Løsninger til eksamensopgaver på B-niveau 2014

22. maj 2014: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: Algekoncentrationen målt i mio. pr. L betegnes med *A*.
Tiden måles i antal timer fra start og angives med *t*.
Da mængden vokser med en fast procentdel, er der tale om en eksponentiel udvikling, og da vækstraten *r* = 7% = 0,07, får man fremskrivningsfaktoren $a = 1 + r = 1 + 0,07 = 1,07$
Da startkoncentrationen er 120 mio. pr. L får man:
$\underline{\underline{A(t) = 120 \cdot 1,07^t}}$, $0 \le t$
Da det er i løbet af en dag, er der en øvre grænse for tiden, men det er ikke til at sige, hvad den præcist er.

Opgave 2: Udtrykket reduceres ved at anvende første kvadratsætning på første led:
$$(a+b)^2 - a^2 - ab = a^2 + b^2 + 2ab - a^2 - ab = \underline{\underline{b^2 + ab}}$$

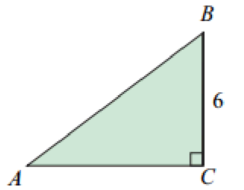
Opgave 3: $x^2 + 2x - 8 = 0$
Da koefficienten til andengradsleddet er 1, kan man "gætte" løsninger ved finde to tal, hvis produkt er -8 og sum er 2 og efterfølgende anvende nulreglen. Det gælder for 4 og -2, og man har så:
$$x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x+4)\cdot(x-2) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -4 \ \vee \ x = 2}}$$

Ellers kan man løse den ved diskriminantmetoden:
$$d = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\cdot 1\cdot(-8) = 4 + 32 = 36 > 0 \ dvs.\ 2\,løsninger$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2\cdot 1} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases} \quad Dvs.\ \underline{\underline{x = -4 \ \vee \ x = 2}}$$

Opgave 4: $f(x) = x^2 - 5x + 1$
Da *a*-værdien er 1, dvs. *a* >0, vender grenene opad, så det må være A eller B.
Da $c = 1$, og *c* angiver skæringen med 2.aksen, må det være parabel A, da den skærer 2. aksen i 1, mens parabel B skærer højere oppe.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 5: Det er oplyst, at arealet er 24, og at trekanten er retvinklet med den ene katetelængde på 6:



Først kan længden af den anden katete bestemmes, da de to kateter i en retvinklet trekant kan fungere som grundlinje og højde:

$$T = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC|$$

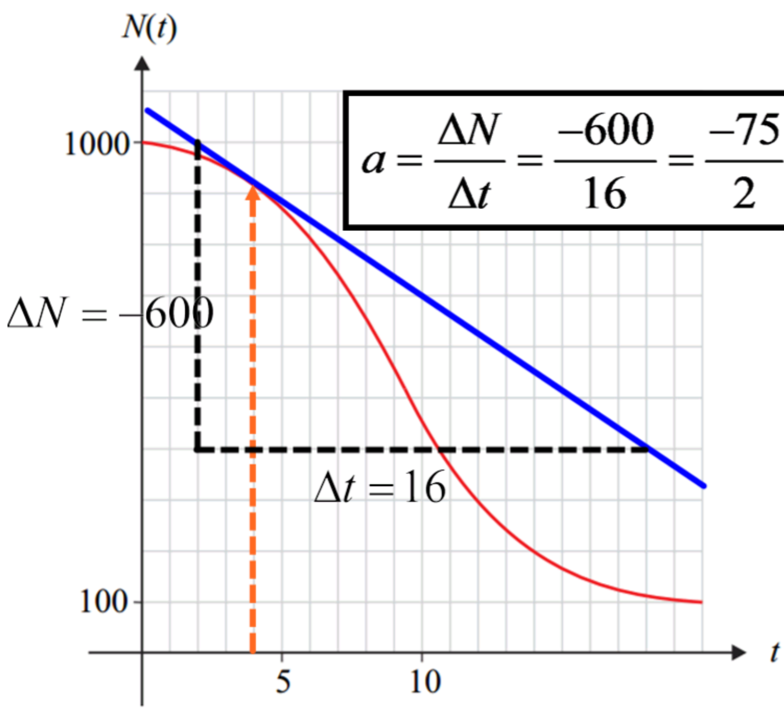
$$|AC| = \frac{T}{\frac{1}{2} \cdot |BC|} = \frac{24}{\frac{1}{2} \cdot 6} = \underline{\underline{8}}$$

Da trekanten er retvinklet, kan den sidste side bestemmes ved Pythagoras (hvis man ikke kan huske, at der findes en retvinklet trekant med sidelængderne 6, 8 og 10):

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$$

$$|AB| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = \underline{\underline{10}}$$

Opgave 6: Efter bedste evne tegnes en tangent i $t = 4$ (den blå linje), og hældningen bestemmes ved at indtegne en tilpas stor trekant:



Dvs. $\underline{\underline{N'(4) = -37,5}}$, hvilket vil sige, at efter 4 døgn aftager antallet af individer i populationen med 37,5 individer pr. døgn.

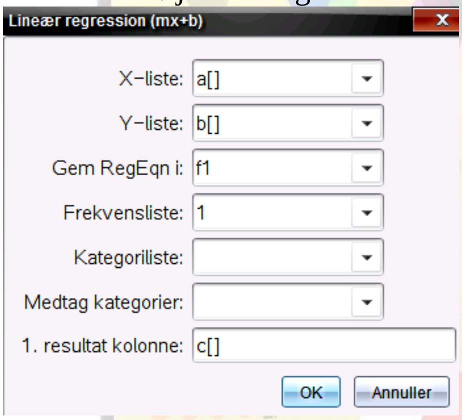
Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 7: Det er angivet, at modellen er $y = a \cdot x + b$, dvs. det er en lineær model, og da man har en hel tabel med sammenhørende værdier, skal der laves lineær regression.

Det bemærkes at der skal regnes i antal år EFTER 2006, så man skal bruge 0,1,2,3,4,5 og 6 som tiden. I n'spire indtastes så under 'Lister og Regneark':

	A år	B alder
=		
1	0	62.01
2	1	62.25
3	2	62.47
4	3	62.75
5	4	62.77
6	5	63.
7	6	63.08

Under værktøjerne vælges 'Statistik' og 'Statistiske beregninger' og en lineær model mx+b.



	A år	B alder	C	D
=				=LinRegMx(a[],b[
1	0	62.01	Titel	Lineær regressio...
2	1	62.25	RegEqn	m*x+b
3	2	62.47	m	0.178928571429
4	3	62.75	b	62.0817857143
5	4	62.77	r^2	0.96714420024
6	5	63.	r	0.983434898832
7	6	63.08	Resid	{-0.0717857142...

Dette giver:

Modellen anvender *m* i stedet for *a*, så man har:

$\underline{\underline{a = 0{,}17892857}}$ og $\underline{\underline{b = 62{,}0817857}}$

b) År 2014 svarer til $x = 8$, og da modellen er gemt som f1, indtaster man:

$$f1(8) \qquad 63.5132142857$$

Dvs. i 2014 vil tilbagetrækningsalderen ifølge modellen være <u>63,51 år</u>

Det er en lineær model, så a fortæller, at for <u>hvert år øges tilbagetrækningsalderen med 0,18 år</u>

c) Man skal løse ligningen $y = 65$, hvilket sker på n'spire med:

$$\text{solve}(f1(x)=65,x) \qquad x=16.3093812375$$

Da tilbagetrækningsalderen skal overstige 65 år, skal der gå 17 år fra 2006, dvs. at i <u>år 2023 vil tilbagetrækningsalderen ifølge modellen overstige 65 år.</u>

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>*Opgave 8:*</u> $|AB| = 25 \;;\; |BC| = 14 \;;\; |AC| = 27$

a) Da man kender alle tre sidelængder, kan vinklerne bestemmes med cosinusrelationerne:

$$\cos A = \frac{|AC|^2 + |AB|^2 - |BC|^2}{2 \cdot |AC| \cdot |AB|}$$

$$A = \cos^{-1}\left(\frac{27^2 + 25^2 - 14^2}{2 \cdot 27 \cdot 25}\right) = \underline{\underline{30,9320199068°}}$$

$$\cos B = \frac{|BC|^2 + |AB|^2 - |AC|^2}{2 \cdot |BC| \cdot |AB|}$$

$$B = \cos^{-1}\left(\frac{14^2 + 25^2 - 27^2}{2 \cdot 14 \cdot 25}\right) = \underline{\underline{82,4478482089°}}$$

b) Da man kender en vinkel og længderne af de to hosliggende sider, kan man bestemme arealet ved ½-appelsin-formlen:

$$T = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |AB| \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 27 \cdot 25 \cdot \sin(30,9320199068°) = \underline{\underline{173,481987538}}$$

