Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Løsninger til eksamensopgaver på B-niveau 2017

18. maj 2017: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: $4x-1=17-5x \Leftrightarrow 4x+5x=17+1 \Leftrightarrow 9x=18 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$

Opgave 2: N betegner antallet af brugere af app'en målt i tusinder. t angiver tiden målt i antal år efter 2014. Da det er en fast procentvis stigning, er modellen en eksponentiel udvikling, og da vækstraten r er 25%, er fremskrivningsfaktoren $a=1+r=1+0{,}25=1{,}25$.

Da der i 2014 var 250 tusinde brugere, er begyndelsesværdien 250. Hermed er modellen:

$$\underline{\underline{N(t)=250\cdot 1{,}25^t}}$$

Opgave 3: I en retvinklet trekant fungerer kateterne som grundlinje og tilhørende højde, så arealet T af trekanten er givet ved:

$$T=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BC|$$

Dermed er:

$$24=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot|BC| \Leftrightarrow 24=4\cdot|BC| \Leftrightarrow |BC|=\frac{24}{4}=\underline{\underline{6}}$$

Da trekanten er retvinklet, kan Pythagoras' Læresætning anvendes til at finde længden af hypotenusen (hvis man ikke genkender den retvinklede (6,8,10)-kant):

$$|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$$

$$|AB|=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=\underline{\underline{10}}$$

Opgave 4: $f(x)=4x^3-8x+6$

Funktionsværdien bestemmes ved indsættelse i forskriften:

$$f(2)=4\cdot 2^3-8\cdot 2+6=4\cdot 8-16+6=32-10=\underline{\underline{22}}$$

En stamfunktion bestemmes ved ledvis integration og anvendelse af reglen for integration af potensfunktioner. Da der står "**en** stamfunktion", skal man ikke have integrationskonstanten med, men kan erstatte den af et hvilket som helst konkret tal (her vælges 0):

$$F(x)=4\cdot\frac{1}{4}x^4-8\cdot\frac{1}{2}x^2+6x=\underline{\underline{x^4-4x^2+6x}}$$

Opgave 5: Alle tre grafer er rette linjer, så der er – som også angivet i teksten – tale om lineære funktioner, og dermed skal funktionsudtrykkene være på formen $a \cdot x + b$, hvor *a* er grafens hældning, og *b* er skæringen med andenaksen.

Da man ikke kender skalaerne, er der uendelig mange gyldige funktionsforskrifter, men følgende ting **skal** være opfyldt:

1) *b*-værdien skal være den samme i *g* og *h*, da deres grafer skærer andenaksen samme sted, og værdien skal være positiv, da skæringen ligger over førsteaksen.
2) *b*-værdien for *f* skal være negativ (og numerisk tæt på ovenstående), da andenaksen skæres på den negative del.
3) *f* og *g* skal have positive *a*-værdier (hældninger), og *f* 's skal være større end *g*'s, og *h* skal have negativ *a*-værdi. Numerisk skal *h*'s hældning ligge mellem *f* og *g*'s.

Mulige forskrifter er:

$f(x) = 5x - 2$

$g(x) = x + 2$

$h(x) = -2x + 2$

Opgave 6: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Da parablen skærer andenaksen i 1, har man $\underline{\underline{c = 1}}$.

Hvis man ved, at for andengradspolynomier svarer *b*-værdien til hældningen for tangenten i det punkt, hvor grafen skærer andenaksen, kan man bruge dette til med det samme at fastsætte *b* til 8.

Hvis ikke må det beregnes:

Den afledede funktion giver tangenternes hældninger de pågældende steder, så først bestemmes:

$f'(x) = 2ax + b$

Da $f'(0) = 2a \cdot 0 + b = b$, er hældningen for tangenten i (0,1) *b*, og da denne tangent har ligningen $y = 8x + 1$, har man altså, at $\underline{\underline{b = 8}}$.

