Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Løsninger til eksamensopgaver på B-niveau 2016

24. maj 2016: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: $3x+6=-x+2 \Leftrightarrow 3x+x=2-6 \Leftrightarrow 4x=-4 \Leftrightarrow x=\frac{-4}{4}=\underline{\underline{-1}}$

Opgave 2: $f(x)=x^2+3x \quad P(2,10)$

Punktet ligger på grafen for *f*, hvis dets koordinater indsat i forskriften giver et sandt udsagn:

$10=2^2+3\cdot 2 \Leftrightarrow 10=4+6 \Leftrightarrow 10=10$

Da dette er et sandt udsagn, **ligger punktet *P* på grafen for *f*.**

Opgave 3: $y=5000\cdot 1{,}03^x$

Da *y* betegner kontoens indestående målt i kr., og da der er tale om en eksponentiel udvikling, betyder begyndelsesværdien 5000, at **kontoen oprettes med 5000 kr.**

Tallet 1,03 er fremskrivningsfaktoren *a*, hvilket giver en vækstrate på $r=a-1=1{,}03-1=0{,}03$, dvs. tallet 1,03 fortæller, at **kontoens indestående vokser med 3% om året**.

Opgave 4: $f(x)=\ln(x)+x^4 \ , \ x>0$

Funktionen differentieres ved ledvis differentiation:

$$\underline{\underline{f'(x)=\frac{1}{x}+4x^3}}$$

Opgave 5: Grafen for *f* er en ret linje, der skærer *y*-aksen i 1 og har hældningen 2.
Grafen for *g* er en parabel med toppunkt i (0,1).
h er en voksende eksponentialfunktion.

Man kan lave et sildeben for at få nogle hjælpepunkter til graferne:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-5	-3	-1	1	3	5	7
g(x)	10	5	2	1	2	5	10
h(x)	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8

Opgave 6: $f(x)=5\cdot e^x+x^3 \quad P(0,10)$

Først bestemmes ved ledvis integration den form samtlige stamfunktioner er på.

$$F(x)=\int\left(5\cdot e^x+x^3\right)dx=5\cdot e^x+\frac{1}{4}x^4+k$$

Punktet *P*'*s* koordinater indsættes for at bestemme konstanten *k*:

$$10=5\cdot e^0+\frac{1}{4}\cdot 0^4+k \Leftrightarrow 10=5\cdot 1+0+k \Leftrightarrow k=5$$

Dvs. den søgte stamfunktion er: $\underline{\underline{F(x)=5\cdot e^x+\frac{1}{4}x^4+5}}$

24. maj 2016: Delprøven MED hjælpemidler

Sættet regnes med Maple:

restart

with(*Gym*) :

Opgave 7: $f(t) = a \cdot t + b$

a) Det er oplyst (og det fremgår af forskriften), at der er tale om en lineær model, og da man kender mere end 2 punkter, skal der anvendes regression. Da tiden måles i antal år EFTER 2001, skal man tage højde for dette, når man opstiller sine tabeller:

$Tid := [0, 2, 4, 6, 8, 10, 12]$:

$Antal := [299, 316, 345, 367, 381, 408, 416]$:

$f(t) := LinReg(Tid, Antal, t)$:

$f(t) = 10.1964285714286\, t + 300.535714285714$

Dvs. forskriften er:

$\underline{\underline{f(t) = 10.2 \cdot t + 300.5}}$

b) År 2016 svarer til $t = 15$, hvilket indsættes i forskriften:

$f(15) = 453.482142857143$

Dvs. ifølge modellen vil det i 2016 være **453 patienter**, der vil få ordineret præparatet.

Opgave 8.

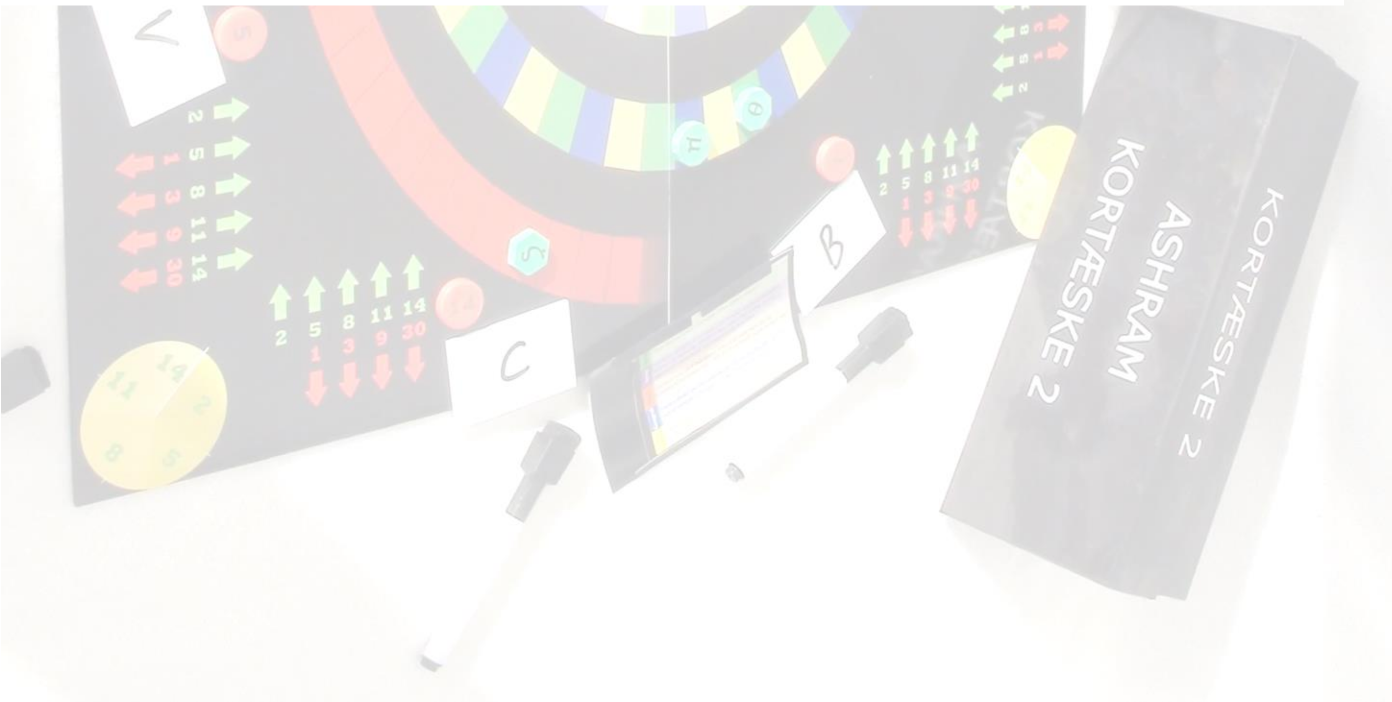
$O(m) = 0.31 \cdot m^{0.425}$

a) Der er tale om potensvækst, dvs. sammenhængen mellem de procentvise ændringer af O og m er givet ved $\left(1 + r_O\right) = \left(1 + r_m\right)^a$

Da vægten vokser med 15%, er $r_m = 0.15$, og man har så:

$\left(1 + r_O\right) = (1 + 0.15)^{0.425} \xrightarrow{\text{solve for r\_\_O}} [[r_O = 0.06119838900]]$

Dvs. personens overfladeareal vokser med $\underline{\underline{6.1\ \%}}$, når vægten vokser med 15%.