Punktet hvor vinkelhalveringslinjen fra B rammer siden AC kaldes D.
Der regnes nu på trekant ABD.
Da vinkelhalveringslinjen deler vinkel B, kan man beregne vinkel D i trekant ABD ved at benytte, at vinkelsummen i en trekant er 180°:

$$\angle ADB = 180° - A - \frac{1}{2} \cdot B = 180° - 30,9320199068° - \frac{1}{2} \cdot 82,4478482089° = 107,844055989°$$

Sinusrelationerne giver så:

$$\frac{v_b}{\sin A} = \frac{|AB|}{\sin \angle ADB} \Leftrightarrow$$

$$v_b = \frac{|AB|}{\sin \angle ADB} \cdot \sin A = \frac{25}{\sin(107,844055989°)} \cdot \sin(30,9320199068°) = \underline{\underline{13,4999452114}}$$

<u>*Opgave 9:*</u> $f(t) = 12 \cdot 0,97^t$

f(t) angiver massen af et radioaktivt stof målt i gram, og *t* er tiden målt i antal år efter 2014.

a) Da $f(0) = 12$ fortæller tallet 12, at der <u>i år 2014 er 12 gram af stoffet.</u>

Det er en eksponentiel udvikling, og fremskrivningsfaktoren 0,97 svarer til en vækstrate på $r = a - 1 = 0,97 - 1 = -0,03 = -3\%$, så det fortæller, at <u>massen af stoffet falder med 3% om året.</u>

b) Halveringstiden kan bestemmes ud fra fremskrivningsfaktoren:

$$T_{½} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(a)} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(0,97)} = 22,7565730628$$

Dvs. at halveringstiden er <u>22,8 år</u>

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 10: $f(x)=2x^3-57x^2-120x-5$ $\qquad P(1, f(1))$

a) For at bestemme en ligning for tangenten skal man kende hældningen og røringspunktets koordinater:

Røringspunktets y-værdi bestemmes:

$f(1)=2\cdot 1^3-57\cdot 1^2-120\cdot 1-5=-180$

Tangentens hældning bestemmes:

$f'(x)=6x^2-114x-120$

$f'(1)=6\cdot 1^2-114\cdot 1-120=-228$

Hermed kan tangentens ligning bestemmes:

$y-y_0=a\cdot(x-x_0)$

$y+180=-228\cdot(x-1) \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{y=-228\cdot x+48}}$

Man kunne også have gjort det med n'spire ved:

$\text{tangentLine}\left(2\cdot x^3-57\cdot x^2-120\cdot x-5,x,1\right) \qquad 48-228\cdot x$

b) For at bestemme monotoniforholdene findes først nulpunkter for den afledede funktion:

$f'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; 0=6x^2-114x-120 \;\Leftrightarrow\; 0=x^2-19x-20 \;\Leftrightarrow$

$0=(x-20)\cdot(x+1) \;\Leftrightarrow\; x=-1 \vee x=20$

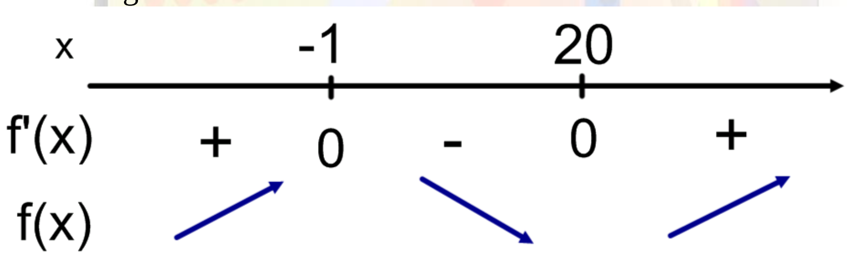
Fortegnet for den afledede funktion beregnes i de intervaller, der adskilles af de to nulpunkter:

$f'(-2)=6\cdot(-2)^2-114\cdot(-2)-120=24+228-120=132>0$

$f'(0)=-120<0$

$f'(100)=6\cdot 100^2-114\cdot 100-120=60000-11400-120=48480>0$

Dvs. fortegnsskemaet bliver:



Dvs. at *f* er voksende i intervallerne]-∞,-1] og [20,∞[, og *f* er aftagende i [-1,20]

Opgave 11: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+2x \quad , \quad x>0$ $\qquad P(4,10)$

a) Først bestemmes ved integration den form samtlige stamfunktioner er på:

$F_k(x)=\int\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+2x\right)dx=2\cdot\sqrt{x}+x^2+k$

Da grafen går gennem *P* får man:

$10=2\cdot\sqrt{4}+4^2+k \;\Leftrightarrow\; 10=4+16+k \;\Leftrightarrow\; k=-10$

Dvs. at den søgte stamfunktion er: $\underline{\underline{F(x)=2\cdot\sqrt{x}+x^2-10}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 12: a) Nulhypotesen er, at fordelingen af ventetid ikke har ændret sig, så med baggrund i denne hypotese kan man udregne en forventet tabel ved at benytte de tidligere procentsatser og gange disse med stikprøvens størrelse (der er 500):

Forventet tabel:

Ventetid (minutter)	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	>30
Fordeling Antal	$500 \cdot 0,221 =$ 110,5	$500 \cdot 0,172 =$ 86	$500 \cdot 0,134 =$ 67	$500 \cdot 0,104 =$ 52	$500 \cdot 0,081 =$ 40,5	$500 \cdot 0,063 =$ 31,5	$500 \cdot 0,225 =$ 112,5

b) Der skal laves et χ^2-GOF-test, og da der er 7 celler, er der 6 frihedsgrader, da man ved at kende 6 observerede værdier og stikprøvens størrelse ville kunne udregne den sidste værdi.

	A forven…	B obser…	C	D
=				=χ²GOF(b[],a[],6
1	110.5	90	Titel	χ²−Goodness o…
2	86	70	χ²	15.486661739
3	67	75	PVal	0.0167912180…
4	52	50	df	6.
5	40.5	45	CompLis…	{3.8031674208…
6	31.5	45		
7	112.5	125		

Da p-værdien er 0,0167912180, dvs. $p < 0,05$, må nulhypotesen forkastes, dvs. der er signifikant forskel på stikprøvens værdier og de tidligere beregnede.

Opgave 13: a) Da højden af porten er 210 (målt i cm), er skæringen med y-aksen 210, hvilket svarer til polynomiets c-værdi. Dvs. $c = 210$

Da toppunktet for parablen ligger på y-aksen, er $b = 0$.

a-værdien kan bestemmes ved at indsætte punktet (120,185) i forskriften:

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$185 = a \cdot 120^2 + 0 \cdot 120 + 210 \iff 185 - 210 = 14400 \cdot a \iff a = \frac{-25}{14400} = -0,001736111111$$

Så hvis man skærer nogle cifre bort, får man:

$$f(x) = -0,001736 \cdot x^2 + 210$$

b) Arealet svarer til det bestemte integral udregnes med den nedre grænse -120 og den øvre grænse 120. Dette gøres i n'spire ved:

$$\int_{-120}^{120} \left(-0.001736 \cdot x^2 + 210\right) dx \qquad 48400.128$$

Dvs. at arealet er 48400cm^2.