Nu kan *a*-værdien bestemmes ved at indsætte toppunktets koordinater i forskriften (man kunne også nøjes med at bruge førstekoordinaten fra toppunktsformlen, hvis man kan huske denne):

$9 = a \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad -8 = 4a \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{a = -2}}$

18. maj 2017: Delprøven MED hjælpemidler

<u>Opgave 7:</u>

a) Da modellen $f(t) = b \cdot a^t$ er en eksponentiel udvikling, og da mere end to par målepunkter kendes, skal der anvendes eksponentiel regression:

$Antalmåneder := [0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24]:$

$Antalbrugere := [30, 40, 49, 54, 68, 85, 101, 117, 138]:$

$f(t) := ExpReg(Antalmåneder, Antalbrugere, t):$

$f(t) = 32.0403431787128\ 1.06434293478904^t$

Dvs. $\underline{\underline{a = 1.064}}$ og $\underline{\underline{b = 32.0}}$

b) Da man kender fremskrivningsfaktoren a, kan fordoblingstiden beregnes.

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2.)}{\ln(1.06434293478904)} = 11.11567260$$

Dvs. **antallet af Twitterbrugere fordobles for hver 11 måneder**

c) Da forskriften er gemt i Maple, kan differentialkvotienten i 30 bestemmes ved:

$f'(30) = 12.9728178612002$

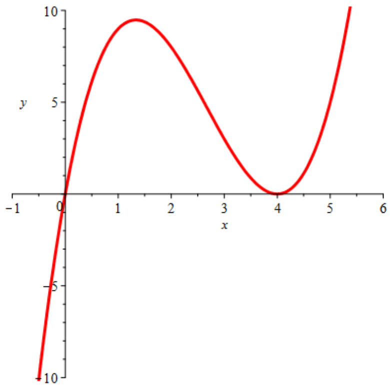
Dvs. at **30 måneder efter 1. januar 2014 voksede antallet af Twitterbrugere med 13 millioner om måneden.**

<u>Opgave 8:</u>

a) $f(x) := x^3 - 8x^2 + 16x:$

Det er et tredjegradspolynomium, så grafen kan vende op til 2 gange, og der kan være mellem 1 og 3 skæringer med førsteaksen. Disse ting skal fremgå at grafen (så intervaller på både første- og andenaksen skal vælges derefter):

$plot(f(x), x=-1..6, y=-10..10, thickness=3, color=red)$



Nulpunkterne bestemmes ved at løse ligningen $f(x) = 0$:

$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x=0], [x=4], [x=4]]$

Det bemærkes, at 4 er en dobbeltrod i polynomiet, så nulpunkterne er $\underline{\underline{x = 0 \vee x = 4}}$

b) Arealet af den punktmængde, der i første kvadrant afgrænses af grafen og førsteaksen, beregnes med det bestemte integral med nedre grænse 0 og øvre grænse 4:

$$A_M = \int_0^4 f(x)\,dx = \frac{64}{3}$$

Dvs. $\underline{\underline{A_M = \frac{64}{3}}}$

Opgave 9:

a) $f(x) := \left(x^2 - 8\right) \cdot e^{-x}$:

For at bestemme monotoniforholdene findes først de steder, hvor der kan være lokalt ekstremum:

$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 4], [x = -2]]$

Med fortegnet for den anden afledede afgøres det, hvilken slags steder der er tale om:

$f''(-2) = 6\,e^2 \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 44.335 > 0$ dvs. lokalt minimumssted.

$f''(4) = -6\,e^{-4} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} -0.10990 < 0$ dvs. lokalt maksimumssted.

Dvs. **f er aftagende i intervallerne]-∞,-2] og [4,∞[, og f er voksende i intervallet [-2,4]**

b) $f(x) = -6. \xrightarrow{\text{solve for x}}$

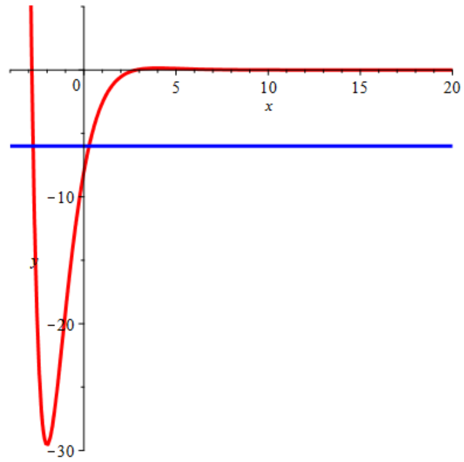
`Warning, solutions may have been lost`

$[[x = 0.2779762722], [x = -2.760515359]]$

Der advares om, at løsninger kan være gået tabt.
En sådan løsning skulle i så fald ligge i intervallet [4,∞[, da de to andre løsninger ligger i de andre intervaller, og da grafen skal vende, før funktionen igen kan antage værdien -6.
Man kan undersøge, hvad der sker i dette interval, ved $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

