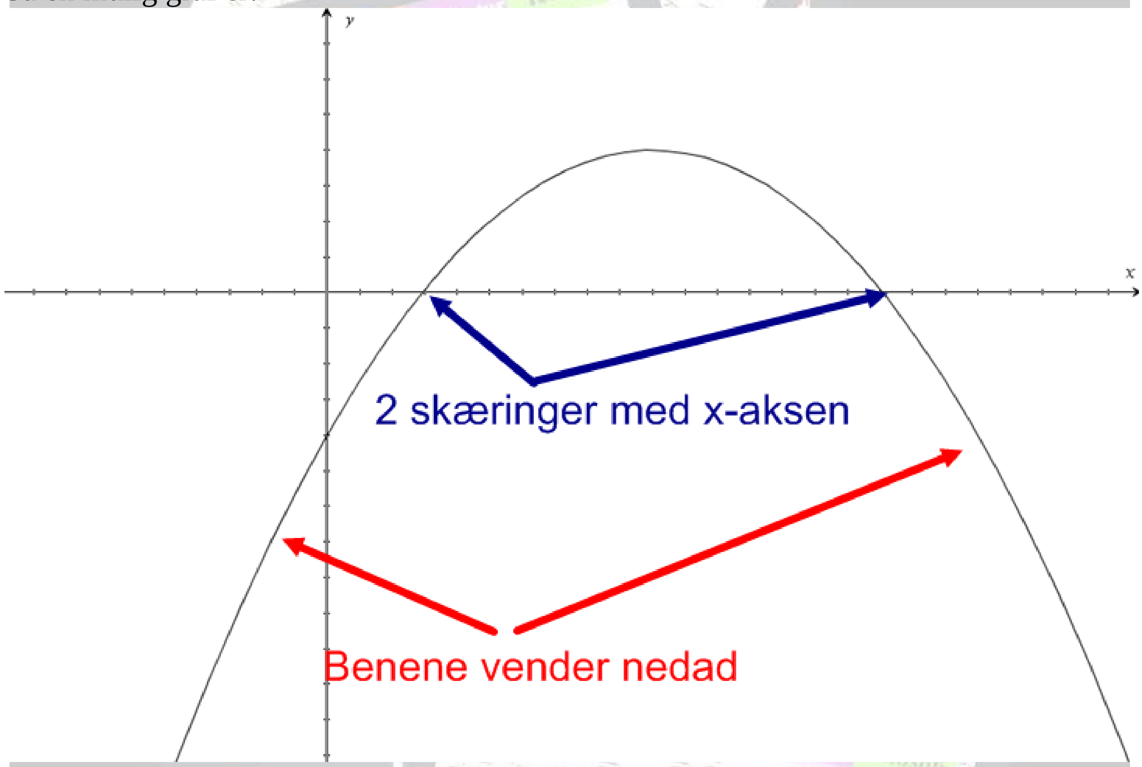
$$f'(x) = 2 \cdot 3x^2 + 4 \cdot \frac{1}{x} = \underline{\underline{6x^2 + \frac{4}{x}}}$$

<u>Opgave 6:</u> $f(x) = ax^2 + bx + c$ $\quad a < 0 \quad d > 0$

Grafen for et andengradspolynomium er en parabel.
Fortegnet på koefficienten *a* fortæller, hvilken vej benene vender. Da *a* < 0 vender benene nedad.

Diskriminanten *d* angiver antallet af skæringer med x-aksen, og da *d* er positiv, er der 2 skæringer.

Så en mulig graf er:



11. august 2011: Delprøven MED hjælpemidler

Opgave 7: $\triangle ABC: \quad |AB| = 10 \quad \angle A = 30° \quad \angle B = 130°$

a) Da man kun kender én sidelængde, skal man anvende sinusrelationerne. Men for at kunne anvende disse, skal man kende vinkel C, da den ligger over for den eneste kendte side.
Så vinkel C bestemmes ud fra vinkelsummen i en trekant:

$C = 180° - A - B = 180° - 30° - 130° = 20°$

Så kan sinusrelationerne anvendes til at bestemme den søgte sidelængde:

$$\frac{|AC|}{\sin B} = \frac{|AB|}{\sin C} \Leftrightarrow |AC| = \frac{|AB|}{\sin C} \cdot \sin B$$

$$|AC| = \frac{10}{\sin 20°} \cdot \sin 130° = \underline{\underline{22,3976411351}}$$

b) Da D er midtpunktet på AC, har man:

$$|AD| = \frac{1}{2} \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot 22,3976411351 = 11,1988205676$$

Og så er:

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \cos(A)$$

$$|BD| = \sqrt{10^2 + 11,1988205676^2 - 2 \cdot 10 \cdot 11,1988205676 \cdot \cos(30°)} = \sqrt{31,4443200258} = \underline{\underline{5,60752351986}}$$

Opgave 8: Der er 25 tal, og de er allerede ordnet:

23, 25, 27, 27, 27, 28, 29, 29, 29, 30,
30, 32, 32, 33, 34, 34, 34, 35, 35, 38,
38, 39, 42, 45, 50.

Da det er et ulige antal målinger, er medianen den midterste måling, dvs. måling nr. 13. Den er 32.
Medianen har nu delt observationssættet i to dele med hver 12 observationer (medianen "fjernes").
Da hver af disse dele indeholder et lige antal observationer, vil den nedre kvartil og den øvre kvartil være gennemsnittene af de to midterste målinger i hver del. Dvs. den nedre kvartil er gennemsnittet af observationer 6 og 7, mens den øvre kvartil er gennemsnittet af observationerne 19 og 20. Så man har:Medianen: $\underline{\underline{32}}$ Nedre kvartil: $\frac{28+29}{2} = \underline{\underline{28,5}}$ Øvre kvartil: $\frac{35+38}{2} = \underline{\underline{36,5}}$

Det kunne også have været løst ved på TI n'spire at indtaste tallene under 'lister og regneark':
Observationen indtastes i søjle A, mens frekvensen indtastes i søjle B (se nedenfor).
Så vælges "Statistik"-->"Statistiske beregninger"-->"Statistisk med én variabel": 1 liste.
X1-liste: a[]
Frekvensliste: b[] Dette vælges da frekvenserne er indtastet i søjle B. Dette giver så:

	A	B	C	D
◆				=OneVar(a
1	23	1	Titel	Statistik ...
2	25	1	x̄	33.
3	27	3	Σx	825.
4	28	1	Σx²	28201.
5	29	3	sx := sn-...	6.37704
6	30	2	σx := σn...	6.2482
7	32	2	n	25.
8	33	1	MinX	23.
9	34	3	Q₁X	28.5
10	35	2	MedianX...	32.
11	38	2	Q₃X	36.5
12	39	1	MaxX	50.
13	42	1	SSX := Σ...	976.
14	45	1		
15	50	1		

Opgave 9: Det er oplyst, at sammenhængen er på formen $y = ax + b$, dvs. det er en lineær sammenhæng.

a) Da man kender mere end to sæt sammenhørende værdier, skal der laves regression.
På TI-nspire vælges "Tilføj lister og regneark", den gennemsnitlige fødselsvægt pr. gris (x) indtastes i søjle A, mens moderkagens gennemsnitlige vægt (y) indtastes i søjle B.
Der trykkes på 'menu'-knappen, hvor der vælges 'statistik'→'Stat-beregning'→ 'Lineær regression (mx+b)': X-liste: a[] Y-liste: b[] Gem RegEqn i: f1

	A	B	C	D
◆				=LinRegMx(a[],b[]
1	688	50	Titel	Lineær regressio...
2	795	100	RegEqn	m*x+b
3	878	150	m	0.489836849616
4	999	200	b	-286.462953678
5			r²	0.99534847842
6			r	0.99767152832
7			Resid	{-0.54479885833...

A7

n'spire giver: m = 0,4898368 og b=-286,462954
Dvs. man har at: $\underline{\underline{a = 0,490 \text{ og } b = -286}}$

b) Når den gennemsnitlige fødselsvægt pr. gris i kuldet er 950g, er x = 950.
Da sammenhængen er gemt som f1, bestemmes den tilsvarende y-værdi så på lommeregneren ved at taste f1(950), der giver 178,88.
Dvs. at:
<u>Når den gennemsnitlige fødselsvægt pr. gris i kuldet er 950g, er den gennemsnitlige vægt af moderkagen pr. gris i kuldet 179g</u>

Opgave 10: $f(x) = 3600 \cdot 0,8544^x$ *f(x)* er antallet af tigre *x* år efter 2002.

a) Antallet af tigre i 2002 bestemmes:
$f(0) = 3600 \cdot 0,8544^0 = 3600 \cdot 1 = \underline{\underline{3600}}$

Halveringskonstanten bestemmes ud fra fremskrivningsfaktoren:

$$T_{½} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(a)} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(0,8544)} = \underline{\underline{4,405}}$$

Dette vil sige at antallet af tigre i Indien halveres for hver 4,4 år.

b) Tallet 0,8544 er fremskrivningsfaktoren a , der er forbundet med vækstraten r ved formlen: $a = 1 + r$.

Dvs. at den årlige vækstrate er: $r = a - 1 = 0{,}8544 - 1 = -0{,}1456 = \underline{\underline{-14{,}56\%}}$

c) Differentialkvotienten i 5 bestemmes på TI n'spire ved:

$$\frac{d}{dx}\left(3600 \cdot (0.8544)^x\right)\Big|x=5 \qquad -257.924$$

Dvs. at $\underline{\underline{f'(5) = -257{,}924}}$

Det betyder, at <u>i 2007 faldt antallet af tigre i Indien ifølge modellen med 258 om året.</u>
(man kan også sige, at i 2007 forsvandt der ifølge modellen 258 tigre i Indien)

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 11: $f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$

a) For at løse ligningen f(x)=0, dvs. $0 = x^4 - 8x^2 + 1$, indtastes på TI n'spire:

$\text{solve}(0=x^4-8\cdot x^2+1,x)$	$x=-2.80588$ or $x=-0.35639$ or $x=0.35639$ or $x=2.80588$

Dvs. løsningerne er $\underline{\underline{x = -2{,}81 \vee x = -0{,}36 \vee x = 0{,}36 \vee x = 2{,}81}}$

b) Ligningen for tangenten til grafen i P(3,f(3)) bestemmes ved indtastningen:

$\text{tangentLine}(x^4-8\cdot x^2+1,x,3)$	$60\cdot x-170$

Dvs. tangenten har ligningen $\underline{\underline{y = 60x - 170}}$

c) For at bestemme monotoniforholdene laves funktionsanalyse:

Først bestemmes den afledede funktion:

$f'(x) = 4x^3 - 16x$

Nulpunkter for den afledede funktion bestemmes:

$f'(x) = 0$

$0 = 4x^3 - 16x \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^3 - 4x \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x \cdot (x^2 - 4) \quad \Leftrightarrow$

$x = 0 \vee x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = -2 \vee x = 0 \vee x = 2}$

Disse tre steder er den afledede funktion 0, og de bruges til i et fortegnsskema at opdele x-aksen i monotoniintervaller, hvor fortegnene for den afledede funktion i de enkelte intervaller er bestemt ved at tage værdien et (vilkårligt) sted i intervallet:

x		-2		0		2	
f'(x)	-	0	+	0	-	0	+
f(x)	↘		↗		↘		↗

$f'(-3) = -60 < 0$

$f'(-1) = 12 > 0$

$f'(1) = -12 < 0$

$f'(3) = 60 > 0$

Dvs. at:

<u>f er voksende i intervallerne [-2,0] og [2,∞[</u>

<u>f er aftagende i intervallerne]-∞,-2] og [0,2]</u>

Opgave 12: $f(x) = x^3 \quad g(x) = 8$

Det er angivet, at graferne skærer hinanden, når x = 2, men ellers kan det også ses ved indsættelse: $f(2) = 2^3 = 8 = g(2)$

I intervallet mellem 0 og 2 ligger grafen for *g* øverst, så arealet mellem graferne er:

$$A_M = \int_0^2 \left(g(x) - f(x)\right)dx = \int_0^2 \left(8 - x^3\right)dx = \left[8x - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \left(8\cdot 2 - \frac{2^4}{4}\right) - \left(8\cdot 0 - \frac{0^4}{4}\right) = 16 - 4 = \underline{\underline{12}}$$

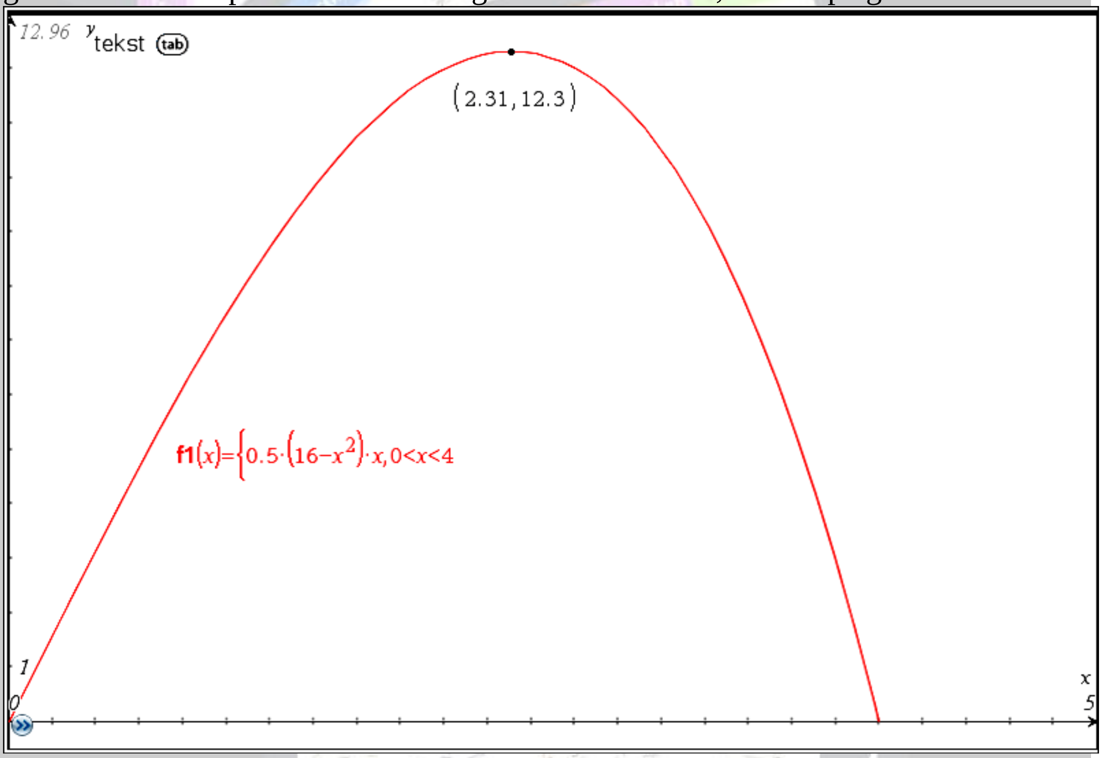
Opgave 13: a) Der er 6 sider på klodsen, hvoraf de to kvadratiske endeflader har ens arealer, og de fire sideflader er ens. Så overfladearealet er:

$$O = 2\cdot x^2 + 4\cdot x\cdot y = 2x^2 + 4xy = \underline{\underline{2x\left(x + 2y\right)}}$$

b) $V(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(16 - x^2\right)x, \quad 0 < x < 4$

På TI n'spire åbnes en graf-side, og ovenstående udtryk indtastes som f1(x), hvorefter grafen tegnes. Vinduet justeres, så man kan se hele grafen (se nedenfor).

Der trykkes på menu-knappen, og der vælges 'Undersøg grafer' og 'maksimum', hvorefter grænserne sættes på hver side af det globale maksimum, der ses på grafen:



Lommeregneren har altså udregnet, at <u>x = 2,31 giver klodsen det største rumfang.</u>

9. december 2011: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: Ligningen løses:

$$2x+1=-3x-9 \Leftrightarrow$$
$$2x+3x=-9-1 \Leftrightarrow$$
$$5x=-10 \Leftrightarrow$$
$$x=\frac{-10}{5}=\underline{\underline{-2}}$$

Opgave 2: $f(x)=x^4+5x$

Den afledede funktion bestemmes ved at differentiere ledvist:

$$\underline{\underline{f'(x)=4x^3+5}}$$

Opgave 3: $f(t)=2878\cdot 1{,}107^t$

t er tiden målt i år efter 1990. *f* er det årlige antal udsendelsestimer på DR TV.