27. maj 2014: Delprøven UDEN hjælpemidler

<u>*Opgave 1:*</u> Da det er en lineær funktion, har den forskriften $f(x) = a \cdot x + b$, og hældningen kan ud fra $A(-2,1)$ og $B(4,13)$ bestemmes ved:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{13-1}{4-(-2)} = \frac{12}{6} = 2$$

$$b = y_2 - a \cdot x_2 = 13 - 2 \cdot 4 = 5$$

Dvs.

$$\underline{\underline{f(x) = 2x + 5}}$$

Hvis man ikke kunne huske formlerne, men kun forskriften, kunne man have fundet *a* og *b* ved at løse to ligninger med to ubekendte:

$$\left.\begin{matrix} 13 = a \cdot 4 + b \\ 1 = a \cdot (-2) + b \end{matrix}\right\} \Rightarrow 13 - 1 = (4a + b) - (-2a + b) \quad \Leftrightarrow \quad 12 = 6a \quad \Leftrightarrow \quad a = 2$$

Indsættes i den øverste ligning:

$$13 = 2 \cdot 4 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 5$$

<u>*Opgave 2:*</u> Da trekanterne er ensvinklede, er forholdene mellem ensliggende sider lige store, så man har:

$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|EF|}{|BC|} \quad \Leftrightarrow \quad |DE| = \frac{|EF|}{|BC|} \cdot |AB| = \frac{6}{2} \cdot 1{,}5 = 3 \cdot 1{,}5 = \underline{\underline{4{,}5}}$$

<u>*Opgave 3:*</u> $f(x) = 2x^3 + 4x + 7$

For at kunne bestemme differentialkvotienten i 1 bestemmes først den afledede funktion:

$$f'(x) = 2 \cdot 3x^2 + 4 = 6x^2 + 4$$

$$f'(1) = 6 \cdot 1^2 + 4 = 6 \cdot 1 + 4 = \underline{\underline{10}}$$

<u>*Opgave 4:*</u> $f(x) = 4x^2 - 8x + 2$

Parablens toppunkt bestemmes ud fra toppunktsformlen, når diskriminanten er udregnet:

$$d = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 64 - 32 = 32$$

$$T\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-d}{4a}\right) = T\left(\frac{-(-8)}{2 \cdot 4}; \frac{-32}{4 \cdot 4}\right) = T\left(\frac{8}{8}; \frac{-32}{16}\right) = \underline{\underline{T(1;-2)}}$$

Hvis man ikke kunne huske toppunktsformlen, kunne man have bestemt førstekoordinaten som det sted, hvor den afledede funktion er 0:

$$f'(x) = 4 \cdot 2x - 8 = 8x - 8$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8x - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

Dette kan indsættes i funktionsforskriften for at finde den tilhørende y-værdi:

$$f(1) = 4 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 2 = 4 - 8 + 2 = -2$$

Opgave 5: Når størrelserne x og y er omvendt proportionale, gælder $x \cdot y = k$, hvor konstanten k kan bestemmes ved at indsætte det kendte sæt af x- og y-værdier:

$10 \cdot 4 = k \iff k = 40$

Hermed kan den manglende y-værdi bestemmes:

$20 \cdot y = 40 \iff y = 2$

Dvs. den udfyldte tabel bliver:

x	10	20
y	4	2

Opgave 6: $f(x) = 6x^2 - 8x$ $\quad\quad P(2,13)$

Først bestemmes ved at integrere den form samtlige stamfunktioner er på:

$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (6x^2 - 8x)\,dx = 2x^3 - 4x^2 + k$

Den stamfunktion, der går gennem P bestemmes ved indsætte af punktets koordinater:

$13 = 2 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 + k \iff 13 = 16 - 16 + k \iff k = 13$

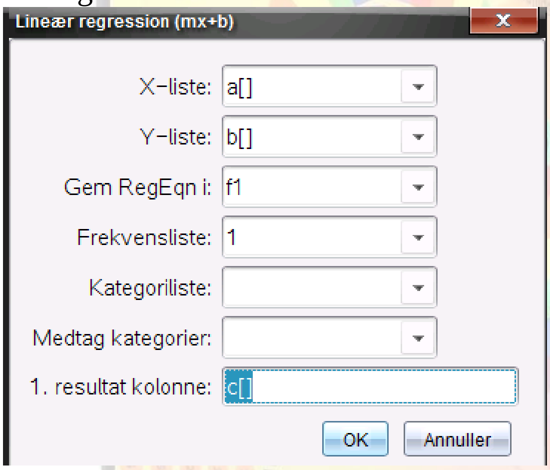
Dvs. den søgte stamfunktion er:

$\underline{\underline{F(x) = 2x^3 - 4x^2 + 13}}$

27. maj 2014: Delprøven MED hjælpemidler

Opgave 7: $f(x) = a \cdot x + b$ *f(x)* angiver procentdelen af 35-årige, der har gennemført en videregående uddannelse, og *x* er antal år EFTER 2006, dvs. man skal indsætte tallene 0,1,2,3,4,5,6.

a) Da det er en lineær funktion, og da man har fået mere end 2 sæt sammenhørende værdier, skal der laves lineær regression.
Dette gøres på n'spire ved at indtaste værdierne i en tabel under 'Lister og Regneark', hvorefter man under værktøjerne vælger 'Statistik', 'Statistiske beregninger' og 'lineær regression mx+b'.
Dette giver:



	A år	B proce...	C	D
=				=LinRegMx(a[],b[]
1	0	36.5	Titel	Lineær regressio...
2	1	37.8	RegEqn	m*x+b
3	2	39	m	1.10714285714
4	3	40.7	b	36.75
5	4	41.1	r^2	0.985277230971
6	5	42.2	r	0.992611319183
7	6	43.2	Resid	{-0.25,-0.057142...

N'spire bruger *m* i stedet for *a*, så man har:
$\underline{\underline{a = 1{,}10714285714}}$ og $\underline{\underline{b = 36{,}75}}$

b) År 2015 svarer til *x* = 9, og da forskriften er gemt som f1(x), indtastes på n'spire:

$$f1(9) \qquad 46.7142857143$$

Dvs. at i 2015 er ifølge modellen <u>46,7%</u> af de 35-årige, der har gennemført en videregående uddannelse.

Hvis procentdelen skal op på 50%, skal $f(x) = 50$. Dette løses ved:

$$\text{solve}(f1(x)=50,x) \qquad x=11.9677419355$$

x = 12 svarer til år 2018, dvs. i <u>år 2018</u> vil det ifølge modellen være 50% af de 35-årige, der har gennemført en videregående uddannelse.

Opgave 8: a) Trekanten på tegningen er ligebenet, så højden på tegningen deler trekanten i to kongruente, retvinklede trekanter. Dermed får den vandrette katete i en af disse retvinklede trekanter længden 15.

Afstanden til gulvet svarer til længden af den anden katete, og Pythagoras kan anvendes til at bestemme længden af denne:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{50^2 - 15^2} = 47{,}696960070847$$

Dvs. at den lodrette afstand er <u>47,7cm</u>

b) Med udgangspunkt i vinkel *v* kender man både længden af den hosliggende katete og hypotenusen (og man kender sådan set også den modstående katetes længde, da den lige er udregnet). Derfor anvendes cosinus på en spids vinkel i den retvinklede trekant:

$$\cos(v) = \frac{hos}{hyp}$$

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{15}{50}\right) = \underline{\underline{72{,}542396876278°}}$$

c) I den trekant, der dannes, når man tegner den stiplede linje på figuren, kender man alle tre sidelængder, og dermed anvendes cosinusrelationerne til at bestemme den søgte vinkel:

$$\cos(v_{s-r}) = \frac{50^2 + 30^2 - 61^2}{2 \cdot 50 \cdot 30}$$

$$v_{s-r} = \cos^{-1}\left(\frac{50^2 + 30^2 - 61^2}{2 \cdot 50 \cdot 30}\right) = \underline{\underline{96{,}14240739102°}}$$

Opgave 9: $f(x) = 2586 \cdot 1{,}017^x$, hvor *f(x)* er verdens befolkningstal målt i millioner og *x* er antal år efter 1950.

a) År 2015 svarer til *x* = 65, dvs. man udregner:

$$f(65) = 2586 \cdot 1{,}017^{65} = 7735{,}5368712725$$

Dvs. ifølge modellen vil befolkningstallet i 2015 være <u>7736 millioner</u>

b) Det er en eksponentiel udvikling, og tallet 2586 er begyndelsesværdien, dvs.
<u>i år 1950 var befolkningstallet på 2586 millioner.</u>

