Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Løsninger til eksamensopgaver på B-niveau 2013

24. maj 2013: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: $y = a \cdot x + b$

x	2	6
y	5	29

Metode 1:
Man kan bestemme *a* ved at indsætte de sammenhørende værdier i ligningsudtrykket, så der fremkommer to ligninger, der kan trækkes fra hinanden:

$$\left.\begin{array}{r} 5 = a\cdot 2 + b \\ 29 = a\cdot 6 + b \end{array}\right\} \Rightarrow (29-5) = (6a+b)-(2a+b) \Leftrightarrow 24 = 4a \Leftrightarrow a = \frac{24}{4} = \underline{\underline{6}}$$

Metode 2:
Det er en lineær sammenhæng, så a-værdien kan bestemmes ved:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{29-5}{6-2} = \frac{24}{4} = \underline{\underline{6}}$$

Opgave 2: Arealet kan bestemmes ud fra en grundlinje og tilhørende højde ved : $T = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

Så man har:

$$T = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h_c \Leftrightarrow |AB| = \frac{2 \cdot T}{h_c} = \frac{2 \cdot 20}{5} = \frac{40}{5} = \underline{\underline{8}}$$

Opgave 3: $f(x) = x^2 - 2x - 3$

Man skal bruge diskriminanten til at bestemme koordinatsættet til parablens toppunkt:

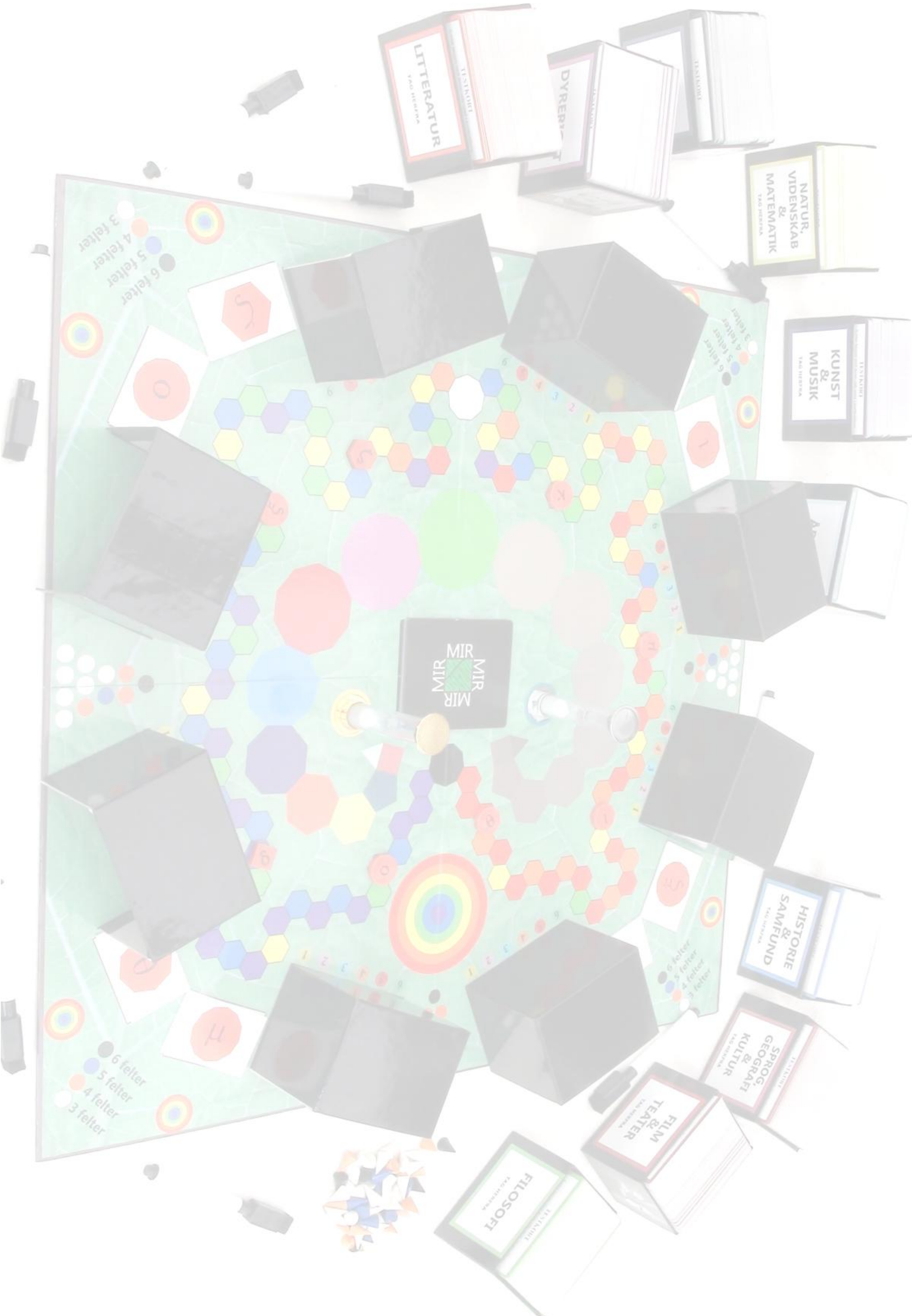
$$d = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -3 = 4 + 12 = 16$$

Parablens toppunkt er så: $T\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-d}{4a}\right) = T\left(\frac{-(-2)}{2\cdot 1}; \frac{-16}{4\cdot 1}\right) = T\left(\frac{2}{2}; \frac{-16}{4}\right) = \underline{\underline{T(1;-4)}}$

Opgave 4: Det er eksponentielle udviklinger, hvor det er fremskrivningsfaktoren *a*, der bestemmer, hvor hurtigt vækshastigheden øges.
Vækshastigheden øges langsomst for funktionen *h*, der derfor har den mindste fremskrivningsfaktor *a*.
Da fordoblingskonstanten er givet ved $T_2 = \frac{\ln 2}{\ln a}$, og da ln(*a*) giver en mindre værdi, jo mindre *a*-værdi, så vil brøken (dvs. selve T_2) øges, når *a*-værdien bliver mindre.
Dvs. at funktionen *h* har den største fordoblingskonstant.

Man kan også se det ved at betragte graferne og lægge mærke til, at med udgangspunkt i et vilkårligt punkt på graferne, er der for grafen svarende til funktionen *h*, at man skal øge x-værdien mest muligt, for at den pågældende y-værdi fordobles, hvilket vil sige, at den har den største fordoblingskonstant.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD



Opgave 5: $f(x) = -2x^4 + 2x + 5$

Den afledede funktion bestemmes ved at differentiere ledvist:

$$f'(x) = -2 \cdot 4x^3 + 2 + 0 = \underline{\underline{-8x^3 + 2}}$$

Opgave 6: $f(x) = -x^3 + 8$

Det er angivet på figuren, at grafen skærer 1. aksen i x = 2, men det kan også tjekkes ved at indsætte i forskriften og se, at funktionsværdien er 0, når x-værdien er 2:

$$f(2) = -2^3 + 8 = -8 + 8 = 0$$

Da grafen ligger over x-aksen, kan arealet bestemmes ved det bestemte integral:

$$A_M = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \left(-x^3 + 8\right)dx = \left[-\frac{1}{4} \cdot x^4 + 8x\right]_0^2 =$$

$$\left(-\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 8 \cdot 2\right) - \left(-\frac{1}{4} \cdot 0^4 + 8 \cdot 0\right) = -\frac{16}{4} + 16 = -4 + 16 = \underline{\underline{12}}$$

24. maj 2013: Delprøven MED hjælpemidler

Opgave 7: $y = ax + b$

y er antal trafikdræbte i det første halvår. x er tiden målt i år efter 2007.

a) Det er angivet, at det er en lineær sammenhæng, og da x er antal år efter 2007, indtastes på TI n'spire under 'Lister og regneark' 0, 1, 2, 3, 4, 5 under liste A og antallet af trafikdræbte under liste B.
Så vælges 'Statistik'-->'Statistiske beregninger'-->'Lineær regression (mx+b)':
X-Liste: a[]
Y-Liste:b[]
Gem RegEqn i: f1
Frekvensliste: 1

	A	B	C	D
◆				=LinRegMx(a[],b[],1): CopyV
1	0	195	Titel	Lineær regression (mx+b)
2	1	190	RegEqn	m*x+b
3	2	161	m	-24.7142857143
4	3	110	b	202.619047619
5	4	107	r²	0.944682812069
6	5	82	r	-0.971947947202
7			Resid	{-7.61904761905,12.095238...

Da lommeregneren har anvendt m i stedet for vores a, har man altså:

$\underline{\underline{a = -24{,}7 \text{ og } b = 202{,}6}}$

b) 1. halvår af 2013 svarer til $x = 6$, og da lommeregneren har gemt funktionen under f1 indtastes:

$f1(6)$ 54.3333333333

Dvs. at antallet af trafikdræbte i det første halvår af 2013 ifølge modellen er 54

c) Hvis antallet skal ned på 50 personer, skal x være en løsning til ligningen $50 = ax+b$.
Dette løses på lommeregneren ved:

solve$(f1(x)=50,x)$ $x=6.1753371869$

Dette svarer til år 2013,175, dvs. man skal ifølge modellen vente til år 2014, før antallet af dræbte er nede på 50 personer (i følge modellen endda et stykke under).

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>*Opgave 8:*</u> $f(x) = -0,009425 \cdot x^2 + 5,857 \cdot x - 899,9 \quad ; \quad 280 \leq x \leq 340$

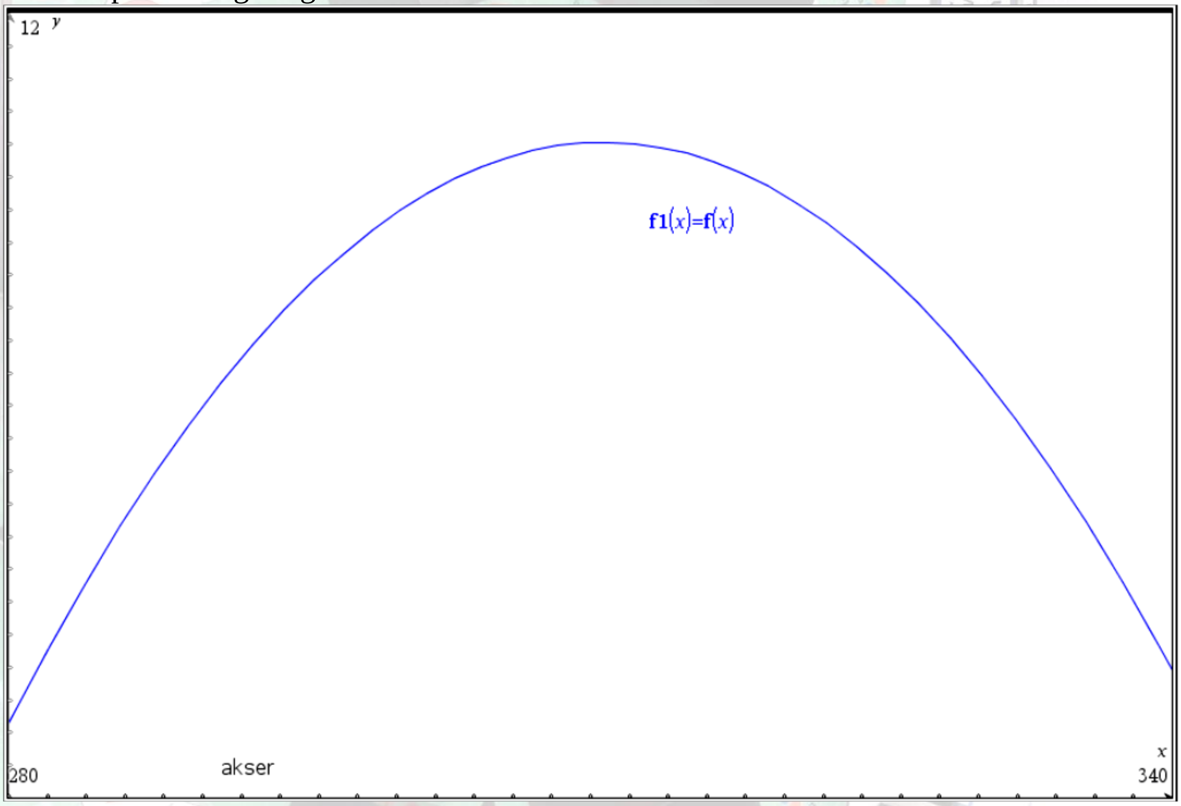
f(x) er antal æg skildpadden lægger, og *x* er længden af skildpaddens rygskjold målt i mm.

a) Inden man tegner grafen, kan man med fordel besvare anden del af spørgsmålet, da det giver en idé om størrelsen af y-vinduet. Et rygskjold på 300mm svarer til x = 300, så man indtaster:

$f(x):=-0.009425 \cdot x^2+5.857 \cdot x-899.9$	Udført
$f(300)$	8.95

Dvs. at ifølge modellen lægger en skildpadde med rygskjoldlængden 300mm <u>9 æg</u>

På TI n'spire indtegnes grafen nu:



b) En skildpadde, der lægger 6 æg, svarer til f(x) = 6:

$\text{solve}(f(x)=6,x)$

$x=290.032035012 \text{ or } x=331.40032573$

Det bemærkes, at begge løsninger ligger inden for definitionsmængden.