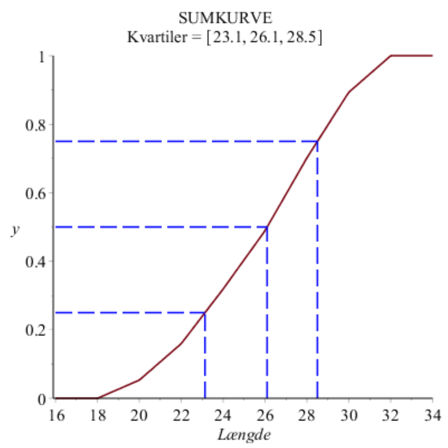


Opgave 9.

a) Gym-pakken anvendes til at tegne en sumkurve, så først skal det grupperede observationssæt indskrives i en matrix:

$$M := \begin{bmatrix} 18..20 & 5 \\ 20..22 & 10 \\ 22..24 & 15 \\ 24..26 & 16 \\ 26..28 & 20 \\ 28..30 & 18 \\ 30..32 & 10 \end{bmatrix} :$$

plotSumkurve(M)



Kvartilsættet er bestemt ved at gå vandret ind til grafen fra 25%, 50% og 75%.
Kvartilsættet aflæses på 1. aksen til $\underline{\underline{(23.1\ ,\ 26.1\ ,\ 28.5)}}$

b) Kvartilsættet fra den anden spand (19, 23, 30)
Man kan se, at der blandt de længdemæssigt 50% midterste sild er væsentlig større forskel på længderne i den anden spand.
I den første spand ligger de 50% midterste inden for godt 5 cm, mens de i den anden spand ligger inden for 11 cm.
Medianen i den anden spand er lidt mindre end i den første, så i den første spand er der procentvis flere sild over 26 cm end i den anden.

Opgave 10.

a) Der er forbløffende mange punkter på grafen, når man tænker på, at man taler om det årlige antal sendte SMS'er, men man må gå ud fra, at antallet bare er målt f.eks. to gange om året.

$f(x) := -0.12 \cdot x^2 + 1.1 \cdot x + 4 :$

5 mia. sendte SMS'er svarer til $f(x) = 5$, og da grafen er en parabel, kan der være op til 2 steder, hvor denne værdi antages:

$f(x) = 5 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 1.023331773\}, \{x = 8.143334894\}$

Tiden x måles i antal år efter 2005, så de to søgte årstal er $\underline{\underline{\text{2006 og 2013}}}$

b) Først bestemmes det sted, hvor der er vandret tangent (dvs. $f'(x) = 0$):

$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 4.583333333]]$

Da a-værdien er negativ (-0,12), vender parablens ben nedad, og dermed ved man, at det fundne sted er et maksimumssted, og ellers kan man se det ved at tjekke fortegnet på den anden afledede:

$f''(4.583333333) = -0.24 < 0$ dvs. lokalt maksimumssted.

Dvs. at der blev sendt flest SMS'er i $\underline{\underline{\text{år 2009}}}$

Opgave 11

$f(x) := 2\cdot x^3 - 6\cdot x^2 - 12\cdot x + 1:$

a) For at kunne bestemme tangentens ligning skal man kende røringspunktets koordinater og tangentens hældning:
Røringspunktets andenkoordinat bestemmes:

$f(5) = 41$

Tangentens hældning bestemmes:

$f'(5) = 78$

Disse størrelser indsættes i ligningen for en ret linje:

$y - y_0 = a\cdot(x - x_0)$

$y - 41 = 78\cdot(x-5) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 78\,x - 349}}$

b) Monotoniforholdene kan enten bestemmes med et fortegnsskema for den afledede funktion, eller man kan som her anvende den anden afledede til at bestemme lokalt maksimum og minimum og derudfra se monotoniforholdene:
Først findes de steder, hvor der kan være lokalt ekstremum:

$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 1+\sqrt{3}\}, \{x = 1-\sqrt{3}\}$

$f''(1-\sqrt{3}) = -12\sqrt{3} < 0$ dvs. lokalt maksimumssted.

$f''(1+\sqrt{3}) = 12\sqrt{3} > 0$ dvs. lokalt minimumssted.

Dermed gælder:

f er voksende i intervallet $]-\infty, 1-\sqrt{3}]$, aftagende i $[1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}]$ og voksende i $[1+\sqrt{3}, \infty[$

c) $g(x) := -3\cdot x^2 + 33:$

Skæringspunktets førstekoordinat findes som det sted, hvor de to funktionsværdier er ens:

$f(x) = g(x) \xrightarrow{\text{solve for x}} \left[[x=4], \left[x = -\frac{5}{4} - \frac{1}{4}\mathrm{I}\sqrt{39}\right], \left[x = -\frac{5}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{I}\sqrt{39}\right]\right]$

Det bemærkes, at de to sidste løsninger er komplekse, dvs. som oplyst i opgaven er der kun ét skæringspunkt.
Andenkoordinaten bestemmes ved enten at indsætte i *f* eller *g*:

$f(4) = -15$

Dvs. $\underline{\underline{Q(4,-15)}}$

Opgave 12.

$f(x) := 0.0057\cdot x^4 + 0.078\cdot x^2 + 0.25:$

a) Højden *h* af skateboardrampen svarer som angivet på figuren til funktionsværdien i 4:

$f(4) = 2.9572$

Dvs. at skateboardrampen er $\underline{\underline{2.96\text{ m}}}$ høj.

b) Arealet kan bestemmes som værdien af det bestemte integral, da hele grafen ligger over *x*-aksen:

$$A_{rampe} = \int_{-4}^{4} f(x)\,dx = 7.662720000$$

Dvs. arealet er $\underline{\underline{7.66\text{ m}^2}}$

Opgave 13.

Først gemmes de oplyste længder i Maple: $AB := 364.7 : AC := 411.3 : BC := 61.1 :$

a) Da vi kender alle tre vinkler i trekant ABC, kan vinklen mellem AB og AC bestemmes med en cosinusrelation:

$$\cos(\angle BAC) = \frac{|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2}{2 \cdot |AB| \cdot |AC|}$$

Dette udregnes ved:

$$Cos(BAC) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \xrightarrow{\text{solve for BAC}} [[BAC = 5.848652544]]$$

Dvs. $\underline{\underline{\angle BAC = 5.85°}}$

b) For at bestemme $|BD|$ ses på de to retvinklede trekanter ABD og ACD. Her giver Pythagoras:

$$|AD|^2 + |BD|^2 = |AB|^2$$
$$|AD|^2 + |CD|^2 = |AC|^2$$

Trækkes de to ligninger fra hinanden, kan man komme af med den ukendte $|AD|$:

$$|CD|^2 - |BD|^2 = |AC|^2 - |AB|^2$$

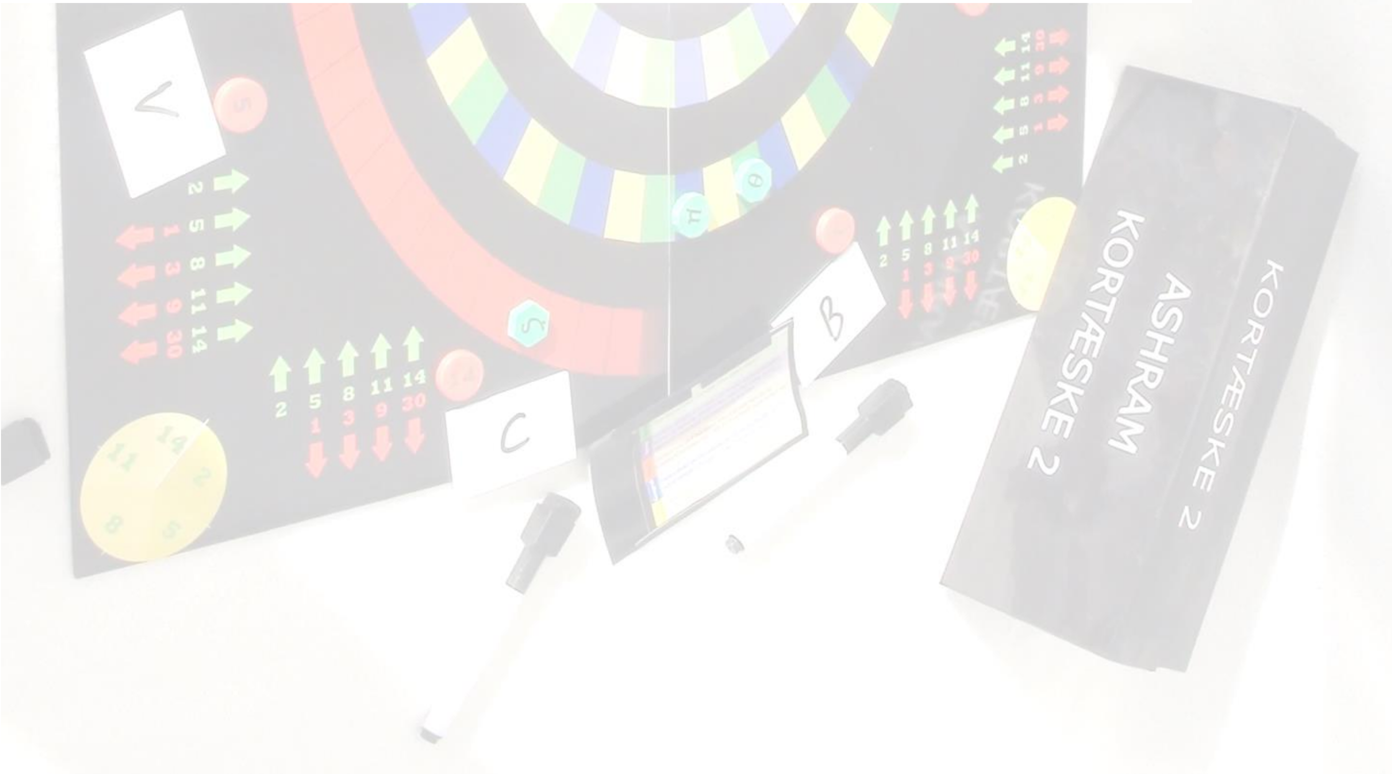
Vi udnytter nu, at $|CD| = |BD| + |BC|$:

$$(|BD| + |BC|)^2 - |BD|^2 = |AC|^2 - |AB|^2 \Leftrightarrow$$
$$|BD|^2 + |BC|^2 + 2 \cdot |BD| \cdot |BC| - |BD|^2 = |AC|^2 - |AB|^2 \Leftrightarrow$$
$$|BD| = \frac{|AC|^2 - |AB|^2 - |BC|^2}{2 \cdot |BC|} = \frac{AC^2 - AB^2 - BC^2}{2 \cdot BC} = 265.3714402$$

Dvs. $\underline{\underline{|BD| = 265.4 \text{ m}}}$

Man kunne også have bedt Maple om at løse to ligninger med to ubekendte:

$$[AD^2 + BD^2 = AB^2, AD^2 + (BD + BC)^2 = AC^2] \xrightarrow{\text{solve (specified)}}$$
$$\{AD = 250.1681209, BD = 265.3714403\}, \{AD = -250.1681209, BD = 265.3714403\}$$



27. maj 2016: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: $5x+7=2x-2 \Leftrightarrow 5x-2x=-2-7 \Leftrightarrow 3x=-9 \Leftrightarrow x=\frac{-9}{3}=\underline{\underline{-3}}$

Opgave 2: Da antallet falder med et fast antal (54) om året, er der tale om en lineær model.
N betegner antallet af husstande med fastnettelefon.
t betegner tiden målt i antal år efter 2010. Dermed bliver begyndelsesværdien 1512.
Da faldet er på 54 om året, er hældningen -54. Dermed bliver modellen:

$$\underline{\underline{N(t)=-54\cdot t+1512}}$$

Opgave 3: Udtrykket reduceres ved at gange i parentes i første led og anvende en kvadratsætning i andet led:

$$2a\cdot(a-b)+(a+b)^2-b^2=2a^2-2ab+a^2+b^2+2ab-b^2=\underline{\underline{3a^2}}$$

Opgave 4: $f(x)=2x^4+x^2-1 \qquad P(1,f(1))$

For at kunne bestemme en ligning for tangenten skal man kende hældningen og røringspunktets koordinater.
Røringspunktets andenkoordinat bestemmes:

$$f(1)=2\cdot 1^4+1^2-1=2+1-1=2$$

Tangentens hældning bestemmes efter først at have fundet den afledede funktion af *f*:

$$f'(x)=8x^3+2x$$

$$f'(1)=8\cdot 1^3+2\cdot 1=8+2=10$$

Hermed kan tangentens ligning bestemmes:

$$y-y_0=a\cdot(x-x_0)$$

$$y-2=10\cdot(x-1) \Leftrightarrow \underline{\underline{y=10x-8}}$$

Opgave 5: Da trekant *ABC* er retvinklet, kan Pythagoras anvendes til at bestemme længden af *BC*.

$$|AC|^2+|BC|^2=|AB|^2$$

$$8^2+|BC|^2=10^2 \Leftrightarrow |BC|=\sqrt{100-64}=\sqrt{36}=\underline{\underline{6}}$$

(det blev udnyttet, at sidelængden er positiv)

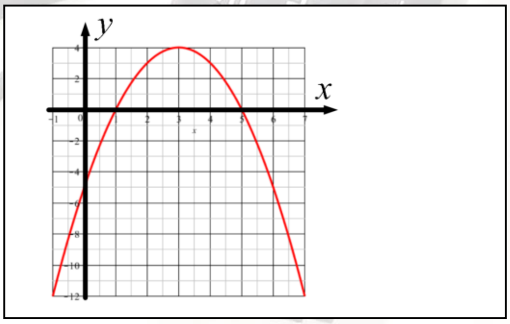
Da trekanterne er ensvinklede, er forholdene mellem korresponderende sider det samme, dvs.:

$$\frac{|DE|}{|AB|}=\frac{|EF|}{|BC|} \Leftrightarrow |DE|=\frac{|EF|}{|BC|}\cdot|AB|$$

$$|DE|=\frac{9}{6}\cdot 10=\underline{\underline{15}}$$

Opgave 6: $f(x)=ax^2+bx+c \qquad c<0 \qquad T(3,4)$

c-værdien angiver skæringen med *y*-aksen, dvs. parablen skal skære på den negative del af *y*-aksen. Da toppunktet ligger over *x*-aksen betyder det, at grenene må vende nedad (negativ *a*-værdi).



27. maj 2016: Delprøven MED hjælpemidler

Opgave 7:

restart

with(Gym) :

a) Modellen er $f(x) = b \cdot a^x$, dvs. der er tale om en eksponentiel udvikling. Da man kender mere end to målepunkter, skal der anvendes regression. Tiden måles i år EFTER 2013.

$Tid := [0, 1, 2]$:

$Årsomsætning := [4.5, 19, 71]$:

$f(x) := ExpReg(Tid, Årsomsætning, x)$:

$f(x) = 4.59252896143509\ 3.97212509541127^x$

Dvs. at $\underline{\underline{a = 3.97}}$ og $\underline{\underline{b = 4.59}}$

b) a er fremskrivningsfaktoren, og den er forbundet med vækstraten r ved $a = 1 + r$.
Dvs. at $r = 3.97 - 1 = 2.97 = 297\ \%$
Dette fortæller, at **virksomhedens årsomsætning er vokset med 297% om året.**

c) År 2016 svarer til $x = 3$:

$f(3) = 287.819792652044$

Dvs. ifølge modellen er virksomhedens årsomsætning i 2016 $\underline{\underline{288\ \textit{mia. kr.}}}$

Fordoblingstiden kan bestemmes ud fra fremskrivningsfaktoren:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2.)}{\ln(3.97212509541127)} = 0.5025350232$$

Dvs. at fordoblingstiden er **et halvt år**.