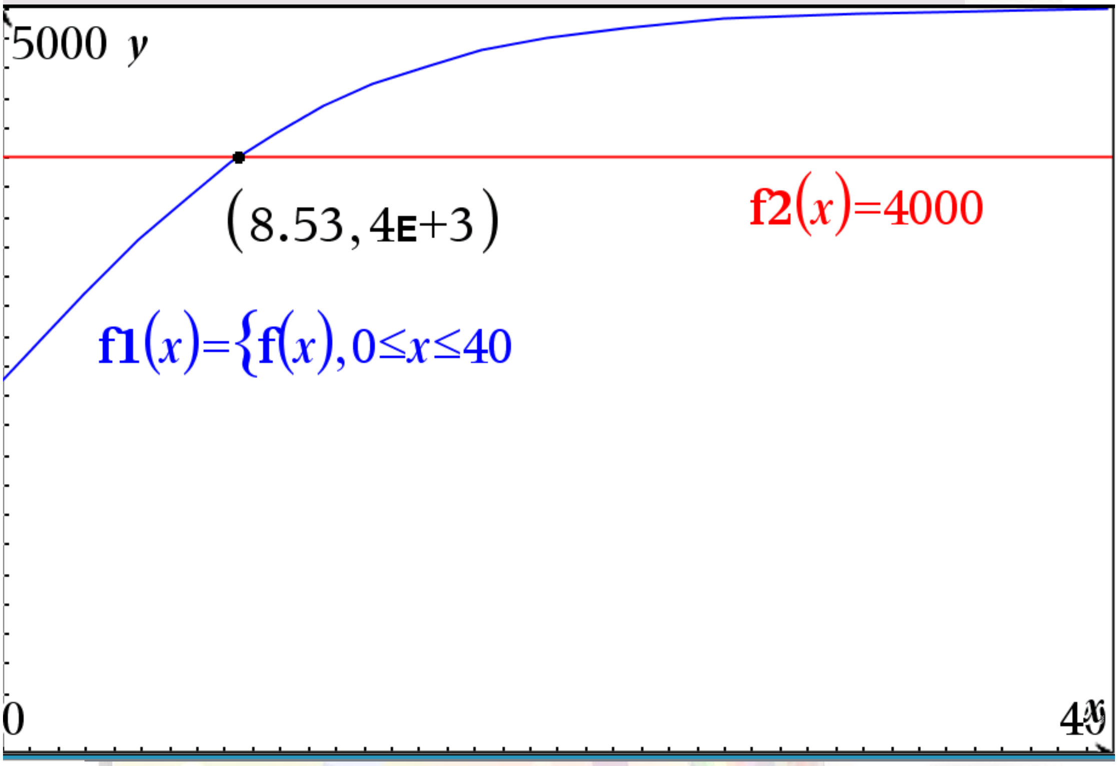
Tallet 1,017 er fremskrivningsfaktoren, og vækstraten er derfor
$r = a - 1 = 1{,}017 - 1 = 0{,}017 = 1{,}7\%$, hvilket betyder, at
<u>siden 1950 er befolkningstallet ifølge modellen vokset med 1,7% om året.</u>

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>*Opgave 10:*</u> $N(t)=\dfrac{5000}{1+0{,}85^t}$, *N(t)* er antal individet i populationen og *t* er tiden målt i uger.

a) På n'spire defineres funktionen, og grafen tegnes sammen med en vandret linje *y=4000*, således at man grafisk kan bestemme det tidspunkt, hvor der er 4000 individer i populationen:

$$f(x):=\frac{5000}{1+(0.85)^x} \qquad \textit{Udført}$$



Man kunne også bestemme tidspunktet ved:

$$\text{solve}(f(x)=4000,x) \qquad x=8.5300485636$$

Dvs. at efter <u>8,5 uger</u> er populationen oppe på 4000.

b) Differentialkvotienten i 10 bestemmes på n'spire ved:

$$\frac{d}{dx}(f(x))|x=10 \qquad 111.677595693$$

Dvs. $N'(10)=\underline{\underline{112}}$, hvilket fortæller, at

<u>efter 10 uger vokser populationen med 112 individer om ugen</u>.

Opgave 11: $f(x) = 0,25 \cdot x^3 - 0,75 \cdot x^2 + 2$

a) Da grafen ligger over 1. aksen i intervallet, svarer det bestemte integral med grænserne 0 og 2 til arealet under grafen:

$$A_M = \int_0^2 f(x)\,dx$$

Dette beregnes på n'spire ved:

$f(x):=0.25\cdot x^3-0.75\cdot x^2+2$ *Udført*

$\int_0^2 f(x)\,dx$ 3.

Dvs. at arealet er <u>3cm^2.</u>

Opgave 12: a) Hvis man skal kunne teste, om oplevelsen af virkningen af den nye vaccine er uafhængig af dosis, skal nulhypotesen være, at:

<u>H_0 : Virkningen af den nye vaccine er uafhængig af dosis.</u>

b) Der skal altså laves et χ^2-uafhængighedstest, og derfor oprettes en matrix på n'spire:

$$a:=\begin{bmatrix} 55 & 70 & 75 \\ 62 & 76 & 62 \\ 78 & 78 & 44 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 55 & 70 & 75 \\ 62 & 76 & 62 \\ 78 & 78 & 44 \end{bmatrix}$$

χ²2way *a*:*stat.results*

$$\begin{bmatrix} \text{"Titel"} & \text{"}\chi^2\text{-uafhængighedstest"} \\ \text{"}\chi^2\text{"} & 12.7743579625 \\ \text{"PVal"} & 0.012432602116 \\ \text{"df"} & 4. \\ \text{"ExpMatrix"} & \text{"[...]"} \\ \text{"CompMatrix"} & \text{"[...]"} \end{bmatrix}$$

P-værdien er bestemt til 0,0124 = 1,24%, så da $p > 1\%$, <u>kan man ikke med et 1%-signifikansniveau forkaste nulhypotesen</u>, dvs. der er ikke signifikant forskel på oplevelsen af virkningen af de forskellige doseringer.

Opgave 13: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$

a) Det er en tredjegradsligning, så den løses med 'solve' på n'spire:

$$\text{solve}\left(x^3 - 2\cdot x^2 - 11\cdot x + 12 = 0, x\right) \qquad x = {}^{-}3 \text{ or } x = 1 \text{ or } x = 4$$

Man har altså:

$f(x) = 0 \iff \underline{\underline{x = -3 \vee x = 1 \vee x = 4}}$

b) Tangenternes hældninger svarer til differentialkvotienten de pågældende steder, så først bestemmes den afledede funktion:

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 11$

Da hældningen for de to tangenter skal være 9, har man:

$9 = 3x^2 - 4x - 11 \iff 0 = 3x^2 - 4x - 20$

Denne ligning løses på n'spire:

$$\text{solve}\left(0 = 3\cdot x^2 - 4\cdot x - 20, x\right) \qquad x = {}^{-}2 \text{ or } x = \frac{10}{3}$$

Dvs. at førstekoordinaten for *A* er $\underline{\underline{x = -2}}$ og for *B* er den $\underline{\underline{x = \frac{10}{3}}}$.

Man kunne også have bedt n'spire om at udregne det hele fra start ved:

$$f(x) := x^3 - 2\cdot x^2 - 11\cdot x + 12 \qquad \textit{Udført}$$

$$\text{solve}\left(f(x) = 0, x\right) \qquad x = {}^{-}3 \text{ or } x = 1 \text{ or } x = 4$$

$$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}\left(f(x)\right) = 9, x\right) \qquad x = {}^{-}2 \text{ or } x = \frac{10}{3}$$

14. august 2014: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: Ligningen løses ved at isolere x på den ene side af lighedstegnet:

$$3x+6=-2x+1 \Leftrightarrow$$
$$3x+2x=1-6 \Leftrightarrow$$
$$5x=-5 \Leftrightarrow$$
$$\underline{\underline{x=-1}}$$

Opgave 2: $f(x)=3x^2-6x+12$

Koordinatsættet for parablens toppunkt bestemmes ved først at finde værdien af diskriminanten og derefter anvende toppunktsformlen:

$$d=b^2-4ac=(-6)^2-4\cdot 3\cdot 12=36-144=-108$$

$$T\left(\frac{-b}{2a};\frac{-d}{4a}\right)=T\left(\frac{-(-6)}{2\cdot 3};\frac{-(-108)}{4\cdot 3}\right)=T\left(\frac{6}{6};\frac{108}{12}\right)=\underline{\underline{T(1;9)}}$$

