Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Løsninger til eksamensopgaver på B-niveau 2015

22. maj 2015: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: Ligningen løses ved at isolere x i det åbne udsagn:

$$4\cdot x-7=81 \quad\Leftrightarrow$$
$$4\cdot x=88 \quad\Leftrightarrow$$
$$x=\frac{88}{4}=\underline{\underline{22}}$$

Opgave 2: $y=87-0,45\cdot x$

Det er et lineært udtryk med begyndelsesværdien 87 og hældningen -0,45.
Så da x angiver tiden målt i antal uger efter slankekurens begyndelse, og da y er personens vægt målt i kg, har man:
Personen vejer ved slankekurens start 87kg og taber sig derefter 0,45kg om ugen

Opgave 3: $x^2+3x-10=0$

Det er en andengradsligning med a-værdien 1, så hvis der er heltallige løsninger, kan disse findes ved først at finde to tal, hvis produkt er -10 og som er 3. Dette gælder for 5 og -2, så man har:

$$x^2+3x-10=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x+5)\cdot(x-2)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=-5 \quad\vee\quad x=2}}$$

Opgave 4: Da det er en retvinklet trekant, hvor de to kateter danner den rette vinkel, er arealet halvdelen af produktet af kateterne:

$$T=\frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|AC| \quad\Leftrightarrow$$

$$|AC|=\frac{2\cdot T}{|BC|}=\frac{2\cdot 24}{6}=2\cdot 4=\underline{\underline{8}}$$

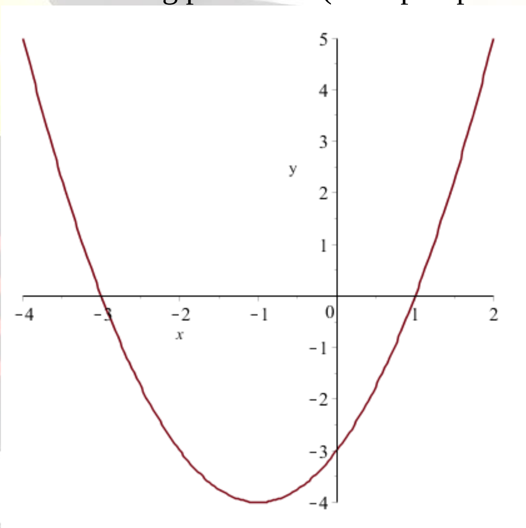
Da det er en retvinklet trekant, er AB hypotenusen, og dens længde kan bestemmes med Pythagoras:

$$|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$$

$$|AB|=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=\underline{\underline{10}}$$

<u>Opgave 5:</u> $f\left(x\right)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$

Da *a* er positiv vender parablens grene/ben opad (en glad parabel).
Da *d* er positiv, skærer parablen *x*-aksen to steder.
Da *c* er negativ, skærer parablen *y*-aksen på den negative del (under *x*-aksen).
Dvs. en mulig parabel er (husk pile på akserne):



<u>Opgave 6:</u> $f\left(x\right)=4x^3-9x^2+1 \quad ; \quad P\left(1,12\right)$

Der integreres ledvist for at finde den form samtlige stamfunktioner er på:

$$F\left(x\right)=\int\left(4x^3-9x^2+1\right)dx=x^4-3x^3+x+k$$

Punktets koordinater indsættes i udtrykket for stamfunktionen for at finde *k*:

$$12=1^4-3\cdot1^3+1+k \quad \Leftrightarrow$$

$$12=1-3+1+k \quad \Leftrightarrow$$

$$13=k$$

Dvs. forskriften for den søgte stamfunktion er:

$$\underline{\underline{F\left(x\right)=x^4-3x^3+x+13}}$$

22. maj 2015: Delprøven MED hjælpemidler

Opgave 7: For at kunne bestemme frekvenserne og efterfølgende de kumulerede frekvenser skal man først beregne observationsættets størrelse:

$n = 28738 + 13128 + 6608 + 5169 = 53643$

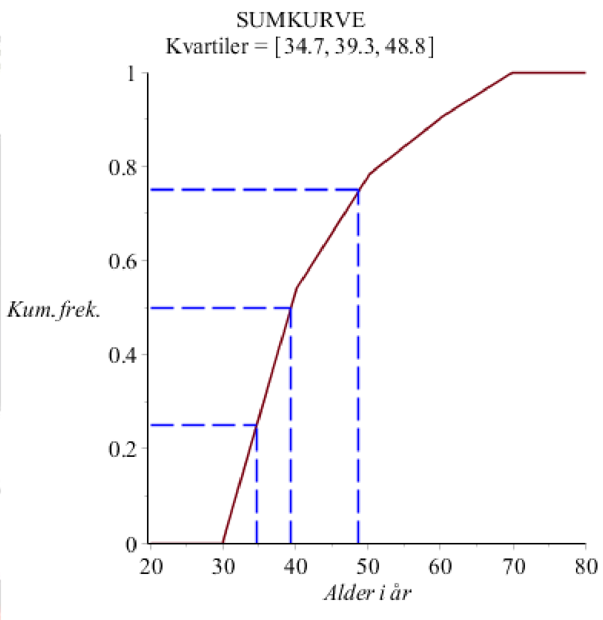
Frekvenserne findes så ved at dividere antallet med *n* (og oftest angives det i procent):

Alder (år)	]30,40]	]40,50]	]50,60]	]60,70]
Antal	28738	13128	6608	5169
Frekvens	$\frac{28738}{n} = 53,6\%$	$\frac{13128}{n} = 24,5\%$	$\frac{6608}{n} = 12,3\%$	$\frac{5169}{n} = 9,6\%$
Kumuleret frekvens	53,6%	78,1%	90,4%	100,0%

Den kumulerede frekvens er beregnet ved at lægge frekvenser op til og med det pågældende interval sammen:

Eksempel ( ]50,60]): Kumuleret frekvens = 53,6% + 24,5% + 12,3% = 90,4%

Sumkurven tegnes ved at angive alderen på førsteaksen og have procenter op ad andenaksen.
Den kumulerede frekvens afsættes ved intervallets højre endepunkt, og ved første intervals venstre endepunkt afsættes 0%.
Alle punkterne forbindes med rette linjer:



b) Kvartilsættet bestemmes ved at tegne vandrette linjer ind fra 25%, 50% og 75% og aflæse alderen. Man får:

Nedre kvartil = 34,7 år

Median = 39,3 år

Øvre kvartil = 48,8 år

Hvis man tegner en lodret linje op fra 55 år indtil grafen og derefter vandret ind på 2. aksen, aflæser man 84%. Dette fortæller, at
ud af de 30-70 årige, der har taget en lang videregående uddannelse, er 16% over 55 år.
Dette er godt nok ikke svaret på opgavens spørgsmål, men det har tydeligvis været intentionen med spørgsmålet. Selve spørgsmålet er formuleret forkert og kan ikke løses, da man ikke kender antallet af københavnere.

Opgave 8: Opgaven følger notationen angivet på skitsen i opgaven.

$$|AB| = 79\,m \quad ; \quad \angle A = 39° \quad ; \quad \angle B = 21°$$

a) Da man kun kender længden af én side i trekant *ABC*, kan man ikke anvende cosinusrelationerne. Man skal altså anvende sinusrelationer. Derfor har man brug for at kende en vinkel og dens modstående side, og da den eneste kendte sidelængde er for siden *AB*, skal man kende vinkel *C*. Denne kan bestemmes ud fra vinkelsummen i en trekant, da man kender de to andre vinkler:

$$\angle C = 180° - \angle A - \angle B = 180° - 39° - 21° = 120°$$

Så kan de to søgte sidelængder bestemmes:

$$\frac{|AC|}{\sin(B)} = \frac{|AB|}{\sin(C)} \quad \Leftrightarrow \quad |AC| = \frac{|AB|}{\sin(C)} \cdot \sin(B)$$

$$|AC| = \frac{79\,m}{\sin(120°)} \cdot \sin(21°) = 32{,}69080550\,m \approx \underline{\underline{32{,}7\,m}}$$

$$\frac{|BC|}{\sin(A)} = \frac{|AB|}{\sin(C)} \quad \Leftrightarrow \quad |BC| = \frac{|AB|}{\sin(C)} \cdot \sin(A)$$

$$|BC| = \frac{79\,m}{\sin(120°)} \cdot \sin(39°) = 57{,}40745099\,m \approx \underline{\underline{57{,}4\,m}}$$

b) Med højden af bærerammen menes højden fra *C*, og den kan bl.a. bestemmes ved at se på den retvinklede trekant, som fodpunktet for højden fra *C* danner sammen med *A* og *C*. Her er siden *AC* hypotenusen, og i forhold til vinkel *A* er højden den modstående katete. Så man har:

$$\sin(A) = \frac{h_c}{|AC|} \quad \Leftrightarrow \quad h_c = \sin(A) \cdot |AC|$$

$$h_c = \sin(39°) \cdot 32{,}69080550\,m = 20{,}57299051\,m \approx \underline{\underline{20{,}6\,m}}$$

c) For at kunne bestemme vinkel *D* i trekant *ACD*, kan man ved hjælp af en cosinusrelation bestemme længden af siden *CD*. Så har man alle tre sider og kan med fordel bestemme vinkel *D* med cosinusrelationen, så man slipper for at overveje, om sinusrelationerne har givet den rette vinkel (stump eller spids).

$$|CD|^2 = |AC|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |AD| \cdot \cos(A)$$

$$|CD| = \sqrt{(32{,}69080550m)^2 + (37m)^2 - 2 \cdot 32{,}69080550m \cdot 37m \cdot \cos(39°)} = 23{,}61524362\text{m}$$

Nu bestemmes vinkel *D*:

$$\cos(D) = \frac{|AD|^2 + |AC|^2 - |CD|^2}{2 \cdot |AD| \cdot |AC|}$$

$$D = \cos^{-1}\left(\frac{(37m)^2 + (23{,}61524362m)^2 - (32{,}6908055m)^2}{2 \cdot 37m \cdot 23{,}61524362m}\right) = 60{,}59537481° \approx \underline{\underline{60{,}6°}}$$

Opgave 9: Forskriften er $f(x) = b \cdot a^x$, dvs. det er en eksponentiel udvikling. Da der er mere end to målepunkter, skal der anvendes regression. Det bemærkes, at tidspunktet *x* angiver antal år EFTER 2010.