Opgave 8:

a) Først gemmes tabellens data i en matrix:

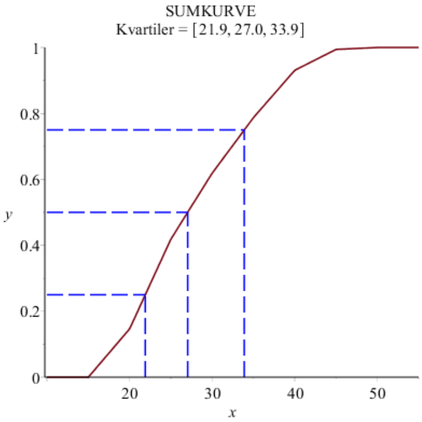
$$M := \begin{bmatrix} 15..20 & 2206 \\ 20..25 & 4105 \\ 25..30 & 3018 \\ 30..35 & 2541 \\ 35..40 & 2162 \\ 40..45 & 954 \\ 45..50 & 87 \end{bmatrix} :$$

Gym-pakken anvendes til at bestemme de kumulerede frekvenser:

$$kumuleretFrekvens(M) = \begin{bmatrix} 15..20 & 0.146 \\ 20..25 & 0.419 \\ 25..30 & 0.619 \\ 30..35 & 0.788 \\ 35..40 & 0.931 \\ 40..45 & 0.994 \\ 45..50 & 1. \end{bmatrix}$$

Der tegnes en sumkurve:

$plotSumkurve(M) =$



b) Kvartilsættet er bestemt ved at tegne vandrette linjer fra 25%, 50% og 75% og aflæse de tilsvarende værdier på 1. aksen. Kvartilsættet er beregnet til **(21.9, 27.0, 33.9)**.

Ved at gå op til grafen ved 32 år og derefter ud og aflæse procentdelen, kan man finde den procentdel, der er op til 32 år. Man kan også lade Maple beregne denne værdi:

$f(x) := sumkurve(M, x)$:

$f(32) = 0.686353081669210$

Dvs. at procentdelen **over** 32 år er:

$1 - 0.686353081669210 = 0.3136469183$

Altså er det $\underline{\underline{31.4\ \%}}$ af kvinderne, som er over 32 år.

Opgave 9

$m(t) := (9 - 0.625 \cdot t)^2$:

a) 6 timer svarer til $t = 6$, så vægten af fiskens maveindhold kan bestemmes ved:

$m(6) = 27.562500$

Dvs. **6 timer efter fodring vejer fiskens maveindhold 27.6 gram**

b) En tom mave svarer til $m(t) = 0$:

$m(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t = 14.40000000], [t = 14.40000000]]$

De to løsninger er ens (det er en dobbeltrod til polynomiet), og de ligger som det yderste punkt i funktionens definitionsmængde.

Fiskens mave er tom 14.4 timer efter fodring.

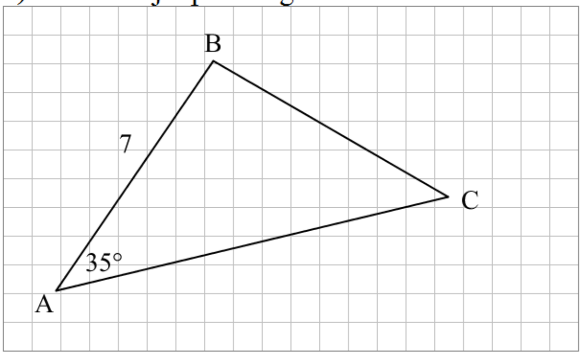
c) $m'(1) = -10.468750$

Dette betyder, at

1 time efter fodring falder vægten af fiskens maveindhold med 10.5 gram i timen.

Opgave 10: $AB := 7 : A := 35 : T_{ABC} := 15 :$

a) Det kan hjælpe at tegne en skitse af trekanten:



Arealet kan beregnes med ½-appelsinformlen, når man kender en vinkel og de to hosliggende sider, og derfor kan længden af den til vinklen hosliggende side AC findes, da arealet kendes:

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin(A)$$

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot Sin(A) \xrightarrow{\text{solve for AC}} [[AC = 7.471914839]]$$

Dvs. at $\underline{\underline{|AC| = 7.5}}$

b) Da vi nu kender to sider og den vinkel, der dannes af siderne, kan den sidste sidelængde bestemmes med en cosinusrelation. Først gemmes den fundne sidelængde i Maple: $AC := 7.471914839 :$

$$Cos(A) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \xrightarrow{\text{solve for BC}} [[BC = 4.375000690], [BC = -4.375000690]]$$

Da det er en sidelængde, forkastes den negative løsning.

$\underline{\underline{|BC| = 4.4}}$

Da vi nu kender alle tre sider i trekanten, kan vinkel C bestemmes med en cosinusrelation (da vi også har en vinkel, kunne sinusrelationerne også være anvendt, men her skal det kommenteres, at vi ved, at C er spids, da det er vinkel B, der ligger over for den længste side og derfor er den eneste vinkel, der kunne være stump). $BC := 4.375000690 :$

$$Cos(C) = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC} \xrightarrow{\text{solve for C}} [[C = 66.59531600]]$$

Dvs. $\underline{\underline{\angle C = 66.6°}}$

Opgave 11:

a) Omkredsen består af tre rette linjestykker og en halvcirkel:

$$O = l_{højde} + l_{bredde} + l_{højde} + l_{halvcirkel} = h + 2 \cdot r + h + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$O = 1.4 + 2 \cdot 0.7 + 1.4 + \pi \cdot 0.7 = 6.399114858$$

Dvs. omkredsen er $\underline{\underline{6.4 \text{ m}}}$

Arealet udgøres af et rektangel og en halvcirkel:

$$A = A_{rektangel} + A_{halvcirkel} = h \cdot 2\, r + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = 1.4 \cdot 2 \cdot 0.7 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 0.7^2 = 2.729690200$$

Dvs. arealet er $\underline{\underline{2.7 \text{ m}^2}}$

b) Her bliver opgaven lidt underlig. Det ser ud, som om der oprindeligt har været en opgave, der gik ud på at udlede den angivne funktionsforskrift ud fra en eller anden oplysning med h og r, men nu får man bare udleveret forskriften uden at skulle gøre noget. $A(r) := 6\cdot r - \frac{1}{2}\cdot(\pi+4)\cdot r^2$:

Man skal finde et globalt maksimumssted. Det kan enten gøres ved at bemærke, at højresiden er et andengradspolynomium med negativ koefficient foran andengradsleddet, så grafen er en parabel med grenene nedad, hvor man skal finde førstekoordinaten for toppunktet. Eller man kan gøre det på traditionel vis ved differentialregning, hvor man først finder de steder, hvor der er vandret tangent:

$$A'(r) = 0 \xrightarrow{\text{solve for r}} \left[\left[r = \frac{6}{\pi+4}\right]\right]$$

$$evalf\left(\frac{6}{\pi+4}\right) = 0.8401487304$$

Det undersøges ved hjælp af fortegnet for den anden afledede, om det er maks eller min:

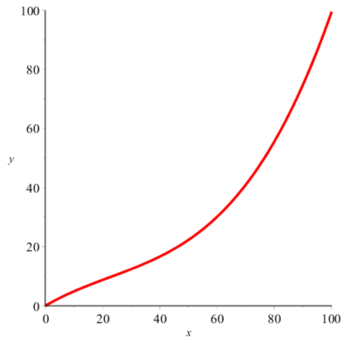
$A''\left(\frac{6}{\pi+4}\right) = -\pi - 4 < 0$ dvs. lokalt maksimum.