Opgave 3: Da omsætningen forventes at øges med en fast procentdel, er der tale om eksponentiel vækst. Tiden t angiver antal år efter 2013 og O angiver omsætningen målt i millioner kr. Dermed er begyndelsesværdien 25 og vækstraten er $5\%=0{,}05$, dvs. fremskrivningsfaktoren er $a=1+r=1+0{,}05=1{,}05$. Så udtrykket bliver:

$$\underline{\underline{O(t)=25\cdot 1{,}05^t}}$$

Opgave 4: $f(x)=5x^3+9x^2-7x+40$

Den afledede funktion bestemmes ved at differentiere ledvist:

$$f'(x)=5\cdot 3x^2+9\cdot 2x-7=\underline{\underline{15x^2+18x-7}}$$

Opgave 5: Trekanterne AFG og ABC er ensvinklede, da de begge har en ret vinkel, og da de resterende vinkler dannes af linjen gennem A, C og F og de parallelle linjestykker BC og GA samt AB og FG.
Man har $\angle FAG=\angle ACB$ *og* $\angle AFG=\angle BAC$, og da forholdet mellem ensliggende sider er ens og $|FG|=|DE|=8$, $|AB|=|CD|=4$ og $|BC|=|AD|=3$, har man:

$$\frac{|AG|}{|BC|}=\frac{|FG|}{|AB|}$$

$$|AG|=\frac{|FG|}{|AB|}\cdot|BC|=\frac{8}{4}\cdot 3=6$$

Dvs. $|DG|=|AD|+|AG|=3+6=9$

Det samlede areal af de to rektangler er dermed:

$$A_{samlet}=A_{lille}+A_{stor}=|AD|\cdot|CD|+|ED|\cdot|DG|=3\cdot 4+8\cdot 9=12+72=\underline{\underline{84}}$$

Opgave 6: $p(x)=3\cdot(x+5)\cdot(x+7)$

Udtrykket skal omskrives til formen $p(x)=ax^2+bx+c$, hvilket sker ved at gange parenteserne sammen og efterfølgende gange 3 ind i den nye parentes:

$$p(x)=3\cdot\left(x^2+7x+5x+35\right)=3\cdot\left(x^2+12x+35\right)=3x^2+36x+105$$

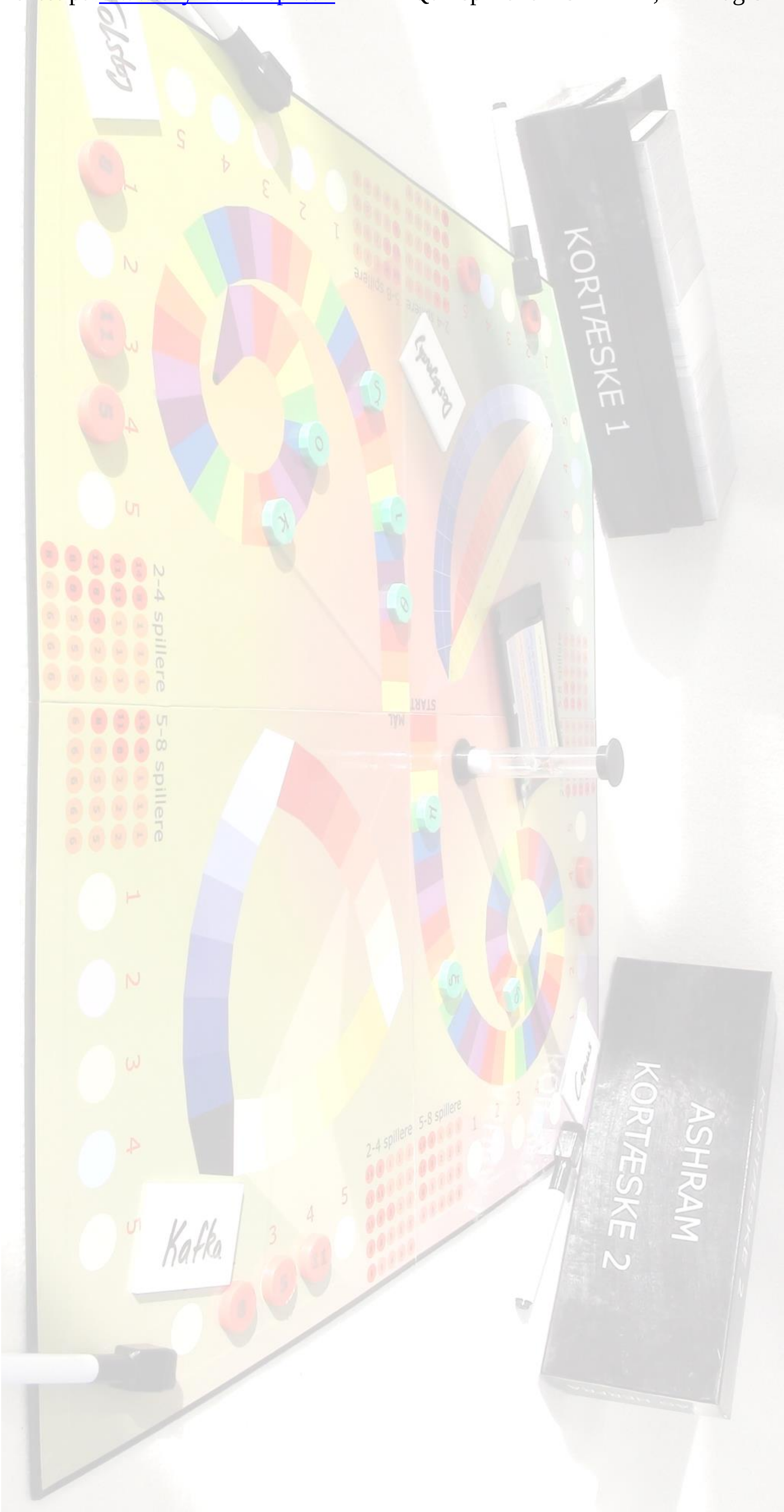
Dvs. at :

$\underline{\underline{a=3}}$

$\underline{\underline{b=36}}$

$\underline{\underline{c=105}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD



Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

14. august 2014: Delprøven MED hjælpemidler

<u>*Opgave 7:*</u> a) Modellen er lineær , da forskriften er $f(x) = a \cdot x + b$, og da antallet af år er angivet i antal år efter 1994, indtastes følgende tabel under 'Lister og regneark' på n'spire, hvorefter der laves lineær regression:

	A år	B antalpassagerer	C	D
=		antalpassagerer		=LinRegMx(a[],b[],1): Copy
1	0	121.2	Titel	Lineær regression (mx+b)
2	2	134.7	RegEqn	m*x+b
3	4	157.6	m	9.45857142857
4	6	178.6	b	118.923809524
5	8	187.4	r^2	0.98514257339
6	10	217.8	r	0.992543486901
7			Resid	{2.27619047619,⁻3.14095...

Da n'spire har anvendt *m* i stedet for *a*, har man:
$\underline{\underline{a = 9,45857143 \;\; og \;\; b = 118,9238}}$

b) År 2007 svarer til *x* = 13, og da funktionen er gemt som f1(x), indtastes følgende på n'spire:

$$f1(13) \qquad 241.885238095$$

Da antallet af passagerer er målt i millioner, var ifølge modellen det årlige antal passagerer i 2007 <u>241,9 millioner</u>

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>Opgave 8:</u> a) De kumulerede frekvenser beregnes ved at addere frekvenserne for alle intervallerne op til og med det givne interval:

Eksempel for intervallet]30;60]: Kumuleret frekvens = 18% + 55% + 24% = 97%.

Dette giver skemaet:

Gennemsnitlig ventetid (målt i dage)	]0;1]	]1;30]	]30;60]	]60;120]
Kumuleret frekvens for andel af kommuner.	18%	73%	97%	100%

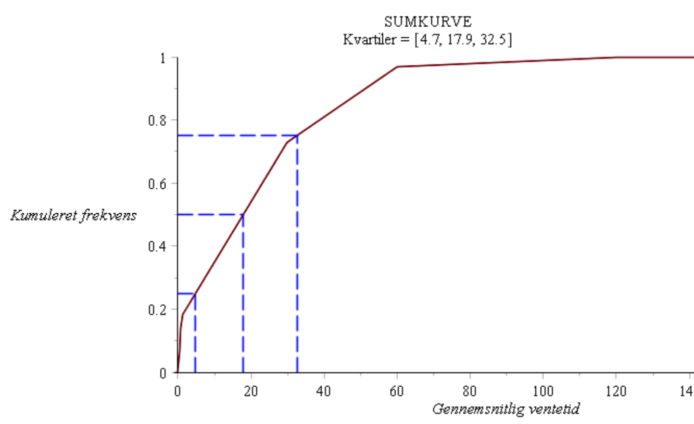
Højre intervalendepunkt anvendes på førsteaksen og den kumulerede frekvens afsættes op ad andenaksen, når man tegner en sumkurve:

$restart$

$with(Gym):$

$$M := \begin{bmatrix} 0..1 & 18 \\ 1..30 & 55 \\ 30..60 & 24 \\ 60..120 & 3 \end{bmatrix}:$$

$plotSumkurve(M)$



b) Kvartilsættet aflæses ud fra de kumulerede frekvenser 0,25 (25%), 0,50 (50%) og 0,75 (75%).
På figuren ovenfor er kvartilsættet aflæst/udregnet til:

Nedre kvartil: <u>5</u>

Median: <u>18</u>

Øvre kvartil:<u>33</u>

For at bestemme den andel af kommuner, hvor den gennemsnitlige ventetid er på højst 45 dage, skal man gå op til grafen fra 45 på førsteaksen og aflæse den tilsvarende værdi på andenaksen.
Dette kan også gøres i Maple ved:

$$f(x) := sumkurve(M, x):$$

$$f(45) = 0.8500000000000000$$

Dvs. at <u>85%</u> af kommunerne har en gennemsnitlig ventetid på højst 45 dage.