a) Løses i Maple:

restart

with(*Gym*) :

År := [0, 1, 2, 3, 4] :

Antal := [1.1, 1.3, 1.8, 2.3, 3.2] :

$f(x) := ExpReg(År, Antal, x)$:

$f(x) = 1.04818383402334\ 1.31078030411630^x$

Dvs. den søgte forskrift er $\underline{\underline{f(x) = 1.0482 \cdot 1.3108^x}}$

b) Da det er en eksponentiel udvikling er *a* fremskrivningsfaktoren, der er forbundet med vækstraten *r* ved $a = 1 + r$. Dvs. at $r = 0{,}31 = 31\%$, og dermed <u>er antallet af internetopkoblede elektroniske apparater, som ikke er smartphones, vokset med 31% om året siden 2010.</u>

c) Det bemærkes først, at enhederne for de to funktioner er de samme, så man kan regne uden enheder. Spørgsmålet er derfor, hvornår graferne skærer hinanden, så grafen for *f* kommer til at ligge over grafen for *g*. Dette svarer til at løse uligheden:

$f(x) > g(x)$. Det gøres i Maple:

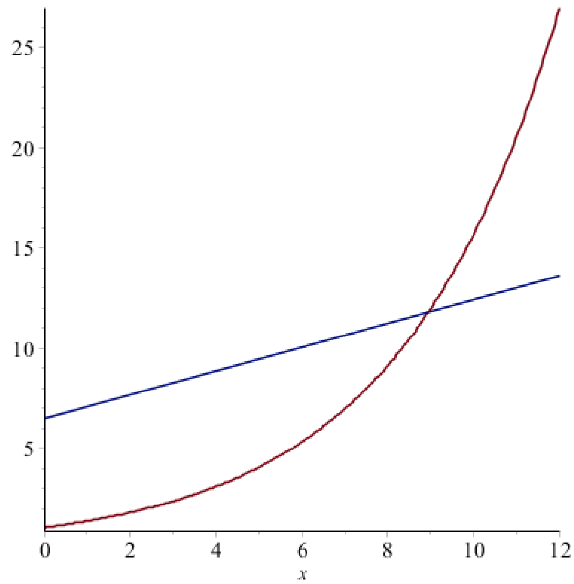
$g(x) := 0.59 \cdot x + 6.5$:

$f(x) > g(x) \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x < -10.92455958], [8.937821135 < x]]$

Da vi kun ser fremad i modellen, er det det sidste interval, der arbejdes med, dvs. 9 år efter 2010 har *f* overhalet *g*:

<u>I år 2019 overstiger antallet af internetopkoblede elektroniske apparater, der ikke er smartphones, antallet af smartphones.</u>

$plot([f(x), g(x)], x = 0..12) =$



Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

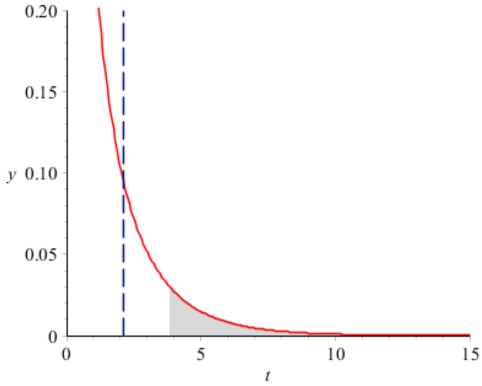
Opgave 10: Nulhypotesen er, at der ikke er nogen sammenhæng mellem at være hjulbenet og at spille fodbold.

Dette undersøges med et χ^2-uafhængighedstest (U-test):

I Maple indtastes:

$$ChiKvadratUtest\left(\begin{bmatrix} 15 & 65 \\ 16 & 122 \end{bmatrix}\right)$$

χ^2-teststørrelse = 2.1259
Frihedsgrader = 1
Kritisk værdi = 3.8415
p-værdi = 0.14483



Da *p*-værdien er 0,145 og altså over 0,05, der er signifikansniveauet, kan nulhypotesen ikke forkastes. Dvs. der er ikke signifikant forskel på forekomsten af hjulbenethed blandt fodboldspillere og ikke-fodboldspillere.

Opgave 11: a) Da man på B-niveau ikke har lært at differentiere produkter, er der lagt op til, at opgaven skal udregnes med CAS-værktøj:

$$f(x) = \left(x^2 - 15\right) \cdot e^{-x}$$

$f(x) := \left(x^2 - 15\right) \cdot e^{-x}$:

For at kunne bestemme en ligning for tangenten, skal man kende koordinatsættet til røringspunktet samt tangenthældningen *a*:

$y_0 := f(0) = -15$

$a := f'(0) = 15$

Tangentligningen bliver så:

$y - y_0 = a \cdot (x - 0) \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = 15\,x - 15$

Dvs. ligningen er $\underline{\underline{y = 15\,x - 15}}$

b) For at bestemme monotoniforholdene findes først de steder, hvor den første afledede er nul, og disse steder undersøges fortegnet for den anden afledede for at se, om det er lokalt minimum eller maksimum. Ud fra disses placering kan monotoniforholdene opskrives:

$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 5\}, \{x = -3\}$

$f''(-3) = 8\,e^3 > 0$ Dvs. dette er et lokalt minimum.

$f''(5) = -8\,e^{-5} < 0$ Dvs. dette er et lokalt maksimum.

Ud fra placeringen af de lokale ekstremumssteder, har man:

Dvs. $\underline{\underline{f\ er\ aftagende\ i\ ]-\infty, -3],\ voksende\ i\ [-3, 5]\ og\ aftagende\ i\ [5, \infty[}}$

Opgave 12: $O(x) = x^{1,7}$

a) Når den oplevede muskelbelastning O er 2, har man ligningen $2 = x^{1,7}$, der løses i Maple:

$$2 = x^{1.7} \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 1.503406654]]$$

Dvs. at den faktiske muskelbelastning er $\underline{\underline{1.5}}$

b) Da det er en potensfunktion, er sammenhængen mellem vækstraterne $(1+r_O) = (1+r_x)^a$

Dvs. i dette tilfælde er det $(1+r_O) = (1+r_x)^{1,7}$

Da den faktiske muskelbelastning skal øges med 50%, er $r_x = 0,50$:

$$(1+r_O) = (1+0,50)^{1,7} \quad \Leftrightarrow$$

$$r_O = 1,5^{1.7} - 1 = 0,992301860$$

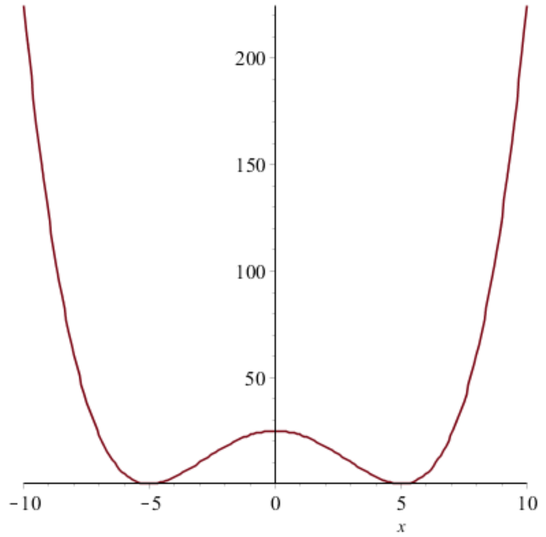
Dvs. <u>den oplevede muskelbelastning øges med 99% (næsten en fordobling)</u>

Opgave 13: a) $f(x) = \frac{1}{25} \cdot x^4 - 2x^2 + 25$

En skitse tegnes i Maple:

$$f(x) := \frac{1}{25} \cdot x^4 - 2 \cdot x^2 + 25 :$$

$plot(f(x)) =$



For at finde nedre og øvre grænse i det bestemte integral, der skal anvendes til at bestemme arealet af M, findes nulpunkterne for funktionen:

$$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 5\}, \{x = 5\}, \{x = -5\}, \{x = -5\}$$

Dvs. man har:

$$A_M = \int_{-5}^{5} f(x)\,dx = \frac{400}{3} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 133.3333333$$

Altså er $A_M = \underline{\underline{\frac{400}{3}}}$

28. maj 2015: Delprøven UDEN hjælpemidler

<u>*Opgave 1:*</u> Udtrykket reduceres ved at anvende en kvadratsætning på første led:

$$(a-b)^2-b^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b-b^2=a^2-2ab=\underline{\underline{a\cdot(a-2b)}}$$

<u>*Opgave 2:*</u> $N(t)=200\cdot 1{,}04^t$

Det bemærkes, at modellen er en eksponentiel udvikling med begyndelsesværdien 200 og fremskrivningsfaktoren 1,04.
Da *t* er tiden målt i antal år efter 2002, <u>var der i 2002 200 dyr i populationen.</u>
Sammenhængen mellem væskstraten *r* og fremskrivningsfaktoren *a* er $a=1+r$, og dermed er $r=a-1=1{,}04-1=0{,}04=4\%$
Derfor <u>er populationen siden 2002 vokset med 4% om året.</u>

<u>*Opgave 3:*</u> Forskriften for en lineær funktion er $f(x)=a\cdot x+b$. Man skal altså bestemme værdierne for *a* og *b*.
Koordinatsættene for punkterne $P(2,3)$ og $Q(5,12)$ indsættes i forskriften, så man får to ligninger med to ubekendte, der kan bruges til at bestemme *a* og *b*:

$$\left.\begin{matrix}12=a\cdot 5+b\\ 3=a\cdot 2+b\end{matrix}\right\}\Rightarrow 12-3=(5a+b)-(2a+b)\Leftrightarrow\ 9=3a\ \Leftrightarrow\ a=3$$

Dette indsættes i den nederste ligning for at bestemme *b*:

$$3=3\cdot 2+b\Leftrightarrow\ b=3-6=-3$$

Hermed er forskriften:

$$\underline{\underline{f(x)=3x-3}}$$

<u>*Opgave 4:*</u> $f(x)=3x^2-6x+1$

Koordinatsættet for parablens toppunkt bestemmes ved hjælp af toppunktsformlen efter først at have beregnet diskriminanten:

$$d=b^2-4ac=(-6)^2-4\cdot 3\cdot 1=36-12=24$$

$$T\left(\frac{-b}{2a};\frac{-d}{4a}\right)=T\left(\frac{-(-6)}{2\cdot 3};\frac{-24}{4\cdot 3}\right)=T\left(\frac{6}{6};\frac{-24}{12}\right)=\underline{\underline{T(1;-2)}}$$