Tallet 2878, der er begyndelsesværdien, fortæller, at <u>der i 1990 blev udsendt TV på DR i 2878 timer.</u>

Tallet 1,107, der er fremskrivningsfaktoren a (eller grundtallet), kan bruges til at udregne vækstraten *r*, da a = 1 + r, dvs. r = 0,107 = 10,7%.
Så tallet 1,107 fortæller, at <u>antallet af udsendelsestimer på DR TV siden 1990 er vokset med 10,7% om året.</u>

Opgave 4: Trekanterne ABC og ADE indeholder begge vinkel A, og da *DE* og *BC* er parallelle, er $\angle ABC=\angle ADE$ som angivet på figuren. Altså må også $\angle ACB=\angle AED$, og de to trekanter er således ligedannede (ensvinklede).
Der gælder dermed:

$$\frac{|DE|}{|BC|}=\frac{|AE|}{|AC|} \Leftrightarrow |DE|=\frac{|AE|}{|AC|}\cdot|BC|$$

$$|DE|=\frac{6}{2}\cdot 0{,}5=3\cdot 0{,}5=\underline{\underline{1{,}5}}$$

Opgave 5: Ligningssystemet løses ved at lægge de to venstresider og de to højresider sammen:

$$\left.\begin{aligned}2x-y&=-3\\ x+y&=12\end{aligned}\right\}\Rightarrow(2x-y)+(x+y)=-3+12 \Leftrightarrow 3x=9 \Leftrightarrow \underline{x=3}$$

Denne værdi indsættes i den nederste ligning for at bestemme y-værdien:

$$3+y=12 \Leftrightarrow y=12-3=\underline{9}$$

Altså er løsningen til ligningssystemet:

$$\underline{\underline{(x,y)=(3,9)}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

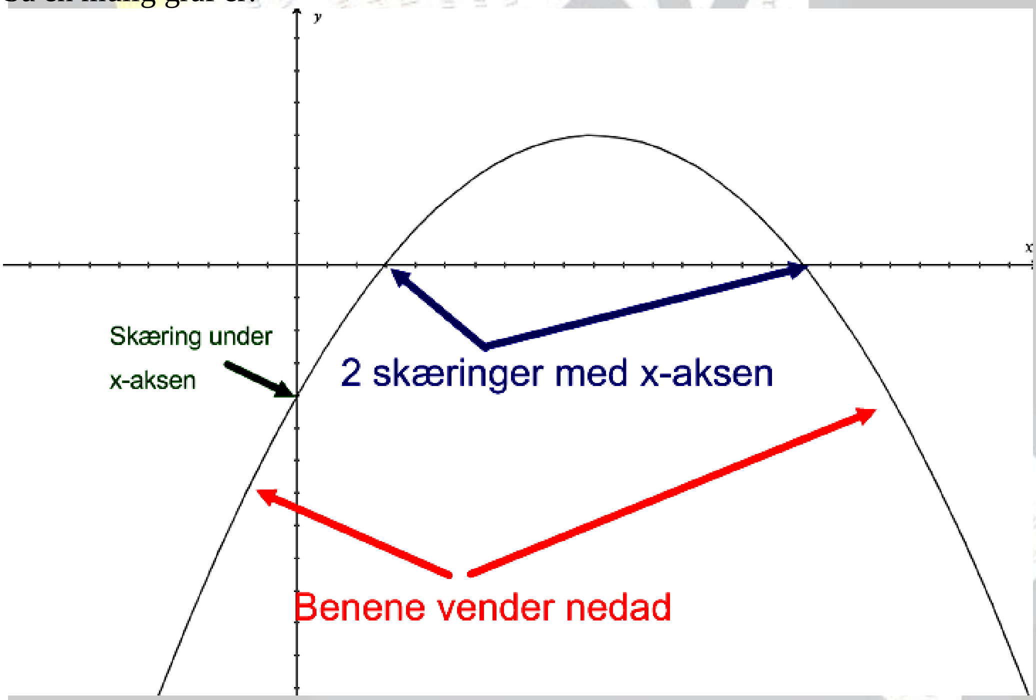
<u>*Opgave 6:*</u> $f(x) = ax^2 + bx + c \qquad a < 0 \qquad c < 0 \qquad d > 0$

Grafen for et andengradspolynomium er en parabel.
Fortegnet på koefficienten *a* fortæller, hvilken vej benene vender. Da *a* < 0 vender benene nedad.

Konstantleddet *c* angiver skæringen med y-aksen, så da *c* er negativ, skærer parablen y-aksen under x-aksen.

Diskriminanten *d* angiver antallet af skæringer med x-aksen, og da *d* er positiv, er der 2 skæringer.

Så en mulig graf er:



9. december 2011: Delprøven MED hjælpemidler

Opgave 7: $f(x)=ax+b \quad P(3,12) \quad Q(8,27)$

a) Når man skal bestemme forskriften for *f*, skal man bestemme koefficienterne *a* og *b*.
Der er flere måder at løse opgaven på:

Metode 1 (anvendelse af formlen for lineær funktionsforskrift ud fra to opgivne punkter):
Da det er en lineær funktion, kan a-værdien bestemmes ved:

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{27-12}{8-3}=\frac{15}{5}=3$$

Dette indsættes sammen med punktet P's koordinater i forskriften, så b-værdien kan bestemmes:

$$12=3\cdot 3+b \;\Leftrightarrow\; b=3$$

Altså er forskriften:

$$\underline{\underline{f(x)=3x+3}}$$

Metode 2 (med "solve"):
Punkternes koordinater indsættes i forskriften:

$$12=a\cdot 3+b$$

$$27=a\cdot 8+b$$

Dette giver to ligninger, der løses på TI n'spire med:

$solve(12=3a+b \text{ and } 27=8a+b,a,b)$ der giver $a=3 \, and \, b=3$

Altså er forskriften:

$$\underline{\underline{f(x)=3x+3}}$$

Metode 3 (to ligninger med 2 ubekendte):
Punkternes koordinater indsættes i forskriften:

$$12=a\cdot 3+b$$

$$27=a\cdot 8+b$$

Den øverste ligning trækkes fra den nederste (venstreside fra venstreside og højreside fra højreside):

$$27-12=(8a+b)-(3a+b) \;\Leftrightarrow\; 15=8a-3a \;\Leftrightarrow\; 15=5a \;\Leftrightarrow\; a=3$$

Dette indsættes i den øverste ligning, så b-værdien kan bestemmes:

$$12=3\cdot 3+b \;\Leftrightarrow\; b=3$$

Altså er forskriften:

$$\underline{\underline{f(x)=3x+3}}$$

b) Så kan funktionsværdien bestemmes:

$$f(10)=3\cdot 10+3=\underline{\underline{33}}$$

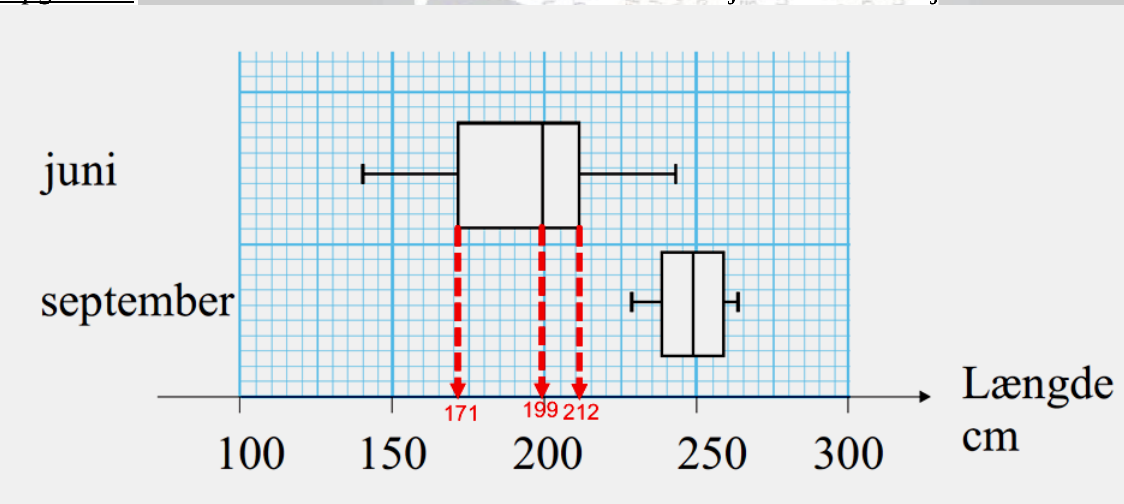
Ligningen $f(x)=18$ løses:

$$f(x)=18 \;\Leftrightarrow\; 18=3x+3 \;\Leftrightarrow\; 18-3=3x \;\Leftrightarrow\; 15=3x \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{x=5}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk   Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 8: Kvartilsættet aflæses ud fra de tre lodrette linjer i boksen for juni måned:



Dvs. at man har:
Nedre kvartil: 171cm
Median: 199cm
Øvre kvartil: 212cm

De fangede tunfisk er generelt længere i september end i juni. Medianen i september ligger over den øverste observation i juni, dvs. at mindst 50% af de fangede tunfisk i september er længere end den længste af de fangede tunfisk i juni.
Desuden er den korteste tunfisk fanget i september længere end mindst 75% af de fangede tunfisk i juni.
Det ses også, at forskellen mellem den længste og den korteste tunfisk fanget i en måned er meget mindre i september end i juni.
Man kunne så begynde at forklare disse forskelle, men det hører hjemme i en biologiopgave, og der spørges ikke om det.

Opgave 9: *t* er tiden målt i minutter, mens *d* er vanddybden målt i cm.
Modellen har forskriften $d = b \cdot t^a$, dvs. det er en potensfunktion (ganget med en konstant).

a) På TI n'spire åbnes "Lister og regneark", og t-værdierne indtastes i søjle A, mens *d* indtastes i søjle B.
Der trykkes på Menu-knappen og vælges 'statistik'→'stat-beregninger'→'9:Potensregression'.
X-liste: a[]
Y-liste: b[]
Resultatet gemmes som f1.
Lommeregneren giver:
"Titel" "Potensregression"
"RegEqn" "a*x^b"
"a" 0.23376949731966
"b" 0.59209156047842
Det bemærkes, at a- og b-værdierne er byttet rundt i forhold til vores model, så man har:
$\underline{\underline{a = 0,5921}}$ og $\underline{\underline{b = 0,234}}$

b) Vandet løber ud over kanten, når *d* = 3. Dette bestemmes på lommeregneren ved:

solve(f1(x)=3,x) , der giver x=74.4552462375

Dvs. at vandet løber ud over kanten efter 74,5 minutter.

Opgave 10: $\triangle ABC: \quad |AB| = 7 \quad |AC| = 14 \quad \angle A = 37°$

a) Da man kender en vinkel og de to hosliggende sider, kan den sidste side kun bestemmes ved hjælp af cosinusrelationerne:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos(A)$$

$$|BC| = \sqrt{7^2 + 14^2 - 2 \cdot 7 \cdot 14 \cdot \cos(37°)} = \sqrt{88,4674400307} = \underline{\underline{9,40571315907}}$$

b) Da man nu kender alle tre sider og en vinkel i trekant ABC, kan vinkel C både bestemmes ved sinusrelationer og cosinusrelationer. Da vinkel C ikke ligger over for længste side, ved man, at den ikke er stump, og derfor behøver man ikke at overveje, om det nu også er den rigtige vinkel, man finder, når man anvender $\sin^{-1}$.

$$\frac{\sin C}{|AB|} = \frac{\sin A}{|BC|} \Leftrightarrow \sin C = \frac{\sin A}{|BC|} \cdot |AB|$$

$$C = \sin^{-1}\left(\frac{\sin 37°}{9,40571315907} \cdot 7\right) = \sin^{-1}(0,447887905023) = \underline{\underline{26,608254669°}}$$

Så er:

$$\frac{A}{2} + C + D = 180° \Leftrightarrow D = 180° - \frac{37°}{2} - 26,608254669° = \underline{\underline{134,891745331°}}$$

c) I trekant ACD kender man alle tre vinkler og en side. Så man kan anvende sinusrelationer til at finde en af de ukendte sidelængder (cosinusrelationer kan ikke bruges, da man kun kender én side):

$$\frac{|AD|}{\sin C} = \frac{|AC|}{\sin D} \Leftrightarrow |AD| = \frac{|AC|}{\sin D} \cdot \sin C$$

$$|AD| = \frac{14}{\sin(134,891745331°)} \cdot \sin(26,608254669°) = \underline{\underline{8,85102078193}}$$

Opgave 11: $f(x) = 5 \cdot 2^x - x \qquad P(1, f(1))$

a) En ligning for tangenten bestemmes på TI n'spire ved:

$\text{tangentLine}(5 \cdot 2^x - x, x, 1)$ $\quad (10 \cdot \ln(2) - 1) \cdot x - 10 \cdot (\ln(2) - 1)$

$\text{tangentLine}(5 \cdot 2^x - x, x, 1)$ $\quad 5.93147 \cdot x + 3.06853$

Det øverste det eksakte udtryk, men da der ikke er stillet krav om et eksakt udtryk anvendes det nederste (simplere) udtryk:

Så tangentligningen er: $\underline{\underline{y = 5{,}93147 \cdot x + 3{,}06853}}$

b) For at bestemme monotoniforholdene for *f*, skal man først bestemme den afledede funktion og finde nulpunkterne for denne. Dette gøres på TI n'spire ved:

$f(x) := 5 \cdot 2^x - x$ $\quad$ *Udført*

$f1(x) := \frac{d}{dx}(f(x))$ $\quad$ *Udført*

$f1(x)$ $\quad 5 \cdot \ln(2) \cdot 2^x - 1$

$\text{solve}(f1(x) = 0, x)$ $\quad x = -1.79316$

Dvs. at man har:

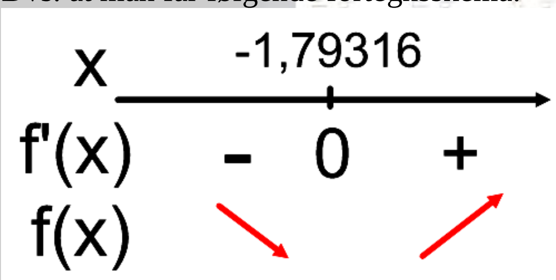
$f'(x) = 5 \cdot \ln(2) \cdot 2^x - 1$, der har nulpunktet x = -1,79316

Så bestemmes fortegnet for den afledede funktion på hver side af nulpunktet (her er valgt stederne x=-2 og x=-1):

$f1(-2)$ $\quad -0.133566$

$f1(-1)$ $\quad 0.732868$

Dvs. at man får følgende fortegnsskema:



<u>Altså er *f* aftagende i]-∞ ; -1,79316]</u>
<u>Og *f* er voksende i [-1,79316 ; ∞[</u>

<u>*Opgave 12:*</u> $f(x) = -2x^2 + 20x - 32 \qquad g(x) = 2x + 4$

a) Det er angivet på figuren, at grafen for *f* skærer førsteaksen i x=2 og x=8.
Dette kan kontrolleres ved at indsætte i funktionsforskriften, hvor f(2)=0 og f(8)=0.
Da punktmængden ligger over førsteaksen, kan dens areal dermed bestemmes ved følgende indtastning på TI n'spire:

$$\int_2^8 \left(-2 \cdot x^2 + 20 \cdot x - 32\right) dx \qquad 72$$

Dvs. at $\underline{\underline{A_M = 72}}$

b) Først bestemmes skæringsstederne mellem de to grafer:

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow$$
$$-2x^2 + 20x - 32 = 2x + 4 \quad \Leftrightarrow$$
$$2x^2 - 18x + 36 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 9x + 18 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$(x-3)(x-6) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$x = 3 \vee x = 6$$

Disse to steder skal bruges som henholdsvis nedre og øvre grænse, og da grafen for *f* i det pågældende interval ligger øverst, får man:

$$A_M = \int_3^6 \left(f(x) - g(x)\right) dx = \int_3^6 \left(-2x^2 + 20x - 32 - (2x+4)\right) dx = \int_3^6 \left(-2x^2 + 18x - 36\right) dx$$

Dette udregnes på TI n'spire ved:

$$\int_3^6 \left(-2 \cdot x^2 + 18 \cdot x - 36\right) dx \qquad 9$$

Dvs. at $\underline{\underline{A_N = 9}}$

Opgave 13: a) Overfladearealet bestemmes:

$$O = O_{loft} + 2 \cdot O_{side} + O_{front} = x \cdot 6x + 2 \cdot x \cdot h + h \cdot 6x = \underline{\underline{6x^2 + 8xh}}$$