Dvs. funktionsværdierne kommer ikke under 0 i intervallet [4,∞[, så der er ikke andre løsninger.
Man kan også undersøge det grafisk:

$plot([f(x), -6], x = -4..20, y = -30..5, thickness = 3, color = [red, blue])$



Her ses, at der ikke er flere løsninger, så $\underline{\underline{x = -2.76 \lor x = 0.28}}$

Opgave 10:

a) $y = 22.41 \cdot x^{0.663}$

Da x betegner rumfanget, er $x = 0.2$, og det tilsvarende overfladeareal y kan så beregnes:

$y = 22.41 \cdot 0.2^{0.663} = 7.709473920$

Dvs. **æblets overfladeareal er 7,71 dm²**

b) Da det er potensvækst, gælder følgende sammenhæng mellem vækstraterne: $\left(1 + r_y\right) = \left(1 + r_x\right)^a$

Når rumfanget øges med 10%, er $r_x = 0.1$. Så man har:

$1 + r_y = (1 + 0.1)^{0.663} \xrightarrow{\text{solve for r\_\_y}} [[r_y = 0.06522990500]]$

Dvs. **æblets overfladeareal øges med 6,5%, når rumfanget øges med 10%**

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 11:

a) Den forventede fordeling bestemmes ved at multiplicere procenterne fra valget med 1029.

$forv := [1029\cdot 0.263,\ 1029\cdot 0.046,\ 1029\cdot 0.034,\ 1029\cdot 0.042,\ 1029\cdot 0.075,\ 1029\cdot 0.008,\ 1029\cdot 0.211,\ 1029\cdot 0.195,\ 1029\cdot 0.078,\ 1029\cdot 0.048]$

$[270.627,\ 47.334,\ 34.986,\ 43.218,\ 77.175,\ 8.232,\ 217.119,\ 200.655,\ 80.262,\ 49.392]$

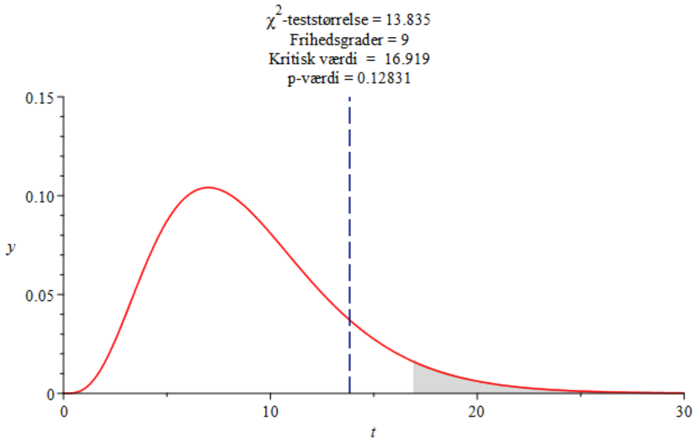
Dvs. den forventede fordeling er:

Parti	A	B	C	F	I	K	O	V	Ø	Å
Forventet antal stemmer	270.63	47.33	34.99	43.22	77.18	8.23	217.12	200.66	80.26	49.39

b) Der foretages et χ^2-GOF-test med et signifikansniveau på 5%:

$obs := [283, 60, 31, 40, 88, 9, 192, 179, 90, 57]:$

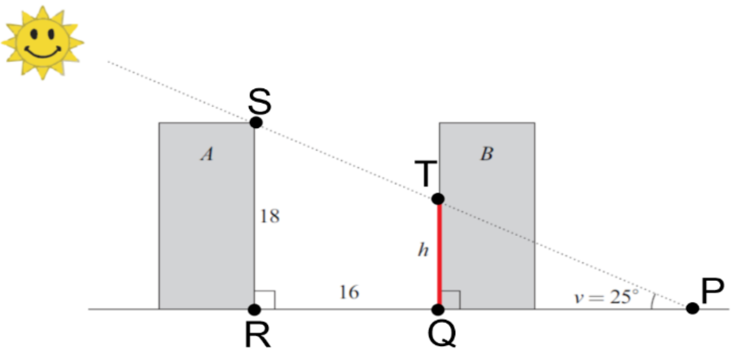
$ChiKvadratGOFtest(obs, forv, level = 0.05)$



Da p-værdien er 12,8% og dermed større end signifikansniveauet på 5%, skal nulhypotesen IKKE forkastes. Meningsmålingen viser ikke signifikante ændringer i forhold til valget.