Opgave 9: $N(t)=17,5\cdot a^t$

a) Da halveringstiden er angivet i år og tiden også måles i år, kan man bestemme *a* ved:

$$T_{½}=\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(a)}$$

$$30,17=\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(a)}$$

Dette udtryk kan løses ved 'solve':

$$\text{solve}\left(30.17=\frac{\ln(0.5)}{\ln(a)},a\right) \qquad a=0.977287193228$$

Dvs. $a=\underline{\underline{0,977287193228}}$

b) Først defineres funktionen på n'spire, og derefter anvendes 'solve' til at løse ligningen $N(t)=10$, da det giver antal år inden man er nede på 10g af stoffet:

$$n(t):=17.5\cdot(0.97728719322785)^t \qquad \textit{Udført}$$

$$\text{solve}(n(t)=10,t) \qquad t=24.3578979991$$

Dvs. der skal gå $\underline{\underline{24,4\text{år}}}$ for at mængden af stoffet er nede på 10g.

c) Først udregnes, hvor mange gram der er tilbage efter 50 år, ved at finde n(50), og derefter divideres dette tal med 17,5, da tallet 17,5 er begyndelsesværdien for den eksponentielle udvikling:

$$n(50) \qquad 5.54815301816$$

$$\frac{5.5481530181606}{17.5} \qquad 0.317037315323$$

Dvs. efter 50 år er der $\underline{\underline{31,7\%}}$ af stoffet tilbage.

<u>*Opgave 10:*</u> a) Afstanden fra kysten til skibet kan bestemmes ved at finde enten $|BD|$ eller $|CE|$. Her vælges den første, så man skal ende med a finde afstanden ved hjælp af ΔABD. For at kunne bruge denne trekant, skal man imidlertid kende $|AB|$, så den skal først bestemmes ved at kigge på ΔABC. Da containerskibet sejler parallelt med kysten, er $\angle ABC = \angle CAD = 46,5°$, og sinusrelationerne giver så:

$$\frac{|AB|}{\sin(\angle BCA)} = \frac{|BC|}{\sin(\angle BAC)}$$

$$|AB| = \frac{|BC|}{\sin(\angle BAC)} \cdot \sin(\angle BCA) = \frac{398m}{\sin(53,1° - 46,5°)} \cdot \sin(46,5°) = 2511,79882592m$$

Da trekant ABD er retvinklet har man:

$$dist_{skib-kyst} = |BD| = \sin(\angle BAD) \cdot |AB| = \sin(53,1°) \cdot 2511,79882592m = 2008,6469863m \approx \underline{\underline{2009m}}$$

Man kunne godt have udregnet det på én gang, hvis man f.eks. sætter $x = |AD|$ og så opskriver udtrykkene:

$$dist = |BD| = |AD| \cdot \tan(\angle BAD) = x \cdot \tan(53,1°)$$

$$dist = |CE| = |AE| \cdot \tan(\angle CAE) = (x + 398) \cdot \tan(46,5°)$$

Dette er to ligninger med to ubekendte, der løses med 'solve' på n'spire:

```
solve(dist=x· tan(53.1) and dist=(x+398)· tan(46.5),dist)
                         dist=2008.6469863 and x=1508.13481703
```

<u>*Opgave 11:*</u> $f(x) = \ln(x) + \frac{20}{x}$; $x > 0$; $P(1, f(1))$

a) For at kunne bestemme ligningen for en tangent, skal man kende røringspunktets koordinatsæt samt tangentens hældning.
Først bestemme røringspunktets y-værdi:

$$f(1) = \ln(1) + \frac{20}{1} = 0 + 20 = 20$$

Så bestemmes hældningen ved at udregne differentialkvotienten i 1:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{20}{x^2}$$

$$f'(1) = \frac{1}{1} - \frac{20}{1^2} = 1 - 20 = -19$$

Hermed kan ligningen for tangenten bestemmes:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$y - 20 = -19 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = -19x + 39}}$$

Det kunne også have været bestemt ved:

$$\text{tangentLine}\left(\ln(x) + \frac{20}{x}, x, 1\right) \qquad 39 - 19 \cdot x$$

b) For at bestemme monotoniforholdene bestemmes først nulpunkterne for den afledede funktion:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{20}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{20}{x^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x} = 20 \Leftrightarrow x = 20$$

Fortegnet for den afledede funktion bestemmes på hver side af dette sted:

$$f'(1) = -19 < 0$$

$$f'(100) = \frac{1}{100} - \frac{20}{100^2} = 0,01 - 0,002 = 0,008 > 0$$

Fortegnene for den afledede funktion fortæller os, at:
<u>*f* er aftagende i intervallet]0,20], og *f* er voksende i intervallet [20,∞[</u>.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 12: $f(x) = -x + 8 \quad ; \quad g(x) = -x^2 + 6x + 2$

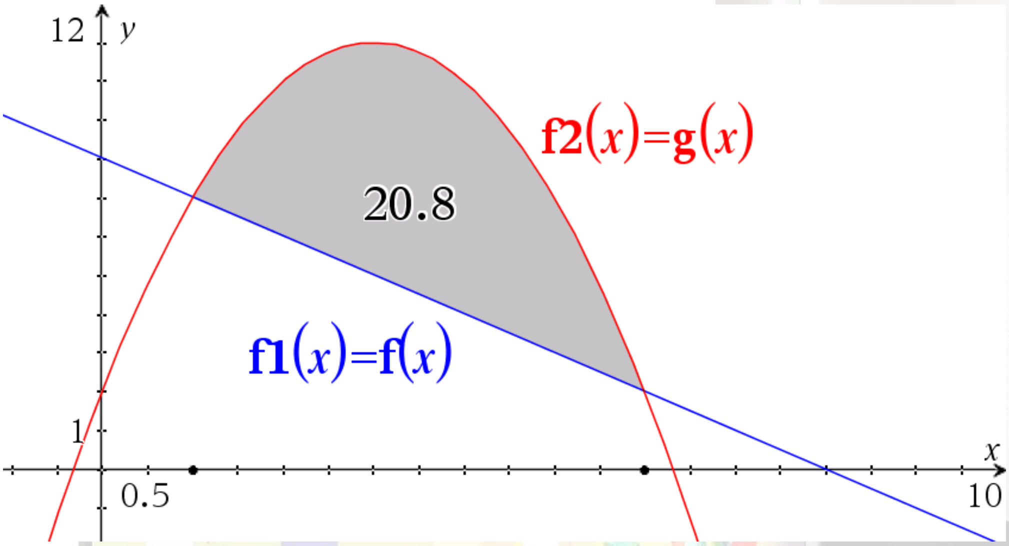
a) Ligningen $f(x) = g(x)$ løses ved at sætte udtrykkene på højresiden lig hinanden og løse den fremkomne ligning:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$
$$-x + 8 = -x^2 + 6x + 2 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x-6)\cdot(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\underline{\underline{x = 1 \quad \vee \quad x = 6}}$$

De to parenteser er dannet ved at finde to tal, hvis sum giver -7 og produktet 6.
Man kunne også have anvendt diskriminantmetoden.
Funktioner defineres i n'spire, så arealet kan angives under 'grafer':

$f(x) := -x+8$ *Udført*

$g(x) := -x^2+6\cdot x+2$ *Udført*



Området M er det mørke område, og en tilnærmet værdi til arealet er bestemt ved 'Undersøg grafer' og 'Areal af område'.