Dvs. at <u>både skildpadder med rygskjoldlængden 290mm og med 331mm</u> lægger ifølge modellen 6 æg

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>*Opgave 9:*</u> a) Lad *x* være antal år EFTER 2010 (dvs. *x=0* svarer til år 2010).
Lad *k(x)* være antal nye lungekræfttilfælde blandt kvinder i Danmark.

Da det er oplyst, at antallet stiger med 1,3% om året efter 2010 (dvs. en fast procentdel), er det en eksponentiel udvikling.
De 1,3% er vækstraten, og så bliver fremskrivningsfaktoren: $a = 1 + r = 1 + 0,013 = 1,013$
Da der var 2038 nye tilfælde af lungekræft blandt kvinder i 2010, der er begyndelsesåret, skal forskriften altså have begyndelsesværdien 2038.
Dvs. modellen bliver: $\underline{\underline{k(x) = 2038 \cdot 1,013^x}}$

b) $m(x) = 2244 \cdot 0,99^x$
m(x) er antal nye lungekræfttilfælde blandt mænd i Danmark.
Hvis antallet af nye lungekræfttilfælde blandt mænd og kvinder skal være lige stort, skal *m(x)=k(x):*

$k(x):=2038\cdot(1.013)^x$	*Udført*
$m(x):=2244\cdot(0.99)^x$	*Udført*
solve$(k(x)=m(x),x)$	$x=4.19266307902$

Dvs. at ifølge modellen vil det nye antal lungekræfttilfælde i Danmark være (næsten) lige stort blandt mænd og kvinder i <u>år 2014.</u>

<u>*Opgave 10:*</u> $|AB| = |AD| = 4 \quad \angle A = 10°$

a) Det er en ligebenet trekant, så egentlig kan man godt tegne en linje fra A til siden BD, der både vil være en vinkelhalveringslinje, højde, midtnormal og median og dermed danne to retvinklede trekanter, der kan regnes på.
Men man kan også regne på trekant ABD som en skævvinklet trekant, og da man kender en vinkel og de to hosliggende sider, kan den modstående side bestemmes ved en cosinusrelation:

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \cos A$$

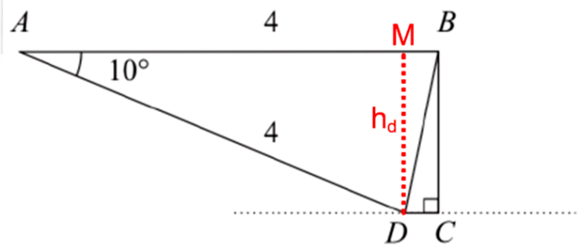
$$|BD| = \sqrt{4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 10°} = \sqrt{0,486151903609} = 0,69724594198102$$

Da enheden er meter, har man altså:

$$\underline{\underline{|BD| = 0,70\,m}}$$

b) Der er mange måder at bestemme længden af stykket BC på.

<u>1. metode:</u> Længden af stykket BC svarer til højden fra D i trekant ABD.



Da trekant ADM er retvinklet, har man:

$$\sin A = \frac{h_d}{|AD|} \Leftrightarrow h_d = |AD| \cdot \sin A$$

$$|BC| = h_d = 4m \cdot \sin(10°) = 0,69459271066772\,m \approx \underline{\underline{0,69m}}$$

<u>2. metode:</u> Længden af stykket BC svarer til højden fra D i trekant ABD (se figuren fra metode 1) Man kan bestemme arealet af trekant ABD med ½-appelsin-formlen, da man kender en vinkel og de to hosliggende sider. Og da arealet også kan bestemmes ud fra en grundlinje og den tilhørende højde, får man:

$$\left.\begin{aligned} T_{ABD} &= \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \sin A \\ T_{ABD} &= \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h_c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h_c \Leftrightarrow |AD| \cdot \sin A = h_c$$

Og så kan man se, at man ender med samme udregning som i metode 1.

<u>3. metode:</u> Trekant BCD er retvinklet, og man kender længden af BD, så for at bestemme længden af BC, skal man kende enten en vinkel eller længden af siden CD.
Længden af CD kan bestemmes med hjælp fra den retvinklede trekant ADM (Se figuren):

$$|DC| = 4 - |AM| = 4 - |AD| \cdot \cos A = 4 - 4 \cdot \cos 10° = 0,0607689879512$$

Så er:

$$|BD|^2 = |BC|^2 + |CD|^2$$

$$|BC| = \sqrt{|BD|^2 - |CD|^2} = \sqrt{0,69724594198102^2 - 0,0607689879512^2} = 0,69459271066747$$

Opgave 11: Nulhypotesen er, at der ikke er forskel på jydernes og sjællændernes smag for de to typer cornflakes, dvs. der skal arbejdes med et χ^2-uafhængighedstest.

a) De forventede værdier under forudsætning af, at nulhypotesen er sand, kan beregnes ved:

	A er bedst	B er bedst	Ved ikke	I alt
Jyder	61	40	24	125
Sjællændere	69	45	26	140
I alt	130	85	50	**265**

Udregning af de røde tal:

$$A_{bedst,i\,alt} = 55+75=130$$

$$B_{bedst,i\,alt} = 40+45=85$$

$$Jyder_{i\,alt} = 55+40+30=125$$

$$Sjællændere_{i\,alt} = 75+45+20=140$$

$$Antal\ adspurgte = 125+140=265$$

Så kan de forventede violette værdier beregnes:

$$A_{jyder} = \frac{130\cdot 125}{265} = 61,321$$

$$B_{jyder} = \frac{85\cdot 125}{265} = 40,094$$

$$Ved\ ikke_{jyder} = \frac{50\cdot 125}{265} = 23,585$$

$$A_{sjællændere} = \frac{130\cdot 140}{265} = 68,679$$

$$B_{sjællændere} = \frac{85\cdot 140}{265} = 44,906$$

$$Ved\ ikke_{sjællændere} = \frac{50\cdot 140}{265} = 26,415$$

Det kunne også have været bestemt på TI n'spire ved at indtaste:

$$\chi^2 2way \begin{bmatrix} 55 & 40 & 30 \\ 75 & 45 & 20 \end{bmatrix} : stat.ExpMatrix$$

$$\begin{bmatrix} 61.320754717 & 40.0943396226 & 23.5849056604 \\ 68.679245283 & 44.9056603774 & 26.4150943396 \end{bmatrix}$$

(Første del er fundet i kataloget ("bogen"), og matricen er valgt via knappen ved siden af 9-tallet)

b) Nulhypotesen testes så ved indtastningen:

$$\chi^2 2way \begin{bmatrix} 55 & 40 & 30 \\ 75 & 45 & 20 \end{bmatrix} : stat.results$$

$$\begin{bmatrix} \text{"Titel"} & \text{"}\chi^2\text{–uafhængighedstest"} \\ \text{"}\chi^2\text{"} & 4.53651906917 \\ \text{"PVal"} & 0.103492147928 \\ \text{"df"} & 2. \\ \text{"ExpMatrix"} & \text{"[...]"} \\ \text{"CompMatrix"} & \text{"[...]"} \end{bmatrix}$$

Da $p = 10,349\% > 5\%$, kan nulhypotesen IKKE forkastes, dvs. der er IKKE signifikant forskel mellem unge jyders og sjællænderes smag for de to typer cornflakes.

(Man kunne også være kommet frem til konklusionen ved at se på χ^2-teststørrelsen, hvor den skal sammenlignes med den kritiske værdi 5,99, fordi der er 2 frihedsgrader. Da teststørrelsen er under den kritiske værdi, kan nulhypotesen IKKE forkastes.)

Opgave 12: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 30$

a) For at bestemme monotoniforholdene skal man finde de steder, hvor den afledede funktion er nul samt fortegnene i de intervaller, der afgrænses af disse steder:

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \quad 0 = 3x^2 - 6x - 9 \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - 2x - 3 \Leftrightarrow \quad 0 = (x-3)(x+1) \Leftrightarrow \quad x = -1 \vee x = 3$

$f'(-2) = 3\cdot(-2)^2 - 6\cdot(-2) - 9 = 3\cdot 4 + 12 - 9 = 15 > 0$

$f'(0) = 3\cdot 0^2 - 6\cdot 0 - 9 = -9 < 0$

$f'(4) = 3\cdot 4^2 - 6\cdot 4 - 9 = 48 - 24 - 9 = 15 > 0$

Dvs. at et fortegnsskema bliver:

x		-1		3	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	↗		↘		↗

Dvs. at: <u>*f* er voksende i intervallerne]-∞;-1] og [3;∞[, og *f* er aftagende i [-1,3]</u>

b) En ligning for tangenten med røringspunktet P(0,f(0)) kan bestemmes på TI n'spire ved:

$f(x) := x^3 - 3\cdot x^2 - 9\cdot x + 30$	*Udført*
tangentLine$(f(x), x, 0)$	$30 - 9\cdot x$

Dvs. at ligningen for tangenten er: $\underline{\underline{y = -9x + 30}}$

Det kunne også være beregnet:

$f(0) = 0^3 - 3\cdot 0^2 - 9\cdot 0 + 30 = 30 \quad y-værdi\ for\ røringspunktet$

$f'(0) = -9 \quad Tangentens\ hældning$

Så bliver tangentens ligning: $y - 30 = -9\cdot(x - 0) \quad \Leftrightarrow \quad y = -9x + 30$

c) Hældningskoefficienten for den fundne tangent er -9. Dvs. hældningskoefficienten for den anden tangent skal også være -9.

Det er den afledede funktion, der angiver hældningskoefficienter for tangenter, så man har:

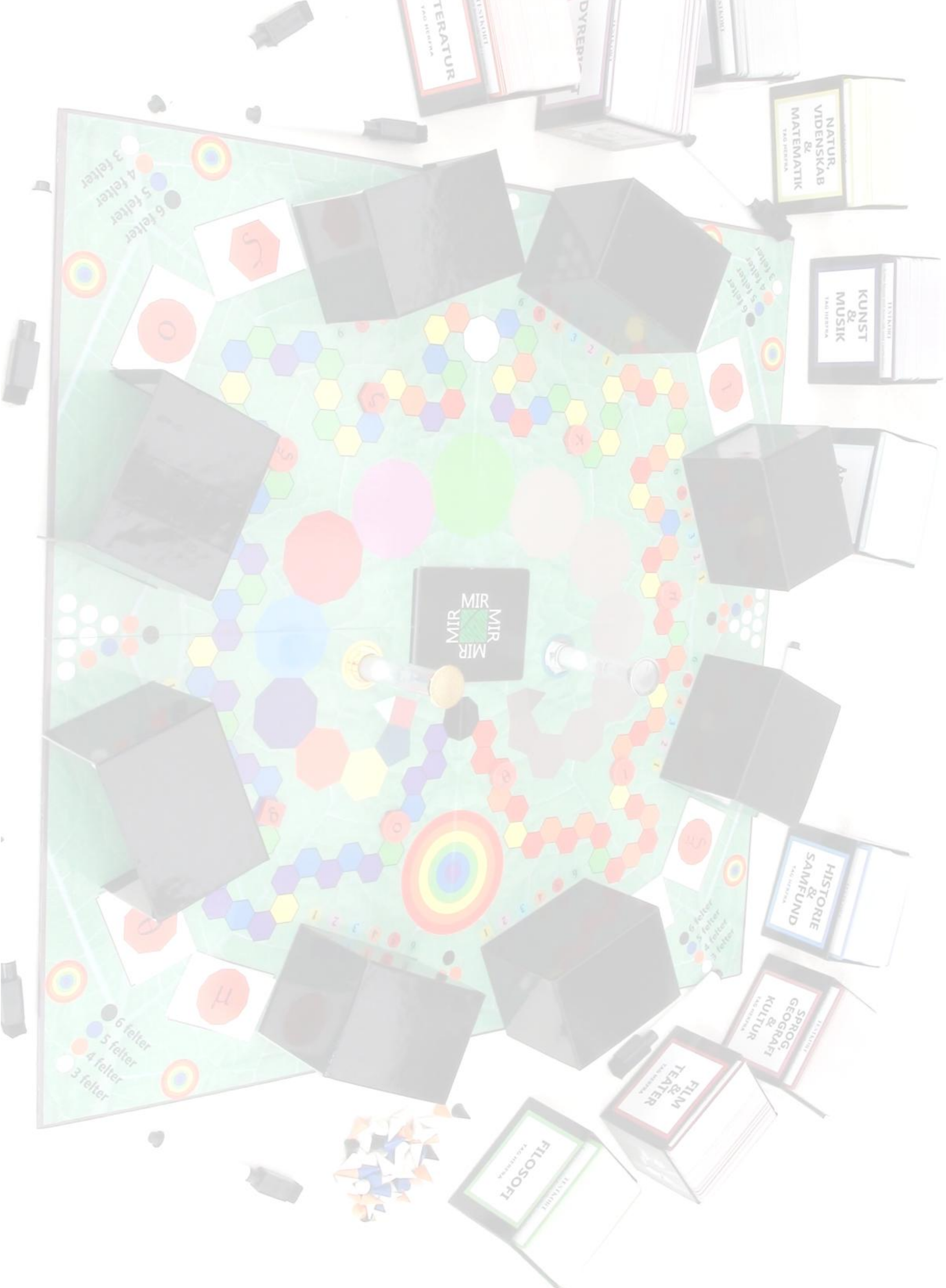
$f'(x) = -9$

Da $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ har man følgende ligning (der godt kunne have været løst med 'solve'):