Rumfanget af en kasse kan bestemmes som produktet af højde, længden og bredden, så man har:

$$V = h \cdot l \cdot b$$

$$V = h \cdot 6x \cdot x = \underline{\underline{6hx^2}}$$

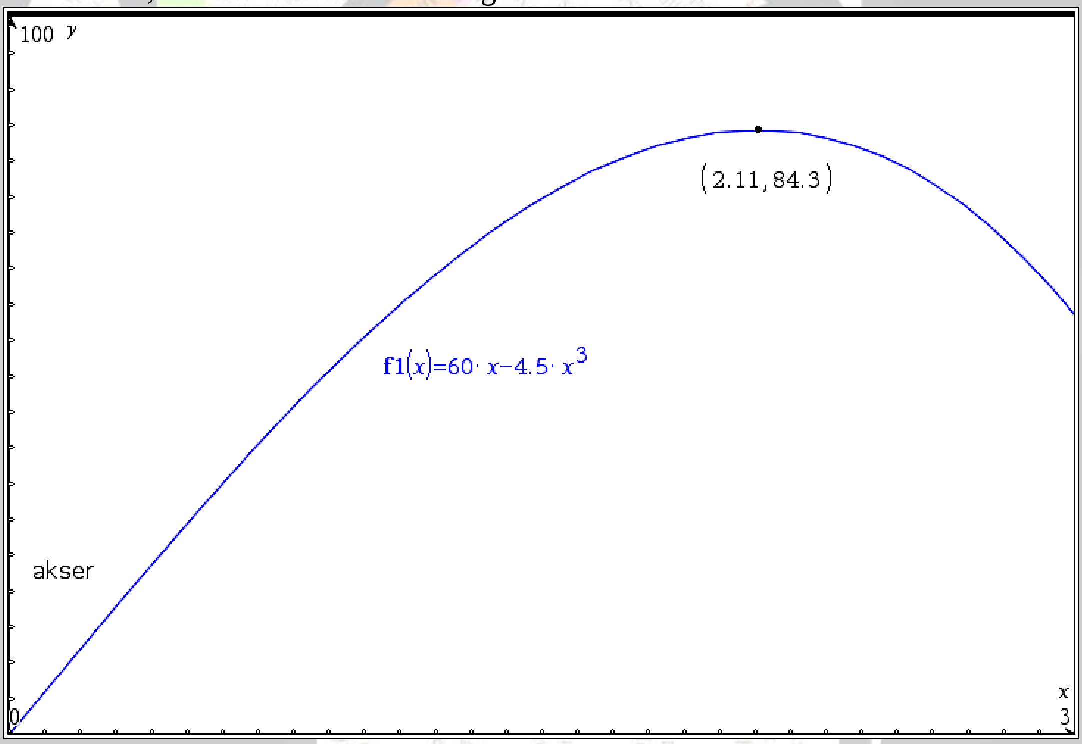
b) Da overfladearealet skal være 80, har man:

$$80 = 6x^2 + 8hx \quad \Leftrightarrow \quad 40 = 3x^2 + 4hx \quad \Leftrightarrow \quad 40 - 3x^2 = 4hx \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{40 - 3x^2}{4x}$$

Dette indsættes i udtrykket for rumfanget, så højden erstattes af et udtryk med x:

$$V = 6 \cdot \frac{40 - 3x^2}{4x} \cdot x^2 = 3 \cdot \frac{40 - 3x^2}{2} \cdot x = \underline{\underline{60x - \frac{9}{2} \cdot x^3}}$$

På TI n'spire indtegnes grafen for V(x) i intervallet 0 < x < 3, hvorefter maksimum bestemmes ved "Undersøg grafer" →"Maksimum", hvor grænserne placeres på hver sin side af et sted, hvor man kan se, at maksimum befinder sig:



Dvs. at rumfanget er størst, når $\underline{\underline{x = 2{,}11}}$

25. maj 2012: Delprøven UDEN hjælpemidler

<u>Opgave 1:</u> $2(3x-1)=4x+8 \Leftrightarrow 6x-2=4x+8 \Leftrightarrow 6x-4x=8+2 \Leftrightarrow 2x=10 \Leftrightarrow x=\frac{10}{2}=\underline{\underline{5}}$

<u>Opgave 2:</u> $y=5{,}5x+110$ y er højden målt i cm og x er alderen målt i år efter det femte år.
Tallet 110 er startværdien og fortæller, at <u>ifølge modellen er en dreng på 5 år 110cm høj</u>.

Tallet 5,5, der er hældningskoefficienten for den lineære sammenhæng, fortæller, at <u>i alderen 5-17år vokser drenge ifølge modellen med 5,5cm om året.</u>

<u>Opgave 3:</u> $x^2+x-12=0$
Det er en andengradsligning, der enten kan løses ved diskriminantmetoden eller ved faktorisering og nulreglen, hvor man skal finde to tal, hvis produkt er -12 og sum 1:

Nulreglen: $x^2+x-12=0 \Leftrightarrow (x+4)(x-3)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=-4 \vee x=3}}$

Diskriminantmetoden: $d=b^2-4ac=1^2-4\cdot 1\cdot(-12)=1+48=49>0$ dvs. 2 løsninger

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{d}}{2\cdot a}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm 7}{2}=\begin{cases}3\\-4\end{cases} \quad \text{dvs. } \underline{\underline{x=3 \vee x=-4}}$$

<u>Opgave 4:</u> $f(x)=x^3+4x^2-2x-1 \qquad P(2,f(2))$
For at kunne bestemme en ligning for tangenten til grafen i P, skal man bestemme y-koordinaten for skæringspunktet samt hældningskoefficienten:
y-værdi:
$f(2)=2^3+4\cdot 2^2-2\cdot 2-1=8+16-4-1=24-5=19$
Tangenthældning:
$f'(x)=3x^2+8x-2$
$f'(2)=3\cdot 2^2+8\cdot 2-2=12+16-2=26$
Så bliver ligningen for tangenten:
$y-y_0=a\cdot(x-x_0)$
$y-19=26\cdot(x-2) \Leftrightarrow y=26x-52+19 \Leftrightarrow \underline{\underline{y=26x-33}}$

<u>Opgave 5:</u> $f(x)=2^x \quad g(x)=2^{-x} \quad h(x)=x^2+1$
<u>Den røde graf B er graf for funktionen *h(x)*,</u> da *h(x)* er et andengradspolynomium, hvis graf er en parabel, og B er den eneste parabel blandt de tre grafer.

<u>Den blå graf C er graf for *f(x)*,</u> da *f(x)* er en voksende eksponentialfunktion (grundtallet 2 er større end 1), og grafen C er grafen for en voksende funktion i modsætning til grafen A.

<u>Den grønne graf A er graf for *g(x)*,</u> da *g(x)* er en aftagende eksponentialfunktion (grundtallet $2^{-1}=\frac{1}{2}$ er større end 1), og grafen A er grafen for en aftagende funktion.

<u>Opgave 6:</u> $f(x)=5x^4+e^x$ $\quad\quad P(0,10)$

Først bestemmes ved integration den form samtlige stamfunktioner er på:

$F(x)=x^5+e^x+k$

Konstanten k bestemmes ved indsættelse af P's koordinater i forskriften:

$10=0^5+e^0+k \iff 10=0+1+k \iff k=9$

Dvs. den søgte stamfunktion er:

$$\underline{\underline{F(x)=x^5+e^x+9}}$$

25. maj 2012: Delprøven MED hjælpemidler

Opgave 7: a) Årstallene fra nedenstående tabel skal omregnes, så de svarer til antal år EFTER 1999, dvs. man skal bruge tallene 0, 1, 2, 3, 4, ...

År	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Udgift mia. $	1,44	1,56	1,64	1,82	2,04	2,17	2,43	2,62	2,85	3,30	3,49

Antal år efter 1999 indsættes på TI n'spire under 'Lister og regneark' i liste A, mens udgifterne placeres i liste B. Det er oplyst, at sammenhængen er $f(x) = b \cdot a^x$, dvs. det er en eksponentiel sammenhæng, og derfor vælges: 'Statistik'-->'Statistiske beregninger'-->'Eksponentiel regression':
Som x-liste vælges a[] og som y-liste b[]. Den fundne ligning gemmes som f1, så den kan bruges til senere beregninger:

	A	B	C	D	E
◆				=ExpReg(a[],b[],1): Copy	
1	0	1.44	Titel	Eksponentiel regression	
2	1	1.56	RegEqn	a*b^x	
3	2	1.64	a	1.40499675261	
4	3	1.82	b	1.09501737164	
5	4	2.04	r²	0.995546498071	
6	5	2.17	r	0.99777076429	
7	6	2.43	Resid	{0.035003247392481,0.0...	
8	7	2.62	ResidTra...	{0.02460812211625,0.01...	
9	8	2.85			
10	9	3.3			
11	10	3.49			

E5

n'spire har byttet om på a og b i forhold til vores model, så man har:
$\underline{\underline{a = 1,09502 \text{ og } b = 1,404997}}$

b) Fordoblingstiden kan bestemmes ved hjælp af fremskrivningsfaktoren *a:*

$$T_2 = \frac{\ln 2}{\ln a} = \frac{\ln 2}{\ln(1,09501737164)} = \underline{\underline{7,636283}}$$

Dvs. for hvert godt 7½ år fordobles udgifterne til lobbyarbejde.

c) År 2010 svarer til t = 11, dvs. man kan udregne f(11):

f1(11)	3.81334781795

Da $\dfrac{3{,}81-2{,}61}{2{,}61}=0{,}4610528\approx 46\%$, er <u>modellens værdi altså 46% større end den faktiske årlige udgift.</u>

<u>*Opgave 8:*</u> I trekant ABC er $\angle B=113°$; $|AB|=6{,}19$; $|BC|=10{,}30$

a) Man kender en vinkel og dens to hosliggende sider, så dens modstående side kan bestemmes med en cosinusrelation:

$$|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2-2\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\cos B$$

$$|AC|=\sqrt{6{,}19^2+10{,}30^2-2\cdot 6{,}19\cdot 10{,}30\cdot\cos 113°}=\underline{\underline{13{,}9366347846}}$$

Vinkel A kan både bestemmes med cosinusrelationer og sinusrelationer. Da vinkel B er stump, er vinkel A spids, så sinusrelationerne kan anvendes uden problemer:

$$\frac{\sin A}{|BC|}=\frac{\sin B}{|AC|}\Leftrightarrow \sin A=\frac{\sin B}{|AC|}\cdot|BC| \quad \text{Og da A er spids gælder:}$$

$$A=\sin^{-1}\left(\frac{\sin B}{|AC|}\cdot|BC|\right)=\sin^{-1}\left(\frac{\sin 113°}{13{,}9366347846}\cdot 10{,}30\right)=\underline{\underline{42{,}8676926819°}}$$

b) Arealet af en trekant kan bestemmes med ½-appelsinformlen med udgangspunkt i vinkel A. Da man kender arealet får man:

$$T_{ABE}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|AE|\cdot\sin A\Leftrightarrow |AE|=\frac{T_{ABE}}{\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot\sin A}=\frac{2\cdot T_{ABE}}{|AB|\cdot\sin A}$$

$$|AE|=\frac{2\cdot 5}{6{,}19\cdot\sin(42{,}8676926819°)}=\underline{\underline{2{,}37467381218}}$$

<u>*Opgave 9:*</u> $f(x)=b\cdot x^a \qquad f(2)=3 \qquad f(4)=7$

a) Da det er en potensfunktion, kan man anvende formlen $a=\dfrac{\log(y_2)-\log(y_1)}{\log(x_2)-\log(x_1)}$, men man kan også bruge en mere generel metode, hvor punkternes koordinater indsættes i funktionsudtrykket:

$$\left.\begin{array}{l}3=b\cdot 2^a\\ 7=b\cdot 4^a\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{7}{3}=\frac{b\cdot 4^a}{b\cdot 2^a}\Leftrightarrow \frac{7}{3}=\frac{4^a}{2^a}\Leftrightarrow \frac{7}{3}=\left(\frac{4}{2}\right)^a\Leftrightarrow \frac{7}{3}=2^a\Leftrightarrow$$

$$a=\log_2\left(\frac{7}{3}\right)=\underline{1{,}22239242134}$$

Dette indsættes i den øverste ligning for at finde b:

$$b=\frac{3}{2^a}=\frac{3}{2^{1{,}22239242134}}=\underline{1{,}28571428571}$$

Dvs. at forskriften er:

$$\underline{\underline{f(x)=1{,}28571428571\cdot x^{1{,}22239242134}}}$$

Opgave 10: $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 16x + 5$

a) Funktionsudtrykket skal anvendes i både spørgsmål a) og b), så først defineres det på n'spire, og derefter løses ligningen *f(x)=0* med 'solve':

$f(x) := x^4 + 8\cdot x^3 + 18\cdot x^2 + 16\cdot x + 5$	*Udført*
$\text{solve}(f(x)=0, x)$	$x=-5$ or $x=-1$

Dvs. at $f(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -5 \vee x = -1}}$

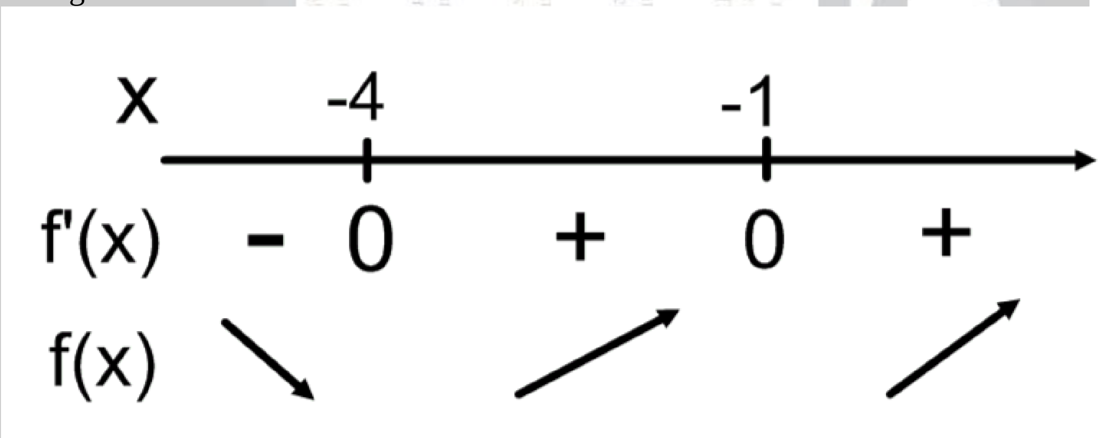
b) Man kan bestemme den afledede funktion på n'spire, men det kan også gøres i hånden ved at differentiere ledvist:

$f'(x) = 4x^3 + 8\cdot 3x^2 + 18\cdot 2x + 16 = \underline{\underline{4x^3 + 24x^2 + 36x + 16}}$

For at bestemme monotoniforholdene bestemmes først nulpunkterne for den afledede funktion og derefter fortegnene i de intervaller, der afgrænses af nulpunkterne:

$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(f(x))=0, x\right)$	$x=-4$ or $x=-1$
$\frac{d}{dx}(f(x))\|x=-5$	-64
$\frac{d}{dx}(f(x))\|x=-2$	8
$\frac{d}{dx}(f(x))\|x=0$	16
	4/99

Fortegnsskemaet bliver altså:

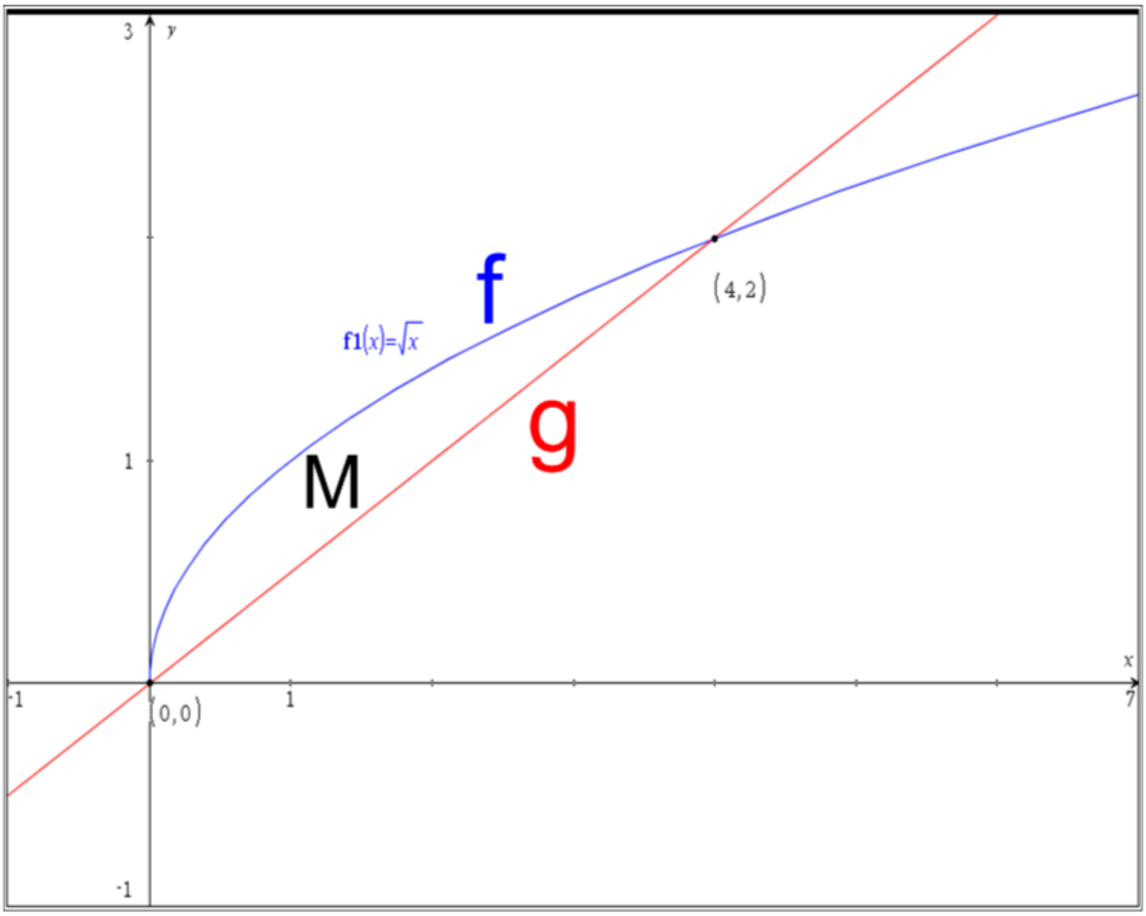


Dvs. <u>at *f* er aftagende i intervallet]-∞;-4], og *f* er voksende i intervallet [-4,∞[</u>