b) Man ved fra a), at graferne skærer, hvor *x=1* og *x=6*, og i området mellem disse værdier ligger grafen for *g* over grafen for *f*, så arealet af M kan bestemmes ved:

$$\int_1^6 (g(x)-f(x))\,dx \qquad \frac{125}{6}$$

Dvs. at $\underline{\underline{A_M = \frac{125}{6}}}$

Opgave 13: a) Hegnet skal på figuren dække to vandrette linjer og en lodret, og den samlede længde bliver:

$$l = x + y + (x-1) = \underline{\underline{2x + y - 1}}$$

Udendørsarealet består af et stort rektangel fratrukket et lille rektangel (hundehuset), så man har:

$$A = A_{stort\ rektangel} - A_{hundehus} = x \cdot y - 1 \cdot 1,2 = \underline{\underline{x \cdot y - 1,2}}$$

b) Da der er 10m hegn til rådighed, giver udtrykket for længden at:

$$10 = 2x + y - 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{y = -2x + 11}}$$

Arealet som funktion af *x* bliver hermed:

$$A(x) = x \cdot (-2x + 11) - 1,2 = -2x^2 + 11x - 1,2$$

Grafen for denne funktion er en parabel med benene nedad, så den største værdi for arealet fås i toppunktet:

$$x_{\max} = x_{toppunkt} = \frac{-b}{2a} = \frac{-11}{2 \cdot (-2)} = \frac{11}{4} = \underline{\underline{2,75}}$$

5. december 2014: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: Da trekanterne er ensvinklede, er forholdene mellem ensliggende sider konstant, så man har:

$$\frac{|AC|}{|DF|}=\frac{|AB|}{|DE|} \Leftrightarrow |AC|=\frac{|AB|}{|DE|}\cdot|DF|$$

$$|AC|=\frac{5}{10}\cdot 6=\frac{1}{2}\cdot 6=\underline{\underline{3}}$$

Opgave 2: $f(x)=b\cdot a^x$ Grafen går gennem punkterne (0,4) og (3,32).

Da det ene punkt har førstekoordinaten 0, kan man aflæse begyndelsesværdien *b* som andenkoordinaten for dette punkt, dvs. $b=4$.

Dette indsættes sammen med det andet punkts koordinater i forskriften for at bestemme *a*.

$$32=4\cdot a^3 \Leftrightarrow a^3=\frac{32}{4}=8 \Leftrightarrow a=\sqrt[3]{8}=2$$

Dvs. forskriften er $\underline{\underline{f(x)=4\cdot 2^x}}$

Opgave 3: Udtrykket reduceres ved at anvende første kvadratsætning på første led og gange ind i parentes i andet led:

$$(a+b)^2+2\cdot\left(b^2-a\cdot b\right)=a^2+b^2+2\cdot a\cdot b+2b^2-2\cdot a\cdot b=\underline{\underline{a^2+3b^2}}$$

Opgave 4: Antallet af kasser betegnes med *x*. Den samlede vægt målt i kg betegnes med *V*.

Da den samlede vægt øges med en fast størrelse (45kg) for hver kasse, er det en lineær sammenhæng, og begyndelsesværdien er 600, da traileren har egenvægten 600kg.

Dvs. modellen bliver:

$$\underline{\underline{V(x)=45\cdot x+600}}$$

Opgave 5: $f(x) = x^2 - 6 \cdot x$

Koordinatsættet til parablens toppunkt beregnes efter først af have fundet diskriminanten:

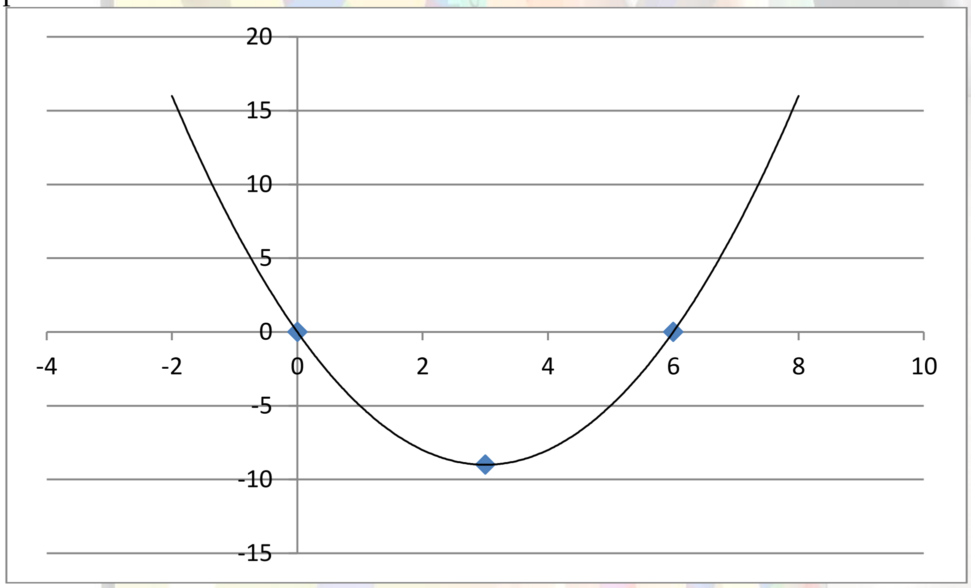
$$d = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 36$$

$$T\left(\frac{-b}{2a};\frac{-d}{4a}\right) = T\left(\frac{-(-6)}{2 \cdot 1};\frac{-36}{4 \cdot 1}\right) = T\left(\frac{6}{2};\frac{-36}{4}\right) = \underline{\underline{T(3,-9)}}$$

Da koefficienten til andengradsleddet er positiv (*a=1*), vender grenene opad.
For at kunne tegne parablen er det en god idé udover at kende toppunktet også at kende nulpunkterne, så disse bestemmes:

$$f(x) = x^2 - 6x = x \cdot (x-6) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\vee\; x = 6$$

Parablen går altså gennem punkterne (0,0) , (3,-9) og (6,0). Ud fra disse tre punkter tegnes parablen:



Opgave 6: Der hvor funktionerne svarende til graferne B og C har ekstremumssteder, er der ingen af graferne, der skærer *x*-aksen, og derfor kan ingen af graferne B og C svare til funktionen $f(x)$, da den afledede funktion $f'(x)$ i så fald skulle have nulpunkt her.

Altså hører grafen A til funktionen $\underline{\underline{f(x)}}$

På det midterste stykke, hvor $f(x)$ er voksende (ses på grafen A), ligger grafen C over *x*-aksen, mens grafen B ligger under *x*-aksen. $f'(x)$ skal være positiv på dette stykke, dvs:
Grafen B hører til *f '(x)*

Dermed gælder, at *Grafen C hører til g(x)*

5. december 2014: Delprøven MED hjælpemidler

Opgave 7: $f(t) = b \cdot a^t$

a) Den uafhængige variabel står som eksponent i potensen, så modellen er en eksponentiel udvikling. Det bemærkes, at *t* er antal år EFTER 2007. n'spire anvendes til regression:
Værdierne indlæses under 'Lister og regneark', og der vælges 'Statistik' -->'Statistiske beregninger' --> 'Eksponentiel regression':

X−liste:	a[]
Y−liste:	b[]
Gem RegEqn i:	f1
Frekvensliste:	1
Kategoriliste:	
Medtag kategorier:	
1. resultat kolonne:	c[]

A	B	C	D
			=ExpReg(a[],b[],1):
0	462	Titel	Eksponentiel regre...
1	440	RegEqn	a*b^x
2	406	a	457.953769356
3	383	b	0.950216927788
4	380	r²	0.967393894615
5	357	r	-0.983561840768
		Resid	{4.0462306438427...
		ResidTra...	{0.0087966523327...