$-9 = 3x^2 - 6x - 9 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 3x^2 - 6x \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - 2x \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x(x-2) \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 2$

Den første af løsningerne svarer til den tangent, man allerede kender fra spørgsmål b), dvs. førstekoordinaten for den anden tangent er:

$\underline{\underline{x = 2}}$



29. maj 2013: Delprøven UDEN hjælpemidler

<u>*Opgave 1:*</u> $f(x)=4\cdot 5^x$

Det sidste felt i tabellen udfyldes ved at indsætte *x*-værdien i forskriften:

$f(2)=4\cdot 5^2=4\cdot 25=\underline{\underline{100}}$

Dvs. tabellen bliver:

x	0	1	2
f(x)	4	20	100

<u>*Opgave 2:*</u> $-15x+5y-45=0 \Leftrightarrow 5y=15x+45 \Leftrightarrow y=\frac{15}{5}x+\frac{45}{5} \Leftrightarrow \underline{\underline{y=3x+9}}$

<u>*Opgave 3:*</u> Da det er en ligebenet trekant, deles højden fra B siden AC i to lige store stykker, og der dannes altså to kongruente retvinklede trekanter med kateten 6 og hypotenusen 10.
Pythagoras kan så bruges til at bestemme højden, der er den anden katete:

$6^2+h_b^2=10^2 \Leftrightarrow h_b^2=10^2-6^2 \Leftrightarrow h_b=\sqrt{100-36}=\sqrt{64}=\underline{\underline{8}}$

<u>*Opgave 4:*</u> $2x^2-8=0$

Man kan godt løse denne andengradsligning ved hjælp af diskriminantmetoden:

$d=b^2-4ac=0^2-4\cdot 2\cdot(-8)=64>0$ *dvs.* 2 *løsninger*

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{d}}{2a}=\frac{-0\pm\sqrt{64}}{2\cdot 2}=\frac{\pm 8}{4}=\begin{cases}2\\-2\end{cases} \quad dvs.\ \underline{\underline{x=-2 \lor x=2}}$$

Men det er nemmere bare at isolere x:

$2x^2-8=0 \Leftrightarrow 2x^2=8 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{4}=\underline{\underline{\pm 2}}$

<u>*Opgave 5:*</u> $f(x)=3x+2$

Den form samtlige stamfunktioner er på bestemmes ved at integrere:

$$F(x)=\int f(x)dx=\int(3x+2)dx=\frac{3}{2}x^2+2x+k$$

Da det kun er *p(x)*, der har denne form, er det <u>*p(x)*, der er en stamfunktion til *f(x)*</u>

<u>*Opgave 6:*</u> $f(x)=4\cdot e^x+1 \quad P(0,f(0))$

For at bestemme en ligning for tangenten til grafen for *f* i punktet P, skal man kende punktets koordinater og tangentens hældning:

y-værdien for røringspunktet: $f(0)=4\cdot e^0+1=4\cdot 1+1=5$

Den afledede funktion bestemmes: $f'(x)=4\cdot e^x+0=4\cdot e^x$

Tangentens hældning: $f'(0)=4\cdot e^0=4\cdot 1=4$

Dvs. at tangentens ligning bliver:

$y-5=4\cdot(x-0) \Leftrightarrow \underline{\underline{y=4x+5}}$

29. maj 2013: Delprøven MED hjælpemidler

<u>*Opgave 7:*</u> $y = ax + b$

y gennemsnitlig kuldstørrelse og x er antal ynglende sangspurvepar pr. acre.

a) Det er angivet, at det er en lineær sammenhæng, så på TI n'spire under 'Lister og regneark' gøres følgende: Under liste A indtastes kuldstørrelsen og under liste B antal ynglende par pr. acre.
Så vælges 'Statistik'-->'Statistiske beregninger'-->'Lineær regression (mx+b)':
X-Liste: a[]
Y-Liste:b[]
Gem RegEqn i: f1
Frekvensliste: 1

	A	B	C	D	E
◆				=LinRegMx(a[],b[],1	
1	5	3.8	Titel	Lineær regression ...	
2	18	3.6	RegEqn	m*x+b	
3	29	3.5	m	-0.0097061778	
4	46	3.4	b	3.8097187343	
5	55	3.2	r²	0.965000056524	
6	57	3.3	r	-0.98234416399	
7	66	3.2	Resid	{0.0388121546961...	
8	72	3.1			

Da lommeregneren anvender m i stedet for a har man:

$\underline{\underline{a = -0{,}0097061778 \quad og \quad b = 3{,}8097187343}}$

b) Når den gennemsnitlige kuldstørrelse er nede på 3,0, har man ligningen 3,0 = $ax + b$
Da forskriften er gemt som f1(x) på lommeregneren, løses ligningen ved:

solve$(f1(x)=3,x)$ $\qquad x=83.4230271669$

Dvs. ifølge modellen er der <u>83 ynglende sangspurvepar pr. acre,</u> når kuldstørrelse i gennemsnit er 3,0.

<u>*Opgave 8:*</u> a) Da den stiplede linje er parallel med siden AC, vil siden BC danne lige store vinkler med de to sider. Man kan også sige, at vinkel C svarer til topvinklen til vinklen på de 43°, hvis man parallelforskyder banen op, så C lægger sig oven i B (og topvinkler er lige store).
Dermed er $C = 43°$

For at kunne beregne den sidste side, skal man bruge sinusrelationer (da man skal kende mindste to sider for at bruge cosinusrelationer).
Den kendte side er AC, så man har brug for vinkel B for at kunne bruge sinusrelationer. Denne bestemmes ud fra vinkelsummen i en trekant:

$B = 180° - A - C = 180° - 58° - 43° = 79°$

Dvs. $\frac{|BC|}{\sin A} = \frac{|AC|}{\sin B} \Leftrightarrow |BC| = \frac{|AC|}{\sin B} \cdot \sin A = \frac{9{,}8km}{\sin 79°} \cdot \sin 58° = 8{,}46642338606km \approx \underline{\underline{8{,}5km}}$

b) Arealet kan beregnes, da man kender vinkel C og de to hosliggende sider:


Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

$$T=\frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|AC|\cdot\sin C=\frac{1}{2}\cdot 8,46642km\cdot 9,8km\cdot\sin(43°)=28,2930256379km^2\approx\underline{\underline{28,29km^2}}$$

Opgave 9: a) Kapitalfremskrivningsformlen anvendes til at bestemme den gennemsnitlige vækstrate:

$$K_n=K_0\cdot(1+r)^n$$

$$13359000=11105000\cdot(1+r)^{10}\Leftrightarrow(1+r)^{10}=\frac{13359000}{11105000}\Leftrightarrow$$

$$r=\sqrt[10]{\frac{13359000}{11105000}}-1=0,018651288105=\underline{\underline{1,865\%}}$$

b) t sættes til antal år efter 1994.
$f(t)$ angiver mængden af affald produceret i Danmark målt i tons.
Da der i 1994 (t=0) var 11105000 tons, er begyndelsesværdien 11105000.
Da vækstraten r er 1,865% , er fremskrivningsfaktoren $a=1+r=1+0,01865=1,01865$

Dvs. forskriften bliver: $\underline{\underline{f(t)=11105000\cdot 1,01865^t}}$

c) Fordoblingstiden kan bestemmes ud fra fremskrivningsfaktoren:

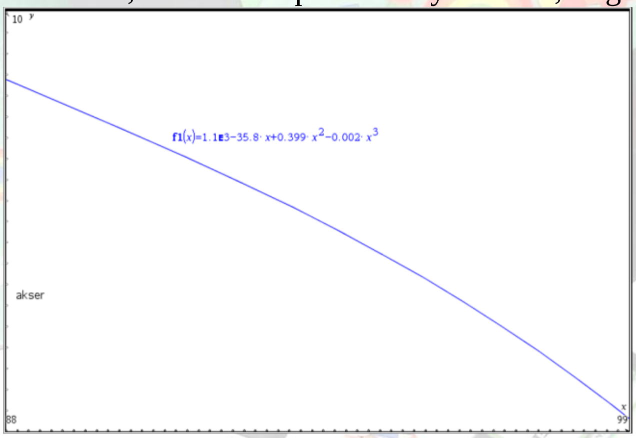
$$T_2=\frac{\ln 2}{\ln a}=\frac{\ln 2}{\ln 1,01865}=37,511575$$

Dvs. for <u>hver 38 år vil affaldsmængden ifølge modellen fordobles.</u>

Opgave 10: $f(x)=1097,9-35,8309\cdot x+0,398778\cdot x^2-0,00150341\cdot x^3 \quad , \quad 88\leq x\leq 99$

x er kropstemperaturen målt i Fahrenheit
$f(x)$ er tiden efter personens død målt i timer.

a) På TI n'spire indtastes forskriften under 'Grafer', og vinduet sættes til [88,99] for x-værdierne, mens der tilpasses for y-værdier, så grafen er med og fylder mest muligt:



Da funktionen er gemt som f1(x), kan man finde tiden svarende til kropstemperaturen 90 °F (x=90) ved:

Dvs. der er gået <u>7,2 timer</u>

b) To timer efter personens død er f(x) = 2. Denne ligning løses ved:

solve(f1(x)=2,x) x=97.3088784955

Dvs. kropstemperaturen efter 2 timer er 97,3°F

Opgave 11: a) Populationen er danske husstande og stikprøven er de 800 tilfældigt udvalgte husstande.

Nulhypotesen er: Internetadgangen i danske husstande er uændret siden 2010

b) Da det skal undersøges, hvor godt den nye fordeling svarer til den gamle, skal der anvendes GOF (Goodness of fit) test.
Så under forudsætning af, at nulhypotesen gælder, udregnes en tabel og forventede svar:

Internetadgang	ADSL	Kabelmodem	Fiberoptik	Mobilt bredbånd	Ved ikke
Forventet antal husstande	$38\% \cdot 800 =$ $0,38 \cdot 800 =$ 304	$33\% \cdot 800 =$ $0,33 \cdot 800 =$ 264	$8\% \cdot 800 =$ $0,08 \cdot 800 =$ 64	$11\% \cdot 800 =$ $0,11 \cdot 800 =$ 88	$10\% \cdot 800 =$ $0,10 \cdot 800 =$ 80

På TI n'spire foretages testet ved under 'Lister og regneark' at indtaste de observerede resultater i liste A og de forventede resultater i liste B.
Så vælges: 'Statistik'-->'Statistiske tests'-->'χ^2-Goodness of Fit test.
Antallet af frihedsgrader er 4, da man kan udregne det sidste tal, hvis man kender de fire første, så der skrives:
Observeret liste: a[]
Forventet liste: b[]
Frihedsgrad: 4

	A	B	C	D	E
◆					=χ²GOF(a[],b[],4): C
1	300	304		Titel	χ²-Goodness of Fi...
2	235	264		χ²	9.99505582137
3	78	64		PVal	0.040511048434
4	106	88		df	4.
5	81	80		CompLis...	{0.05263157894736..

Da $p = 4,051\% < 5\%$ må nulhypotesen forkastes.

Dvs. internetadgangen har ændret sig signifikant.