Opgave 12:

a) 5 punkter indsættes på figuren, så der kan henvises til trekanter og sider:



For at kunne bestemme højden h, skal man kende $|PQ|$, og den kan bestemmes ved at regne på den retvinklende trekant PRS:

$RS := 18 : QR := 16 : P := 25 :$

$$Tan(P) = \frac{RS}{QR + PQ} \xrightarrow{\text{solve for PQ}} [[PQ = 22.60112456]]$$

$PQ := 22.60112456 :$

Nu kan højden bestemmes ved at regne på den retvinklede trekant PQT:

$$Tan(P) = \frac{QT}{PQ} \xrightarrow{\text{solve for QT}} [[QT = 10.53907747]]$$

Dvs. skyggens højde *h* er 10,5 meter.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 13:

a) Da det er en lineær funktion, kan man benytte $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ til at finde hældningen, og derefter bestemme b-værdien, men man kan også lade Maple løse to ligninger med to ubekendte:

$f(x) := a \cdot x + b$:

$fsolve([f(15) = 410, f(40) = 230], \{a, b\}) = \{a = -7.200000000, b = 518.0000000\}$

Dvs. $\underline{\underline{f(x) = -7.2 \cdot x + 518}}$

b) $g(x) := x \cdot (-7.2 \cdot x + 518)$:

Man kan bemærke, at grafen for g er en parabel med benene pegende nedad, og derefter bestemme toppunktets førstekoordinat ($x_{max} = -\dfrac{518}{2 \cdot (-7.2)} = 35.97222222$)

Man kan dog også anvende standardmetoden og først finde det eller de steder, hvor der kan være lokale ekstrema:

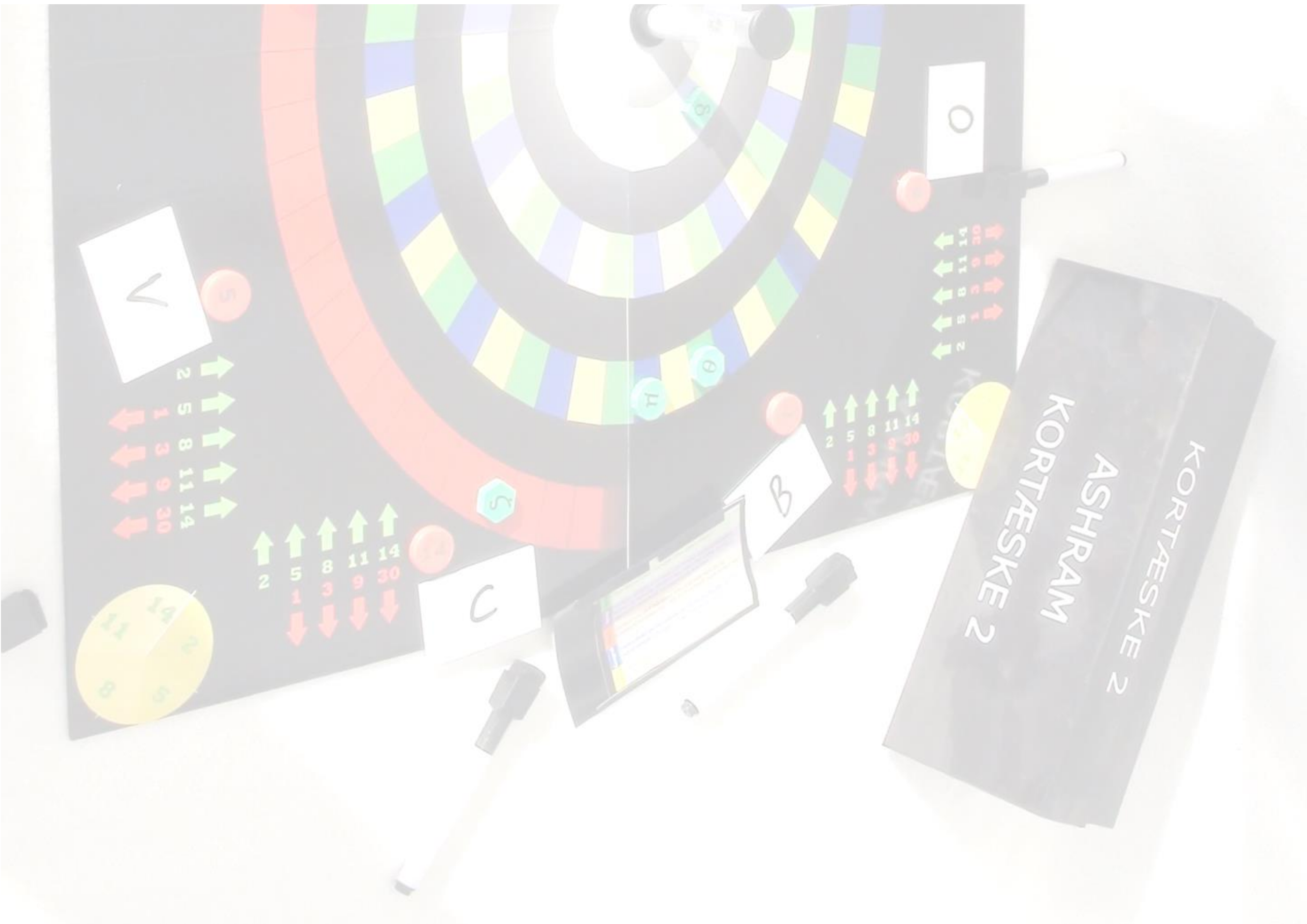
$g'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 35.97222222]]$