Opgave 5: Da de to trekanter er ensvinklede, er forholdet mellem ensliggende sider konstant, dvs:

$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|DF|}{|AC|} = \frac{|EF|}{|BC|}$$

$$\frac{15}{10} = \frac{|DF|}{5} = \frac{|EF|}{7}$$

Dette giver os to ligninger, der kan anvendes til at bestemme de to sidelængder i trekant *DEF*, man mangler for at kunne beregne omkredsen:

$$\frac{15}{10} = \frac{|DF|}{5} \Leftrightarrow |DF| = \frac{15}{10}\cdot 5 = \frac{3}{2}\cdot 5 = \frac{15}{2}$$

$$\frac{15}{10} = \frac{|EF|}{7} \Leftrightarrow |EF| = \frac{15}{10}\cdot 7 = \frac{3}{2}\cdot 7 = \frac{21}{2}$$

Så er omkredsen:

$$O_{DEF} = |DE| + |EF| + |DF| = 15 + \frac{15}{2} + \frac{21}{2} = 15 + \frac{36}{2} = 15 + 18 = \underline{\underline{33}}$$

Man kan også benytte, at da omkredsen fås ved at lægge de tre sider sammen, vil forholdet mellem omkredsene af de to trekanter være det samme som forholdet mellem siderne, og så kan man bestemme omkredsen af trekant *ABC* og derefter anvende skalafaktoren 1,5 til at beregne omkredsen af den store trekant.

Opgave 6: Integralet bestemmes ved ledvis integration, og man skal huske en vilkårlig konstant, da det er et ubestemt integral, der bestemmes:

$$\int \left(3x^2 + 4x + 2\right) dx = \underline{\underline{x^3 + 2x^2 + 2x + k}}$$

28. maj 2015: Delprøven MED hjælpemidler

<u>*Opgave 7:*</u> Modellen har forskriften $f(x) = b \cdot a^x$, dvs. det er en eksponentiel udvikling, og da der er oplyst mere end to sæt sammenhørende værdier, skal der foretages regression.
Værdierne indtastet derfor på n'spire i søjler under 'Lister og Regneark', og der vælges 'statistik', 'statistiske beregninger' og 'Eksponentiel regression'. Resultatet gemmes som funktionen f1, så man kan arbejde videre med udtrykket.
Det bemærkes, at n'spire anvender *a* og *b* omvendt af vores model:

	A testløb	B halvmaraton	C	D
=				=ExpReg(a[],b[],1
1	16	76	Titel	Eksponentiel regr...
2	19	87	RegEqn	a*b^x
3	23	107	a	33.0118280193
4	25	119	b	1.05268828384
5	28	139	r^2	0.999134916976
6	31	160	r	0.999567364902
7	35	202	Resid	{0.930036643963...
8			ResidTra...	{0.012312816832...

Så man har: $\underline{\underline{a = 1,0527 \text{ og } b = 33,01}}$

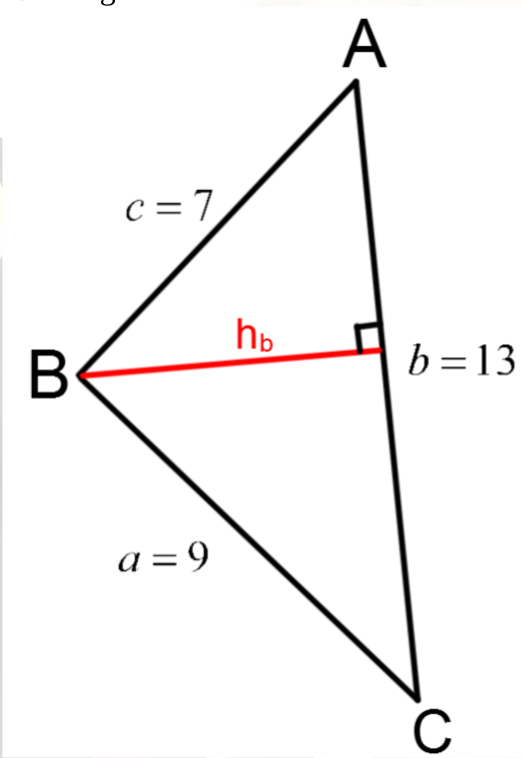
b) Hvis løberen i testløbet løb på 30 minutter, er $x = 30$.
Da udtrykket er gemt på n'spire indtastes:

$f1(30)$ 154.050550671

Dvs. at den forventede løbetid i halvmaratonen er <u>154 minutter</u>

Opgave 8: $a = 9$; $b = 13$; $c = 7$

a) Først tegnes en skitse af trekanten:



Da man kender alle tre sider, bestemmes vinkel A med en cosinusrelation:

$$\cos(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

$$A = \cos^{-1}\left(\frac{13^2 + 7^2 - 9^2}{2 \cdot 13 \cdot 7}\right) = \underline{\underline{41{,}17108290°}}$$

b) Da man kender en vinkel og de to hosliggende sider, kan man bestemme trekantens areal med ½-appelsinformlen:

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(A) = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 7 \cdot \sin(41{,}17108290°) = \underline{\underline{29{,}95308832}}$$

Da man nu kender arealet samt længden af den grundlinje AC, der hører sammen med højden fra B, kan man bestemme højden ud fra den simple arealformel for trekanter:

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$$

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot h_b \cdot |AC| \Leftrightarrow h_b = \frac{2 \cdot T}{|AC|} = \frac{2 \cdot 29{,}95308832}{13} = \underline{\underline{4{,}608167434}}$$

Opgave 9: $K = 0,036 \cdot M^{1,356}$

a) Først defineres funktionen i n'spire, og derefter bestemmes kloens vægt, når hele krabbens vægt *M* er 400:

$k(m):=0.036 \cdot m^{1.356}$ *Udført*

$k(400)$ 121.533456298

Dvs. kloen vejer 122 mg, når hele krabben vejer 400 mg.

Hvis kloen vejer 53 mg, er $K(M) = 53$:

$\text{solve}(k(m)=53,m)$ $m=216.901994897$

Dvs. at hele krabben vejer 217 mg, når kloen vejer 53 mg.

b) Da det er en potensfunktion, er sammenhængen mellem vækstraterne:

$$(1+r_K) = (1+r_M)^a$$

$$r_K = (1+0,30)^{1,356} - 1 = 0,427273445 = 42,7273445\%$$

Dvs. kloens vægt vokser med 43%, når krabbens vægt vokser med 30%.

Opgave 10: $f(x) = 3 \cdot \ln(x+1) - x^2 \quad ; \quad x > -1$

a) For at finde ligningen for en tangent skal man kende hældningen og røringspunktet. Hældningen bestemmes som differentialkvotienten det pågældende sted, mens røringspunktet andenkoordinat bestemmes ved indsættelse i funktionsudtrykket. Udregningerne foretages i Maple:

$f(x) := 3 \cdot \ln(x+1) - x^2$:

Røringspunktets andenkoordinat bestemmes:

$f(0) = 0$

Tangentens hældning bestemmes:

$f'(0) = 3$

Tangentens ligning findes så ved indsættelse i $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$:

$y - 0 = 3 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 3x}}$

b) Monotoniforholdene bestemmes ved først at finde de lokale ekstremumssteder, hvilket foregår ved at finde de steder, hvor den afledede funktion er 0 og efterfølgende tjekke fortegnet for den anden afledede de pågældende steder for at se, om det er maksimum, minimum eller vandret vendetangent:

$evalf(solve(f'(x) = 0, x)) = -1.822875656, 0.8228756560$

Det bemærkes, at den første løsning ligger uden for definitionsmængden, så man arbejder kun videre med den anden:

$f''(0.8228756560) = -2.902832459 < 0$ dvs. det er et lokalt maksimum.

Hermed bliver monotoniforholdene:

$\underline{\underline{f \text{ er voksende i }]-1, 0.8228756560] \text{ og aftagende i } [0.8228756560, \infty\ \infty[}}$

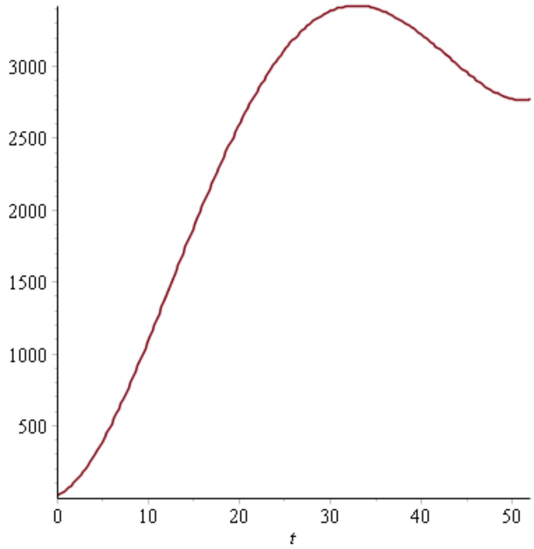
Opgave 11: $f(t)=0{,}0038\cdot t^4-0{,}42\cdot t^3+12{,}12\cdot t^2+24{,}13\cdot t+16{,}67 \quad ; \quad 0\le t\le 52$

a) Først defineres funktionen:

$f(t) := 0.0038\cdot t^4 - 0.42\cdot t^3 + 12.12\cdot t^2 + 24.13\cdot t + 16.67$:

Grafen tegnes i det angivne interval:

$plot(f(t), t=0..52) =$



b) Den alder, der svarer til den maksimale vægt, findes ved at finde det sted, hvor der er lokalt maksimum. Det gøres ved at finde de steder, hvor den afledede er 0 og efterfølgende ud fra fortegnet for den anden afledede at tjekke, om det er lokalt maksimum eller minimum:

$f'(t)=0 \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t=32.80153787], [t=51.04139255], [t=-0.9481935867]]$

Den sidste løsning ligger uden for definitionsmængden, så den skal ikke med:

$f''(32.80153787) = -9.35697098 < 0$ dvs. her er lokalt maksimum.

$f''(51.04139255) = 14.4138939 > 0$ dvs. her er lokalt minimum.