Opgave 12: $f(x) = 8 \cdot x^{-1} + \frac{1}{2} \cdot x - 3 \quad , \quad x > 0$

a) Udtrykket indtastes på TI n'spire, således at ligningen *f'(x) = 0* kan løses:

$f(x) := 8 \cdot x^{-1} + \frac{1}{2} \cdot x - 3$	*Udført*
$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(f(x)) = 0, x\right)$	$x = -4$ or $x = 4$

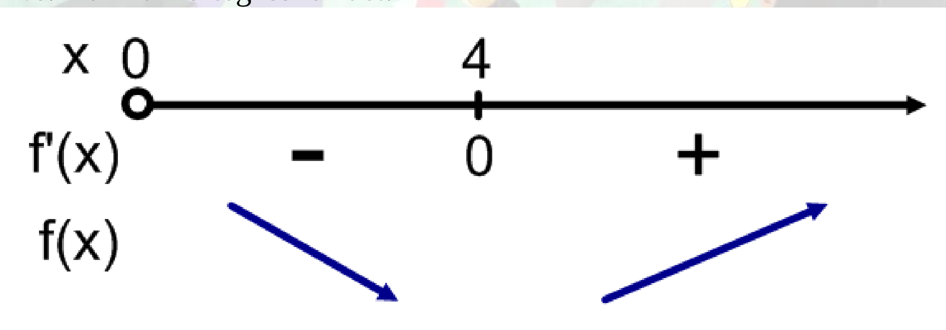
Den negative værdi ligger uden for definitionsmængden, så kun den positive gælder:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 4}}$

For at bestemme monotoniforholdene skal man kende fortegnet for den afledede funktion i intervaller på hver side af x = 4. Dette bestemmes ved at vælge to vilkårlige tal i intervallerne (her 2 og 5):

$f1(x) := \frac{d}{dx}(f(x))$	*Udført*
$f1(2)$	$\frac{-3}{2}$
$f1(5)$	$\frac{9}{50}$

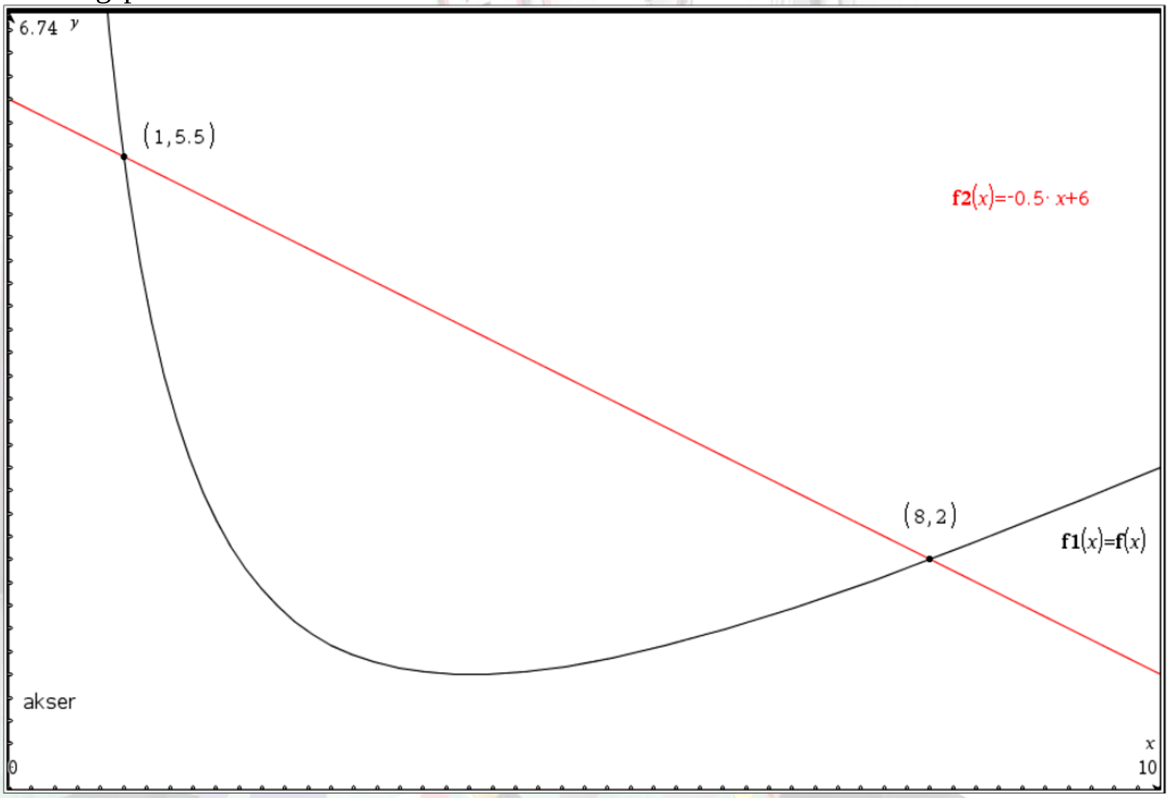
Dvs. man har fortegnsskemaet:



Dvs. *f* er aftagende i intervallet]0;4] og voksende i intervallet [4;∞[

b) $g(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + 6$

De to grafer indtegnes, og skæringspunkterne bestemmes ved at vælge 'Undersøg grafer' og 'Skæringspunkt':



Dvs. førstekoordinaterne for skæringspunkterne er: x = 1 og x = 8

c) Det er grafen for g, der ligger øverst i det pågældende interval, så arealet af M kan bestemmes ved:

$f(x)$	$\frac{x}{2}+\frac{8}{x}-3$
$g(x):=-0.5 \cdot x+6$	*Udført*
$\int_1^8 (g(x)-f(x))\,dx$	14.8644676666

Dvs. $\underline{\underline{A_M = 14{,}864468}}$

August 2013: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: Udtrykket reduceres ved først at udregne første led i udtrykket med en kvadratsætning:

$$(p-q)^2+2pq-q^2=p^2+q^2-2pq+2pq-q^2=\underline{\underline{p^2}}$$

Opgave 2: Lad x være antallet af købte enheder af den bestemte vare (der koster 45 kr. pr. enhed).
Lad y være ordrens samlede pris regnet i kr.

Forsendelsesgebyret på 100 kr. svarer til begyndelsesværdien, da det er prisen for det - hypotetiske - tilfælde, at man får tilsendt 0 varer.
De 45 kr. pr. enhed fortæller, at det er en lineær sammenhæng med hældningen 45:

$$\underline{\underline{y=45\cdot x+100}}$$

Opgave 3: $x^2-8x+7=0$
Andengradsligningen kan løses på forskellige måder:

1. Diskriminantmetoden:

$$d=b^2-4ac=(-8)^2-4\cdot 1\cdot 7=64-28=36>0$$

Da diskriminanten er positiv, er der to løsninger, som er:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{d}}{2\cdot a}=\frac{-(-8)\pm\sqrt{36}}{2\cdot 1}=\frac{8\pm 6}{2}=\begin{cases}7\\1\end{cases}$$

$$Dvs.\quad \underline{\underline{x=1\vee x=7}}$$

2. Gennemskue løsninger:
Man skal finde to tal, hvis sum er -8 og produkt er 7. Det gælder for -1 og -7, dvs:

$$x^2-8x+7=(x-1)(x-7)=0$$

Nulreglen giver så, at:

$$\underline{\underline{x=1\vee x=7}}$$

Opgave 4: $f(x)=e^x+x^2$
Der differentieres ledvist:

$$\underline{\underline{f'(x)=e^x+2x}}$$

Opgave 5: Da trekant ABC er retvinklet, kan hypotenusens længde bestemmes med Pythagoras:

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = \underline{\underline{5}}$$

For at kunne beregne omkredsen af trekant ADE, mangler man to af siderne. Disse kan beregnes, da de to trekanter er ensvinklede:

$$\frac{|DE|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|AB|}$$

$$|AD| = \frac{|DE|}{|BC|} \cdot |AB| = \frac{5}{4} \cdot 5 = \frac{25}{4}$$

$$\frac{|DE|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|AC|}$$

$$|AE| = \frac{|DE|}{|BC|} \cdot |AC| = \frac{5}{4} \cdot 3 = \frac{15}{4}$$

Så bliver omkredsen:

$$O_{ADE} = |AD| + |DE| + |AE| = \frac{25}{4} + 5 + \frac{15}{4} = \frac{25+15}{4} + 5 = \frac{40}{4} + 5 = 10 + 5 = \underline{\underline{15}}$$

Opgave 6: Der integreres ledvist, og grænserne sættes ind:

$$\int_0^2 \left(9x^2 + 3\right) dx = \left[3x^3 + 3x\right]_0^2 = \left(3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2\right) - \left(3 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0\right) = 3 \cdot 8 + 6 = 24 + 6 = \underline{\underline{30}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

August 2013: Delprøven MED hjælpemidler

Opgave 7: Den årlige affaldsproduktion fra danske husholdninger (målt i tons) betegnes *w(t)* og tiden (målt i år efter 1994) betegnes *t*. Det er angivet, at det er en eksponentiel sammenhæng: $w(t) = b \cdot a^t$.

Årstal	1994	1996	1998	2000	2002	2004	2006	2008
Årstal EFTER 1994	0	2	4	6	8	10	12	14
Affaldsproduktion (tons)	2575	2767	2796	3084	3121	3164	3298	3654

a) Konstanterne *a* og *b* bestemmes ved på TI n'spire under 'Lister og regneark' at gøre følgende:
Under liste A indtastes årstal EFTER 1994 og under liste B affaldsproduktion.
Så vælges 'Statistik'-->'Statistiske beregninger'-->'Eksponentiel regression':
X-Liste: a[]
Y-Liste:b[]
Gem RegEqn i: f1
Frekvensliste: 1

	A	B	C	D	E
◆				=ExpReg(:	
1	0	2575	Titel	Ekspone...	
2	2	2767	RegEqn	a*b^x	
3	4	2796	a	2605.28...	
4	6	3084	b	1.02233...	
5	8	3121	r²	0.94862...	
6	10	3164	r	0.97397...	
7	12	3298	Resid	{-30.288...	
8	14	3654	ResidTra...	{-0.0116...	

TI n'spire anvender *a* og *b* omvendt, så man har:

$$\underline{\underline{a = 1,02233 \ og \ b = 2605}}$$

b) År 2005 svarer til *t = 11*, og da funktionsforskriften blev gemt som f1(x), kan man bestemme den årlige affaldsproduktion fra danske husholdninger i 2005 ved:

$f1(11)$ 3321.74016464

Dvs. at affaldsproduktionen er 3322 tons i 2005

Den t-værdi, der svarer til en affaldsproduktion på 3500 tons, bestemmes ved at løse ligningen:

$$w(t) = 3500$$

Dette gøres ved:

$\text{solve}(f1(x)=3500,x)$ $x=13.3668513447$

Dvs. at den årlige affaldsproduktion var 3500 tons i år 2007.

c) Modellen forudsiger en affaldsproduktion på w(15):