<u>*Opgave 11:*</u>

$$f(x)=\sqrt{x} \quad ; \quad x \geq 0$$
$$g(x)=0{,}5 \cdot x$$

a) Graferne for *f* og *g* indtegnes på n'spire under 'Grafer', og skæringspunkterne bestemmes ved under værktøjerne at vælge 'Undersøg grafer' og 'Skæringspunkt':



Dvs. at <u>skæringspunkterne er (0,0) og (4,2)</u>

b) I det interval, hvor punktmængden M ligger, ligger grafen for *f* over grafen for *g*, og intervallets endepunkter (0 og 4) angiver den nedre grænse og øvre grænse for det bestemte integral, der skal udregnes for at bestemme arealet af punktmængden.

$$A_M = \int_0^4 \left(f(x) - g(x) \right) dx =$$

$$\int_0^4 \left(\sqrt{x} - 0{,}5 \cdot x \right) dx = \left[\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - 0{,}5 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 \right]_0^4 = \left(\frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} - \frac{4^2}{4} \right) - (0-0) = \frac{2}{3} \cdot 8 - 4 = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

Opgave 12 (NY ordning): a) Det forventede antal med blodtypen kan beregnes ud fra nulhypotesen ved at anvende de opgivne procenter og at der er 950 patienter. Man får så tabellen:

Blodtype	A+	O+	B+	AB+	A-	O-	B-	AB-
Andel i %	37%	35%	8%	4%	7%	6%	2%	1%
Antal	352	333	76	38	67	57	19	10

Et eksempel på udregning er:

$O+: \quad n_{O+} = 950 \cdot 0,35 = 332,5 = 333$

Det samlede antal i de forventede værdier giver 952, fordi der 4 steder blev rundet op som i eksemplet ovenfor. Det er der ikke noget at gøre ved, og det vil også kun have en lille betydning for resultatet.

b) For at undersøge nulhypotesen, skal man foretage et χ^2-GOF-test, hvilket på TI n'spire sker ved under 'Lister og regneark' at indtaste de observerede antal i liste A og de forventede i liste B. Der vælges 'menu'→'Statistik'→'Stat-tests'→' χ^2-GOF'.
Så vælges:
Observerede liste: a[]
Forventede liste: b[]
Frihedsgrader: 7 (fordi der er 8 blodtyper, dvs. ud fra 7 opgivne værdier, kan man udregne det sidste antal, da der samlet skal være 950).

Man får:
χ^2=17,47
P_{val} = 0,01461=1,5%

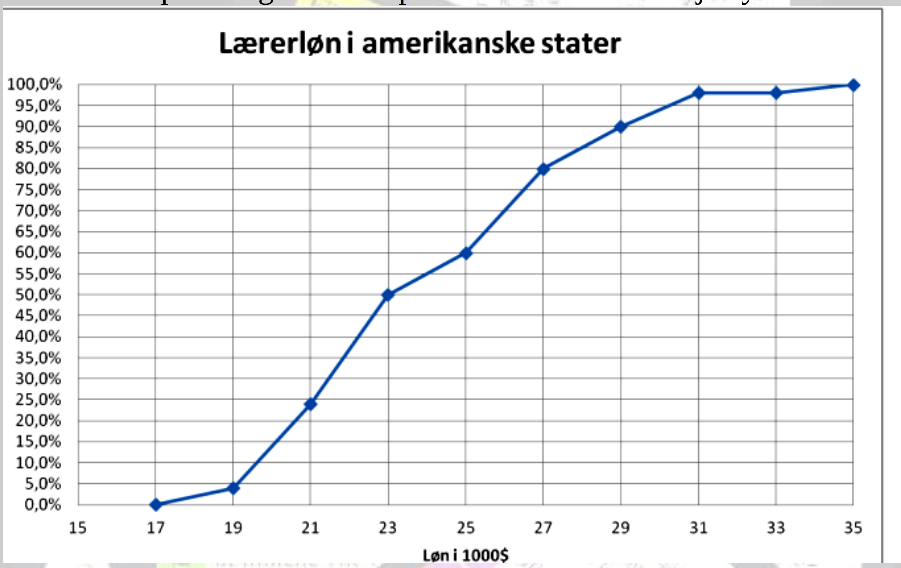
Da p-værdien er under 5%, forkastes nulhypotesen.
Lægeklinikkens patienter har altså en signifikant anderledes blodtypefordeling end den danske befolkning.

Opgave 12 (GAMMEL ordning): a) For at kunne tegne en sumkurve, skal man først have udregnet de kumulerede frekvenser. Dette foretages i Excel ud fra det angivne antal stater, der omregnes til procent ved at dividere med 50 (der er 50 stater i alt) og gange med 100%. De kumulerede frekvenser bestemmes derefter ud fra frekvenserne:

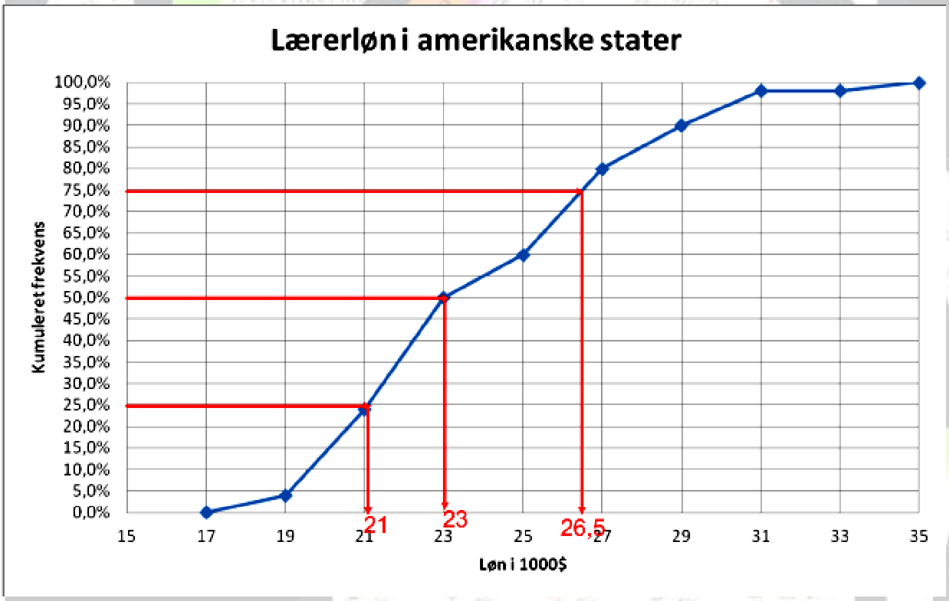
Løn i 1000$ (højre int.)	Antal stater	Frekvens	Kum. Frek.
17	0	0,0%	0,0%
19	2	4,0%	4,0%
21	10	20,0%	24,0%
23	13	26,0%	50,0%
25	5	10,0%	60,0%
27	10	20,0%	80,0%
29	5	10,0%	90,0%
31	4	8,0%	98,0%
33	0	0,0%	98,0%
35	1	2,0%	100,0%

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

I Excel tegnes sumkurven derefter ved at afsætte den kumulerede frekvens ved højre intervalendepunkt og forbinde punkterne med rette linjestykker:

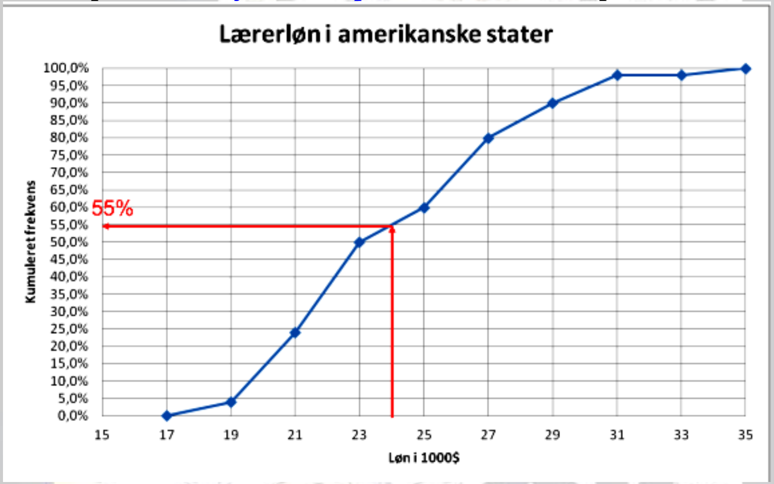


Kvartilsættet kan så aflæses:



Dvs. at kvartilsættet er (21000$; 23000$; 26500$)

b) For at bestemme procentdelen af stater med en gennemsnitlig årlig lærerløn på over 24000$, går man op fra 24 på 1. aksen og finder procentdelen:



Der er altså 100%-55% = <u>45% af de amerikanske stater, hvor den gennemsnitlige årlige lærerløn er over 24000$.</u>

<u>Opgave 13:</u> a) I den retvinklede trekant AEH er længden af den ene katete x, mens længden af den anden katete kan beregnes, da kvadratet har sidelængden 4, og da det er oplyst, at længden af sidestykket DH er $2x$.

$|AH| = |AD| - |DH| = 4 - 2x$

Da AEH er en retvinklet trekant, kan de ene katete fungere som højde og den anden som grundlinje, og dermed bliver arealet:

$$T_{AEH} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g = \frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot |AH| = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (4 - 2x) = \underline{\underline{-x^2 + 2x}}$$

I den retvinklede trekant BEF er længden af den ene katete $2x$, mens længden af den anden katete kan beregnes, da kvadratet har sidelængden 4, og da det er oplyst, at længden af sidestykket AE er x.

$|BE| = |AB| - |BE| = 4 - x$

Da BEF er en retvinklet trekant, kan de ene katete fungere som højde og den anden som grundlinje, og dermed bliver arealet:

$$T_{BEF} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g = \frac{1}{2} \cdot |BF| \cdot |BE| = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (4 - x) = \underline{\underline{-x^2 + 4x}}$$

Da sidestykkerne BE og GD er lige lange (de har begge længden 4-x), og da sidestykkerne CF og AH (med længderne 4-2x) er lige lange, er trekanterne BEF og DGH kongruente, og trekanterne AEH og CFG er kongruente. Dvs. trekant CFG har samme areal som trekant AEH, og trekant DGH har samme areal som trekant BEF.

Hermed bliver arealet parallelogrammet:

$$T(x) = A_{EFGH} = A_{kvadrat} - 2 \cdot T_{AEH} - 2 \cdot T_{BEF} =$$

$$4 \cdot 4 - 2 \cdot \left(-x^2 + 2x\right) - 2 \cdot \left(-x^2 + 4x\right) = 16 + 2x^2 - 4x + 2x^2 - 8x = \underline{\underline{4x^2 - 12x + 16}}$$

b) Grafen for *T(x)* er en parabel med benene pegende opad, så den mindste værdi for arealet findes det sted, hvor parablens toppunkt ligger (dvs. x-værdien for parablens toppunkt). Dette kan beregnes ved:

$$x_{top}=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-12)}{2\cdot 4}=\frac{12}{8}=1,5$$

Dvs. at arealet af parallelogrammet bliver mindst muligt, når $\underline{\underline{x=1,5}}$

31. maj 2012: Delprøven UDEN hjælpemidler

<u>*Opgave 1:*</u> $f(x) = -1,5x + 1 \quad g(x) = 3x \quad h(x) = x + 2$

Alle tre funktioner er lineære, hvilket stemmer med, at alle graferne er rette linjer. Man skal altså kigge på hældningskoefficienterne og konstantleddene for at skelne.

<u>Graf A hører til funktionen *f*</u>, fordi hældningskoefficienten (-1,5) er negativ, hvilket giver en aftagende funktion. Desuden skærer grafen y-aksen i 1, hvilket passer med konstantleddet 1.

<u>Graf B hører til funktionen *h*</u>, fordi grafen skærer y-aksen i 2, hvilket passer med konstantleddet 2, og fordi hældningen er mindre end hældningen for graf C, hvilket passer med, at hældningskoefficienten for h(x) er mindre end for g(x).

<u>Graf C hører til funktionen *g*</u>, fordi grafen går gennem (0,0), hvilket passer med, at der ikke er noget konstantled. Desuden er hældningskoefficienten 3, hvilket stemmer med linjens hældning.

<u>*Opgave 2:*</u> Det er en andengradsligning.

$$x^2 + 8x + 15 = 0$$

$$d = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = \underline{\underline{4}} \quad \textit{dvs. 2 løsninger}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a} = \frac{-8 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{-8 \pm 2}{2} = \begin{cases} -5 \\ -3 \end{cases}$$

$$\textit{Dvs.} \ \underline{\underline{x = -5 \ \vee \ x = -3}}$$

<u>*Opgave 3:*</u> Trekant ABD er ifølge angivelsen på figuren en retvinklet trekant, så længden af hypotenusen kan bestemmes ved Pythagoras:

$$|AB|^2 = |AD|^2 + |BD|^2$$

$$|AB| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = \underline{\underline{10}}$$

For at kunne bestemme arealet af trekanten, skal man kende højden og grundlinjen i trekant ABC. Når man bruger siden AC som grundlinje, er det angivet, at højden er 6.
Så man mangler bare at bestemme længden af siden AB, og den kan bestemmes, da det er angivet, at omkredsen af trekant ABC er 30:

$$30 = |AB| + |BC| + |AC|$$

$$|AC| = 30 - |BC| - |AB| = 30 - 7,5 - 10 = 12,5$$

Og så er trekantens areal:

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12,5 = \frac{6}{2} \cdot 12,5 = 3 \cdot 12,5 = \underline{\underline{37,5}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk   Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 4: Fordoblingskonstanten T_2 er 3, dvs. at hver gang man lægger 3 til x-værdien, fordobles y-værdien.

Når x er 0 er funktionsværdien (y-værdien) 7.

Når der er lagt 3 til x-værdien, bliver y-værdien fordoblet, så $f(3) = 2 \cdot 7 = \underline{14}$

Når der lægges yderligere 3 til x-værdien, fordobles y-værdien endnu engang, dvs: $f(6) = 2 \cdot 14 = \underline{28}$

Da 56 er det dobbelte af 28, må der altså være lagt yderligere 3 til x-værdien, dvs. $f(9) = 56$

Altså bliver tabellen:

x	0	3	6	9
f(x)	7	14	28	56

Opgave 5: $f(x) = 2 \cdot e^x + 1$ *P(0 , f(0))*

Funktionen differentieres ledvist:

$f'(x) = 2 \cdot e^x + 0 = \underline{\underline{2e^x}}$

For at bestemme ligningen for tangenten, skal man kende et punkt og hældningen.

Først bestemmes punktets y-værdi:

$f(0) = 2 \cdot e^0 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

Så bestemmes hældningen:

$f'(0) = 2 \cdot e^0 = 2$

Hermed bliver tangentens ligning:

$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$

$y - 3 = 2 \cdot (x - 0) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = 2x + 3}}$

Opgave 6: $f(x) = 4x + 3$ og P(1,10).

Først findes den form alle stamfunktionerne er på:

$F(x) = \int f(x)dx = \int (4x+3)dx = 2x^2 + 3x + k$

Da grafen for stamfunktionen skal gå gennem punktet (1,10) har man:

$10 = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + k \quad \Leftrightarrow \quad 10 = 2 + 3 + k \quad \Leftrightarrow \quad k = 5$

Dvs. at de søgte stamfunktion er:

$$F(x) = 2x^2 + 3x + 5 = \underline{\underline{F_1(x)}}$$

31. maj 2012: Delprøven MED hjælpemidler

<u>Opgave 7:</u> Modellen er $S(t) = b \cdot a^t$; *S(t)* er solcellekapaciteten målt i MW og *t* er tiden i år efter 2005

Årstal	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Solcellekapacitet	2056	2899	4170	6120	9914	17320

a) Det er en eksponentiel udvikling, så forskriften bestemmes ved at anvende regression på tabellens værdier.
Årstallene EFTER 2005 dvs. 0, 1, 2, ... indtastes på TI n'spire i liste A under "lister og regneark".
Solcellekapaciteten indtastes i liste B.
Med "menu" (eller værktøjer) vælges "Statistik" --> "Statistiske beregninger" --> "Eksponentiel regression".
X-liste: a[]
Y-liste:b[]
Gem RegEqn i: f1
Det giver:

	A	B	C	D	E
◆				=ExpReg(	
1	0	2056	Titel	Eksponе...	
2	1	2899	RegEqn	a*b^x	
3	2	4170	a	1902.33	
4	3	6120	b	1.52317	
5	4	9914	r²	0.990379	
6	5	17320	r	0.995178	
7			Resid	{153.674...	
8			ResidTra...	{0.07768...	