Dvs. kalkunen opnår sin maksimale vægt, når hun er $\underline{\underline{33\ uger}}$

c) $f'(10) = 155.7300$

Dette fortæller, at $\underline{\underline{\textit{når kalkunen er } 10 \textit{ uger, vokser hendes vægt med } 156 \textit{ gram om ugen.}}}$

Opgave 12: $f(x)=x^2-6x+10 \quad ; \quad g(x)=2x+3$

Først bestemmes 1. koordinaterne til skæringspunkterne mellem de to grafer, da de skal bruges som nedre og øvre grænse i det bestemte integral, der angiver arealet af *M*. Da *g*'s graf ligger øverst i det pågældende interval, skal denne funktion stå først i integranden:

restart

$f(x) := x^2 - 6x + 10 : g(x) := 2x + 3 :$

$f(x) = g(x) \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 7], [x = 1]]$

$A_M = \int_1^7 (g(x) - f(x))\,dx = 36$

Dvs. $\underline{\underline{A_M = 36}}$

Opgave 13: a) Da man skal undersøge, om antallet af kerner følger den biologiske model, bliver nulhypotesen:

H_0: Fordelingen følger den biologiske model.

Først bestemmes det samlede antal kerner, så man efterfølgende kan benytte den biologiske model til at bestemme den forventede fordeling:

$n = 648 + 237 + 195 + 63 = 1143$

De forventede antal findes:

	Forventet antal
Violet og glat	$\frac{9}{16} \cdot 1143 = 643$
Violet og rynket	$\frac{3}{16} \cdot 1143 = 214$
Gul og glat	$\frac{3}{16} \cdot 1143 = 214$
Gul og rynket	$\frac{1}{16} \cdot 1143 = 71$

Pga. afrundinger afviger summen af de forventede antal med 1 fra det observerede.

b) Der foretages et χ^2-GOF-test for at se, om nulhypotesen skal forkastes:

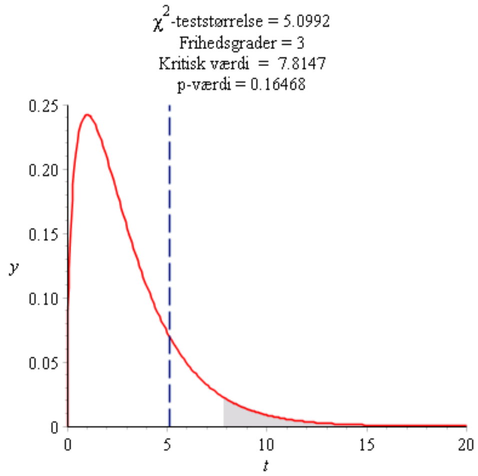
$restart$

$with(Gym):$

$observeret := [648, 237, 195, 63]:$

$forventetantal := [643, 214, 214, 71]:$

$ChiKvadratGOFtest(observeret, forventetantal, level = 0.05)$



Da *p*-værdien på 0,16 er større end signifikansniveauet på 0,05,
skal nulhypotesen IKKE forkastes.
Der er ikke signifikant forskel på den indsamlede fordeling og den forventede fordeling baseret på den biologiske model.

13. august 2015: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: $P(4,2) \quad Q(-3,9)$

Ligningen for en ret linje er $y = a \cdot x + b$, så vi har brug for at kende hældningen *a* og skæringen *b* med *y*-aksen:

Hældningen bestemmes:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9-2}{-3-4} = \frac{7}{-7} = -1$$

Punktet *P* benyttes til at bestemme *b*:

$$2 = -1 \cdot 4 + b \Leftrightarrow b = 6$$

Dvs. linjens ligning er:

$$\underline{\underline{y = -x + 6}}$$

Opgave 2: Begge led kan udregnes med kvadratsætninger, så man får:

$$(x+4)^2 + (x-4)^2 = x^2 + 16 + 8x + x^2 + 16 - 8x = 2x^2 + 32 = \underline{\underline{2\left(x^2 + 16\right)}}$$

Opgave 3: Der er mulighed for, at trekant *DEF* er skaleret op eller ned med 3. Da *DE* er ensliggende med *AB* (fordi $\angle A = \angle D$ og $\angle B = \angle E$), har man:

$$\left|DE_{stor}\right| = 3 \cdot |AB| = 3 \cdot 15 = \underline{\underline{45}}$$

$$\left|DE_{lille}\right| = \frac{|AB|}{3} = \frac{15}{3} = \underline{\underline{5}}$$

Opgave 4: $f(x) = b \cdot a^x$

b-værdien er startværdien, der grafisk svarer til skæringen med andenaksen (hvor $x = 0$). Da grafen *C* skærer andenaksen højere oppe end de to andre grafer, er det altså
<u>graf *C*, der svarer til funktionen med den største *b*-værdi.</u>

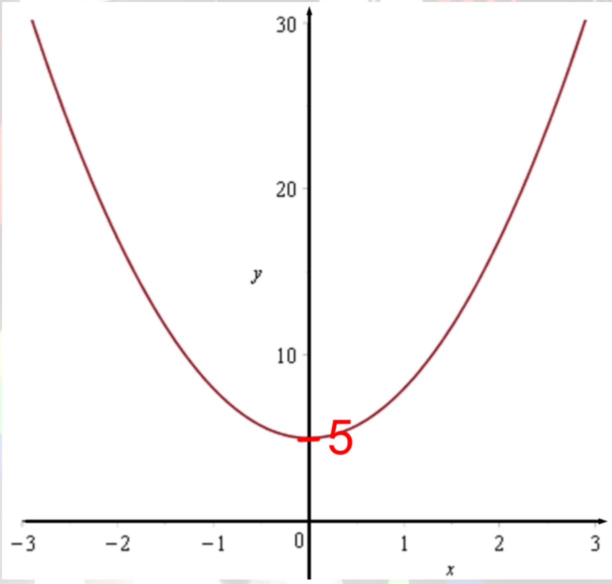
a er fremskrivningsfaktoren, der er afgørende for væksten. Da grafen *A* ligger under de to andre grafer ved skæringen, men senere skærer dem og lægger sig øverst, er det
<u>graf *A*, der har den største værdi af *a*.</u>

Opgave 5: $f(x) = x^3 + 5x$

Den afledede funktion bestemmes ved at differentiere ledvist:

$$\underline{\underline{f'(x) = 3x^2 + 5}}$$

Funktionsudtrykket for den afledede funktion er et andengradspolynomium, med positiv *a*-værdi og *b*-værdien 0.
Dermed er grafen en parabel med grenene opad og toppunktet placeret på *y*-aksen. *c*-værdien fortæller os så, at toppunktet ligger i $(0,5)$.



Opgave 6: Det bestemte integral bestemmes ved at integrere ledvist og indsætte grænserne:

$$\int_0^2 \left(6x^2 - 4x + 1\right) dx = \left[2x^3 - 2x^2 + x\right]_0^2 =$$

$$\left(2 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2\right) - \left(2 \cdot 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 0\right) = 2 \cdot 8 - 2 \cdot 4 + 2 = \underline{\underline{10}}$$

13. august 2015: Delprøven MED hjælpemidler

Opgaverne løses med Maple.

Opgave 7:

restart

with(*Gym*) :

a) Det er angivet, at sammenhængen skal beskrives ved $y = a \cdot x + b$, dvs det er en lineær model, så der skal anvendes lineær regression.

$Vægt := [83.0, 81.5, 79.1, 78.2, 76.0, 75.5]$:

$Løbetid := [6.48, 6.42, 6.28, 6.22, 6.20, 6.15]$:

$f(x) := LinReg(Vægt, Løbetid, x)$:

$f(x) = 0.0431413335350404\, x + 2.88853447297756$

Dvs. $\underline{\underline{a = 0.04314}}$ og $\underline{\underline{b = 2.8885}}$

b) Hældningen a fortæller os, at for hvert kg vægten øges, øges den gennemsnitlige løbetid pr. km med $\underline{\underline{0.04\ minutter}}$

En vægt på 74 kg svarer til $x = 74$, så man finder:

$f(74) = 6.08099315457055$

Dvs. kvindens gennemsnitlige løbetid pr. km er så ifølge modellen $\underline{\underline{6.08\ minutter}}$

c) Hvis den gennemsnitlige løbetid pr. km. skal være 6,00 minutter, skal:

$f(x) = 6.00 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 72.12260892]]$

Dvs. så skal kvinden veje $\underline{\underline{72.1\ kg}}$ lige inden løbeturen.

Opgave 8: $f(x) = x^4 + 5x^3 - 15x^2 - 5x + 14$

restart

with(*Gym*) :

a) Først defineres funktionen:

$f(x) := x^4 + 5 \cdot x^3 - 15 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 14$:

Maple finder de 4 løsninger (hvoraf nogle kan være komplekse):

$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 1], [x = 2], [x = -7], [x = -1]]$

Alle løsningerne er reelle, så løsningen til ligningen er:

$\underline{\underline{x = -7 \lor x = -1 \lor x = 1 \lor x = 2}}$

b) Det generelle udtryk for tangentens ligning er $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Man kender allerede stedet $x_0 = 1$, så man mangler bare at finde røringspunktets andenkoordinat $f(x_0)$ samt hældningen $f'(x_0)$ for tangenten i dette punkt.