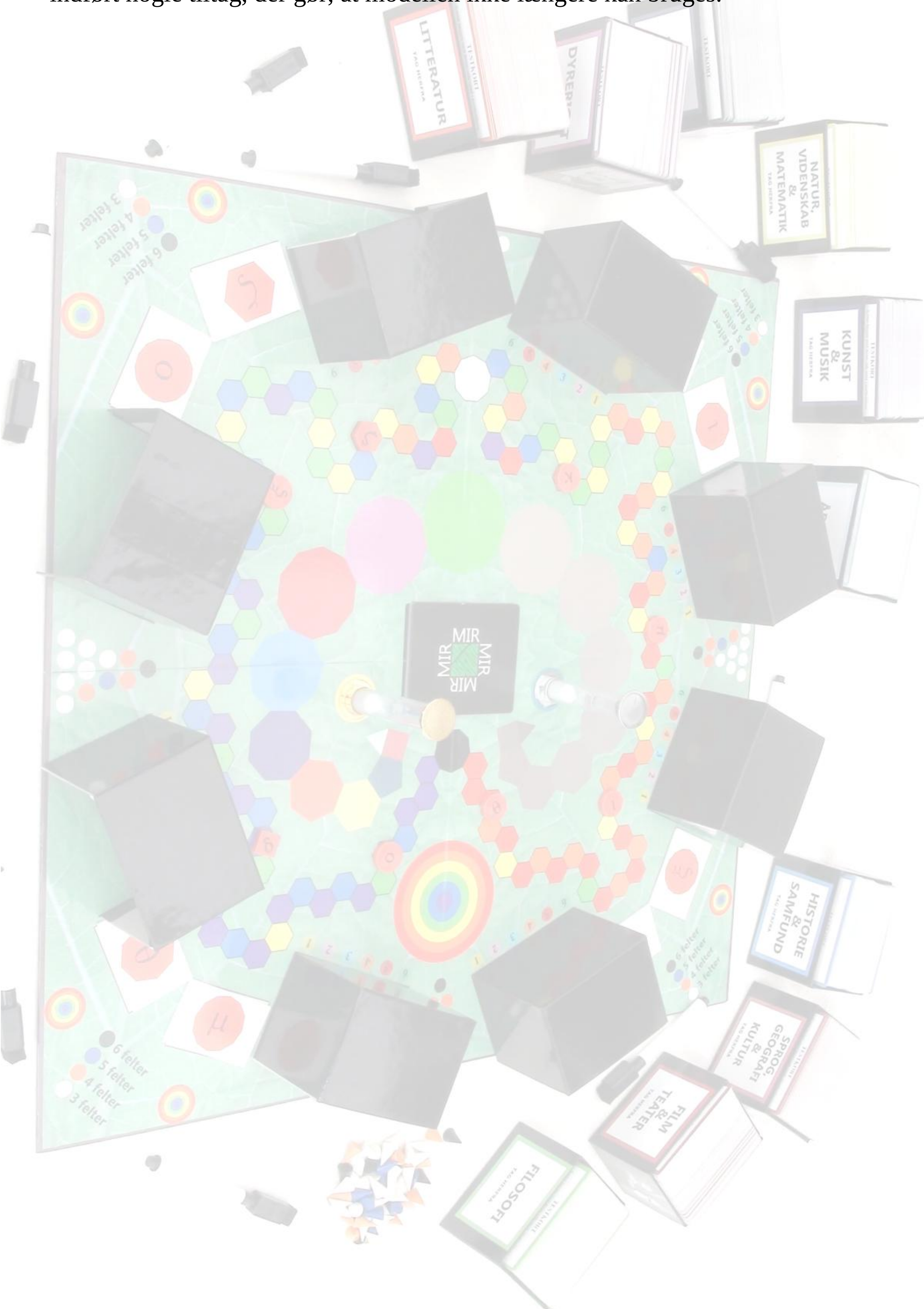
$f1(15)$ 3628.54818555

Den virkelige værdi var 3437, dvs. modellen giver en værdi, der er:

$$\frac{3628,55 - 3437}{3437} = 0,05573 \approx 5,6\% \text{ for høj.}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Det er første gang, at affaldsproduktionen er gået ned i den angivne periode, så måske er der indført nogle tiltag, der gør, at modellen ikke længere kan bruges.



Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

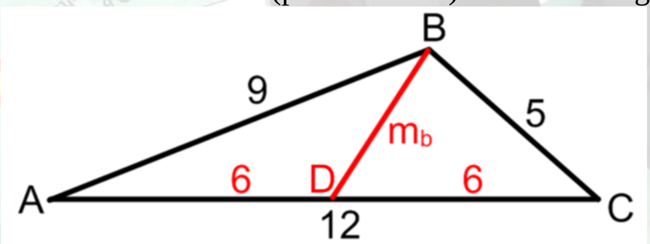
<u>*Opgave 8:*</u> $a = 5$; $b = 12$; $c = 9$

a) Da man kender tre sider i trekanten, skal man bruge cosinusrelationerne:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

$$A = \cos^{-1}\left(\frac{12^2 + 9^2 - 5^2}{2 \cdot 12 \cdot 9}\right) = \underline{\underline{22{,}1916065663°}}$$

b) Medianen fra B deler (pr. definition) siden b i to lige store dele:



Længden af medianen kan beregnes ved at se på trekant ABD, da man her kender en vinkel og de to hosliggende sider og derfor kan anvende cosinusrelationerne:

$$m_b{}^2 = |AD|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |AD| \cdot |AB| \cdot \cos A$$

$$m_b = \sqrt{6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \cos(22{,}1916065663°)} = \underline{\underline{4{,}12310562562}}$$

<u>*Opgave 9:*</u> $h(t) = (3128 - 40 \cdot t)^{0,4}$; $0 \le t \le 78{,}2$

h er væskehøjden målt i cm, og *t* er tiden målt i sekunder.

a) Da *h* er væskehøjden, vil væskehøjden efter 20 sekunder svare til h(20), og det tidspunkt, hvor væskehøjden er 5cm, bestemmes ved at løse ligningen h(t) = 5.
Begge bestemmelser foregår på TI n'spire efter først at have defineret funktionen:

$h(t) := (3128-40 \cdot t)^{0.4}$	*Udført*
$h(20)$	22.2225140981
solve$(h(t)=5, t)$	$t=76.8024575141$

Dvs. at <u>væskehøjden efter 20 sekunder er 22,2cm.</u>

<u>Væskehøjden i beholderen er 5cm efter 76,8 sekunder</u>.
(det tjekkes, at 76,8 ligger i definitionsmængden)

b) Da funktionen er allerede er defineret, kan differentialkvotienten i 20 bestemmes ved:

$\frac{d}{dt}(h(t))\|t=20$	-0.152732055657

Man har altså $\underline{\underline{h'(20) = -0{,}1527}}$

<u>Dette fortæller, at efter 20 sekunder falder væskehøjden med 0,1527cm i sekundet.</u>

<u>Opgave 10:</u> $f(x) = 0{,}25 \cdot x^4 - 3 \cdot x^3 + 12 \cdot x^2 - 16 \cdot x \quad ; \quad P(5, f(5))$

a) For at kunne bestemme ligningen for tangenten til grafen for *f* i punktet P, skal man kende P's koordinater samt tangentens hældning.
Disse bestemmes på TI n'spire ved først at definere funktionen og derefter beregne funktionsværdien i 5 og differentialkvotienten i 5:

$f(x):=0.25\cdot x^4-3\cdot x^3+12\cdot x^2-16\cdot x$	*Udført*
$f(5)$	1.25
$\frac{d}{dx}(f(x))\vert x=5$	4.

Dvs. P har koordinatsættet (5 ; 1,25) og hældningen er 4.
Så bliver tangentens ligning:

$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$

$y - 1{,}25 = 4 \cdot (x - 5) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 4x - 18.75}}$

Dette kunne også have været bestemt med 'tangentline':

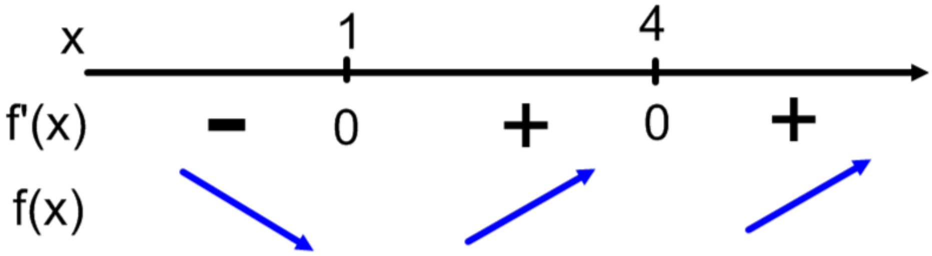
$f(x):=0.25\cdot x^4-3\cdot x^3+12\cdot x^2-16\cdot x$	*Udført*
tangentLine$(f(x),x,5)$	$4\cdot x-18.75$

b) For at kunne bestemme monotoniforholdene, skal man kende den afledede funktions fortegn i de intervaller, der ligger mellem nulpunkterne for den afledede funktion.

$f(x):=0.25\cdot x^4-3\cdot x^3+12\cdot x^2-16\cdot x$	*Udført*
$f1(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$	*Udført*
solve$(f1(x)=0,x)$	$x=1$ or $x=4$
$f1(0)$	-16.
$f1(2)$	4.
$f1(5)$	4.

Man har altså fortegnsskemaet:

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD



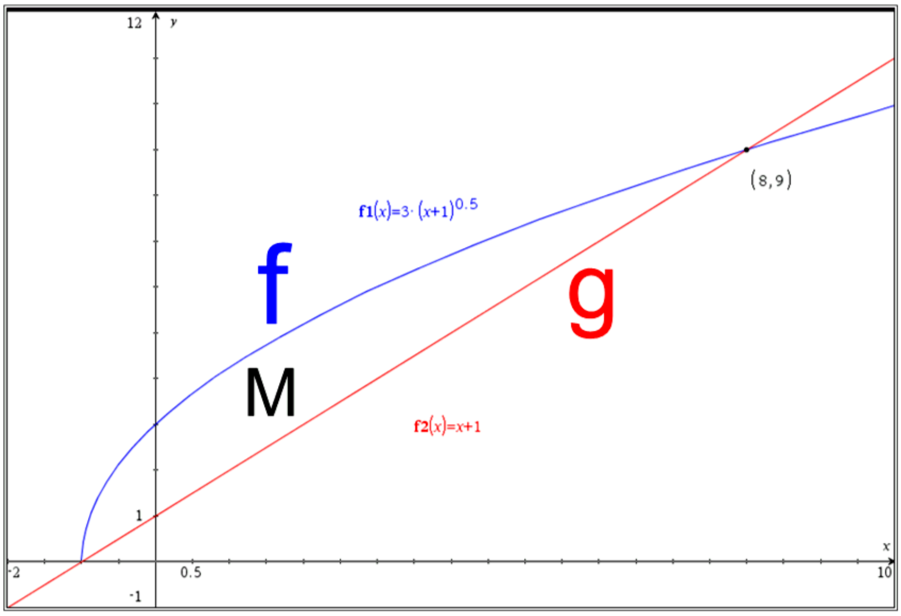
<u>Så f er aftagende i $]-\infty;1]$, og f er voksende i $[1;\infty[$</u>

<u>Opgave 11:</u> Funktionerne *f* og *g* har forskrifterne:

$$f(x) = 3 \cdot (x+1)^{0,5} \quad ; \quad x \geq -1$$

$$g(x) = x+1$$

a) Først tegnes graferne ved at indtastefunktionsforskrifterne som f1 og f2 på n'spire under 'Grafer':



Skæringen er fundet ved under værktøjerne at vælge "Undersøg grafer" og "Skæringspunkt". Punktmængden M ligger som angivet på figuren mellem de to grafer, hvor grafen for *f* ligger øverst. For at kunne bestemme arealet af M, skal man kende den nedre grænse og den øvre grænse for intervallet, dvs. x-koordinaterne til skæringspunkterne.
Den øvre grænse er allerede fundet til at være 8, og den nedre grænse ses på grafen at være -1, hvilket kan tjekkes ved indsættelse i forskrifterne:

$$f(-1) = 3 \cdot (-1+1)^{0,5} = 3 \cdot 0^{0,5} = 3 \cdot 0 = 0$$

$$g(-1) = -1+1 = 0$$

Da funktionsværdierne er ens, er (-1,0) et punkt på begge grafer.
Man kunne også have bestemt grænserne med 'solve' på n'spire:

$f(x):=3\cdot(x+1)^{0.5}$	*Udført*
$g(x):=x+1$	*Udført*
solve$(f(x)=g(x),x)$	$x=-1$ or $x=8$

Arealet udregnes på n'spire som det bestemte integral: $A_M = \int_{-1}^{8} \left(f(x) - g(x) \right) dx$

$f(x):=3\cdot(x+1)^{0.5}$	*Udført*
$g(x):=x+1$	*Udført*
$\int_{-1}^{8} (f(x)-g(x))dx$	13.5

Dvs. at $A_M = \underline{\underline{13,5}}$

Opgave 12: a) Først bestemmes antallet af eleverne i stikprøven ved at lægge antallene af elever ved de enkelte karakterer sammen:
$n = 30 + 68 + 124 + 198 + 279 + 225 + 76 = 1000$
For at finde den forventede karakterfordeling med udgangspunkt i nulhypotesen (at fordelingen ikke har ændret sig), benyttes procentdelene fra 2011, der multipliceres med det samlede antal:

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Forventet antal	1	74	110	220	312	198	84

Der afrundes til nærmeste hele tal. Eksempel:
Karakteren -3: Forventet antal $= n \cdot 0,14\% = 1000 \cdot 0,0014 = 1,4 \approx 1$

b) Nulhypotesen undersøges ved et χ^2-Goodness of fit-test, da man skal undersøge, hvor godt et observationssæt passer med et forventet sæt.
Under "Lister og regneark" indskrives den observerede tabel i kolonne A og den forventede tabel i kolonne B. Under værktøjer vælges 'Statistik', 'Statistiske test' og ' χ^2-Goodness of fit-test', hvor observeret liste sættes til a[] og forventet liste til b[].
Da der er 7 karakterer, er der 6 frihedsgrader (når man kender 6 af tallene, kan man udregne det sidste, da man ved, at der er 1000 personer i stikprøven - selvom afrundingerne i dette tilfælde gav os 999 personer i den forventede tabel).
Man får så:

	A observeret	B forventet	C	D
◆				=χ²GOF(a[],b[],6): C(
1	30	1	Titel	χ²−Goodness of Fit…
2	68	74	χ²	853.402412227
3	124	110	PVal	4.43888702386E-181
4	198	220	df	6.
5	279	312	CompLis…	{841.,0.4864864864…
6	225	198		
7	76	84		

Da *p*-værdien er $4{,}4\cdot 10^{-181} < 0{,}05$, dvs. den er (meget langt) under 5%,
<u>må nulhypotesen forkastes. Der er altså signifikant forskel på karakterfordelingerne de to år.</u>

<u>*Opgave 13:*</u> $O(x) = 0{,}0005 \cdot x^3 - 0{,}8 \cdot x^2 + 837 \cdot x + 35200 \;\; ; \;\; x > 0$

O(x) er omkostningerne målt i kroner. *x* er antal enheder af varen.