Det bemærkes, at lommeregneren bytter om på a og b, så forskriften er:

$$\underline{\underline{S(t) = 1902{,}33 \cdot 1{,}52317^t}}$$

b) År 2015 svarer til *t=10*, og forskriften er gemt som f1 på lommeregneren:

$$f1(10) = 127874$$

Dvs. at <u>ifølge modellen vil Tysklands solcellekapacitet i 2015 være på 127874MW</u>

c) Tallet *b* (1902), der er begyndelsesværdien, fortæller, at <u>i 2005 var Tysklands solcellekapacitet på 1902MW</u>
Man kan se, at dette ikke er rigtigt, da man jo kender det rigtige tal, men det er modellens tal, dvs. det tal der passer til den eksponentielle udvikling, der bedst muligt beskriver de faktiske tal.

Tallet *a* (1,52), der er fremskrivningsfaktoren, som er forbundet med vækstraten *r* ved $a = 1 + r$, fortæller altså, at <u>i perioden 2005-2010 voksede Tysklands solcellekapacitet med 52% om året.</u>

Opgave 8: a) Trekant BCD er retvinklet, så man kan bruge Pythagoras til at bestemme hypotenusen:

$$|BC|^2 = |BD|^2 + |CD|^2$$

$$|BC| = \sqrt{|BD|^2 + |CD|^2} = \sqrt{(2+5)^2 + 6^2} = \sqrt{7^2 + 6^2} = \sqrt{49+36} = \underline{\underline{\sqrt{85}}} \approx 9,21954$$

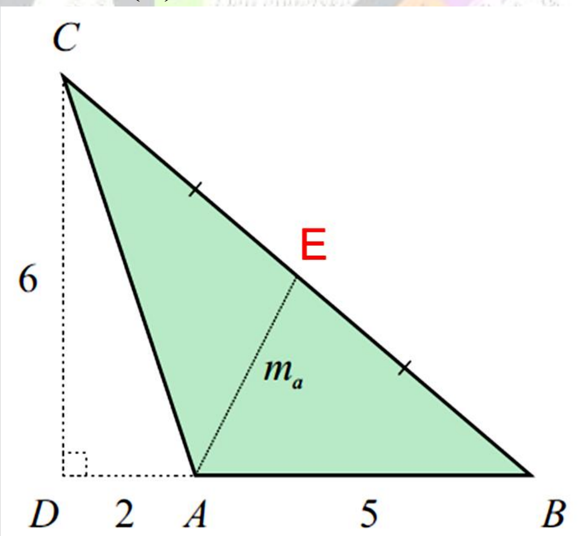
Med siden AB som grundlinje kender man højden i trekant ABC, så arealet kan bestemmes:

$$T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g = \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot |AB| = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = \frac{30}{2} = \underline{\underline{15}}$$

b) Man kan bestemme vinkel B ved at kigge på den retvinklede trekant BCD.
I forhold til vinkel B kender man både den modstående katete og den hosliggende katete, så man skal anvende tangens og får:

$$\tan B = \frac{\text{mod}}{\text{hos}} = \frac{|CD|}{|BD|} = \frac{6}{7}$$

$$B = \tan^{-1}\left(\frac{6}{7}\right) = \underline{\underline{40,6013°}}$$



Medianens fodpunkt på siden BC kaldes E.
Da det er en median, deler den siden BC i to lige store stykker som vist på figuren, dvs. man kender længden af siden BE.
I trekant ABE kender man altså en vinkel og de to hosliggende sider. Den sidste side (medianen) kan så bestemmes ved en cosinusrelation:

$$m_a{}^2 = |AB|^2 + |BE|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BE| \cdot \cos B$$

$$m_a = \sqrt{5^2 + \left(\frac{\sqrt{85}}{2}\right)^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{85}}{2} \cdot \cos 40,6013°} = \sqrt{11,25} = \underline{\underline{3,3541019662497}}$$

<u>*Opgave 9:*</u> $v(r) = 0{,}0060 \cdot r^{2{,}6657}$ *v(r)* er vægten af græskar målt i kg og *r* er radius målt i cm

a) Et græskar på 40kg svarer til v(r)=40, og denne ligning løses på TI n'spire ved:

$$\text{solve}\left(40=0.006\cdot r^{2.6657},r\right) \qquad r=27.1948$$

Dvs. at radius for et græskar på 40 kg er <u>27,2cm</u>

b) Det er en potensvækst, så sammenhængen mellem procentvis stigning i den uafhængige variabel og i den afhængige variabel er:

$$(1+r_v) = (1+r_r)^a$$

$$r_v = (1+r_r)^a - 1 = (1+0{,}10)^{2{,}6657} - 1 = 1{,}10^{2{,}6657} - 1 = 0{,}28926 = \underline{\underline{28{,}9\%}}$$

<u>*Opgave 10:*</u> $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$

a) Nulpunkterne for den afledede funktion kan enten bestemme ved 'solve' på TI n'spire:

$$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}\left(x^4-2\cdot x^2+4\right)=0,x\right)$$

$$x=-1 \text{ or } x=0 \text{ or } x=1$$

Eller man kan løse ved beregninger i hånden:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f'(x) = 0 \iff$$

$$4x^3 - 4x = 0 \iff \qquad (\text{ligningen forkortes med } 4)$$

$$x^3 - x = 0 \iff \qquad (\text{x flyttes uden for parentes ; faktorisering})$$

$$x(x^2 - 1) = 0 \iff \qquad (\text{En kvadratsætning benyttes})$$

$$x\cdot(x+1)\cdot(x-1) = 0 \qquad (\text{Nulreglen})$$

$$\underline{\underline{x = 0 \ \vee \ x = -1 \ \vee \ x = 1}}$$

b) For at kunne bestemme monotoniforholdene skal fortegnene for den afledede funktion bestemmes i intervallerne afgrænset af nulpunkterne.

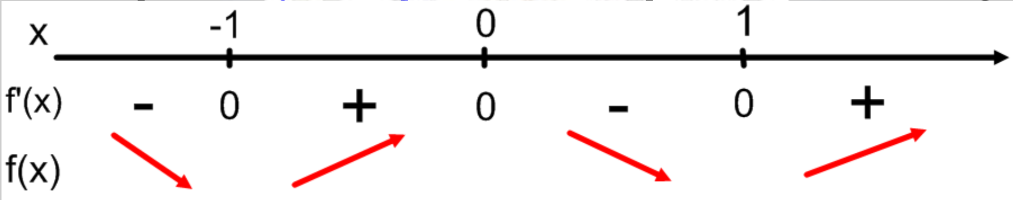
$$f'(-2) = 4\cdot(-2)^3 - 4\cdot(-2) = 4\cdot(-8) + 8 = -32 + 8 = -24 < 0$$

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\cdot\frac{-1}{8} + 2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} > 0$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = 4\cdot\frac{1}{8} - 2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} < 0$$

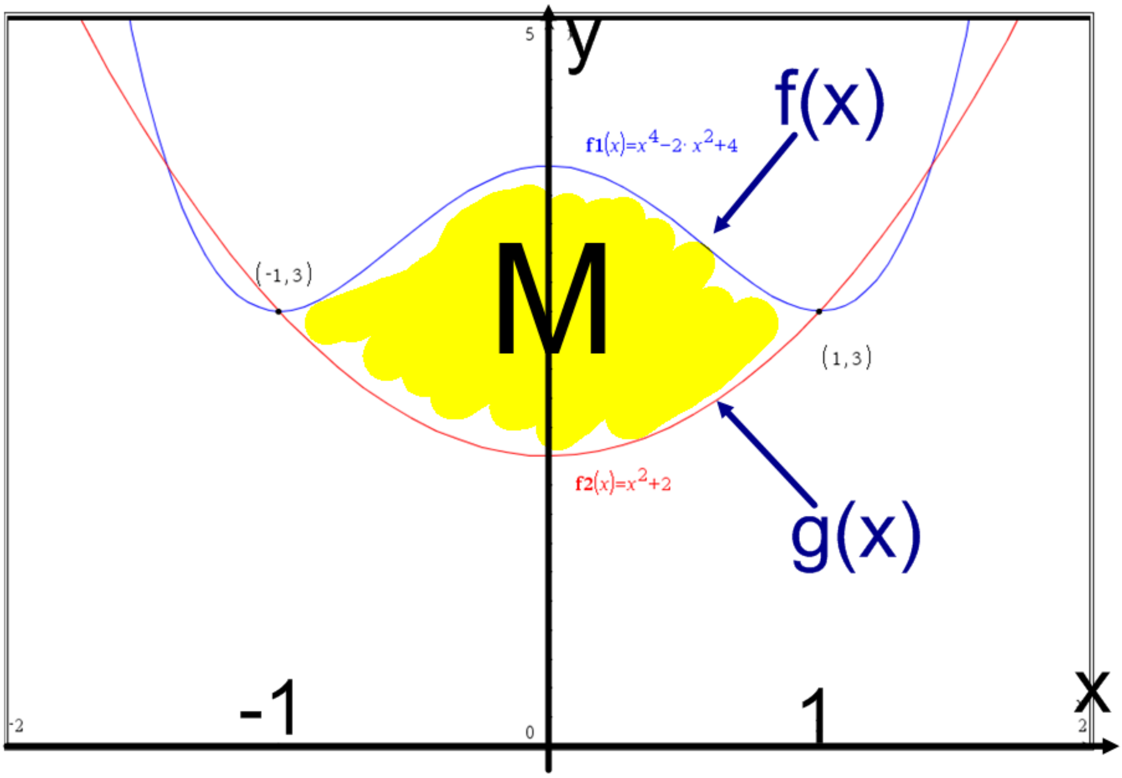
$$f'(2) = 4\cdot 2^3 - 4\cdot 2 = 4\cdot 8 - 8 = 32 - 8 = 24 > 0$$

Dette giver fortegnsskemaet:



Dvs. at <u>*f* er aftagende i intervallerne]-∞;-1] og [0;1]</u>
Og <u>*f* er voksende i intervallerne [-1,0] og [1;∞[</u>
c) $g(x) = x^2 + 2$

Grafen tegnes under "grafer" på TI n'spire, og det tjekkes med "undersøg grafer" og "skæringspunkt", at graferne skærer hinanden i stederne x=-1 og x=1, som det så ud til:



Området M afgrænses opad af grafen for *f*, så for at finde arealet, skal man udregne:

$$A_M = \int_{-1}^{1} \left(f(x) - g(x) \right) dx$$

Det kan udregnes i hånden ved:

$$A_M = \int_{-1}^{1} \left(f(x) - g(x) \right) dx = \int_{-1}^{1} \left(x^4 - 2x^2 + 4 - \left(x^2 + 2 \right) \right) dx = \int_{-1}^{1} \left(x^4 - 3x^2 + 2 \right) dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - x^3 + 2x \right]_{-1}^{1} =$$

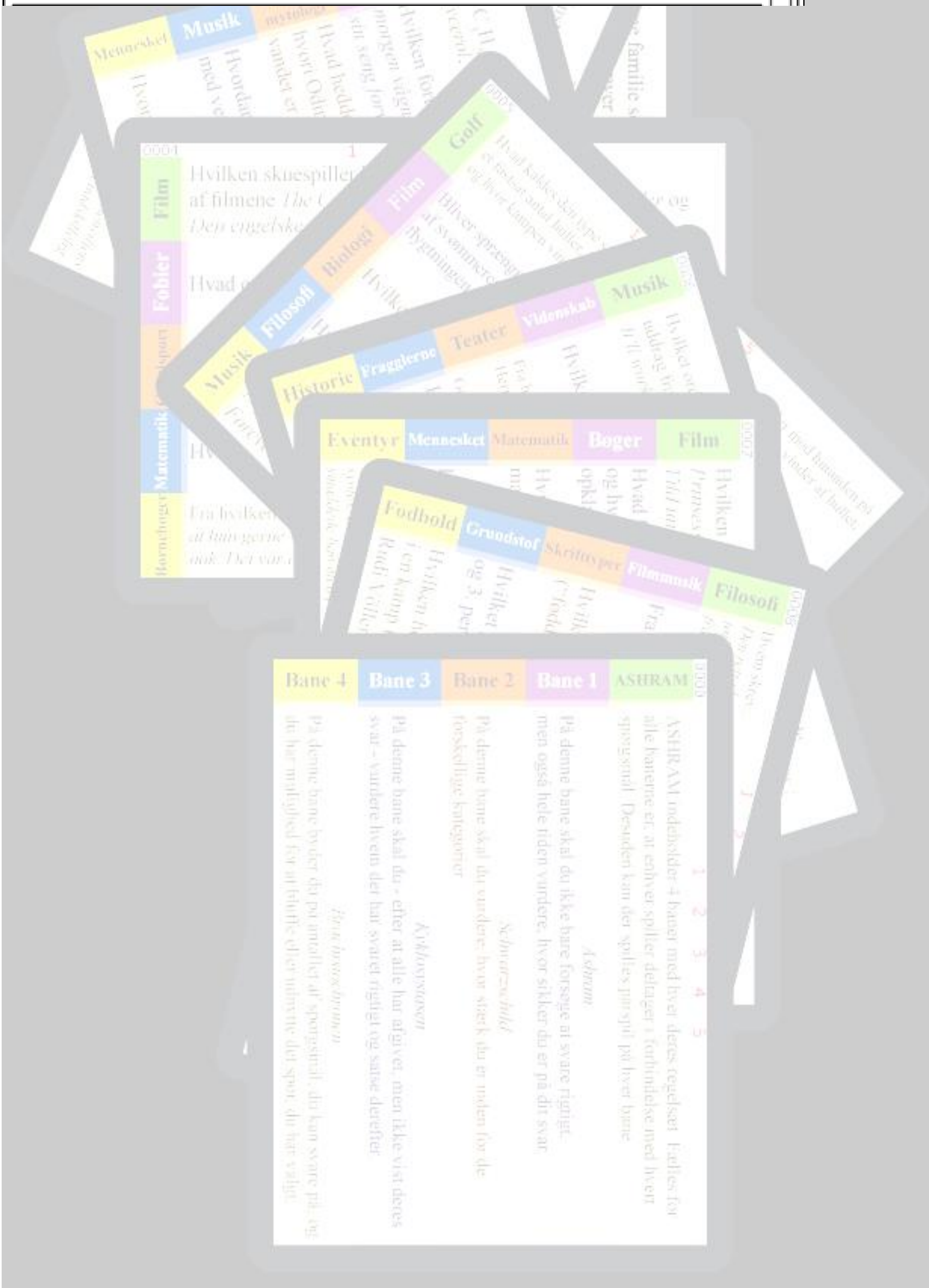
$$\left(\frac{1}{5} \cdot 1^5 - 1^3 + 2 \cdot 1 \right) - \left(\frac{1}{5} \cdot (-1)^5 - (-1)^3 + 2 \cdot (-1) \right) = \left(\frac{1}{5} - 1 + 2 \right) - \left(-\frac{1}{5} + 1 - 2 \right) = \frac{6}{5} - \left(-\frac{6}{5} \right) = \underline{\underline{\frac{12}{5}}}$$

Eller det kan udregnes på TI n'spire ved:

$f(x):=x^4-2\cdot x^2+4$ *Udført*

$g(x):=x^2+2$ *Udført*

$\int_{-1}^{1}(f(x)-g(x))\,dx$ $\frac{12}{5}$



Opgave 11 (GAMMEL ordning):

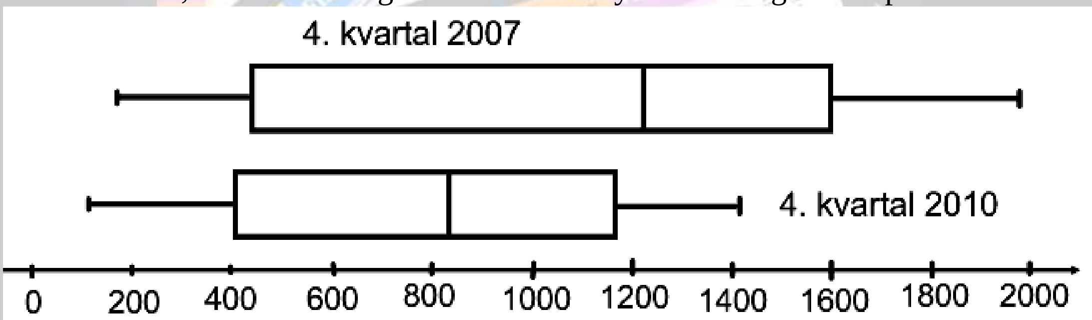
a) For at bestemme kvartilsættet opskrives antallet af handler med enfamiliehuse for hver af de 11 landsdele ordnet med det mindste antal først:
181 251 439 687 803 1218 1298 1536 1600 1615 1976
Da der er et ulige antal observationer, bestemmes medianen som den midterste observation (dvs. den 6.):
181 251 439 687 803 1218 1298 1536 1600 1615 1976
Medianen deler de observationssættet i to dele med fem observationer i hver, og da 5 er et ulige tal, vil nedre og øvre kvartil være den midterste observation i disse sæt:
Nedre kvartil: 181 251 439 687 803
Øvre kvartil: 1298 1536 1600 1615 1976

Dvs. at kvartilsættet er (439,1218,1600)

Middeltallet bestemmes ved at lægge alle tallene sammen og dividere summen med antallet af observationer:

$$\mu = \frac{181+251+439+687+803+1218+1298+1536+1600+1615+1976}{11} = 1054{,}909091 \approx \underline{\underline{1055}}$$

b) Mindsteværdi, størsteværdi og kvartilsættet benyttes til at tegne boksplot for de to kvartaler:



Der er ikke så stor forskel for de mindste observationer. Mindste observation og nedre kvartil ligger nogenlunde ens i 2007 og 2010.
Men det ses, at hvor der i 2007 var mere end 1200 handler i 50% af landsdelene, så var det kun tilfældet for knap 25% af landsdelene i 2010, og i landsdelen med det største antal handler i 2010, blev der solgt færre enfamiliehuse end i de 25% af landsdelene, hvor der i 2007 blev solgt flest.
Medianen er også flyttet fra ca. 1200 til ca. 800 fra 2007 til 2010.