Da funktionen allerede er defineret, kan Maple bestemme disse ved:

$f(1) = 0$

$f'(1) = -16$

Altså bliver ligningen:

$y - 0 = -16 \cdot (x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = -16 \cdot x + 16}}$

Maple kunne også have fundet udtrykket på én gang ved indtastningen:

$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = -16\, x + 16$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 9:

a) Der er i alt 3237 bæltefikseringer, så frekvenserne findes ved at dividere de enkelte antal bæltefikseringer med dette samlede antal.
De kumulerede frekvenser kan derefter bestemmes ved at lægge frekvenserne op til og med det pågældende interval sammen:

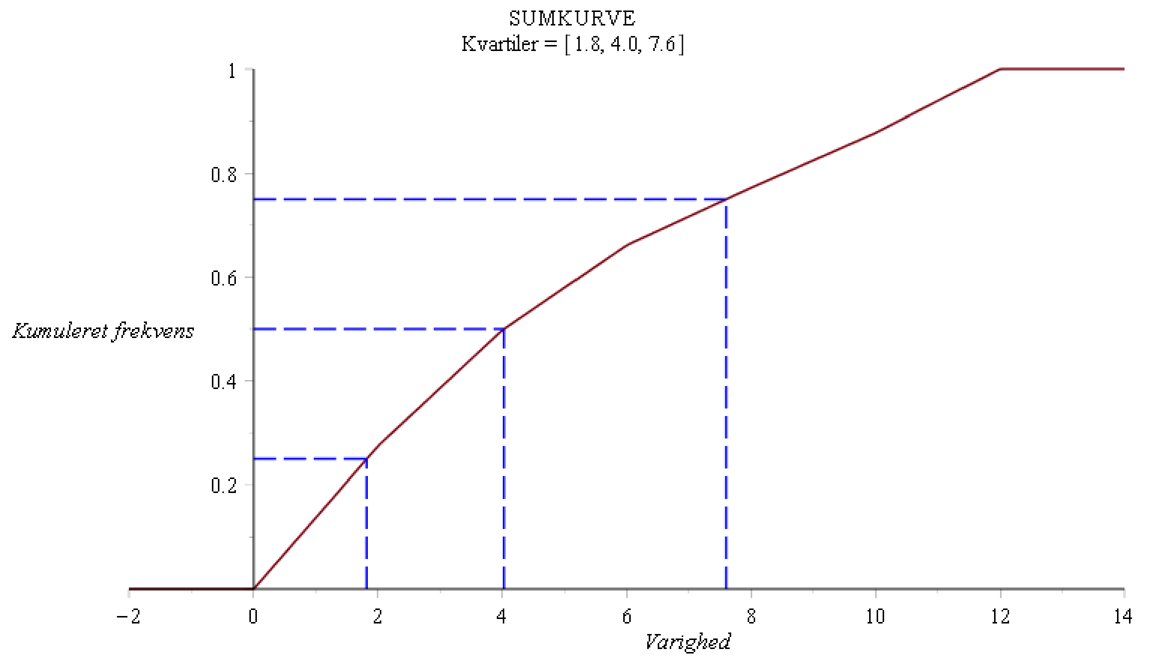
Varighed	$]0-2]$	$]2-4]$	$]4-6]$	$]6-8]$	$]8-10]$	$]10-12]$
Antal bæltefikseringer	889	722	531	358	341	396
Frekvens	$\frac{889.}{3237} =$ 0.2746370096	$\frac{722.}{3237} =$ 0.2230460303	$\frac{531.}{3237} =$ 0.1640407785	$\frac{358.}{3237} =$ 0.1105962311	$\frac{341.}{3237} =$ 0.1053444547	$\frac{396.}{3237} =$ 0.1223354958
Kumuleret frekvens	27,5%	49,8%	66,2%	77,3%	87,8%	100%

Med Gym-pakken kan sumkurven tegnes:

Først opskrives værdierne i en matrix, hvorefter man med Gym-pakken kan få tegnet en sumkurve:

$$M := \begin{bmatrix} 0..2 & 889 \\ 2..4 & 722 \\ 4..6 & 531 \\ 6..8 & 358 \\ 8..10 & 341 \\ 10..12 & 396 \end{bmatrix}:$$

$$plotSumkurve(M, t)$$



Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 10:

restart

with(Gym) :

$f(x) := 12350 \cdot 0.96^x$:

x er tiden målt i år efter 2007, og $f(x)$ er gennemsnitlig kvadratmeterpris målt i kr.

a) År 2012 svarer til $x = 5$, så man finder:

$f(5) = 10069.85282$

Dvs. at den gennemsnitlige kvadratmeterpris i 2012 ifølge modellen var $\underline{\underline{10070\ kr}}$

Modellen er en eksponentiel udvikling med fremskrivningsfaktoren $a = 0.96$.

Vækstraten er dermed $r = a - 1 = -0.04$.

Dvs. den gennemsnitlige kvadratmeterpris $\underline{\underline{\textit{falder med } 4\ \% \textit{ om året}}}$ ifølge modellen.

b) En gennemsnitlig kvadratmeterpris på 9000 kr svarer til $f(x) = 9000$, så Maple løser ligningen:

$f(x) = 9000 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 7.751494983]]$

Dvs. der går knap $\underline{\underline{8\ \textit{år}}}$ (regnet fra 2007, dvs. år 2015).

c) Modellen for område B defineres: $g(x) := 14251 \cdot 0.95^x$:

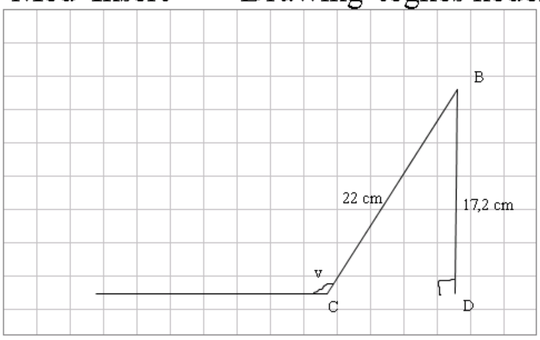
Kvadratmeterprisen er den samme i de to områder, når $f(x) = g(x)$, så denne ligning løses:

$f(x) = g(x) \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 13.67270715]]$

Dvs. 13,7 år efter 2007, og da kvadratmeterpriserne ændrer sig løbende i løbet af et år, så siger modellen, at det vil ske $\underline{\underline{\textit{i løbet af år } 2020}}$.

Opgave 11:

Med 'Insert' --> 'Drawing' tegnes nedenstående skitse.



Man kan bestemme vinkel v ved først at finde dens supplementvinkel $\angle$BCD i ΔBCD, der er retvinklet, hvorfor man har:

$$Sin(\angle BCD) = \frac{mod}{hyp} = \frac{|BD|}{|BC|}$$

$$intervalsolve\left(Sin(C_1) = \frac{17.2}{22}, C_1 = 0..90\right) = [51.42734918]$$

Dermed er $v = 180° - 51.4° = \underline{\underline{128.6°}}$

Opgave 12:

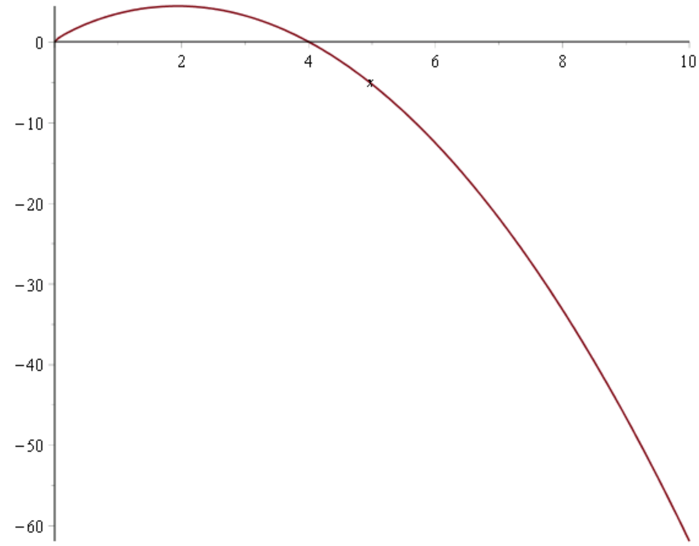
restart

with(*Gym*) :

$f(x) := -x^2 + 3.5\cdot x + \sqrt{x}$:

a) Det bemærkes, at definitionsmængden er $x \geq 0$, så grafen tegnes ved:

$plot(f(x), x = 0..10) =$



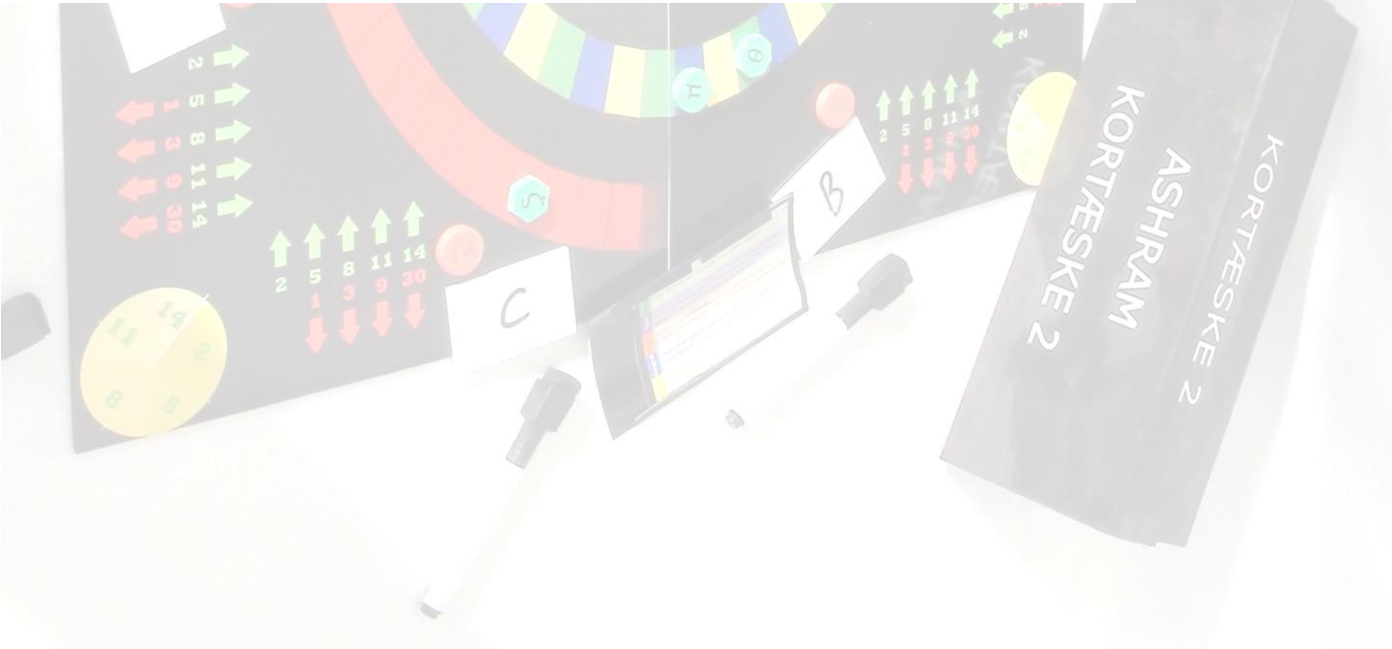
Det ser ud, at grafen begynder i origo og kun skærer x-aksen i (4,0), men det er ikke nok at aflæse dette, så Maple bliver bedt om at finde nulpunkter:

$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 0.], [x = 4.]]$

Punktmængden M er området, der afgrænses af grafen og x-aksen. De to fundne skæringssteder fungerer som nedre og øvre grænse i det bestemte integral, der svarer til arealet af M:

$$A_M = \int_0^4 f(x)\,dx = 12.$$

Dvs. $\underline{\underline{A_M = 12}}$



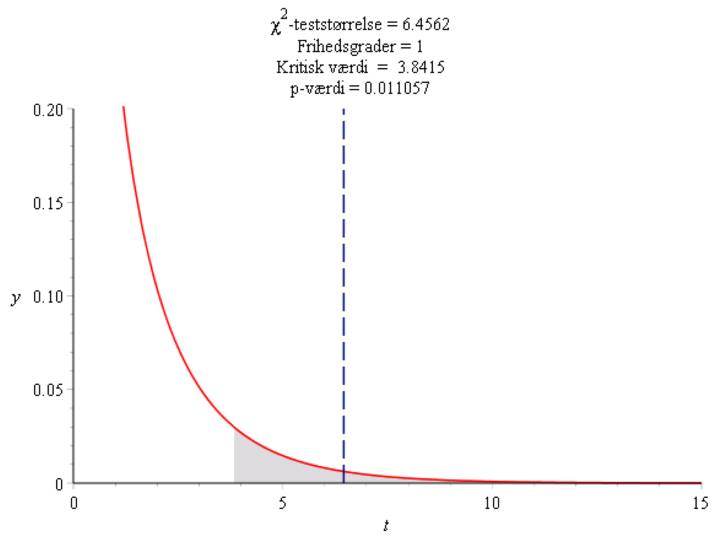
Opgave 13:

Vores nulhypotese er, at kundernes holdning til bilfarvens betydning ikke afhænger af kønnet. Vi tester denne nuhypotese ved et χ^2 – uafhængighedstest.

Matricen opskrives:

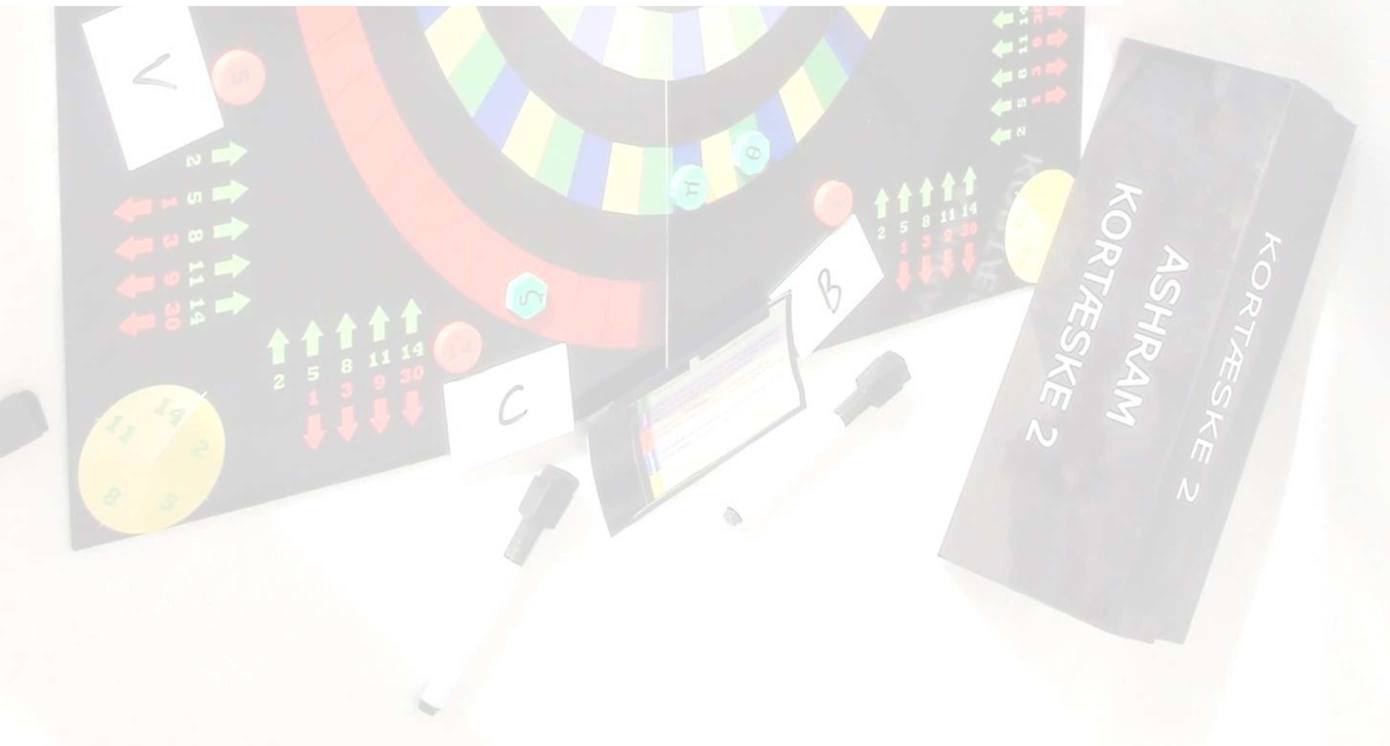
$$M := \begin{bmatrix} 45 & 40 \\ 34 & 65 \end{bmatrix}:$$

$ChiKvadratUtest(M)$



Vores p-værdi er 1,1%, hvilket er under vores signifikansniveau på 5%, og dermed har vi fået svar, der afviger signifant fra vores nulhypotese, der derfor må forkastes.

Dvs. at kundernes holdning til bilfarvens betydning afhænger af kønnet.



Opgave 14:

restart

with(*Gym*) :

$V(t) := \left(10 - 0.1 \cdot t^2\right)^3$:

$V(t)$ er mængden af vand målt i liter, og t er tidspunktet målt i minutter efter start.

a) 5 minutter efter start svarer til $t = 5$, så man finder:

$V(5) = 421.875$

Dvs. at 5 minutter efter start er der 421.9 liter i beholderen.

4 L vand svarer til $V(t) = 4$, og da definitionsmængden er $0 \leq t \leq 10$, benyttes intervalsolve:

$intervalsolve(V(t) = 4, t = 0..10) = [9.172022104]$

Dvs. at 9.2 minutter efter start, er der 4 liter tilbage i beholderen.

b) Den afledede funktion bestemmes:

$V'(t) = -0.6 \left(10 - 0.1 t^2\right)^2 t$

Dvs. $V'(t) = -0.6 \cdot t \cdot \left(10 - 0.1 \cdot t^2\right)^2$

Man skal finde ud af, hvornår der løber mest vand ud af beholderen pr. minut, dvs. hvornår hastigheden - der er negativ, fordi vandet forsvinder fra beholderen - er mindst (numerisk størst).

Hastigheden er den afledede funktion, og vi skal altså finde nulpunkter for den dobbelt-afledede funktion, for at finde ekstremumsstederne:

$intervalsolve(V''(t) = 0, t = 0..10) = [4.472135955, 10.]$

Der er altså to steder (hvoraf det ene er intervallets endepunkt, hvilket må formodes at være et maksimumssted). Fortegnet for den tredje afledede på disse steder fortæller os, om der er tale om lokale maksimum- eller minimumsteder:

$V'''(4.472135955) = 21.46625258 > 0$, dvs. her er lokalt minimum.

$V'''(10) = -48.000 < 0$, dvs. her er lokalt maksimum.

Der løber altså mest vand ud af beholderen pr. minut 4.5 minutter efter start.

7. december 2015: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: $x^2+4x+3=0$

Da andengradsleddets koefficient *a* er 1, kan man faktorisere polynomiet ved at finde to hele tal, hvis produkt er 3 og sum 4. Disse to tal er 1 og 3. Så man har:

$$x^2+4x+3=0 \Leftrightarrow (x+3)\cdot(x+1)=0 \underset{\text{nulreglen}}{\Leftrightarrow} \underline{\underline{x=-3 \vee x=-1}}$$

En anden mulighed er at anvende diskriminantmetoden:

$d=b^2-4ac=4^2-4\cdot1\cdot3=16-12=4>0$ dvs. 2 løsninger.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{d}}{2\cdot a}=\frac{-4\pm\sqrt{4}}{2\cdot1}=\frac{-4\pm2}{2}=\begin{cases}-3\\-1\end{cases} \quad \text{Så } \underline{\underline{x=-3 \vee x=-1}}$$

Opgave 2: $P(2,9)$ & $Q(4,5)$

En lineær funktion *f* har forskriften $f(x)=a\cdot x+b$. Så man skal bestemme *a* og *b*.

Da *f* er en lineær funktion, kan man bestemme hældningen *a* ud fra de to punkter ved:

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{5-9}{4-2}=\frac{-4}{2}=-2$$

Punktet *P*'s koordinater indsættes i funktionsforskriften sammen med hældningen:

$9=-2\cdot2+b \Leftrightarrow b=9+4=13$

Dvs. at funktionsforskriften er: $\underline{\underline{f(x)=-2x+13}}$

Opgave 3: Den samlede vægt målt i gram af kasse med klodser betegnes *V*.

Antallet af klodser betegnes *n*.

Da klodserne hver vejer 8 g, vil vægten øges med 8, hver gang antallet øges med 1, og derfor er der tale om lineær vækst med hældningen 8.

Da kassen vejer 480 g, er vægten, når $n=0$, 480 g, dvs. begyndelsesværdien er 480.

Sammenhængen kan dermed beskrives ved ligningen:

$\underline{\underline{V=8\cdot n+480}}$

<u>*Opgave 4:*</u> $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \qquad d = b^2 - 4ac \qquad T\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{d}{4a}\right)$

Parablen P:
$a > 0$, da parablens ben vender opad.
$b = 0$, da parablen i skæringspunktet med y-aksen har en tangent med hældningen 0, eller: Da parablens toppunkt ligger på y-aksen, hvorfor $-\frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow b = 0$.
$c > 0$, da parablen skærer y-aksen på den positive del.
$d < 0$, da parablen ikke har nogen skærings- eller røringspunkter med x-aksen.