Enhedsomkostningerne *E(x)* måles i kr. pr. enhed og er givet ved: $E(x) = \dfrac{O(x)}{x}$

a) Regneforskriften for enhedsomkostningerne bliver dermed:

$$E(x) = \frac{O(x)}{x} = \frac{0{,}0005 \cdot x^3 - 0{,}8 \cdot x^2 + 837 \cdot x + 35200}{x} = \underline{\underline{0{,}0005 \cdot x^2 - 0{,}8 \cdot x + 837 + \frac{35200}{x}}}$$

Funktionen defineres på n'spire, så funktionsværdien *E(2000)* kan bestemmes:

$e(x) := 5.\text{E-}4 \cdot x^2 - 0.8 \cdot x + 837 + \dfrac{35200}{x}$	*Udført*
$e(2000)$	1254.6

Dvs. at $E(2000) = \underline{\underline{1254{,}6}}$

b) Ligningen $E(x) = O'(x)$ løses på n'spire ved:

$e(x) := 5.\text{E-}4 \cdot x^2 - 0.8 \cdot x + 837 + \dfrac{3520(}{x}$	*Udført*
$o(x) := 5.\text{E-}4 \cdot x^3 - 0.8 \cdot x^2 + 837 \cdot x + 35200$	*Udført*
$\text{solve}\left(e(x) = \dfrac{d}{dx}(o(x)), x\right)$	$x=848.851633075$

<u>Dvs. enhedsomkostningerne bliver mindst mulige, når der produceres 849 enheder.</u>

6. december 2013: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: Ligningen løses på følgende måde:

$$3x-7=5 \Leftrightarrow$$
$$3x=5+7 \Leftrightarrow$$
$$x=\frac{12}{3} \Leftrightarrow$$
$$\underline{\underline{x=4}}$$

Opgave 2: $f(x)=x^3-2x+6$

Først bestemmes den afledede funktion ved at differentiere ledvist, hvorefter differentialkvotienten i 2 findes:

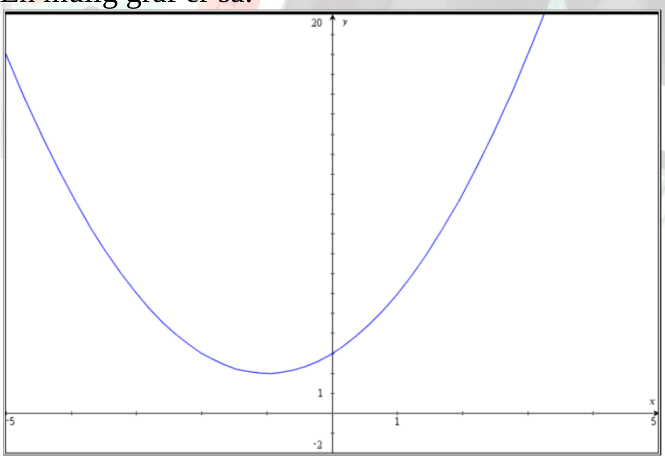
$$f'(x)=3x^2-2+0=3x^2-2$$
$$f'(2)=3\cdot 2^2-2=3\cdot 4-2=12-2=\underline{\underline{10}}$$

Opgave 3: $N(t)=1134\cdot 1{,}014^t$

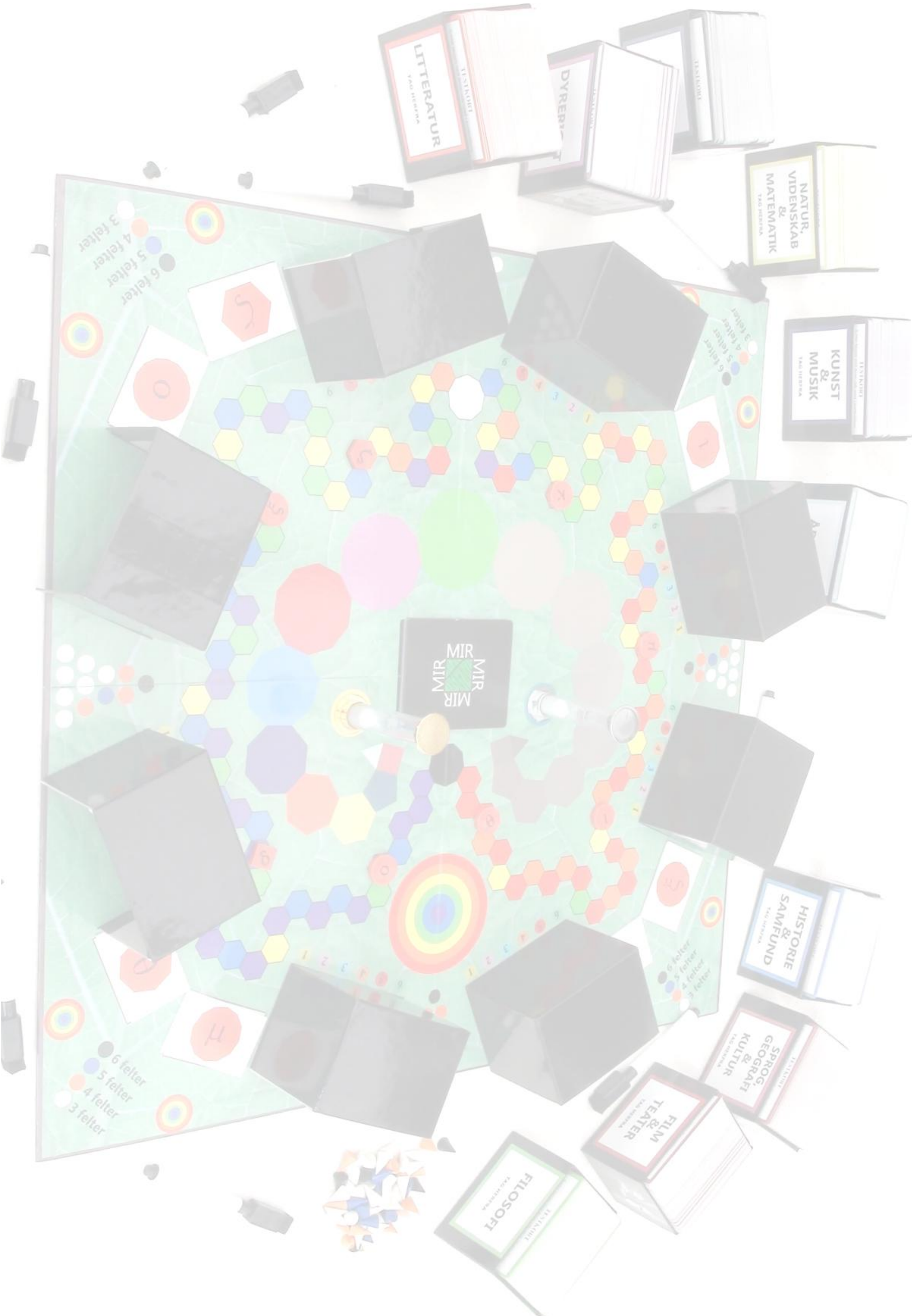
N(t) er befolkningstallet (målt i millioner) til tidspunktet *t* (målt i antal år efter 2005).
Tallet 1134 er begyndelsesværdien, og det fortæller, at i år 2005 var Indiens befolkningstal på 1134 millioner
Tallet 1,014 er fremskrivningsfaktoren *a*, og da fremskrivningsfaktoren og vækstraten *r* er forbundet via formlen $a=1+r$, svarer det til en vækstrate på 0,014=1,4%.
Dvs. at siden 2005 er Indiens befolkningstal ifølge modellen steget med 1,4% om året.

Opgave 4: $f(x)=ax^2+bx+c$

Følgende skal gælde for grafen:
1) Da diskriminanten er negativ, skærer grafen ikke x-aksen.
2) Da *a* er positiv, vender benene opad. Sammenholdt med punkt 1) vil det sige, at grafens toppunkt må ligge i første eller anden kvadrant.
3) At *c* er positiv, er en overflødig oplysning, da det følger af de to første punkter. Det betyder, at grafen skærer *y*-aksen på dennes positive del, men det vidste man allerede.
En mulig graf er så:



Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD



<u>*Opgave 5:*</u> $f(x) = 6x^2 - 2x$ *P(1,10)*

Samtlige stamfunktioner til *f(x)* er på formen:

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (6x^2 - 2x)\,dx = 2x^3 - x^2 + k$$

Punktets koordinater indsættes for at bestemme konstantens værdi:

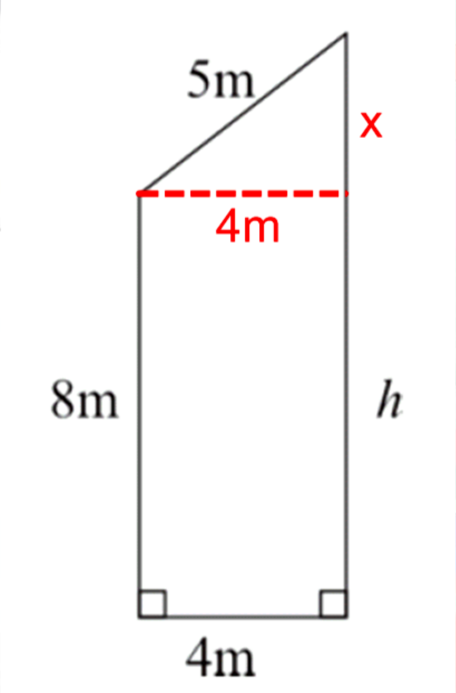
$$F(1) = 10$$

$$10 = 2\cdot 1^3 - 1^2 + k \Leftrightarrow 10 = 2 - 1 + k \Leftrightarrow k = 9$$

Dvs. den søgte stamfunktion er:

$$F(x) = \underline{\underline{2x^3 - x^2 + 9}}$$

<u>*Opgave 6:*</u> Der dannes en retvinklet trekant i toppen af gavlen, hvor den ene katete har længden 4m, og den anden kan bestemmes ved Pythagoras:



$$x^2 + (4m)^2 = (5m)^2$$

$$x = \sqrt{(5m)^2 - (4m)^2} = \sqrt{25m^2 - 16m^2} = \sqrt{9m^2} = 3m$$

Højden er hele det lodrette stykke til højre, så man har:

$$h = 8m + x = 8m + 3m = \underline{\underline{11m}}$$

Arealet kan bestemmes ved at dele figuren op i en trekant og en aflang:

$$A = T_{trekant} + A_{aflang} = \frac{1}{2}\cdot 3m\cdot 4m + 4m\cdot 8m = 6m^2 + 32m^2 = \underline{\underline{38m^2}}$$

6. december 2013: Delprøven MED hjælpemidler

<u>*Opgave 7:*</u> a) Sammenhængen kan beskrives ved forskriften $f(x)=a\cdot x+b$, dvs. det er en lineær sammenhæng, og man skal derfor lave lineær regression for at finde konstanterne.
Tabellens værdier indskrives under 'Lister og regneark' på TI n'spire med breddegraden i liste A og middeltemperaturen i liste B.
Så vælges 'Statistik', 'Statistiske beregninger' og 'Lineær regression (mx+b)'.
Som x-liste vælges a[] og som y-liste b[]. Resultatet gemmes som f1, så man efterfølgende kan regne videre med det.