<u>Opgave 11 (Ny ordning):</u> a) Den forventede stemmefordeling, hvis "vælgeradfærden er uændret siden valget" bestemmes ved at multiplicere procentdelene fra valget med antallet af adspurgte (her 1096).

Parti	**Forventet antal (Udregning)**	**Forventet antal**
A	$0,248 \cdot 1096$	271,808 ≈<u>272</u>
B	$0,095 \cdot 1096$	104,12 ≈<u>104</u>
C	$0,049 \cdot 1096$	53,704 ≈<u>54</u>
F	$0,092 \cdot 1096$	100,832 ≈<u>101</u>
I	$0,05 \cdot 1096$	54,8 ≈<u>55</u>
K	$0,008 \cdot 1096$	8,768 ≈<u>9</u>
O	$0,123 \cdot 1096$	134,808 ≈<u>135</u>
V	$0,268 \cdot 1096$	293,728 ≈<u>294</u>
Ø	$0,067 \cdot 1096$	73,432 ≈<u>73</u>

(Summen af de afrundede værdier giver 1097, hvilket skyldes afrundinger)

b) Nulhypotesen testes med et χ^2-GOF-test.
De 9 observerede værdier indtastes på TI n'spire i Liste A under "Lister og regneark".
De 9 forventede værdier indtastes i Liste B.
Med "menu"-knappen vælges: "Statistik" --> "Statistiske test" --> " χ^2-Goodness of Fit test".
Observeret liste: a[]
Forventet liste: b[]
Frihedsgrad: 8 (Antallet af værdier minus 1)
1. resultat kolonne: c[]

	A	B	C	D
◆				=χ²GOF(a
1	265	272	Titel	χ²-Good...
2	115	104	χ²	7.53314
3	44	54	PVal	0.480348
4	85	101	df	8.
5	55	55	CompLis...	{0.18014...
6	7	9		
7	136	135		
8	313	294		
9	76	73		

Da p-værdien er 0,480348 = 48,0348% er større end 5%, <u>forkastes nulhypotesen IKKE.</u>
Der er altså ikke signifikant forskel på valgets resultat og resultatet af meningsmålingen.

Opgave 12: a) Metalstykket består nu af 2 sider med længden h og to halvcirkler med radius r.
Da omkredsen er 6, har man altså:

$$O_{metalstykke} = 2 \cdot h + 2 \cdot O_{halvcirkel}$$

$$6 = 2 \cdot h + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \Leftrightarrow 6 = 2h + 2\pi r \Leftrightarrow 3 = h + \pi r \Leftrightarrow \underline{\underline{h = 3 - \pi r}}$$

Metalstykket består af det oprindelige metalstykke fratrukket to halvcirkler (svarende til at trække én cirkel fra). Så man har:

$$A_{metalstykke} = A_{rektangel} - A_{cirkel} = h \cdot 2r - \pi \cdot r^2$$

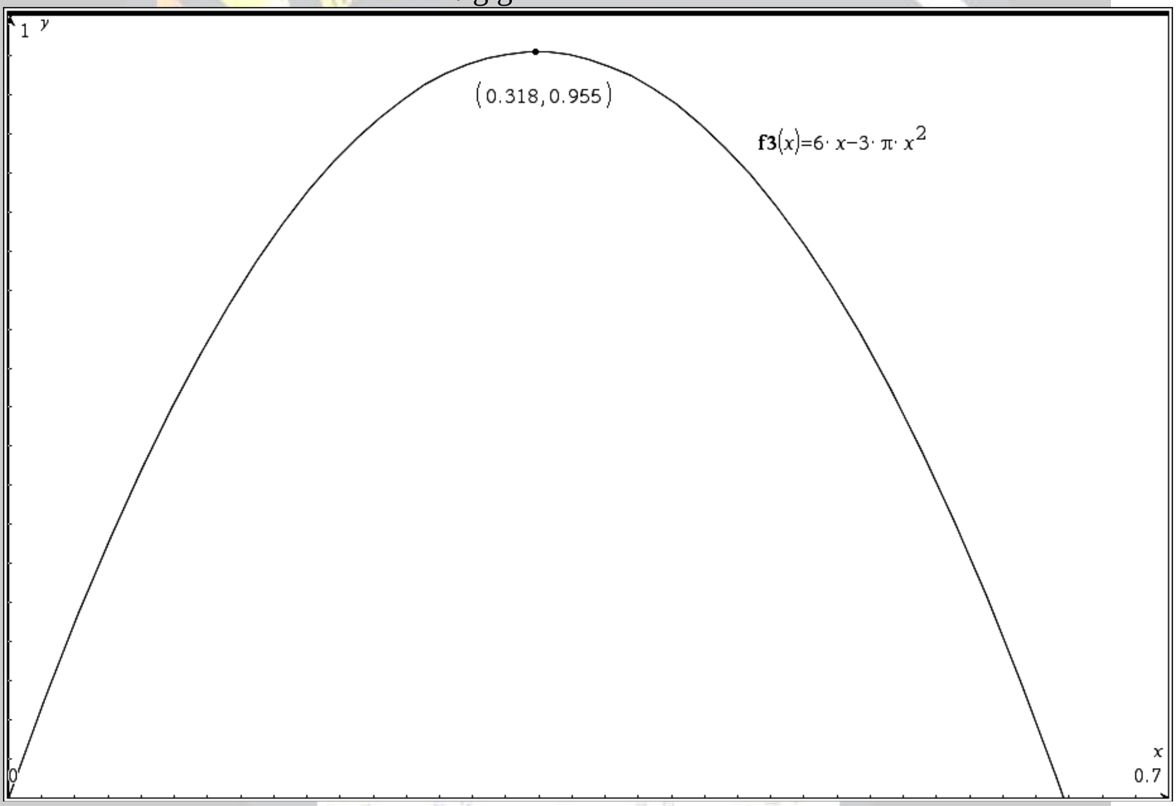
h indsættes:

$$A(r) = (3 - \pi r) \cdot 2r - \pi \cdot r^2 = 6r - 2\pi r^2 - \pi r^2 = \underline{\underline{6r - 3\pi r^2}}$$

b) Grafen for arealet er en parabel, der vender benene nedad, fordi koefficienten foran andengradsleddet er negativ (-3π).
Dermed bliver arealet størst muligt, når r antager toppunktets førstekoordinat:

$$r_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot (-3\pi)} = \frac{-6}{-6\pi} = \underline{\underline{\frac{1}{\pi}}} \approx 0{,}31831$$

Dette kunne også have været bestemt grafisk, hvor udtrykket for arealet indtastes under grafer og maksimum bestemmes ved "undersøg grafer" --> "Maksimum":



Hvis denne metode anvendes, er det væsentligt, at hele ovenstående del af grafen er med, og at den fylder det meste.


SPORTS-
NØRD
4500
SPØRGSMÅL
ASHRAM
QUIZSPIL
10.000
SPØRGSMÅL
10.000
SPØRGSMÅL
MIR
2000
SPØRGSMÅL

SPORTS-
NØRD
ASHRAM
10.000
SPØRGSMÅL

15. august 2012: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: At løse ligningen vil sige at få isoleret størrelsen *x*:

$$2x+3=-5x+17 \Leftrightarrow$$
$$2x+5x=17-3 \Leftrightarrow$$
$$7x=14 \Leftrightarrow$$
$$x=\frac{14}{7} \Leftrightarrow$$
$$\underline{\underline{x=2}}$$

Opgave 2: Lad *n*, der er antallet af terminer, svare til antal år efter indsættelsen af de 25000kr.
Og lad K_n være det indestående beløb efter *n* år.
Da det er fast rente med rentefoden 4,5% har man altså:

$$K_n = 25000kr \cdot (1+0,045)^n$$
$$\underline{\underline{K_n = 25000kr. \cdot 1,045^n}}$$

Opgave 3: Da trekanterne er retvinklede, kan man benytte Pythagoras til at bestemme *x*-værdien:

$$x^2+6^2=10^2 \Leftrightarrow \quad x^2+36=100 \Leftrightarrow \quad x^2=100-36 \Leftrightarrow \quad x^2=64$$
$$x=\sqrt{64}=\underline{\underline{8}}$$

Da *x* er en sidelængde, er den negative løsning til $x^2=64$ fjernet.

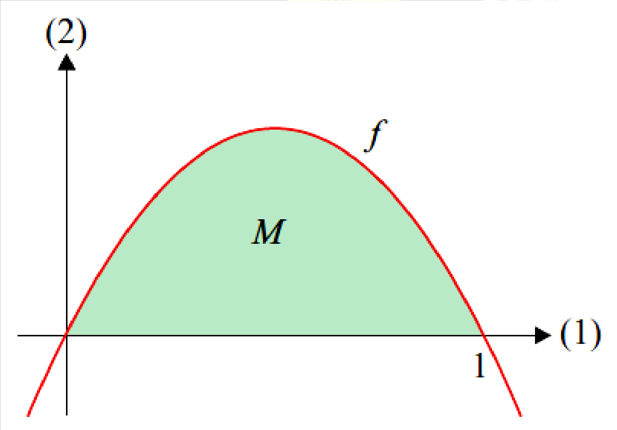
Arealet af en trekant er $T=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h$, og hvis den ene katete vælges som grundlinje, vil den anden katete være den tilhørende højde, da trekanterne er retvinklede. Dermed er:

$$A_{drage}=2\cdot T_{lille}+2\cdot T_{stor}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot x\cdot 6+2\cdot\frac{1}{2}\cdot(2x)\cdot 6=6x+12x=18x$$
$$A_{drage}=18\cdot 8=\underline{\underline{144}}$$

Opgave 4: $f(3)=12 \qquad X_2=8$ En eksponentielt voksende funktion med fordoblingskonstanten 8.
Fordoblingskonstanten er den størrelse, der skal lægges til en given x-værdi, for at den tilsvarende y-værdi fordobles.
Her er den givne x-værdi 3, og hvis man lægger fordoblingskonstanten til x-værdien, får man 3+8 = 11.
Dvs. at den tilsvarende y-værdi, der er 12, er fordoblet til 24, når x-værdien er blevet 11:

$$f(11)=2\cdot f(3)=2\cdot 12=\underline{\underline{24}}$$

Opgave 5: $f(x) = -6x^2 + 6x$



Før arealet af punktmængden M kan bestemmes, skal man finde grafens skæringer med x-aksen:

$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = -6x^2 + 6x \quad \Leftrightarrow \quad 0 = -x^2 + x \quad \Leftrightarrow$

$0 = -x(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 1$

De fundne skæringssteder udgør grænserne i det bestemte integral.
Da grafen i intervallet [0;1] ikke ligger under x-aksen, kan arealet af M bestemmes ved:

$$A_M = \int_0^1 \left(-6x^2 + 6x\right) dx = \left[-2x^3 + 3x^2\right]_0^1 = \left(-2\cdot 1^3 + 3\cdot 1^2\right) - (0+0) = -2 + 3 = \underline{\underline{1}}$$

Opgave 6: $f(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}x + 5 \quad , \quad x > 0$

Der differentieres ledvist:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + 0 = \underline{\underline{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}}$$

For at bestemme monotoniforholdene bestemmes først den afledede funktions nulpunkter:

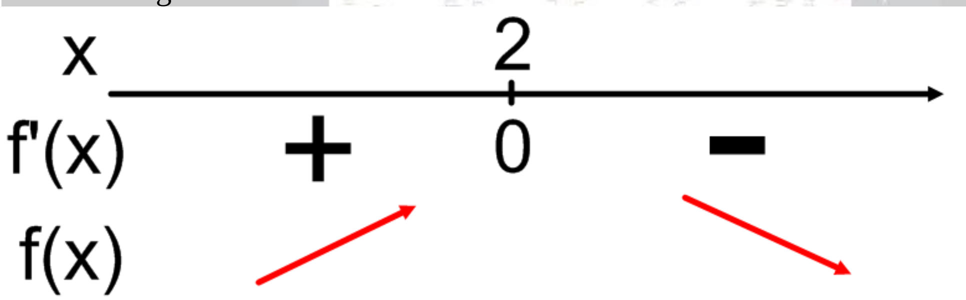
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

Så bestemmes den afledede funktions fortegn på hver side af det fundne nulpunkt:

$$f'(1) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$$

$$f'(3) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2}{6} - \frac{3}{6} = -\frac{1}{6} < 0$$

Dvs. at fortegnskemaet bliver:



Så f er voksende i intervallet $]0\,;\,2]$ og f er aftagende i intervallet $[2\,;\,\infty[$

15. august 2012: Delprøven MED hjælpemidler

<u>*Opgave 7:*</u> $y = -x + 21{,}8$ y: Årlig længdeforøgelse målt i cm/år x: ørreds længde i cm

a) Når en ørred er 10 cm lang, svarer det til x = 10, så man får:

$y = -10 + 21{,}8 = 11{,}8$

Dvs. at en 10 cm lang ørred <u>øger sin længde med 11,8 cm pr. år.</u>

b) $\begin{array}{l} y = 0 \\ 0 = -x + 21{,}8 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 21{,}8}} \end{array}$

Dvs. at når en ørred er 21,8cm er dens årlige længdeforøgelse 0cm, dvs. <u>den er færdigudvokset.</u>

<u>*Opgave 8:*</u> Der regnes i meter og forskriften for kuglestødet er $f(x) = -0{,}05x^2 + 0{,}8x + 2{,}3$

a) Kuglen lander det sted, hvor funktionsværdien er 0 og x-værdien positiv.
Dvs. man skal løse ligningen:

$0 = -0{,}05x^2 + 0{,}8x + 2{,}3$

Dette gøres på TI n'spire ved:

```
solve(0=-0.05·x^2+0.8·x+2.3,x)
        x=-2.4880884817 or x=18.4880884817
```

Den negative værdi svarer til et sted bag kuglestøderen og forkastes altså.
Så <u>længden af kuglestødet er 18,49m</u>

b) Man kunne bestemme den maksimale højde ved at indtegne grafen på lommeregneren og bestemme maksimumsværdien med "Undersøg grafer" og "Maksimum".
Men man kan også bemærke, at det er et andengradspolynomium, dvs. grafen er en parabel, og man kan altså bestemme den maksimale højde som andenkoordinaten til toppunktet:

$$\frac{-d}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{b^2}{4a} + c = -\frac{0{,}8^2}{4 \cdot (-0{,}05)} + 2{,}3 = -\frac{0{,}64}{-0{,}2} + 2{,}3 = 3{,}2 + 2{,}3 = 5{,}5$$

Dvs. <u>kuglens maksimale højde er 5,5m</u>

Opgave 9: Højde og rumfang af karafler: $V(x) = b \cdot x^a$ V er rumfang og x er højden

Højde (cm)	5	10	15	20	25	30
Rumfang (cm^3)	20	157	530	1256	2453	4239

a) Det er potensvækst, så der skal laves potensregression.
Tabellens værdier indtastes under "Lister og regneark" på TI n'spire med højde i liste A og rumfang i liste B. Der vælges 'Statistik' --> 'Statistiske beregninger' --> 'Potensregression'.
x-liste: a[] ; y-liste:b[] ; Gem Regn: f1

	A	B	C	D
◆				=PowerReg(a[],b[],1
1	5	20	Titel	Potensregression
2	10	157	RegEqn…	a*x^b
3	15	530	a	0.161587103138
4	20	1256	b	2.99053465141
5	25	2453	r²	0.999994869131
6	30	4239	r	0.999997434562
7			Resid	{0.10698026648058…
8			ResidTr…	{0.00536337051656…

Dvs. at forskriften er $\underline{\underline{V(x) = 0{,}161587 \cdot x^{2{,}990535}}}$

b) Hvis karaflen skal kunne indeholde 2000 cm^3, skal $V(x) = 2000$
Da forskriften er gemt som f1, kan dette beregnes ved:

$\text{solve}(f1(x)=2000,x)$ $\qquad x=23.3628394329$

Dvs. at karaflens højde er 23,4cm

c) Det er en potensfunktion, så vækstraterne for funktionsværdien og x-værdier er knyttet sammen ved:

$$(1+r_V) = (1+r_x)^a$$

$$r_V = (1+0{,}10)^{2{,}99053465141} - 1 = 1{,}1^{2{,}99053465141} - 1 = 0{,}329799787698 = \underline{\underline{33\%}}$$

Dvs. at rumfanget af karaflerne øges med 33%, når højden øges med 10%

Opgave 10: I en model kan den gennemsnitlige årlige CO_2-udledning pr. person som funktion af tiden beskrives ved

$$C(t) = \frac{900000 \cdot 1{,}031^t}{t+38},$$

hvor $C(t)$ måles i kg, og tiden t betegner antal år efter 1950.

a) Udtrykket differentieres i t = 72 på TI n'spire. Her vises to metoder. Den første i linje 1, mens den anden er linjerne 2 og 3:

$\frac{d}{dt}\left(\frac{900000 \cdot (1.031)^t}{t+38}\right)|t=72$ $\qquad 1580.0251$

$f(t) := \frac{d}{dt}\left(\frac{900000 \cdot (1.031)^t}{t+38}\right)$ $\qquad$ *Udført*

$f(72)$ $\qquad 1580.0251$

Dvs. at $\underline{\underline{C'(72) = 1580}}$, hvilket vil sige, at i år 2022 (1950 + 72) øges den gennemsnitlige årlige CO_2-udledning pr. person med 1580 kg pr. år.