Parablen Q:
$a < 0$, da parablens ben vender nedad.
$b > 0$, da parablen i skæringspunktet med y-aksen har en tangent med positiv hældning, eller: Da parablens toppunkt ligger til højre for y-aksen, har a og b forskellige fortegn.
$c < 0$, da parablen skærer y-aksen på den negative del.
$d > 0$, da parablen ikke har to skæringspunkter med x-aksen.

<u>*Opgave 5:*</u> $f(x) = 6x^2 + 4x - 3 \qquad P(1,10)$

Først findes ved ledvis integration den form, som samtlige stamfunktioner er på:

$$F_k(x) = \int (6x^2 + 4x - 3)\,dx = 2x^3 + 2x^2 - 3x + k$$

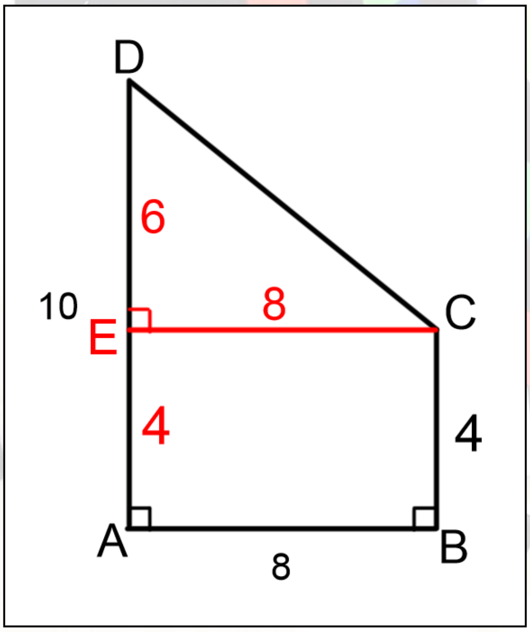
Konstanten bestemmes ved at udnytte, at grafen for F skal gå gennem P:

$$10 = 2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + k \Leftrightarrow 10 = 2 + 2 - 3 + k \Leftrightarrow k = 9$$

Dvs. at forskriften for den søgte stamfunktion er:

$$\underline{\underline{F(x) = 2x^3 + 2x^2 - 3x + 9}}$$

<u>*Opgave 6:*</u>



En linje tegnes fra C parallel med AB. Skæringspunktet med siden AD betegnes E.
Trekant CDE er retvinklet, så Pythagoras anvendes til at finde længden af siden CD.

$$|CD|^2 = |CE|^2 + |DE|^2$$

$$|CD| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

Nu kan omkredsen bestemmes:

$$O = |AB| + |BC| + |CD| + |DA| = 8 + 4 + 10 + 10 = \underline{\underline{32}}$$

Og arealet er:

$$A = T_{rektangel} + T_{trekant} = l \cdot b + \frac{1}{2} \cdot h \cdot g = 4 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = \underline{\underline{56}}$$

(Arealet kunne også være bestemt ved trapezformlen)

Opgave 7:

restart

with(*Gym*) :

a) Tabellens værdier indtastes i en matrix:

$$M := \begin{bmatrix} 155..160 & 2 \\ 160..165 & 6 \\ 165..170 & 8 \\ 170..175 & 9 \\ 175..180 & 11 \\ 180..185 & 6 \end{bmatrix} :$$

Med Maples Gym-pakke kan de kumulerede frekvenser bestemmes ved indtastningen:

$$kumuleretFrekvens(M) = \begin{bmatrix} 155..160 & 0.0476 \\ 160..165 & 0.190 \\ 165..170 & 0.381 \\ 170..175 & 0.595 \\ 175..180 & 0.857 \\ 180..185 & 1. \end{bmatrix}$$

Tallene fremkommer ved, at man først bestemmer det samlede antal gulerødder:

$n := 2 + 6 + 8 + 9 + 11 + 6 = 42$

Frekvenserne i et interval findes ved at tage hyppigheden i intervallet divideret med det samlede antal.

$155..160: f = \frac{2.}{n} = 0.04761904762$

$160..165: f = \frac{6.}{n} = 0.1428571429$

$165..170: f = \frac{8.}{n} = 0.1904761905$

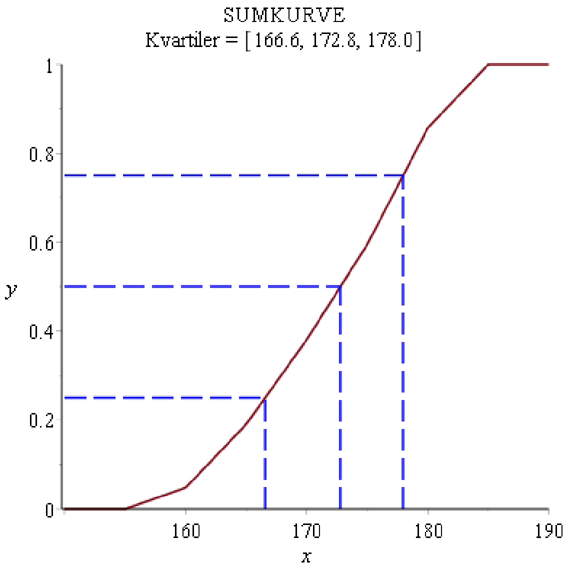
osv.

Den kumulerede frekvens findes så ved at lægge frekvenserne op til og med det pågældede interval sammen. Som eksempel vises det tredje interval:

$165..170: f_{kumuleret} = 0.04761904762 + 0.1428571429 + 0.1904761905 = 0.3809523810$

b) Sumkurven tegnes med hjælp fra Gym-pakken:

$plotSumkurve(M, t) =$



Kvartilsættet er bestemt til $\underline{\underline{(166.6, 172.8, 178.0)}}$

Kvartilsættet aflæses ved at gå ud fra 0,25, 0,50 og 0,75 på andenaksen til skæring med sumkurven, hvorefter kvartilsættet aflæses som de pågældende steder (dvs. der tegnes lodrette streger ned til *x*-aksen).

Opgave 8: Det bemærkes, at tiden måles i antal år EFTER 2010, og at modellen $f(t) = b \cdot a^t$ er en eksponentiel udvikling. Der skal altså laves eksponentiel regression:

restart

with(*Gym*) :

År := [0, 1, 2, 3, 4] :

Datatrafik := [6533, 11344, 19415, 30871, 50727] :

$f(t) :=$ *ExpReg*(*År*, *Datatrafik*, *t*) :

$f(t) = 6722.85470766366\ 1.66534321462594^t$

Dvs. at $a = 1.665$ og $b = 6723$

b) År 2016 svarer til $t = 6$:

$f(6) = 1.43408943628154\ 10^5$

Dvs. at ifølge modellen vil den mobile datatrafik i 2016 være 143409 *TB*

b) År 2016 svarer til $t = 6$:

$f(6) = 1.43408943628154\ 10^5$

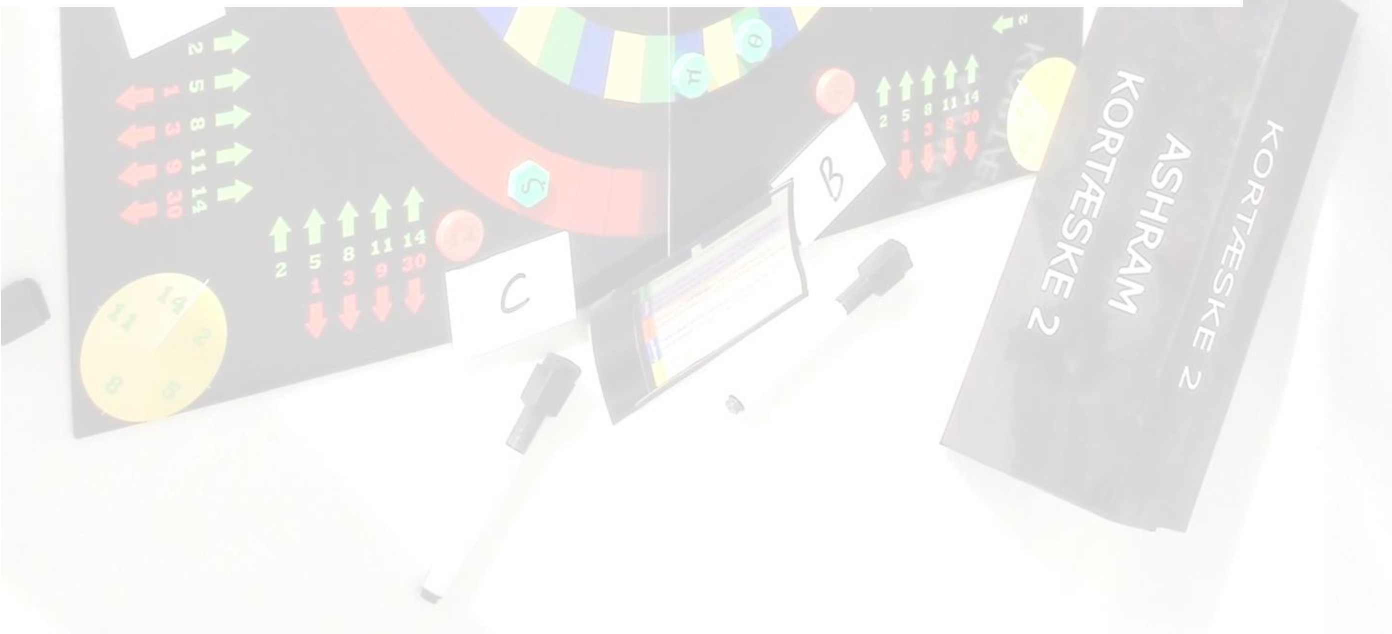
Dvs. at ifølge modellen vil den mobile datatrafik i 2016 være 143409 *TB*

Tallet a er fremskrivningsfaktoren, der er knyttet til vækstraten r ved $a = 1 + r$.
Dvs. at $r = 0.665 = 66.5$ %, dvs. at den mobile datatrafik i Danmark vokser med 66.5 % om året.

c) Fordoblingstiden kan bestemmes, når man kender fremskrivningsfaktoren:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2.)}{\ln(1.66534321462594)} = 1.359028879$$

Dvs. at fordoblingstiden er 1.36 år



Opgave 9:

restart

with(*Gym*) :

a) De oplyste stykker i $\triangle ABC$ indtastes i Maple: $A := 47 : B := 58 : AB := 73\ m :$

Da man kun kender én sidelængde, kan man ikke anvende cosinusrelationerne til at bestemme længden af siden AC. For at kunne bruge sinusrelationerne skal man dog kende et par bestående af en vinkel og den modstående side. Da man kun kender længden af AB, skal man altså også kende $\angle C$. Denne bestemmes ved at udnytte, at vinkelsummen i en trekant er 180°.