Da n'spire bytter rundt på *a* og *b*, har man:

$\underline{\underline{a = 0{,}9502169 \ og \ b = 457{,}95377}}$

b) Det er en eksponentiel udvikling, så *a* er fremskrivningsfaktoren.
Vækstraten *r* beregnes ved: $r = a - 1 = 0{,}9502169 - 1 = -0{,}0497831 = -4{,}97831\%$
Dvs. at <u>ølforbruget i Danmark i perioden efter 2007 er faldet med 5% om året.</u>

c) Da man kender fremskrivningsfaktoren, kan halveringstiden beregnes:

$$T_{½} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(a)} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(0{,}95021692778783)} = 13{,}57382775442$$

Dvs. at <u>der går 13,6 år, før ølforbruget er halveret.</u>

Opgave 8: $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - x + 1$

a) Funktionens nulpunkter bestemmes med 'solve' på n'spire:

$f(x) := 3\cdot x^3 - 3\cdot x^2 - x + 1$ *Udført*

$\text{solve}(f(x)=0, x)$

$x = ^-0.57735026919 \text{ or } x = 0.57735026919 \text{ or } x = 1.$

Dvs. funktionens nulpunkter er $\underline{\underline{x = -0,57735 \quad \vee \quad x = 0,57735 \quad \vee \quad x = 1}}$

b) Tangentligningen kan bestemmes, når man kender røringspunktets koordinater samt tangenthældningen:

$f(2)$ 11

$\frac{d}{dx}(f(x))|x=2$ 23

Så tangentens ligning bliver:

$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$

$y - 11 = 23 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 23 \cdot x - 35}}$

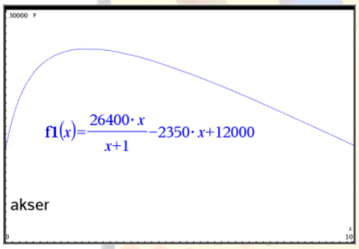
Dette kunne også være fundet ved:

$\text{tangentLine}(f(x), x, 2)$ $23\cdot x - 35$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 9: $f(x)=\dfrac{26400\cdot x}{x+1}-2350\cdot x+12000 \quad ; \quad 0\leq x\leq 10$

a) Grafen tegnes på n'spire i det pågældende interval:



Hvis der ikke tilføres kunstgødning, har man:

$$f(0)=\frac{26400\cdot 0}{0+1}-2350\cdot 0+12000=12000$$

Dvs. at <u>fortjenesten er 12000 kr. pr. hektar.</u>

b) Det er oplyst, at der netop er én vandret tangent i intervallet, så det ses på grafen, at det er det sted, hvor der er maksimum.
Det kan bestemmes ved at finde det sted, hvor den afledede funktion er 0:

$$f(x):=\frac{26400\cdot x}{x+1}-2350\cdot x+12000 \qquad \text{Udført}$$

$$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(f(x))=0,x\right) \qquad x=^{-}4.35172232639 \text{ or } x=2.35172232639$$

Kun den positive løsning ligger i intervallet, og ud fra informationen i opgaveteksten behøver man ikke at vise, at det er et maksimumssted.
Funktionsværdien bestemmes:

$$f(2.35172232639) \qquad 24996.905066$$

Dvs. $\underline{\underline{P(2{,}3517;24997)}}$, hvilket fortæller, at

<u>den maksimale fortjeneste er 24997kr. pr. hektar, og den opnås med gødningsmængden 2,35 tons pr. hektar.</u>

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 10: Det er tale om et χ^2-GOF-test, da man skal sammenligne en observeret fordeling med en forventet/kendt fordeling.

a) Nulhypotesen er, at aldersfordelingen i stikprøven er den samme som aldersfordelingen i populationen (og dermed at stikprøven er repræsentativ for populationen).
Da stikprøven indeholder 479 individer, omregnes procentdelene fra populationen til en forventet tabel i n'spire ved:

$forventetprocent := [0.15\ \ 0.16\ \ 0.19\ \ 0.17\ \ 0.17\ \ 0.16]$
$$[0.15\ \ 0.16\ \ 0.19\ \ 0.17\ \ 0.17\ \ 0.16]$$

$forventet := 479 \cdot forventetprocent$
$$[71.85\ \ 76.64\ \ 91.01\ \ 81.43\ \ 81.43\ \ 76.64]$$

Dvs. den forventede tabel er:

Alder	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-100
Antal	72	77	91	81	81	77

b) Den forventede tabel sammenlignes med den observerede tabel i et χ^2-GOF-test.
Under 'Lister og regneark' indskrives de to tabeller, og da der er 5 frihedsgrader, fordi man ved at kende 5 af antallene ville kunne beregne det sjette og sidste antal ud fra informationen om 479 individer, får man følgende:

	A obs	B forv	C	D
=				=χ²GOF('obs,'forv,!
1	90	72	Titel	χ²−Goodness of F…
2	85	77	χ²	8.1200342867
3	80	91	PVal	0.149743197636
4	78	81	df	5.
5	79	81	CompLis…	{4.5,0.831168831…
6	67	77		

Da *p*-værdien 0,1497 er større end signifikansniveauet på 0,05 $(14{,}97\% > 5\%)$, kan nulhypotesen IKKE forkastes. Der er altså ikke signifikant forskel på fordelingen i stikprøven og populationen.

Opgave 11: $f(x) = 2^x \quad g(x) = 1{,}5 \cdot x + 1$

a) Ligningen løses på n'spire:

$f(x) := 2^x$	*Udført*
$g(x) := 1.5 \cdot x + 1$	*Udført*
⚠ $\mathrm{solve}(f(x) = g(x), x)$	$x = 0.$ or $x = 2.$

Dvs. at $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0 \ \vee \ x = 2}}$

b) Da grafen for *g* ligger over grafen for *f* i intervallet, kan arealet af M så bestemmes ved:

$$\int_0^2 (g(x) - f(x))\,dx \qquad 0.671914877333$$

Dvs. $\underline{\underline{A_M = 0{,}6719}}$

Opgave 12: $|BC|=4 \quad |AB|=|BE|=6 \quad |AD|=3$

a) Trekant ABC er retvinklet, og med udgangspunkt i vinkel B kendes den hosliggende katete og hypotenusen, så det er cosinus, der skal anvendes:

$$\cos(\angle ABC)=\frac{|BC|}{|AB|}$$

$$\angle ABC=\cos^{-1}\left(\frac{4}{6}\right)=\underline{\underline{48{,}1896851042°}}$$

Da trekant ABC er retvinklet, kan den manglende katete udregnes med Pythagoras:

$$|AC|^2+|BC|^2=|AB|^2$$

$$|AC|=\sqrt{|AB|^2-|BC|^2}=\sqrt{6^2-4^2}=\sqrt{36-16}=\underline{\underline{\sqrt{20}}}$$

b) Vinkel B i trekant ABD kan bestemmes ved først at finde vinkel B i trekant BCD, der er retvinklet:

$$\tan(\angle CBD)=\frac{|CD|}{|BC|}=\frac{|AD|+|AC|}{|BC|}$$

$$\angle CBD=\tan^{-1}\left(\frac{3+\sqrt{20}}{4}\right)=61{,}8388696267°$$

Dvs. $\angle ABD=\angle CBD-\angle ABC=61{,}8388696267°-48{,}189685104221°=\underline{\underline{13{,}649184522485°}}$

Så kan længden af AE bestemmes med cosinusrelationerne:

$$|EA|^2=|AB|^2+|BE|^2-2\cdot|AB|\cdot|BE|\cdot\cos(\angle ABE)$$

$$|EA|=\sqrt{6^2+6^2-2\cdot 6\cdot 6\cdot\cos(13{,}649184522485°)}=\underline{\underline{1{,}4259618480009}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>*Opgave 13:*</u> $V = \frac{1}{2} \cdot l \cdot x^2 \quad O = \left(3+\sqrt{5}\right) \cdot x \cdot l + 2 \cdot x^2$

Da rumfanget er 10, har man $10 = \frac{1}{2} \cdot l \cdot x^2 \Leftrightarrow 20 = l \cdot x^2 \Leftrightarrow \underline{\underline{l = \frac{20}{x^2}}}$

Dette udtryk indsættes i udtrykket for overfladearealet:

$$O(x) = \left(3+\sqrt{5}\right) \cdot x \cdot \frac{20}{x^2} + 2x^2 = \left(3+\sqrt{5}\right) \cdot \frac{20}{x} + 2x^2$$

På n'spire findes det sted, hvor den afledede funktion giver 0, og det undersøges hvad fortegnet er for den anden afledede dette sted:

$o(x) := \frac{\left(3+\sqrt{5}\right) \cdot 20}{x} + 2 \cdot x^2$ *Udført*

$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(o(x))=0, x\right)$ $x=2.96932973147$

$\frac{d^2}{dx^2}(o(x))|x=2.9693297314671$ 12.

Da den anden afledede er positiv det sted, hvor den afledede funktion giver 0, er dette sted et lokalt minimumssted, så $\underline{\underline{x = 2{,}969 dm}}$ er den x-værdi, der giver det mindste overfladeareal.