Opgave 11: Det er et uafhængighedstest, der skal anvendes.

Dvs. nulhypotesen må derfor nødvendigvis blive

H_0: Børns rygevaner er uafhængige af forældres rygevaner.

Dette giver dog en slags problem i forhold til opgavens konklusion, fordi opgaven er formuleret på en måde, så den kun kan besvares, hvis nulhypotesen forkastes (se nedenfor).

Nulhypotesen undersøges ved et χ^2-uafhængighedstest ved på TI n'spire at indtaste:

$chi22way\begin{bmatrix} 35 & 33 \\ 23 & 46 \end{bmatrix} : stat.results$, der giver:

$$\chi^2 = 4,6149457$$

$$p_{val} = 0,03169 = 3,2\%$$

$$df = 1$$

Signifikansniveauet er sat til 5%, og da p-værdien er under 5%, må nulhypotesen altså forkastes.

Dvs. der er IKKE belæg for at hævde, at børns rygevaner er uafhængige af forældres rygevaner.

Da der er én frihedsgrad, og da man arbejder med signifikansniveauet 5%, kunne man også være kommet frem til konklusionen ud fra χ^2-værdien, der skal sammenlignes med 3,84, og da den er større end denne, må nulhypotesen forkastes.

Problemet med opgaveformuleringen er, at man i det tilfælde, hvor nulhypotesen ikke var blevet forkastet, skulle have konkluderet, at der ikke var belæg for at hævde, at børns rygevaner ikke er uafhængige af forældres rygevaner, og det ville i så fald ikke have været et svar på opgaven.

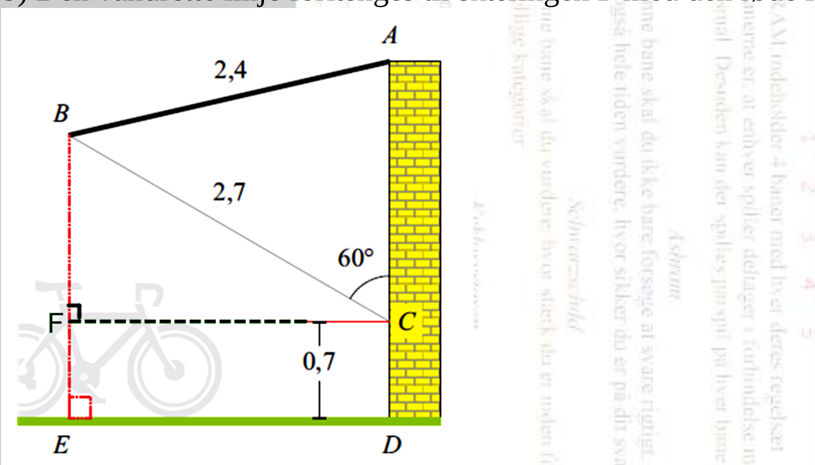
Opgave 12: a) Man kender to sider og en vinkel, der ikke dannes af de to sider, så man skal bruge sinusrelationer til at bestemme vinkel A i trekant ABC:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \Leftrightarrow \sin A = \frac{\sin C}{c} \cdot a$$

Da vinkel A ses at være spids, har man:

$$A = \sin^{-1}\left(\frac{\sin 60°}{2,4} \cdot 2,7\right) = \underline{\underline{76,9767188198°}}$$

b) Den vandrette linje forlænges til skæringen F med den røde linje.



Trekant BCF er retvinklet, og $\angle BCF = 90° - 60° = 30°$. Så man har:

$$\sin 30° = \frac{|BF|}{2,7} \quad \Leftrightarrow \quad |BF| = 2,7 \cdot \sin 30° = 1,35$$

Og dermed er:

$$|BE| = |BF| + |FE| = 1,35 + 0,7 = \underline{\underline{2,05}}$$

<u>Opgave 13:</u> $f(x) = -x^3 + 3x^2 + x + 4$

Tangenten skal have hældningen 4. Hældningen svarer til differentialkvotienten, så først skal den afledede funktion bestemmes:

$$f'(x) = -3x^2 + 6x + 1$$

Hvis hældningen skal være 4, har man:

$$4 = -3x^2 + 6x + 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$0 = -3x^2 + 6x - 3 \quad \Leftrightarrow$$

$$0 = x^2 - 2x + 1 \quad \Leftrightarrow$$

Denne andengradsligning kan løses ved diskriminantmetoden, eller man kan bemærke, at man kan bruge 2. kvadratsætning:

<u>Metode 1. Kvadratsætning nr. 2:</u>

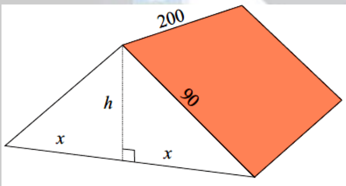
$0 = x^2 - 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = (x-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 1}}$ Dette er den søgte førstekoordinat til punktet.

<u>Metode 2. Diskriminantmetoden:</u>

$d = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$ dvs. 1 løsning

$$x = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = \underline{\underline{1}}$$

<u>Opgave 14:</u> Der er dannet en retvinklet trekant med hypotenusen 90, så Pythagoras giver:



a) $h^2 + x^2 = 90^2 \quad \Leftrightarrow \quad h^2 = 90^2 - x^2$ (h er positiv, så der er ikke ± foran kvadratroden)

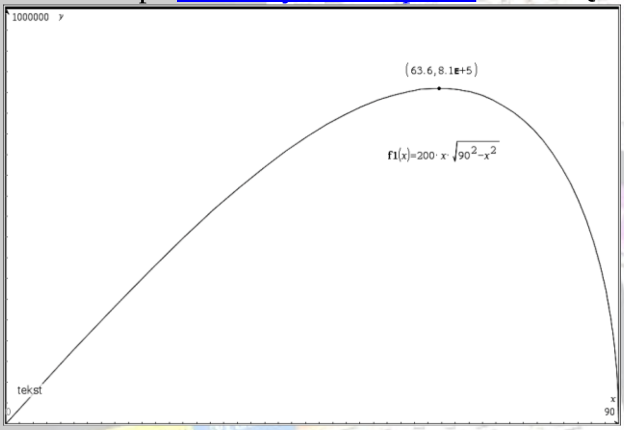
$$\underline{\underline{h = \sqrt{90^2 - x^2}}}$$

Rumfanget kan bestemmes ved at gange trekantens (indgangens) areal med længden af hulen:

$R = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (2x) \cdot 200 = 200hx$ Så kan h indsættes:

$$R(x) = \underline{\underline{200 \cdot x \cdot \sqrt{90^2 - x^2}}}$$

b) Funktionen indskrives under grafer, og maksimum bestemmes ved "Undersøg grafer" og "Maksimum". Det er angivet i opgaven, at x-værdierne skal være mellem 0 og 90. Vinduets y-maks er vurderet ud fra funktionsværdien R(45) = 701481, der jo skal kunne ses i vinduet.



Dvs. at x=63,8 giver det største rumfang.

7. december 2012: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: Først ses på trekant ABC. Da den er retvinklet, kan den manglende katetelængde bestemmes ved Pythagoras:

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 \quad \Leftrightarrow \quad |BC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2$$

$$|BC| = \sqrt{|AB|^2 - |AC|^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = \underline{\underline{8}}$$

Da trekanterne er ensvinklede, kan skalafaktoren (fra den lille trekant til den store trekant) bestemmes ud fra forholdet mellem ensliggende sider:

$$k = \frac{|DF|}{|AC|} = \frac{30}{6} = 5$$

Og så kan de resterende sidelængder bestemmes:

$$|EF| = k \cdot |BC| = 5 \cdot 8 = \underline{\underline{40}}$$

$$|DE| = k \cdot |AB| = 5 \cdot 10 = \underline{\underline{50}}$$

Opgave 2: $P(x) = 3x^2 - 6x + 7$

I toppunktsformlen indgår diskriminanten, så den bestemmes først:

$$d = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = 36 - 84 = -48$$

Så kan koordinatsættet til toppunktet bestemmes:

$$T\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right) = T\left(\frac{-(-6)}{2 \cdot 3}, \frac{-(-48)}{4 \cdot 3}\right) = T\left(\frac{6}{6}, \frac{48}{12}\right) = \underline{\underline{T(1,4)}}$$

Opgave 3: Det er opgivet, at modellen skal være lineær.

Dvs. at hvis mængden af vand (målt i L) betegnes med V og tiden (målt i uger fra påfyldningen) med t, skal sammenhængen være på formen:

$$V(t) = a \cdot t + b$$

Da *b* er begyndelsesværdien, og da der påfyldes 1,5L, er b = 1,5.

Da *a* er hældningen, og da der forsvinder 0,2L vand om ugen, er a = -0,2

Dvs. modellens forskrift er:

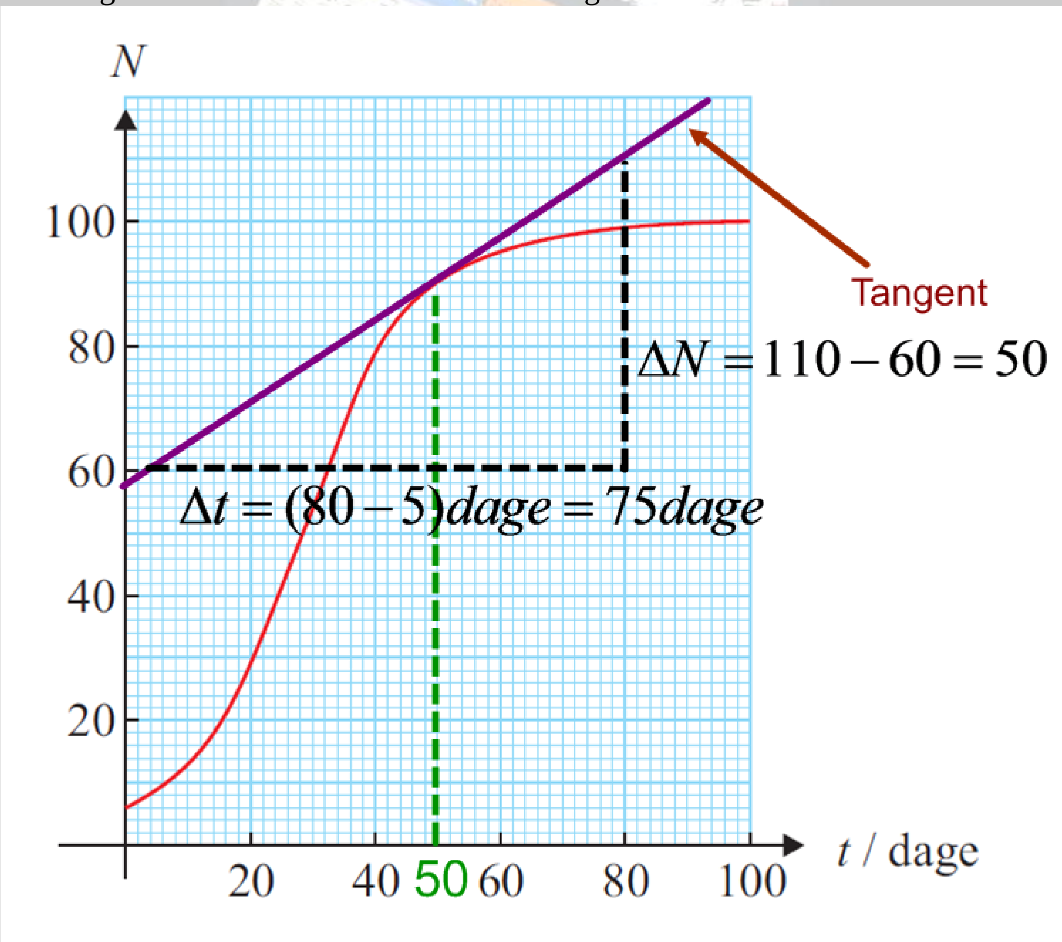
$$\underline{\underline{V(t) = -0,2 \cdot t + 1,5}}$$

Opgave 4: $\frac{p \cdot h}{4} = 4M$

Man kan isolere *h* ved at multiplicere med 4 og dividere med *p* på begge sider af lighedstegnet:

$$\frac{p \cdot h}{4} = 4M \quad \Leftrightarrow \quad p \cdot h = 4 \cdot 4M \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{h = \frac{16M}{p}}}$$

Opgave 5: Væksthastigheden er differentialkvotienten det pågældende sted, dvs. det er hældningen for tangenten til grafen i t = 50.
Altså tegnes der først efter bedste evne en tangent her:



Væksthastigheden v svarende til tangentens hældning er så:

$$v = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{50}{75\,\text{dage}} = \frac{2}{3}\,\text{pr. dag} = \underline{\underline{0,67\,\text{pr. dag}}}$$

Opgave 6: $f(x) = 2\cdot x^{3,5} + x^2 + 10 \qquad g(x) = 7\cdot x^{2,5} + 2x$

Det undersøges, om f er en stamfunktion til g, ved at se, om $f'(x) = g(x)$.
Der differentieres ledvist:

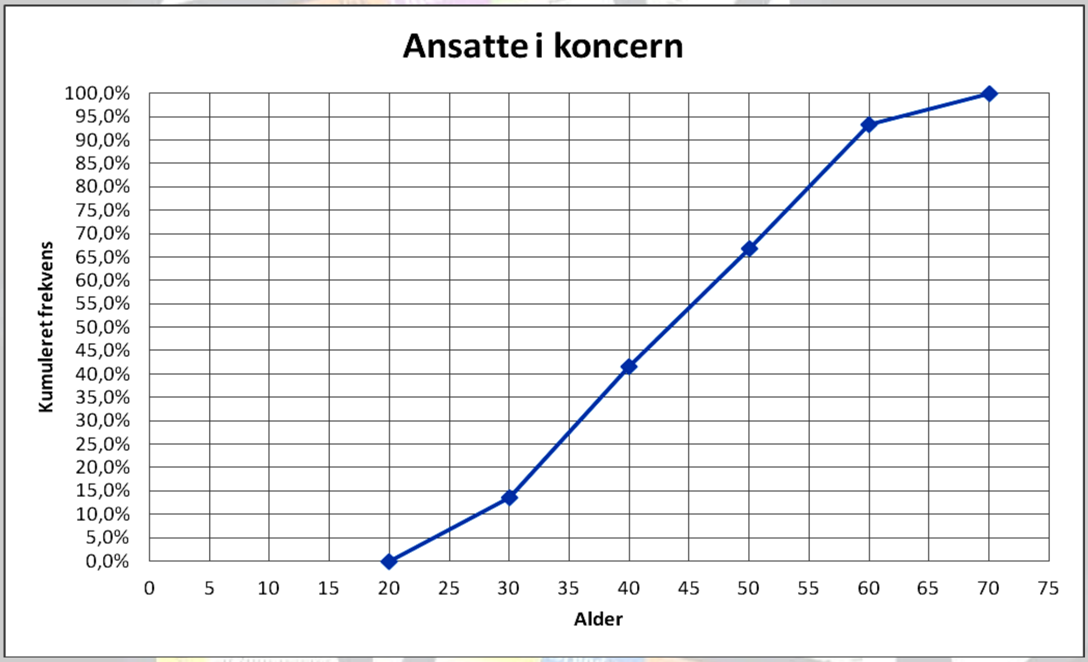
$$f'(x) = 2\cdot 3,5\cdot x^{2,5} + 2x + 0 = 7x^{2,5} + 2x = g(x)$$