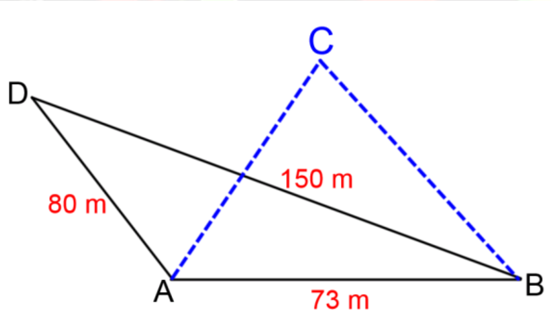
$C := 180 - A - B = 75$

Nu kan afstanden bestemmes med sinusrelationerne:

$$\frac{Sin(C)}{AB} = \frac{Sin(B)}{AC} \xrightarrow{\text{solve for AC}} [[AC = 64.09137156\ m]]$$

Dvs. at afstanden fra brønd A til brønd C er $\underline{\underline{64\ \text{m}}}$

b)

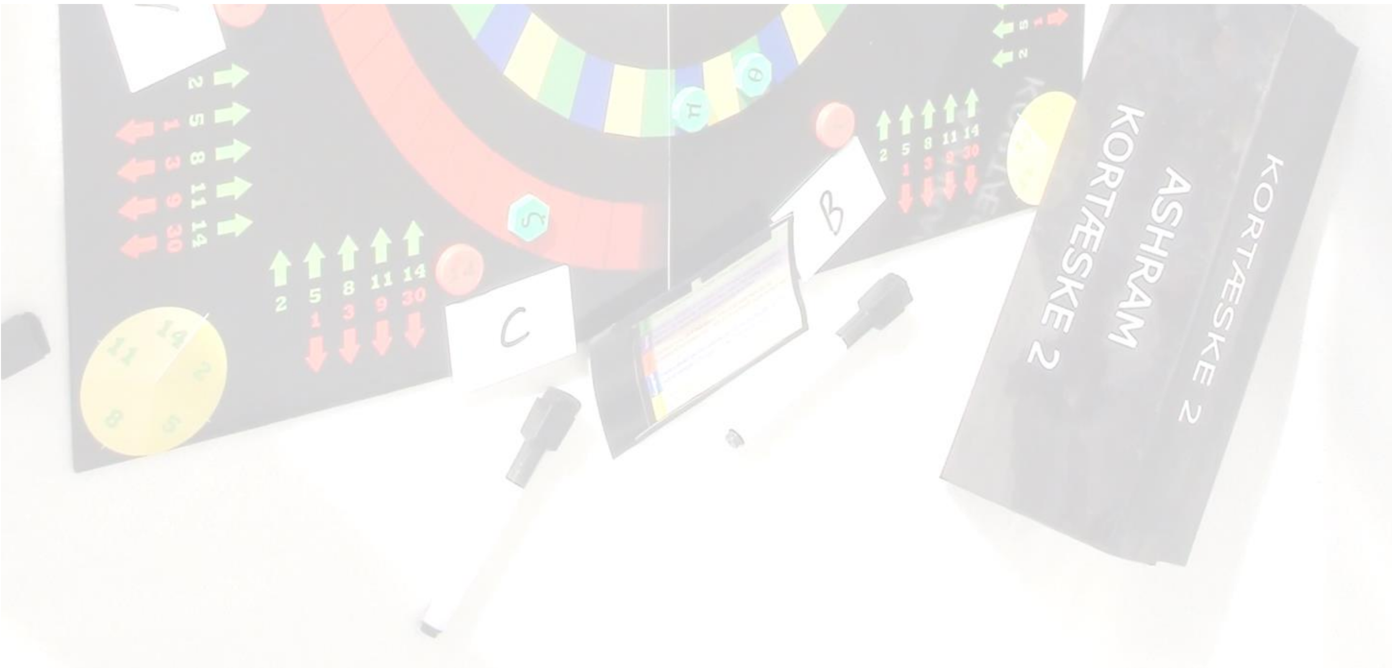


Da man kender alle tre sidelængder ($AD := 80\ m : BD := 150\ m :$), kan man anvende en cosinusrelation:

$$\cos(\angle BAD) = \frac{|AD|^2 + |AB|^2 - |BD|^2}{2 \cdot |AD| \cdot |AB|}$$

$$Cos(A_{ABD}) = \frac{AD^2 + AB^2 - BD^2}{2 \cdot AD \cdot AB} \xrightarrow{\text{solve for A\_\_ABD}} [[A_{ABD} = 157.2461016]]$$

Dvs. $\underline{\underline{\angle A_{ABD} = 157°}}$



Opgave 10

restart

with(*Gym*) :

Funktionens forskrift lægges ind i Maple: $N(t) := \dfrac{709.8}{1 + 0.844 \cdot e^{-0.828 \cdot t}}$:

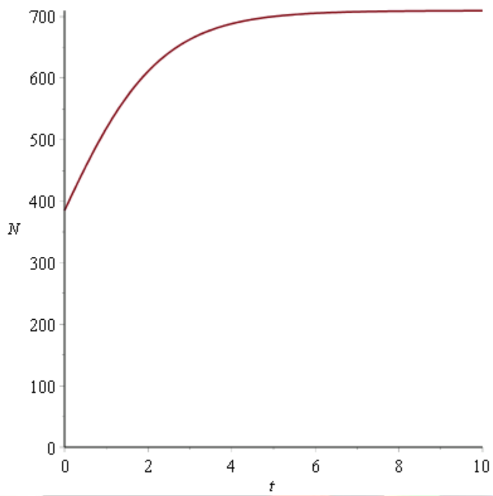
a) Da tiden t måles i antal år efter 2007, svarer år 2009 til $t = 2$.

$N(2) = 611.3060648$

Dvs. at det samlede antal smittede i 2009 er $\underline{\underline{611}}$

Grafen tegnes, så den dækker en periode 10 år frem i tiden fra 2007.:

$plot(N(t), t = 0..10, y = 0..710)$



b) Et samlet antal smittede på 700 svarer til $N(t) = 700$, så denne ligning løses med Maple:

$N(t) = 700 \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t = 4.950598025]]$

Da tiden måles i antal år efter 2007, er det samlede antal smittede 700 i år $\underline{\underline{2012}}$

c) Differentialkvotienten i 3 angiver væksthastigheden i år 2010.

$N'(3) = 36.11032635$

Dvs. at $\underline{\underline{\text{i år 2010 voksede det samlede antal smittede med 36 personer om året.}}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 11

restart

with(*Gym*) :

a) Funktionen lægges ind i Maple: $f(x) := \ln(x) + x^3 - 4x$:

For at kunne bestemme en ligning for tangenten i punktet P, skal man kende P's koordinater og tangentens hældning.

Punktet $P's$ andenkoordinat bestemmes:

$f(2) = \ln(2)$

Tangentens hældning er differentialkvotienten det pågældende sted:

$f'(2) = \frac{17}{2}$

Disse værdier indsættes i ligningen for den rette linje ud fra punkt og hældning:

$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$

$y - \ln(2) = \frac{17}{2} \cdot (x - 2) \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = \frac{17}{2}x - 17 + \ln(2)$

Dvs. tangentens ligning er $\underline{\underline{y = \frac{17}{2} \cdot x - 17 + \ln(2)}}$

Man kunne også have fået dette direkte efter definitionen af funktionen i Maple ved:

$y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = \frac{17}{2}x - 17 + \ln(2) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} y = 8.5000\,x - 16.307$

b) For at bestemme monotoniforholdene skal man først finde de steder, hvor den afledede funktion er 0, da det er her, der kan være lokale maksimums- eller minimumssteder:

$evalf(solve(f'(x) = 0)) = 1., -1.263762616, 0.2637626160$

Det bemærkes, at den midterste løsning ligger uden for definitionsmængden ($x > 0$), så den forkastes.

Man kan nu enten lave et fortegnsskema for den afledede funktion eller som her se på fortegnet for den anden afledede de steder, hvor den første afledede er 0:

$f''(1) = 5 \;\; > 0$ Dvs. her er lokalt minimum.

$f''(0.2637626160) = -12.79128782 < 0$ Dvs. her er lokalt maksimum.

Man har hermed:

$\underline{f \text{ er voksende i intervallerne }]0;\, 0.2637626160] \text{ og } [1; \infty[\text{ og aftagende i intervallet } [0.2637626160;\, 1]}$

Opgave 12

restart

with(*Gym*) :

a) Funktionen lægges ind i Maple: $f(x) := (x^2 - 6x + 5) \cdot (1 + a^2 \cdot x^2)$:

Det bemærkes, at den sidste parentes indeholdende a ikke kan blive 0, da andet led i parentesen er ikke-negativt, og derfor har a-værdien ingen betydning for, hvor grafen skærer x-aksen.

Skæringsstederne bestemmes:

$$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} \left[\left[x = \frac{\mathrm{I}}{a}\right], \left[x = -\frac{\mathrm{I}}{a}\right], [x = 5], [x = 1]\right]$$

De to første løsninger er komplekse (og indeholder a-værdien), så de forkastes.

Da punktmængden M i første kvadrant afgrænses af begge koordinatakser, er det $x = 1$, der fungerer som øvre grænse for det bestemte integral, hvis værdi angiver arealet af punktmængden M.

$a := 2$:

$$A_M = \int_0^1 f(x)\, dx = \frac{19}{5}$$

Dvs. at $\underline{\underline{A_M = \frac{19}{5}}}$

b) Da man nu skal arbejde med en ukendt a-værdi, anvendes kommandoen 'unassign':

unassign('*a*') :

Hvis arealet skal være 40, har man altså:

$$evalf\left(solve\left(40 = \int_0^1 f(x)\, dx, a\right)\right) = -10.13544635, 10.13544635$$

Da det er oplyst, at a er en positiv konstant, smides den negative løsning væk. Dermed er:

$\underline{\underline{a = 10.135}}$