N'spire giver:

	A	B	C	D
◆				=LinRegMx(a[],b[
1	62	1	Titel	Lineær regression
2	64	-1.6	RegEqn	m*x+b
3	70	-4.2	m	-0.73154205607
4	73	-7.2	b	46.089018691
5	78	-11.4	r²	0.980000931
6			r	-0.98994996424
7			Resid	{0.2665887850467

A7

Da n'spire har anvendt m i stedet for a, har man altså:
$\underline{\underline{a=-0{,}73154 \text{ og } b=46{,}0890}}$

b) *a* er hældningskoefficienten, og tallet -0,73154 fortæller altså, at <u>for hver ekstra breddegrad, man bevæger sig nordpå, falder den årlige middeltemperatur med 0,7°C</u>

En nordlig breddegrad på 66 grader svarer til *x = 66*, og man skal altså bestemme *f(66):*

$f1(66)$ -2.19275700935

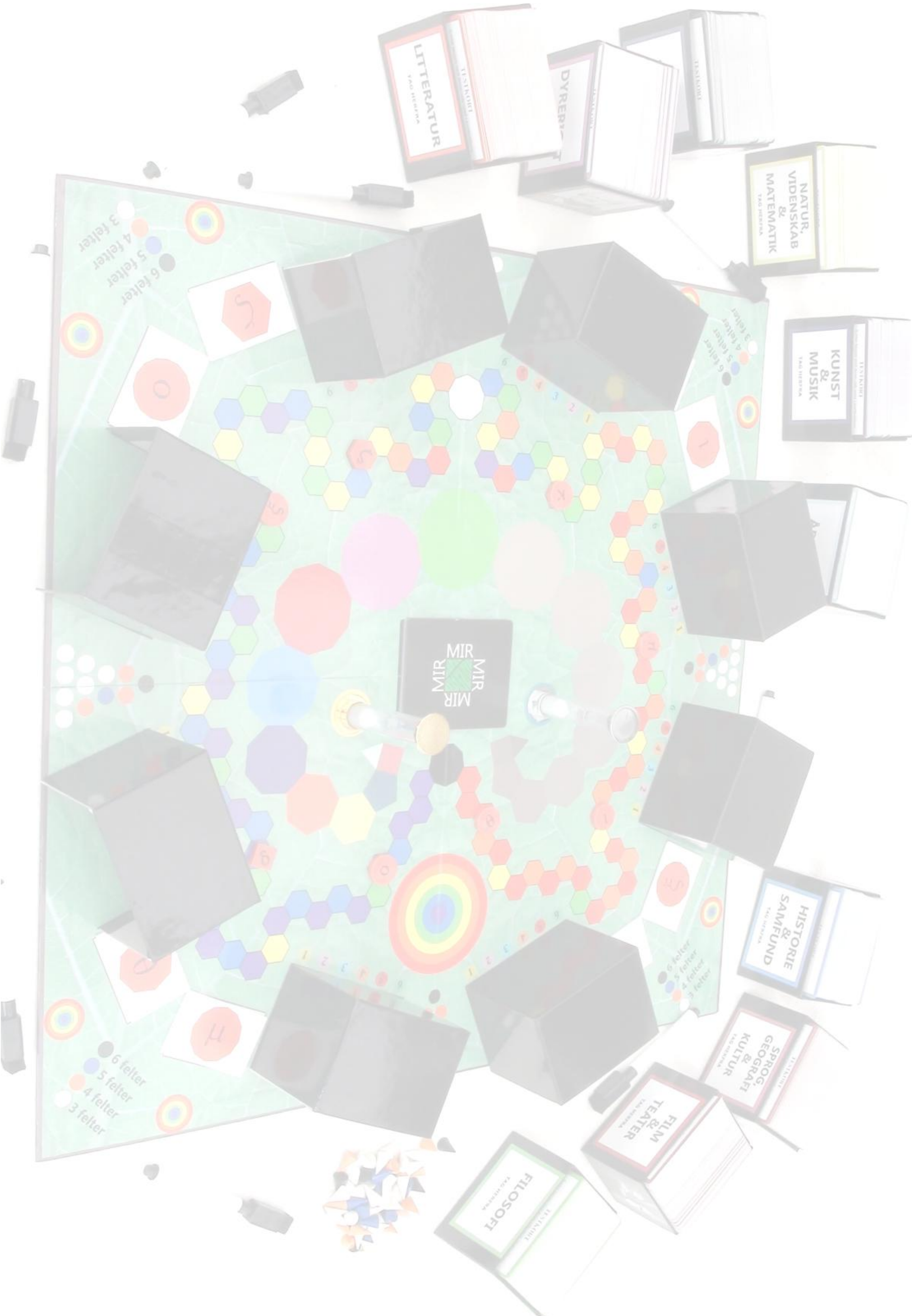
Dvs. <u>den årlige middeltemperatur i Vestgrønland ved den 66. breddegrad er ifølge modellen -2,2°C</u>

c) For at finde den breddegrad, hvor middeltemp. er -10°C, skal man løse ligningen *f(x)=-10:*

solve$(f1(x)=-10,x)$ $x=76.6723091664$

Dvs. at <u>ved 76,7 grader nordlig bredde</u> er den årlige middeltemperatur ifølge modellen -10°C.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD



Opgave 8: a) Vinkel B kan bestemmes ved at tage udgangspunkt i trekant ABC. Her kender man vinkel A og længden af dens modstående side. Hermed kan sinusrelationerne anvendes:

$$\frac{\sin B}{|AC|} = \frac{\sin A}{|BC|} \Leftrightarrow \sin B = \frac{\sin A}{|BC|} \cdot |AC|$$

Det er oplyst, at vinkel B er spids, så man har:

$$B = \sin^{-1}\left(\frac{\sin A}{|BC|} \cdot |AC|\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\sin 22°}{5} \cdot 8\right) = \underline{\underline{36,8248298609°}}$$

b) Man har brug for at kende $\angle ACD$, hvis man skal bestemme længden af siden AD. For at bestemme denne vinkel, bestemmes først $\angle ADC$ med sinusrelationerne, hvorefter vinkelsummen i en trekant giver den søgte vinkel:

$$\frac{\sin \angle ADC}{|AC|} = \frac{\sin A}{|CD|} \Leftrightarrow \sin \angle ADC = \frac{\sin A}{|CD|} \cdot |AC|$$

Da det er oplyst, at $\angle ADC$ er stump, har man:

$$\angle ADC = 180° - \sin^{-1}\left(\frac{\sin A}{|CD|} \cdot |AC|\right) = 180° - \sin^{-1}\left(\frac{\sin 22°}{5} \cdot 8\right) = 143,175170139°$$

Og så er:

$$\angle ACD = 180° - \angle A - \angle ADC = 180° - 22° - 143,175170139° = 14,824829861°$$

Så kan længden af siden AD bestemmes ved sinusrelationerne:

$$\frac{|AD|}{\sin \angle ACD} = \frac{|CD|}{\sin A} \Leftrightarrow |AD| = \frac{|CD|}{\sin A} \cdot \sin \angle ACD$$

$$|AD| = \frac{5}{\sin 22°} \cdot \sin 14,824829861° = \underline{\underline{3,4151123305}}$$

Arealet af trekant ACD kan bestemmes med ½-appelsinformlen:

$$T = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |CD| \cdot \sin \angle ACD = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \sin 14,824829861° = \underline{\underline{5,11729438504}}$$

Opgave 9: $f(x) = b \cdot x^a \quad P(1,2) \quad Q(5,7)$

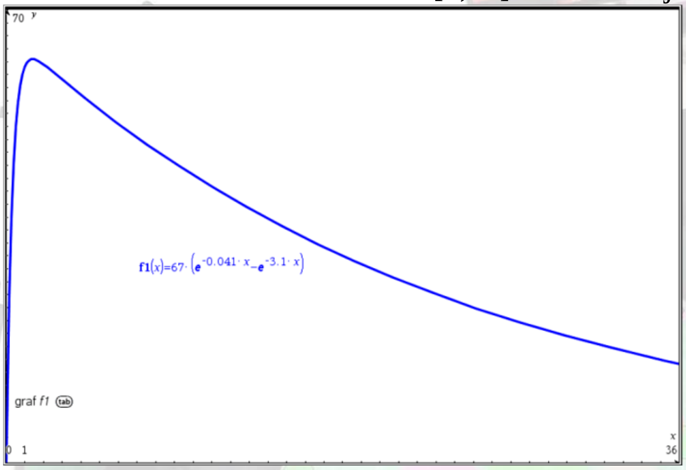
a) Da potensfunktioner (ganget med en konstant) går gennem punktet (1,b), og da P har førstekoordinaten 1, må P's andenkoordinat altså være b, dvs. $\underline{\underline{b = 2}}$

Dette indsættes sammen med Q's koordinater i forskriften, hvorved a kan bestemmes:

$$7 = 2 \cdot 5^a \Leftrightarrow \frac{7}{2} = 5^a \Leftrightarrow a = \log_5\left(\frac{7}{2}\right) = \underline{\underline{0,778385397049}}$$

Opgave 10: $C(t)=67\cdot\left(e^{-0.041\cdot t}-e^{-3.1\cdot t}\right)$; $0\le t\le 36$

a) Grafen tegnes ved på n'spire at indtaste funktionsudtrykket under 'Grafer' (t erstattes med x), og vinduet for x-værdierne sættes til [0,36]. Y-vinduet justeres, således at hele grafen kan ses.

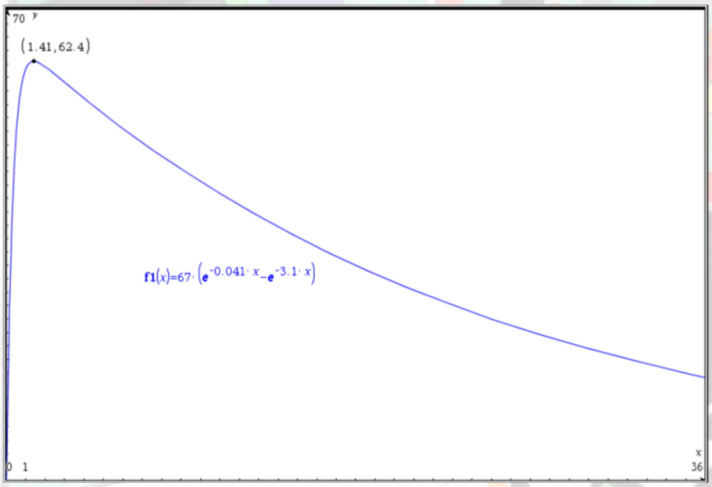


20 timer svarer til *t=20*, og da funktionen er gemt som f1, kan funktionsværdien bestemmes ved:

$f1(20)$ 29.5089208519

Dvs. at østrogenkoncentrationen i blodet efter 20 timer er <u>29,5 picogram pr. millimeter.</u>

b) På grafen bestemmes maksimumsstedet ved under værktøjer at vælge "Undersøg grafer" og "Maksimum":



Det er førstekoordinaten for maksimumspunktet, der angiver tiden, så østrogenkoncentrationen er <u>maksimal efter 1,4 timer</u>

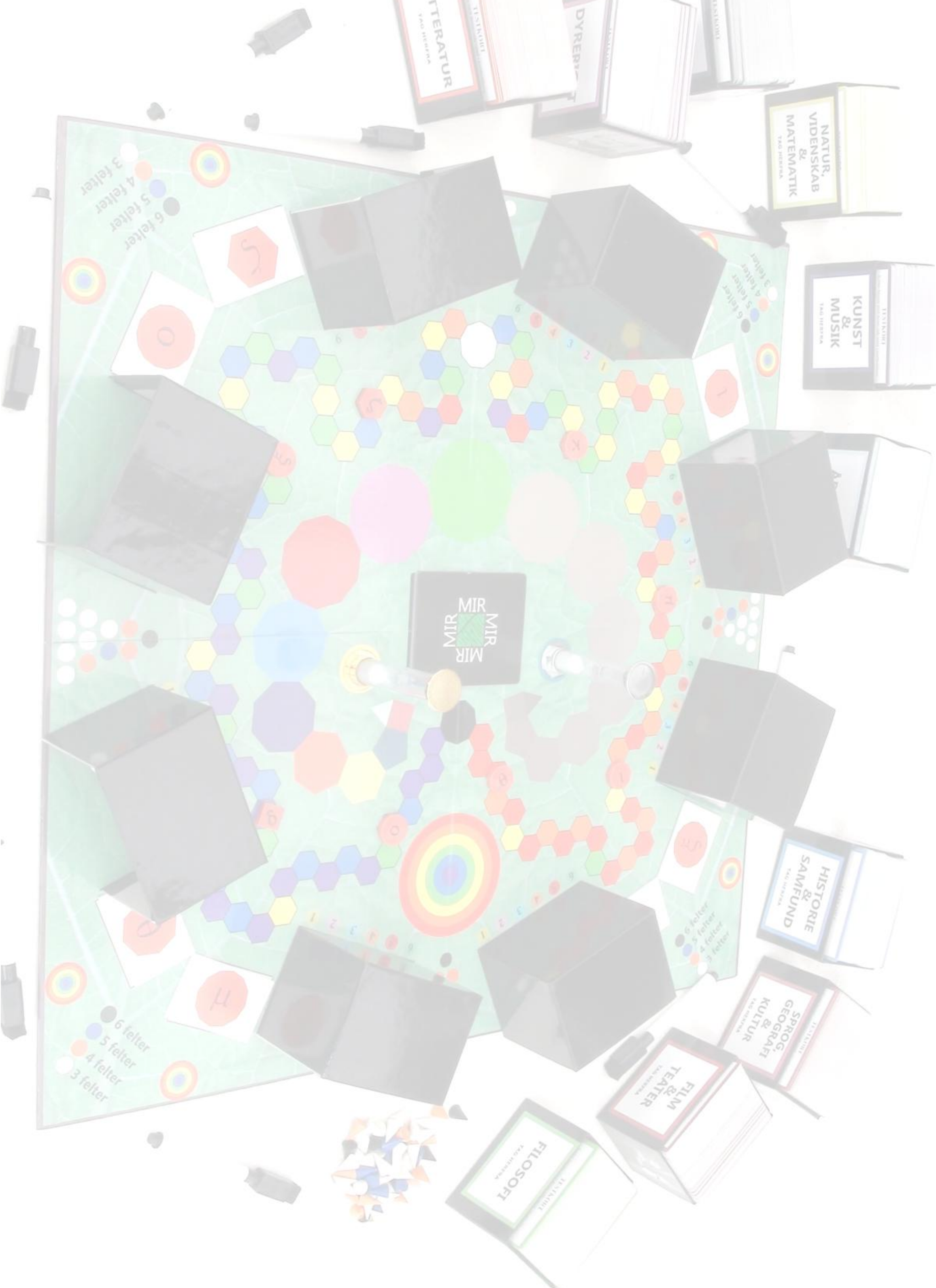
c) Først bestemmes de tider, hvor østrogenkoncentrationen er 25 picogram pr. milliliter, indtastes på n'spire:

$\text{solve}(f1(x)=25,x)$

$x=0.153905861061$ or $x=24.0443120615$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Den første løsning til ligningen ligger til venstre for maksimumsstedet, og det er altså den anden værdi, der angiver, hvornår der skal tages en ny pille. dvs. <u>efter 24 timer (1 døgn) skal der tages en ny p-pille.</u>



Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 11: $f(x)=(x-7)\cdot e^{-x}$ $\quad P(2, f(2))$

a) Man kan bestemme tangentligningen ved på n'spire at indtaste:

tangentLine$((x-7)\cdot e^{-x},x,2)$	$6\cdot e^{-2}\cdot x-17\cdot e^{-2}$
tangentLine$((x-7)\cdot e^{-x},x,2)$	$0.81201169942\cdot x-2.3006998150$

Dvs. at tangentens ligning er: $\underline{\underline{y=0{,}812011699\cdot x-2{,}3006998}}$

b) For at kunne bestemme monotoniforholdene, skal man kende de steder, hvor den afledede funktion giver 0 (ekstremumsstederne):

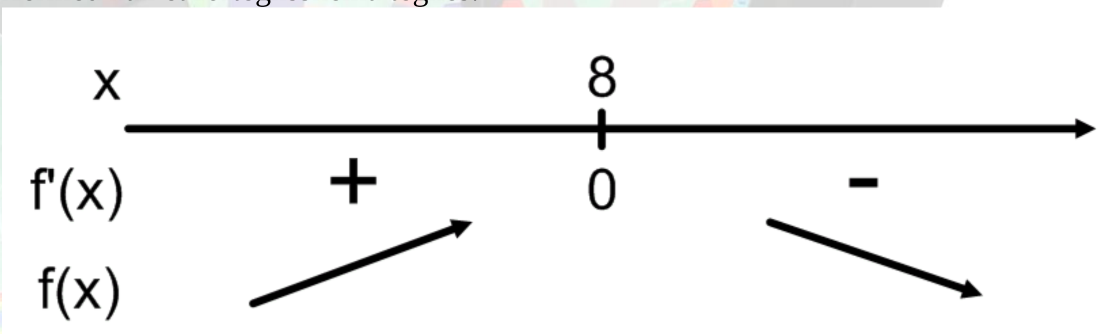
$f(x):=(x-7)\cdot e^{-x}$	*Udført*
solve$\left(\frac{d}{dx}(f(x))=0,x\right)$	$x=8$

Fortegnet for den afledede funktion bestemmes på hver side af *x=8* ved at indsætte en værdi under (her er tallet 3 valgt) og en værdi over (her tallet 10) i den afledede funktion:

$\frac{d}{dx}(f(x))\vert x=3$	0.248935341839
$\frac{d}{dx}(f(x))\vert x=10$	-9.0799859525E-5

Det er kun fortegnene for værdierne, der er interessant: $f(3)>0 \quad og \quad f(10)<0$

Hermed kan et fortegnsskema tegnes:



Dvs. <u>*f* er voksende i intervallet]-∞;8] og *f* er aftagende i intervallet [8;∞[</u>

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 12: a) Nulhypotesen er, at <u>valget af kaffetype er uafhængigt af, om det er en dansk kunde eller en udenlandsk kunde.</u>

De forventede værdier kan bestemmes ved først at lave et skema, hvor de samlede værdier for for rækker og søjler bestemmes (røde værdier):

	Caffe latte	Espresso	Cappuccino	I alt
Danske kunder	696	160	233	1089
Udenlandske kunder	267	61	90	418
I alt	963	221	323	1507

De forventede antal (blå tal) beregnes så ved i den pågældende celle at tage produktet af de to røde tal, der svarer til cellens række og kolonne, hvorefter der divideres med det samlede antal (1507). Man har altså:

Danske kunder, der vælger Caffe latte: $\frac{963 \cdot 1089}{1507} = 695,8905$

Danske kunder, der vælger Espresso: $\frac{221 \cdot 1089}{1507} = 159,701$

Danske kunder, der vælger Cappuccino: $\frac{323 \cdot 1089}{1507} = 233,409$

Udenlandske kunder, der vælger Caffe latte: $\frac{963 \cdot 418}{1507} = 267,109$

Udenlandske kunder, der vælger Espresso: $\frac{221 \cdot 418}{1507} = 61,299$

Udenlandske kunder, der vælger Cappuccino: $\frac{323 \cdot 418}{1507} = 89,591$

b) Det er et χ^2-uafhængighedstest, der på n'spire hedder 2way-test, så hypotesen undersøges på undersøges på TI n'spire ved først at definere matricen og derefter udføre et uafhængighedstest på den:

$a:=\begin{bmatrix} 712 & 159 & 218 \\ 251 & 62 & 105 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 712 & 159 & 218 \\ 251 & 62 & 105 \end{bmatrix}$

$\chi^2$2way a:*stat.results*

$$\begin{bmatrix} \text{"Titel"} & \text{"}\chi^2\text{-uafhængighedstest"} \\ \text{"}\chi^2\text{"} & 5.02295470709 \\ \text{"PVal"} & 0.081148265963 \\ \text{"df"} & 2. \\ \text{"ExpMatrix"} & \text{"[...]"} \\ \text{"CompMatrix"} & \text{"[...]"} \end{bmatrix}$$

$\chi^2$2way a:*stat.ExpMatrix*

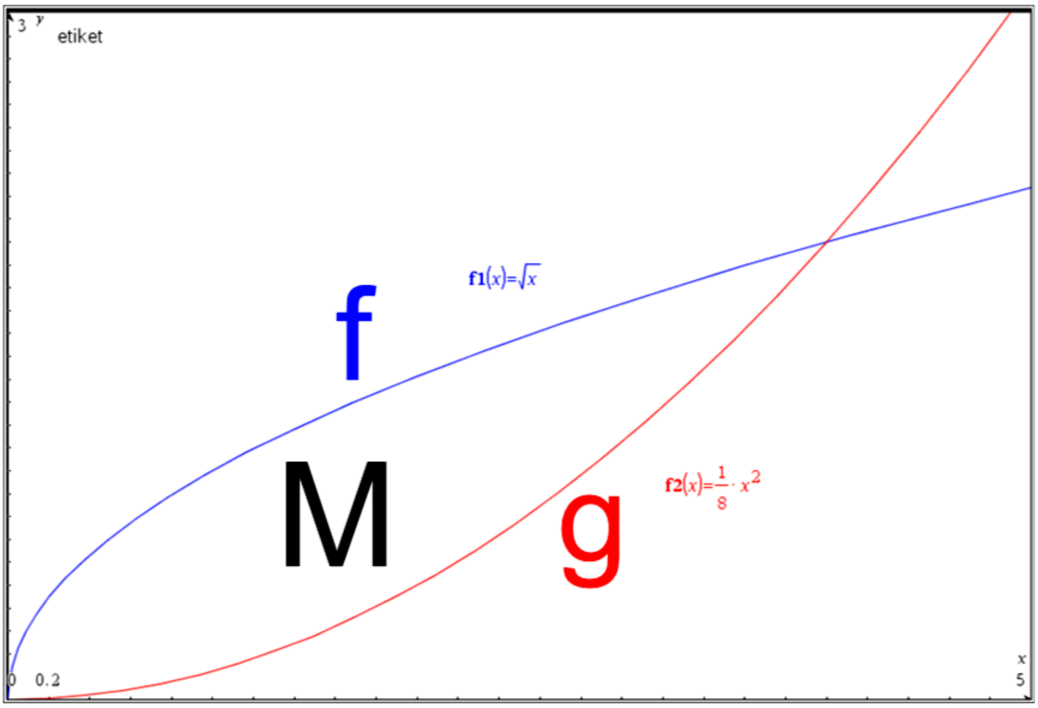
$$\begin{bmatrix} 695.890510949 & 159.700729927 & 233.408759124 \\ 267.109489051 & 61.299270073 & 89.5912408759 \end{bmatrix}$$

Til sidst er vist, hvordan man kunne få bestemt den forventede matrix på n'spire (dvs. de udregnede værdier fra spørgsmål a) kan kontrolleres).

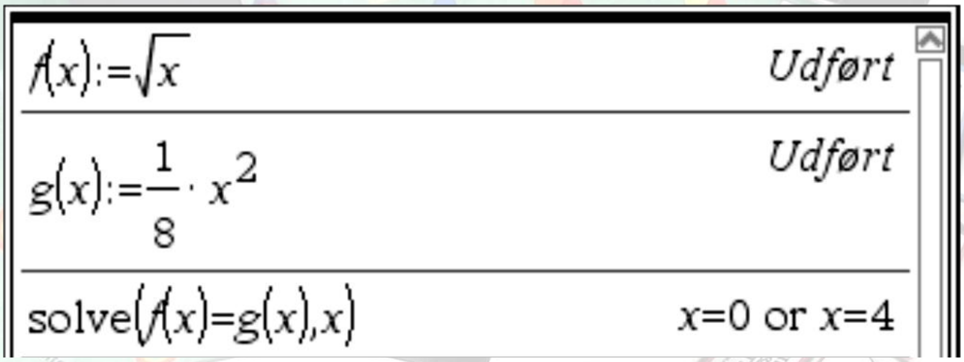
Da p-værdien er 0,08 > 0,05, forkastes nulhypotesen ikke. Der er altså ikke signifikant forskel på danske og udenlandske kunders valg af kaffetype.

Opgave 13: $f(x)=\sqrt{x} \qquad g(x)=\frac{1}{8}\cdot x^2$

a) Graferne indtegnes på TI n'spire under 'Grafer', og arealet identificeres:



Arealet af M skal bestemme ved at udregne et bestemt integral, og den nedre grænse og den øvre grænse for dette integral svarer til skæringerne mellem graferne. Disse kan enten bestemmes grafisk på n'spire ved under værktøjer at vælge 'Undersøg grafer' og 'Skæringspunkt', eller de kan bestemmes ved:



$f(x):=\sqrt{x}$	Udført
$g(x):=\frac{1}{8}\cdot x^2$	Udført
$\text{solve}(f(x)=g(x),x)$	$x=0$ or $x=4$

Dvs. den nedre grænse er 0 og den øvre grænse er 4.

Da grafen for *f* ligger over grafen for *g* i intervallet, kan arealet bestemmes ved:

$$A_M=\int_0^4 (f(x)-g(x))dx=\int_0^4\left(\sqrt{x}-\frac{1}{8}\cdot x^2\right)dx$$

Dette udregnes på n'spire, hvor funktionerne allerede er definerede:

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

$$\int_0^4 (f(x)-g(x))\,dx \qquad \frac{8}{3}$$

Dvs. $\underline{\underline{A_M = \frac{8}{3}}}$