Da der ikke er andre ekstremumssteder, er dette også globalt maksimumssted, dvs.
arealet af vinduet er størst muligt, når $r = 0.84$ m

Opgave 12: $f(x) := 0.000134\cdot x^3 - 0.00912\cdot x^2 + 0.567\cdot x$:

a) Grafen skal tegnes i intervallet $0 \le x \le 100$, og funktionsværdierne skal ligge mellem 0 og 100, da det er en procentandel af landets samlede indkomst.

$plot(f(x), x = 0..100, y = 0..100)$



De fattigste 20% svarer til $x = 20$:

$f(20) = 8.764000$

Dvs. de fattigste 20% af befolkningen tjener 8,8% af landets samlede indkomst.

b) Da funktionen er indlagt i Maple, kan man bestemme G ved blot at indtaste udtrykket:

$$G = 100 - 0.02\cdot\int_0^{100} f(x)\,dx = 37.10$$

Dvs. for dette land er $\underline{\underline{G = 37}}$

15. august 2016: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: Når man ganger ind i en parentes, skal man huske at gange ind på hvert led, og man får så:

$$2\cdot(x+5)=6x+30 \quad\Leftrightarrow\quad 2x+10=6x+30 \quad\Leftrightarrow\quad 10-30=6x-2x \quad\Leftrightarrow\quad -20=4x \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{-20}{4}=\underline{\underline{-5}}$$

Opgave 2: Da produktionen **aftager** med en **fast størrelse** hvert år, er modellen en lineær model med negativ hældningskoefficient.
De to variable skal indføres, dvs. det skal beskrives, hvad symbolerne skal dække over.
Jeg lader t være tiden målt i antal år efter 2006.
Jeg lader S være produktionen af kvartssand målt i 1000 m^3.
Med disse valg bliver startværdien 526 og hældningskoefficienten -39, så modellen bliver:

$$\underline{\underline{S(t)=-39\cdot t+526 \quad ; t\geq 0}}$$

Opgave 3: $f(x)=2x^2-4x+7$

Hvis man kan huske toppunktsformlen, kan man indsætte i denne efter først at have fundet diskriminanten:

$$d=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot 2\cdot 7=16-56=-40$$

$$T=\left(\frac{-b}{2a},\frac{-d}{4a}\right)=\left(\frac{-(-4)}{2\cdot 2},\frac{-(-40)}{4\cdot 2}\right)=\left(\frac{4}{4},\frac{40}{8}\right)=\underline{\underline{(1,5)}}$$

Hvis man ikke kan huske toppunktsformlen, må man differentiere funktionsudtrykket for at finde det sted, hvor der er vandret tangent:

$$f'(x)=4x-4$$

$$f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4x-4=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4x=4 \quad\Leftrightarrow\quad x=1$$

Hermed har man fundet toppunktets 1. koordinat, hvorefter andenkoordinaten kan findes ved indsættelse i funktionsforskriften for f.

Opgave 4: Parablen har grenene pegende opad (glad parabel), så $\underline{\underline{a>0}}$

Parablens toppunkt ligger til højre for y-aksen, så a og b har forskellige fortegn (parablens toppunkts førstekoordinat er $\frac{-b}{2a}$), så $\underline{\underline{b<0}}$. Man kan også se b's fortegn ved at kigge på hældningen af tangenten til parablen i skæringspunktet med y-aksen (negativ hældning).
Da parablen skærer andenaksen på den positive del, er $\underline{\underline{c>0}}$.

Da parablen ikke skærer førsteaksen, er $\underline{\underline{d<0}}$.

<u>Opgave 5:</u> $f(x) = b \cdot a^x \quad T_2 = 3$

Da fordoblingskonstanten er 3, er funktionsværdien blevet fordoblet, når *x*-værdien er øget fra 0 til 3, og da $f(3) = 10$, må altså $f(0) = \frac{10}{2} = 5$.

Man skal fordoble 10 to gange for at få 40 ($10 \xrightarrow{fordobling} 20 \xrightarrow{fordobling} 40$), dvs. fordoblingskonstanten 3 må to gange være blevet lagt til *x*-værdien 3 ($3+3+3=9$).

Hermed bliver det udfyldte skema:

x	**0**	**3**	**9**
f(x)	**5**	**10**	**40**

<u>Opgave 6:</u> $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$

Den afledede funktion bestemmes ved at udnytte reglen om ledvis differentiation:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 4 = \underline{\underline{x^2 - 4}}$$

For at bestemme monotoniforholdene skal man først bestemme de steder, hvor den afledede funktion er 0 (steder med vandret tangent):

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 2$$

(Man kunne også have løst andengradsligningen med diskriminantmetoden)

Fortegnet for den anden afledede funktion bestemmes for at afgøre, om der er tale om lokalt maksimum, lokalt minimum eller vandret vendetangent.

$f''(x) = 2x$

$f''(-2) = -4 < 0$ dvs. lokalt maksimumssted

$f''(2) = 4 > 0$ dvs. lokalt minimumssted

Dermed kan monotoniforholdene angives:

***f* er voksende i intervallerne]-∞,-2] og [2,∞[, og *f* er aftagende i intervallet [-2,2]**

15. august 2016: Delprøven MED hjælpemidler

Opgaverne løses med Maple.

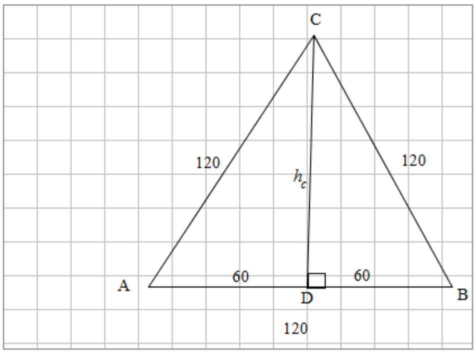
restart
with(*Gym*) :

Opgave 7: $f(t) = b \cdot a^t$ t er tiden målt i år efter 2004 og $f(t)$ er kommunens årlige indtægt fra parkering målt i mio. kr.
a) Da den uafhængige variabel t står som eksponent, er modellen en eksponentiel udvikling, og da mere end to par af sammenhørende værdier er opgivet, skal der laves regression:
$År := [0, 1, 2, 3, 4]$:
$Indtægt := [310, 350, 424, 515, 582]$:
$f(t) := ExpReg(År, Indtægt, t)$:
$f(t) = 305.444850799138\ 1.17892499834918^t$
Dvs. $\underline{\underline{a = 1.179 \text{ og } b = 305}}$

b) År 2010 svarer til $t = 6$:
$f(6) = 820.068005700022$
Dvs. at i 2010 var kommunens årlige indtægt fra parkering **820 mio. kr.**

c) a-værdien er fremskrivningsfaktoren, der er knyttet til vækstraten r ved $a = 1 + r$, så $r = 0.179 = 17,9\ \%$
Dvs. kommunens indtægt fra parkering stiger årligt med $\underline{\underline{18\ \%}}$

Opgave 8: Alle enheder er i cm. Trekant ABC er ligesidet. $AB := 120$: $AC := 120$: $BC := 120$:



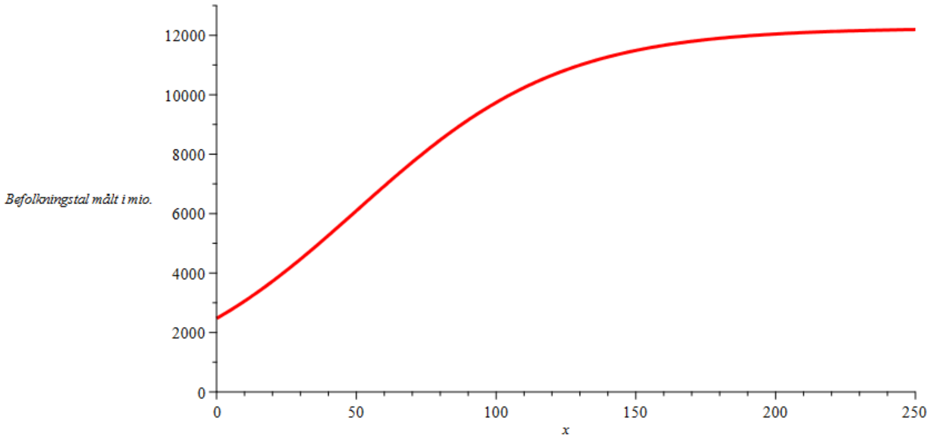
Højdens fodpunkt kaldes for D. Da trekanten er ligesidet, deler højden siden AB i to lige store dele, dvs. $AD := 60$: $BD := 60$:

a) Da trekant ACD er retvinklet, kan højden fra C bestemmes med Pythagoras:
$h_c^2 + AD^2 = AC^2 \xrightarrow{\text{solve}} -103.9230485, 103.9230485$
Da en sidelængde ikke kan være negativ, har man altså $\underline{\underline{h_c = 104 \text{ cm}}}$

b) Da man nu både kender længden af grundlinjen AB og den tilhørende højde, kan arealet bestemmes:
$T = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} |AB| \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 103.9230485 = 6235.382910$
Dvs. arealet af trekanten er $\underline{\underline{6235 \text{ cm}^2}}$

Opgave 9: $f(x) := \dfrac{12246}{1 + 3.95 \cdot \mathrm{e}^{-0.0273 \cdot x}}$:

a) x angiver tiden målt i antal år efter 1950, så det fremgår implicit, at $x \geq 0$, og da man skal bruge modellen til at bestemme befolkningstallet i 2016, skal intervallet på førsteaksen i hvert fald indeholde 66, men i dette tilfælde er det ikke nok.
Det er væsentligt at bemærke, at grafen flader ud over tid, og denne tendens skal fremgå af grafen:
$plot(f(x), x = 0..250, y = 0..13000, thickness = 3, color = red)$



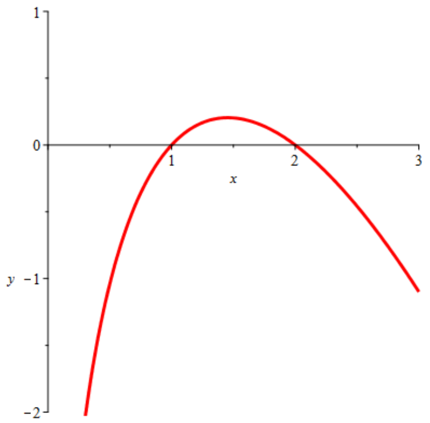
År 2016 svarer til $x = 66$:
$f(66) = 7413.926215$
Dvs. på verdensplan var der ifølge modellen i 2016 **7414 mio. mennesker**

b) $f'(70) = 77.82593735$
Dette fortæller, at **i år 2020 vil befolkningstallet ifølge modellen vokse med 78 millioner mennesker om året.**

Opgave 10: $f(x) := (2 - x) \cdot \ln(x)$:
a) Man kan godt løse ligningen med 'solve', men man kan også anvende nulreglen:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - x = 0 \;\vee\; \ln(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 2 \;\vee\; x = 1}}$$

b) For at identificere punktmængden tegnes grafen for funktionen:
$plot(f(x), x = 0..3, y = -2..1, thickness = 3, color = red)$



Fra spørgsmål a) ved vi, at der ikke er andre nulpunkter end 1 og 2, så punktmængden er området mellem x-aksen og grafen i intervallet [1,2]. Dvs. arealet bliver:

$$A_M = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{5}{4} + 2\ln(2) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 0.1363$$

Dvs. $\underline{\underline{A_M = 0.1363}}$

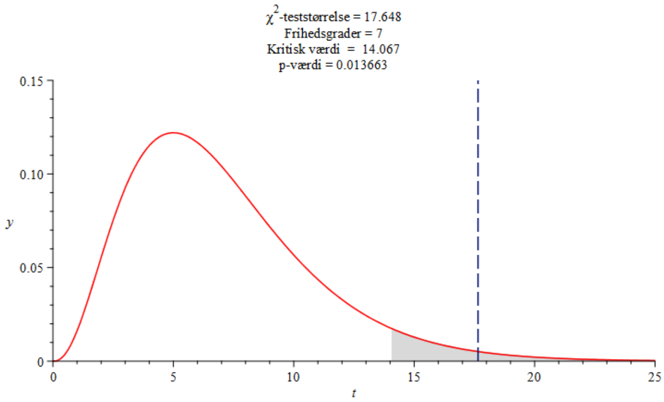
Opgave 11:

a) Det er et χ^2-GOF-test, der skal anvendes, og de forventede hyppigheder kan bestemmes med udgangspunkt i nulhypotesen, der fortæller os, at alle tal skal forekomme lige ofte, dvs. hver især i $\frac{1}{8}$ af kastene.

Da $\frac{250}{8} = \frac{125}{4} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 31.250$, har man altså:

$$\boldsymbol{Forventet} := \left[\frac{125}{4}, \frac{125}{4}, \frac{125}{4}, \frac{125}{4}, \frac{125}{4}, \frac{125}{4}, \frac{125}{4}, \frac{125}{4}\right]:$$

$Observeret := [23, 34, 27, 41, 19, 36, 26, 44]:$
$ChiKvadratGOFtest(Observeret, Forventet, level = 0.05)$



Da p-værdien på 1,4% er **mindre** end signifikansniveauet på 5% (alternativt: "Da teststørrelsen på 17,6 er **større** den kritiske værdi på 14,1"), **forkastes nulhypotesen**. Der er signifikant forskel på, hvor ofte hver af de otte sider forekommer.

Opgave 12: $f(x) := x^4 - 6x^2 + 10x + 3 :\quad P(1, f(1))$

a) Tangenten er en ret linje, så man skal kende hældningen og røringspunktets koordinatsæt.
Røringspunktets andenkoordinat bestemmes ved indsættelse i funktionsforskriften:
$f(1) = 8$
Tangentens hældning bestemmes som differentialkvotienten i 1:
$f'(1) = 2$
Tangentens ligning kan så bestemmes ved $y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$:
$y - 8 = 2 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow \underline{y = 2x + 6}$

Man kan også lade Maple gøre al arbejdet ved:
$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = 2x + 6$

b) Da den anden tangent t_2 skal have samme hældning som den første, skal den altså have hældningen 2.
De steder, hvor den afledede funktion antager værdien 2 bestemmes:
$f'(x) = 2 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = -2\}, \{x = 1\}, \{x = 1\}$
Løsningen $x = 1$ svarer til punktet P, dvs. det er den anden løsning, der er den søgte, og **Q's førstekoordinat er altså -2**

Opgave 13:

a) Da omkredsen er 50, har man: $y + 2x + y + \sqrt{2} \cdot x + \sqrt{2} \cdot x = 50 \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = 25 - x - \sqrt{2}\, x$
Dvs. $\underline{y = 25 - x - \sqrt{2} \cdot x}$

Arealet af det tilbageværende tværsnit består af arealet af rektanglet fratrukket arealet af trekanten:
$A = A_{rektangel} - A_{trekant} = l \cdot b - \frac{1}{2} \cdot h \cdot g = y \cdot 2x - \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2x = 2xy - x^2$
Udtrykket for y indsættes, så arealet bliver en funktion af x alene:
$A(x) = 2 \cdot x \cdot (25 - x - \sqrt{2} \cdot x) - x^2 = 50x - 2x^2 - 2\sqrt{2}x^2 - x^2 = 50x - 3x^2 - 2\sqrt{2}x^2 = \underline{\underline{50x - (3 + 2\sqrt{2}) \cdot x^2}}$

b) Først bestemmes de steder, hvor grafen for funktionen har vandret tangent:
$A(x) := 50x - (3 + 2\sqrt{2}) \cdot x^2 :$
$A'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} 4.289321881$
Ved at udregne fortegnet for den anden afledede dette sted, bestemmes typen af punkt:
$A''(4.289321881) = -6 - 4\sqrt{2} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} -11.657 < 0$ dvs. lokalt maksimumssted.
Dvs. det tilbageværende tværsnitsareal bliver størst muligt, når $\underline{\underline{x = 4.29}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