<u>Da f'(x)=g(x) er *f* en stamfunktion til *g*</u>

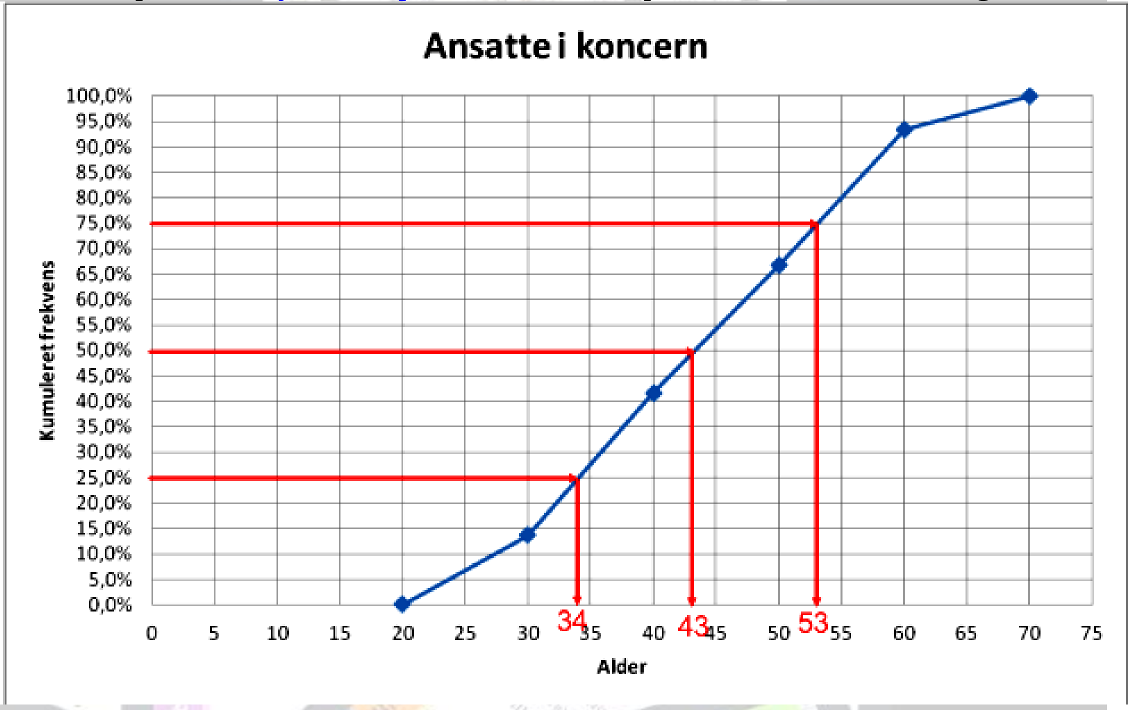
7. december 2012: Delprøven MED hjælpemidler

Opgave 7: For at kunne bestemme en sumkurve, skal man først have udregnet de kumulerede frekvenser, hvorefter sumkurven kan tegnes ved at afsætte de kumulerede frekvenser ved intervallernes højre endepunkter og forbinde punkterne med rette linjestykker (desuden tilføjes den kumulerede frekvens 0% ved alderen 20år, da ingen er under den alder):

Alder (år)	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 – 70
Andel (i %)	13,6%	27,9%	25,3%	26,5%	6,7%
Kum. frek.	13,6%	41,5%	66,8%	93,3%	100%



Kvartilsættet bestemmes ved at gå ind fra 25% (nedre kvartil), 50% (median) og 75% (øvre kvartil), hvorefter kvartilsættet kan aflæses på 1. aksen:



Dvs. at <u>kvartilsættet er (34år , 43år , 53år)</u>

<u>*Opgave 8:*</u> $f(x) = b \cdot a^x$ *f(x)* er danskernes gæld til det offentlige i mia. kr. og *x* er antal år efter 2006.

Årstal	2006	2007	2008	2009	2010
Gæld (mia. kr)	50,1	54,8	60,2	65,8	72,1

a) Forskriften er en eksponentiel udvikling, så der skal laves eksponentiel regression.
Årstallene efter år 2006 (dvs. tallene 0, 1, 2, 3, 4) indtastes på TI n'spire "Lister og regneark" under liste A og gælden i liste B.
Der vælges "Statistik" --> "Statistiske beregninger" --> "Eksponentiel regression" og:
X-liste: a[]
Y-liste: b[]
Gem RegEqn i: f1
Frekvensliste: 1

	A	B	C	D	E
◆				=ExpReg(a[],b[],1	
1	0	50.1	Titel	Eksponentiel regr...	
2	1	54.8	RegEqn	a*b^x	
3	2	60.2	a	50.0895470217	
4	3	65.8	b	1.09537806846	
5	4	72.1	r²	0.999945052282	
6			r	0.999972525764	
7			Resid	{0.010452978285...	
8			ResidTra...	{2.086640499686...	

Lommeregneren har byttet rundt på a og b i forhold til vores forskrift, så man har:

$\underline{\underline{a = 1,095378 \text{ og } b = 50,089547}}$

b) Da *a*-værdien er over 1, er det en voksende funktion, og fordoblingstiden bestemmes ved:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1,09537806846)} = 7,60867661394$$

<u>Dvs. for hvert 7,6 år, vil danskernes gæld til det offentlige ifølge modellen fordobles</u>

Da funktionen er gemt som f1 på lommeregneren, kunne det også have været beregnet ved:

```
solve(f1(x+t2)=2·f1(x),t2)
                    t2=7.60867661389
```

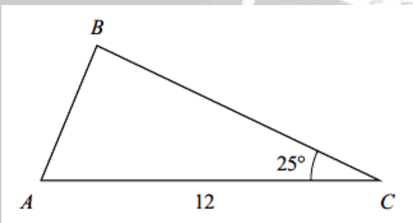
c) Gælden er vokset til 120 mia. kr., når *f(x)=120*. Denne ligning løses ved:

```
solve(f1(x)=120,x)        x=9.59037877622
```

x = 9,6 svarer til år 2006 + 9,6 = 2015,6.

<u>Dvs. at i løbet af år 2015 vil danskernes gæld ifølge modellen være oppe på 120 mia. kr.</u>

Opgave 9:



a) Der ses på den situation, hvor $|BC| = 10$:

Så kan længden af siden AB bestemmes ved en cosinusrelation, da man kender en vinkel og de to sider, der danner vinklen:

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \cos C$$

$$|AB| = \sqrt{12^2 + 10^2 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot \cos 25°} = \sqrt{26,4861311112} = \underline{\underline{5,14646782864}}$$

Arealet kan bestemmes med ½-appelsinformlen:

$$T = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \sin C = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 \cdot \sin 25° = 60 \cdot \sin 25° = \underline{\underline{25,3570957044}}$$

b) Nu ses på en anden situation, hvor arealet af trekant ABC er 15:
Samme formel som ovenfor benyttes:

$$T = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \sin C$$

$$15 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot |BC| \cdot \sin 25° \quad \Leftrightarrow \quad |BC| = \frac{15 \cdot 2}{12 \cdot \sin 25°} = \underline{\underline{5,91550395788}}$$

For at kunne bestemme vinkel B, skal man først kende siden c, da man ellers ikke kan anvende sinusrelationerne.
Så først bestemmes siden c ved hjælp af en cosinusrelation:

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \cos C$$

$$|AB| = \sqrt{12^2 + 5,91550395788^2 - 2 \cdot 12 \cdot 5,91550395788 \cdot \cos 25°} =$$

$$\sqrt{50,3227718451} = 7,09385451254$$

Så kan vinkel B bestemmes med sinusrelationerne:

$$\frac{\sin B}{|AC|} = \frac{\sin C}{|AB|} \quad \Leftrightarrow \quad \sin B = \frac{\sin C}{|AB|} \cdot |AC|$$

$$\sin B = \frac{\sin 25°}{7,09385451254} \cdot 12 = 0,71490317879 \quad \Leftrightarrow$$

$$B = \sin^{-1}(0,71490317879) \ \vee \ B = 180° - \sin^{-1}(0,71490317879) \quad \Leftrightarrow$$

$$B = 45,6352648749° \ \vee \ B = 134,364735125°$$

Man skal nu finde ud af, om det er den spidse eller den stumpe vinkel, der er den søgte vinkel. Siden over for vinkel B har længden 12, mens de andre sider er 7,1 og 5,9. Dvs. vinkel B ligger over for den længste side og må altså være den største af vinklerne.

Hvis B er 45,6°, er vinkel A 180°-45,6°-25°=109,4°, hvilket er i modstrid med ovenstående, da det så er vinkel A, der er størst.

Det er altså den stumpe vinkel, der er den søgte, dvs. $\underline{\underline{B = 134{,}364735125°}}$

Opgave 10: Det er angivet, at der er tale om potensvækst, dvs. $y = b \cdot x^a$

x	1	2
y	5	15

Metode 1:

Der er opgivet to punkter på grafen, der kan sættes ind i ligningen, så konstanterne kan bestemmes:

$$\left.\begin{array}{r} 5 = b \cdot 1^a \\ 15 = b \cdot 2^a \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{15}{5} = \frac{b \cdot 2^a}{b \cdot 1^a} \Leftrightarrow 3 = \frac{2^a}{1^a} \Leftrightarrow 3 = 2^a \Leftrightarrow \ln(3) = a \cdot \ln(2) \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} = 1{,}58496250072$$

b-værdien bestemmes ved indsættelse af det første punkt og konstanten a i ligningen:

$$5 = b \cdot 1^{1{,}58496} \Leftrightarrow b = 5$$

Så er ligningen:

$$\underline{\underline{y = 5 \cdot x^{1{,}58496250072}}}$$

Når x = 8 har man:

$$y = 5 \cdot 8^{1{,}58496250072} = \underline{\underline{135}}$$

Metode 2:

De to ligninger løses på TI n'spire med 'solve':

$$\text{solve}\left(5=b\cdot 1^a \text{ and } 15=b\cdot 2^a, a, b\right)$$

$$a=\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \text{ and } b=5$$

Metode 3:

Graferne for potensfunktioner går gennem (1,b), så man kan se, at b = 5.

Så kan *a*-værdien bestemmes ved at indsætte det andet punkt i ligningen:

$$15 = 5 \cdot 2^a \Leftrightarrow \frac{15}{5} = 2^a \Leftrightarrow 3 = 2^a \Leftrightarrow a = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$$

Opgave 11: $O = m^{0{,}425} \cdot h^{0{,}725} \cdot 0{,}007184$

O er overfladearealet målt i m^2. m er personens vægt i kg. h er personens højde i cm.

a) Overfladearealet for en person med højden 150cm og vægten 67 kg bestemmes ved:

$$O = 67^{0{,}425} \cdot 150^{0{,}725} \cdot 0{,}007184 = 1{,}62223690681$$

Dvs. at personens overfladeareal er 1,62 m^2

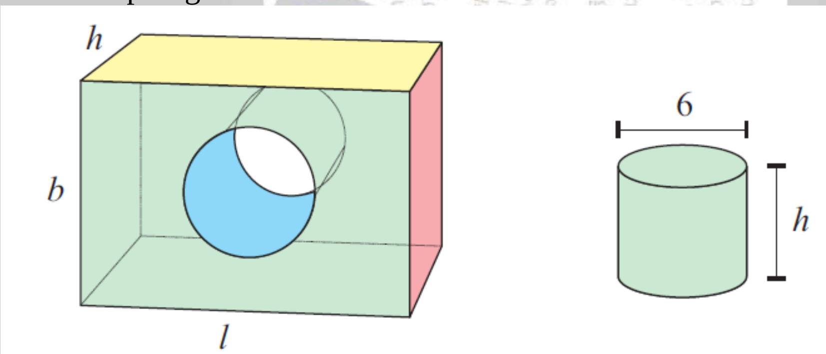
b) Højden for en person på 92kg med overfladearealet 2,16m^2 bestemmes på TI n'spire ved:

$$\text{solve}\left(2.16=92^{0.425}\cdot h^{0.725}\cdot 0.007184, h\right)$$

$$h=184.869665907$$

Dvs. <u>højden af personen er 185 cm</u>

Opgave 12: Alle mål på figuren er i cm:



a) Rumfanget af træklodsen FØR cylinderen blev udskåret var:

$V_{\text{Hel træklods}} = l \cdot b \cdot h$

Rumfanget af den udskårne cylinder, der har radius 3, er:

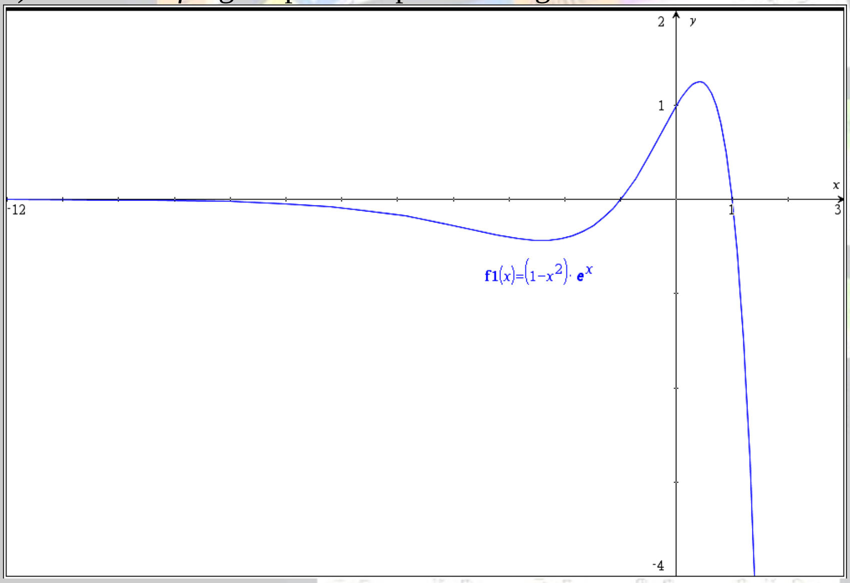
$V_{cylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 3^2 \cdot h = 9 \cdot \pi \cdot h$

Hermed er rumfanget af den udskårne træklods:

$V_{\text{Udskåret træklods}} = V_{\text{Hel træklods}} - V_{cylinder} = l \cdot b \cdot h - 9\pi \cdot h = \underline{\underline{(l \cdot b - 9\pi) \cdot h}}$

Opgave 13: $f(x) = (1 - x^2) \cdot e^x \qquad P(1, f(1))$

a) Grafen for *f* tegnes på TI n'spire under grafer:



Vinduet tilpasses, så man kan se de to lokale ekstremumspunkter, samt at førsteaksen tilsyneladende er en vandret asymptote.

Tangentligningen i P bestemmes på TI n'spire ved:

$\text{tangentLine}((1-x^2)\cdot e^x, x, 1) \qquad 2\cdot e - 2\cdot e\cdot x$

$\text{tangentLine}((1-x^2)\cdot e^x, x, 1)$

$5.43656365692 - 5.43656365692\cdot x$

Dvs. at tangentligningen er $\underline{\underline{y = -2ex + 2e}}$

b) Nulpunkter for den afledede funktion bestemmes på TI n'spire ved:

$f(x):=(1-x^2)\cdot e^x$ Udført

$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(f(x))=0,x\right)$ $x=-(\sqrt{2}+1)$ or $x=\sqrt{2}-1$

$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(f(x))=0,x\right)$

$x=-2.41421356237$ or $x=0.414213562373$

Disse to steder ses på grafen, hvor man kan se, at det første er et lokalt minimum, mens det andet er et lokalt maksimum.
Derfor bliver monotoniforholdene:
f er aftagende i intervallet]-∞; -2,4142]
f er voksende i intervallet [-2,4142 ; 0,4142]
f er aftagende i intervallet [0,4142 ; ∞[

c) Da funktionen allerede er defineret på lommeregneren , bestemmes det bestemte integral ved:

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ $4\cdot e^{-1}$

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ 1.47151776469

Dvs. at $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 1,471518$

Hvis funktionen ikke er negativ (dvs. hvis grafen ikke ligger under x-aksen) i det pågældende interval, vil det bestemte integral svare til arealet mellem grafen og førsteaksen afgrænset af integralets nedre og øvre grænse (som lodrette linjer).
Så det skal undersøges, om grafen i det pågældende område ligger over eller under førsteaksen.
Skæringerne mellem grafen og førsteaksen bestemmes (det udnyttes, at e^x er positiv for alle x):

$$0=(1-x^2)\cdot e^x \Leftrightarrow (1-x^2)=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \underline{x=-1 \vee x=1}$$

Disse steder svarer netop til den nedre og den øvre grænse i integralet, og det ses på figuren, at grafen ligger over x-aksen inde i dette interval. Dermed angiver tallet 1,471518 arealet af området mellem grafen for *f* og førsteaksen i intervallet [-1,1]

Opgave 14: a) Populationen er beboerne i de to boligkvarterer.

Nulhypotesen lyder: Gener af det udendørs støjniveau er uafhængigt af, hvilket af boligkvartererne A og B, man bor i.

Nulhypotesen undersøges ved et χ^2-uafhængighedstest ved på TI n'spire at indtaste:

$$chi22way\begin{bmatrix} 62 & 71 \\ 140 & 99 \end{bmatrix} : stat.results$$, der giver:

$\chi^2 = 4,92626$

$p_{val} = 0,02645 = 2,6\%$

$df = 1$

Signifikansniveauet er sat til 5%, og da p-værdien er under 5%, må nulhypotesen altså forkastes.

Dvs. der er signifikant forskel i generne af udendørs støj afhængigt af, om man bor i boligkvarter A eller B.