Med den anden afledede undersøges hvilken slags sted, der er tale om:

$g''(35.97222222) = -14.4 < 0$ dvs. lokalt maksimumssted.

Da dette sted ligger inden for g's definitionsmængde, er

det en kilopris på 36,0 kr., der giver den største omsætning.



23. maj 2017: Delprøven UDEN hjælpemidler

<u>Opgave 1:</u> $3x+2=14 \iff 3x=14-2 \iff 3x=12 \iff x=\frac{12}{3}=\underline{\underline{4}}$

<u>Opgave 2:</u> Da trekanterne er ensvinklede, er forholdene mellem alle par af korresponderende sider ens, så man har:

$$\frac{|DF|}{|AC|}=\frac{|EF|}{|BC|}=\frac{|DE|}{|AB|} \text{ dvs. } \frac{6}{4}=\frac{9}{|BC|}=\frac{|DE|}{8}$$

Altså har man:

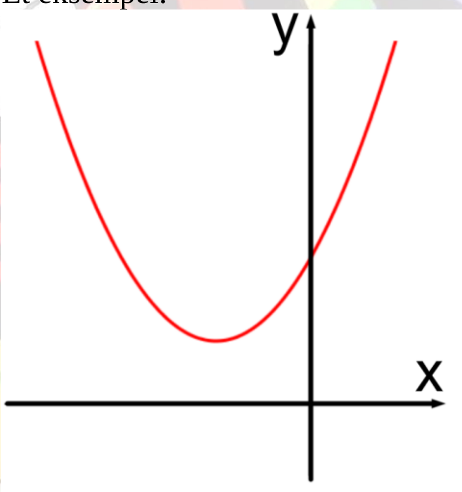
$$\frac{6}{4}=\frac{|DE|}{8} \iff |DE|=8\cdot\frac{6}{4}=\underline{\underline{12}}$$

$$\frac{6}{4}=\frac{9}{|BC|} \iff |BC|\cdot 6=9\cdot 4 \iff |BC|=\frac{36}{6}=\underline{\underline{6}}$$

<u>Opgave 3:</u> Det ses på forskrifterne, at alle tre funktioner er eksponentielle udviklinger.
Grafen B hører til funktionen *f*, da *f* som den eneste af funktionerne har en fremskrivningsfaktor mindre end 1, hvilket stemmer med, at grafen *B* er graf for en aftagende funktion.
Grafen A hører til funktionen *g*, da begyndelsesværdien for *g* er mindre end *h*, hvilket stemmer med, at grafen *A* skærer andenaksen under C's skæring.
Dermed hører grafen C til funktionen *h*.