7. december 2016: Delprøven UDEN hjælpemidler

<u>*Opgave 1:*</u> $y = 1631 \cdot x + 191942$

Dette er en lineær model, og det er oplyst, at *x* er tiden målt i år efter 2006, og *y* er indbyggertallet i byen.
Tallet 191942 er begyndelsesværdien, og det fortæller, at **i 2006 var der 191942 indbyggere i byen.**
Tallet 1631 er hældningen, og det fortæller, at **i perioden 2006-2015 er indbyggertallet vokset med 1631 om året.**

<u>*Opgave 2:*</u> $x^2 - 4x - 5 = 0$

Andengradsligningen kan løses ved diskriminantmetoden:

$d = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36 > 0$ dvs. 2 løsninger

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{x = -1 \quad \vee \quad x = 5}}$$

Man kan også løse andengradsligningen ved faktorisering og anvendelse af nulreglen:

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \iff (x-5) \cdot (x+1) = 0 \iff \underline{\underline{x = 5 \quad \vee \quad x = -1}}$$

<u>*Opgave 3:*</u> $f(x) = 2^x - 3x$

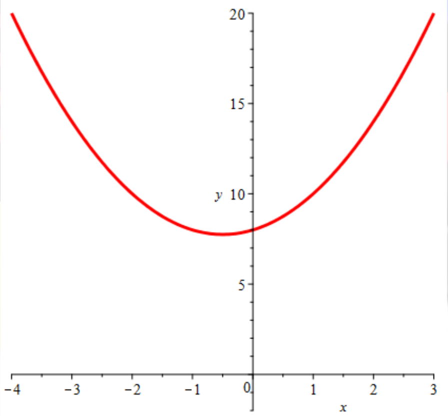
Funktionsværdien bestemmes ved indsættelse i funktionsforskriften:

$$f(3) = 2^3 - 3 \cdot 3 = 8 - 9 = \underline{\underline{-1}}$$

<u>*Opgave 4:*</u> $P(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + 8 \qquad d < 0$

Da det er et andengradspolynomium, er grafen en parabel.
Man kan se på konstantleddet, at parablen skal skære andenaksen i 8.
Da diskriminanten er negativ, skærer parablen ikke førsteaksen.

Hvis man placerer toppunktet under førsteaksen, skal benene derfor vende nedad, og hvis man placerer toppunktet over førsteaksen, skal benene vende opad. En mulig graf er:



Opgave 5: Diagonalerne opdeler parallelogrammet i fire retvinklede trekanter med katetelængderne 30 cm og 40 cm.
Da kateterne udgør en grundlinje og den tilhørende højde i den retvinklede trekant, kan arealet beregnes:

$$A_{vindue} = 4 \cdot T_{trekant} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot h \cdot g = 2 \cdot 30\,\text{cm} \cdot 40\,\text{cm} = \underline{\underline{2400\,\text{cm}^2}}$$

For at bestemme omkredsen, skal man kendehypotenuselængderne i de retvinklede trekanter, og de beregnes ved Pythagoras:

$$hyp^2 = kat_1^2 + kat_2^2$$

$$hyp = \sqrt{(30\,\text{cm})^2 + (40\,\text{cm})^2} = \sqrt{900\,\text{cm}^2 + 1600\,\text{cm}^2} = \sqrt{2500\,\text{cm}^2} = 50\,\text{cm}$$

Så omkredsen af vinduet er:

$$O_{vindue} = 4 \cdot hyp = 4 \cdot 50\,\text{cm} = \underline{\underline{200\,\text{cm}}}$$

Opgave 6: $f(x) = 4x^3 - 6x$ $\qquad P(1,3)$

Først bestemmes med reglen om ledvis integration den form samtlige stamfunktioner er på:

$$F_k(x) = x^4 - 3x^2 + k$$

Punktets koordinater indsættes for at bestemmes *k*-værdien:

$$3 = 1^4 - 3 \cdot 1^2 + k \quad \Leftrightarrow \quad 3 = 1 - 3 + k \quad \Leftrightarrow \quad k = 5$$

Dvs. en forskrift for den søgte stamfunktion er $\underline{\underline{F(x) = x^4 - 3x^2 + 5}}$

7. december 2016: Delprøven MED hjælpemidler

restart
with(*Gym*) :

Opgave 7: $f(x) = b \cdot x^a$

a) Forskriften viser, at der er tale om potensvækst (variablen x står som rod i potensen), og da mere end to sæt måleværdier er oplyst, skal der anvendes regression.

$Vægt := [0.005, 0.024, 0.098, 0.280, 11.8, 33.5, 85.7]$:

$Iltforbrug := [28.1, 75.2, 181, 350, 3653, 7026, 13400]$:

$f(x) := PowReg(Vægt, Iltforbrug, x)$:

$f(x) = 784.751120566926\, x^{0.629893125583095}$

Dvs. $\underline{\underline{a = 0.630 \text{ og } b = 785}}$

b) Da der er tale om potensvækst, er sammenhængen mellem vækstraterne givet ved $(1 + r_y) = (1 + r_x)^a$

En forøgelse af vægten med 40% svarer til $r_x = 0.40$.

$(1 + r_y) = (1 + 0.40)^{0.629893125583095} \xrightarrow{\text{solve}} \{r_y = 0.2360756330\}$

Dvs. **iltforbruget øges med 23,6%** , når vægten forøges med 40%

Opgave 8: $A := 57 : C := 20 : b := 18$:

a) Man har kun fået én side oplyst, så cosinusrelationerne kan ikke anvendes. For at kunne anvende sinusrelationerne, skal man kende et side-vinkel-par, og da man kun kender siden b, skal man først bestemme vinkel B ud fra vinkelsummen i en trekant:

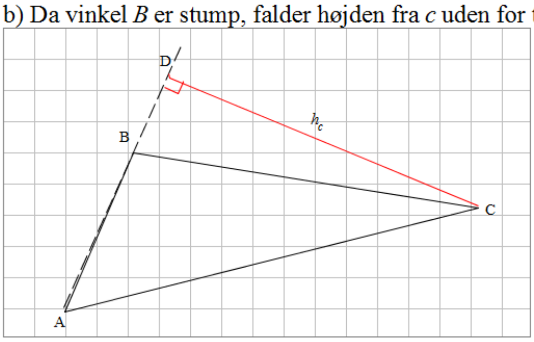
$B := 180 - A - C = 103$

Så kan sinusrelationerne anvendes:

$\frac{a}{Sin(A)} = \frac{b}{Sin(B)} \xrightarrow{\text{solve for a}} [[a = 15.49315888]]$

Dvs. $\underline{\underline{a = 15.5}}$

b) Da vinkel B er stump, falder højden fra c uden for trekanten:



Da trekant ACD er retvinklet, kan længden af højden fra C bestemmes ved:

$Sin(A) = \frac{h_c}{b} \xrightarrow{\text{solve for h\_\_c}} [[h_c = 15.09607023]]$

Dvs. $\underline{\underline{h_c = 15.1}}$

Opgave 9: $C(m) := 10^{0.78478 \cdot \left(\log_{10}\left(\frac{m}{173.961}\right)\right)^2}$:

a) En vægtløfter på 62 kg svarer til $m = 62$:

$C(62) = 1.437311243$

Dvs. at Sinclair-koefficienten er $\underline{\underline{1.437}}$

b) En Sinclair-koefficient på 1,2 svarer til $C(m) = 1.2$:

$C(m) = 1.2 \xrightarrow{\text{solve for m}} [[m = 83.71637632], [m = 361.4875709]]$

Da vægten skal være under 250 kg, forkastes den sidste løsning.

Dvs. vægtløfteren vejer $\underline{\underline{83.7 \text{ kg}}}$

Opgave 10:

a) Da det er en lineær vækst, øges vægten med den samme størrelse hvert år, så når vægten er øget med 1,4 kg på 5 år, er den årlige vægtforøgelse:

$$\Delta V_{årlig} = \frac{1.4\text{ kg}}{5} = \underline{\underline{0.28\text{ kg}}}$$

b) Den tid t, der skal gå, før vægtforøgelsen er 4,0 kg, bestemmes ud fra, at den årlige forøgelse er 0,28 kg:

$$0.28 \cdot t = 4.0 \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t = 14.28571429]]$$

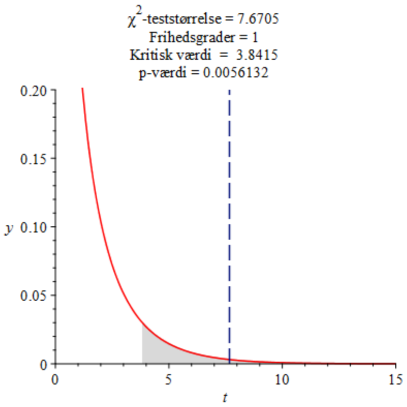
Dvs. efter **14,3 år** er vægtforøgelsen 4,0 kg.

Opgave 11:

a) Det er et χ^2−uafhængighedstest, der skal udføres.

$$M := \begin{bmatrix} 125 & 35 \\ 100 & 10 \end{bmatrix}:$$

ChiKvadratUtest(M)



Da p-værdien er 0,56%, hvilket er **mindre** end signifikansniveauet på 5%, skal nulhypotesen forkastes, dvs. der er signifikant forskel på, hvilken af de to marmeladetyper mænd og kvinder foretrækker.

b) Den forventede tabel kan bestemmes med kommandoen *forventet*:

$$forventet(M) = \begin{bmatrix} 133.33 & 26.667 \\ 91.667 & 18.333 \end{bmatrix}$$

Men den kan også beregnes ved at lave et skema:

Observeret:

Køn\Marmelade	Type 1	Type 2	I alt
Mand	125	35	160
Kvinde	100	10	110
I alt	225	45	270

Et forventet bestemmes ved:

Køn\Marmelade	Type 1	Type 2	I alt
Mand	$\frac{225 \cdot 160.}{270} = 133.3333333$	$\frac{45 \cdot 160.}{270} = 26.66666667$	160
Kvinde	$\frac{225 \cdot 110}{270.} = 91.66666667$	$\frac{45 \cdot 110}{270.} = 18.33333333$	110
I alt	225	45	270

Teststørrelsen Q beregnes ved: $\sum_{i=1}^{4} \frac{(obs - forv)^2}{forv}$, så hver af de fire kategorier bidrager med:

Mand-Type1: $Q_1 = \frac{\left(125 - \frac{225 \cdot 160.}{270}\right)^2}{\frac{225 \cdot 160.}{270}} = 0.5208333293$

Mand-Type2: $Q_2 = \frac{\left(35 - \frac{45 \cdot 160.}{270}\right)^2}{\frac{45 \cdot 160.}{270}} = 2.604166664$

Kvinde-Type1: $Q_3 = \frac{\left(100 - \frac{225 \cdot 110}{270.}\right)^2}{\frac{225 \cdot 110}{270.}} = 0.7575757572$

Kvinde-Type2: $Q_4 = \frac{\left(10 - \frac{45 \cdot 110}{270.}\right)^2}{\frac{45 \cdot 110}{270.}} = 3.787878786$

Kontrol: $0.5208333293 + 2.604166664 + 0.7575757572 + 3.787878786 = 7.670454536$

Dvs. kategorien **Kvinde-Type 2** bidrager mest til teststørrelsen.

Opgave 12: $f(x) := -x^3 + 3x^2 + 10x$: $P(2, f(2))$

a) Den afledede funktion bestemmes ved at anvende reglen om ledvis differentiation:

$\underline{f'(x) = -3x^2 + 6x + 10}$

For at bestemme tangentligningen skal man kende hældningen og røringspunktets koordinater.
Røringspunktets andenkoordinat bestemmes ved indsættelse i funktionsudtrykket:

$f(2) = 24$

Tangentens hældning bestemmes ved indsættelse i den afledede funktion:

$f'(2) = 10$

Dvs. tangentens ligning bestemmes ud fra $y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$:

$y - 24 = 10 \cdot (x - 2) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = 10x + 4}}$

Man kunne også lade Maple foretage alle udregninger:

$y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = 10x + 4$

b) For at bestemme monotoniforholdene for *f* bestemmes først de steder, hvor der er vandret tangent:

$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} -1.081665999, 3.081665999$

Typen af punktet bestemmes ved at se på fortegnet af den afledede funktion:

$f''(-1.081665999) = 12.48999599 > 0$ dvs. det er et lokalt minimumssted.

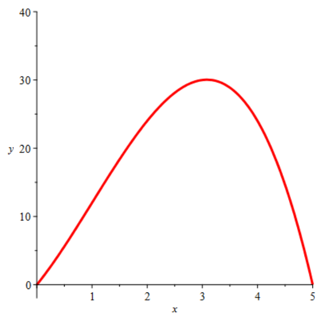
$f''(3.081665999) = -12.48999599 < 0$ dvs. det er et lokalt maksimumssted.

Dvs. *f* er aftagende i intervallerne]-∞,-1.08] og [3.08,∞[og voksende i [-1.08,3.08]

c) $\int_0^5 f(x)\,dx = \frac{375}{4} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 93.750$ dvs. $\underline{\underline{\int_0^5 f(x)\,dx = 93.75}}$

Før en fortolkning er mulig, skal det undersøges, hvordan grafen ligger i forhold til førsteaksen:

$plot(f(x), x = 0..5, y = -2..40, thickness = 3, color = red)$



Det skal lige tjekkes, at funktionen har nulpunkterne 0 og 5, som grafen antyder:

$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 0\}, \{x = 5\}, \{x = -2\}$

Dvs. funktionen er ikke-negativ i intervallet [0,5], og dermed er **93,75** arealet af punktmængden mellem grafen for *f* og førsteaksen i intervallet [0,5].

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 13: $N(t) = b \cdot a^t \qquad T_2 = 4$

a) Da fordoblingskonstanten er 4, er populationen blevet fordoblet fra $t = 0$ til $t = 4$, og da $N(0) = 1024$, har man altså:

$N(4) = 2 \cdot N(0) = 2 \cdot 1024 = \underline{\underline{2048}}$

Væksthastigheden bestemmes ved hjælp af den afledede funktion:

$N'(t) = b \cdot \ln(a) \cdot a^t = \ln(a) \cdot N(t)$

$N'(4) = \ln(a) \cdot 2048$

Dvs. man skal kende a-værdien for at kunne bestemme væksthastigheden. Den kan bestemmes ud fra fordoblingskonstanten:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} \Leftrightarrow \ln(a) = \frac{\ln(2)}{T_2}$$

Dvs. at væksthastigheden er: $N'(4) = \dfrac{\ln(2)}{T_2} \cdot 2048 = \dfrac{\ln(2.)}{4} \cdot 2048 = 354.8913565$

Dvs. til $t = 4$ vokser populationen med $\underline{\underline{\text{355 individer pr. år}}}$

Man kan også komme igennem opgaven ved rene udregninger, hvis man opskriver forskriften på formen med fordoblingskonstanten:

$N(t) := 1024 \cdot 2^{\frac{t}{4}}$:

$N(4) = 2048$

$N'(4) = 512 \ln(2) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 354.89$