<u>Opgave 4:</u> $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$

Da funktionsudtrykket er et polynomium, er grafen en parabel.
Da *c*-værdien er positiv, skal grafen skære andenaksen på den positive del.
Da *a*-værdien er positiv, skal benene vende opad.
Da *b*-værdien er positiv, skal hældningen for tangenten i grafens skæringspunkt med andenaksen være positiv, eller tilsvarende: Toppunktet skal være placeret til venstre for andenaksen, da *a* og *b* har ens fortegn.
Et eksempel:



Opgave 5: $f(x) = 9x^2 - 2x - 5 \quad P(2,13)$

Først bestemmes ved ledvis integration den form samtlige stamfunktioner er på:

$$F_k(x) = 9 \cdot \frac{1}{3}x^3 - 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 - 5x + k = 3x^3 - x^2 - 5x + k$$

Ved indsættelse af punktets koordinater bestemmes *k*-værdien:

$$13 = 3 \cdot 2^3 - 2^2 - 5 \cdot 2 + k \quad \Leftrightarrow \quad 13 = 3 \cdot 8 - 4 - 10 + k \quad \Leftrightarrow \quad k = 3$$

Dvs. den søgte stamfunktion er: $\underline{\underline{F(x) = 3x^3 - x^2 - 5x + 3}}$

Opgave 6: $f(x) = \ln(x) + 3x + 2 \ ; \ x > 0$

Den afledede funktion bestemmes ved ledvis differentiation:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 3 + 0 = \underline{\underline{\frac{1}{x} + 3}}$$

Hvis $y = 4x + 1$ skal være ligningen for en tangent til grafen for *f*, skal der for det første være et sted, hvor den afledede funktion antager værdien 4, da det er tangentens hældning, så dette undersøges først:

$$f'(x) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 4 = \frac{1}{x} + 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

Dvs., at det er kun i $x = 1$, at der er mulighed for en tangent med hældningen 4.

Det afgørende er nu, om linjen givet ved $y = 4x + 1$rører grafen for *f* dette sted. Det undersøges ved at bestemme funktionsværdien og linjen *y*-værdi det pågældende sted:

$$f(1) = \ln(1) + 3 \cdot 1 + 2 = 0 + 3 + 2 = 5$$

$$y = 4 \cdot 1 + 1 = 5$$

Da værdierne er ens, er svaret:

Ja, den angivne ligning er ligningen for en tangent til grafen for *f*.

23. maj 2017: Delprøven MED hjælpemidler

Opgave 7:

a) Da modellen er på formen $f(x) = a \cdot x + b$, og da mere end to par målinger findes, skal der anvendes lineær regression:

$År := [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]:$

$Antal := [2981, 3335, 3759, 3936, 4349, 4680, 4916]:$

$f(x) := LinReg(År, Antal, x):$

$f(x) = 324.464285714286\, x + 3020.32142857143$

Dvs. $\underline{\underline{a = 324.5}}$ og $\underline{\underline{b = 3020}}$

b) År 2018 svarer til $x = 8$, så man har:

$f(8) = 5616.03571428572$

Dvs. **ifølge modellen vil der i 2018 være 5616 misligholdte SU-lån under 50000 kr.**

Opgave 8:

a) Antallet af råvildt betegnes med N, og t anvendes til at betegne tiden målt i antal år efter 2010.
Da populationen vokser med en fast procentdel, er modellen en eksponentiel udvikling.
Da vækstraten r er 3,4%, er fremskrivningsfaktoren $a = 1 + r = 1 + 0.034 = 1.034$
Da der i 2010 var 950 råvildt, er begyndelsesværdien 950.

Hermed er modellen: $\underline{\underline{N(t) = 950 \cdot 1.034^t}}$

b) Da man kender fremskrivningsfaktoren, kan fordoblingstiden beregnes:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2.)}{\ln(1.034)} = 20.73132414$$

Dvs. **fordoblingstiden er 20,7 år.**

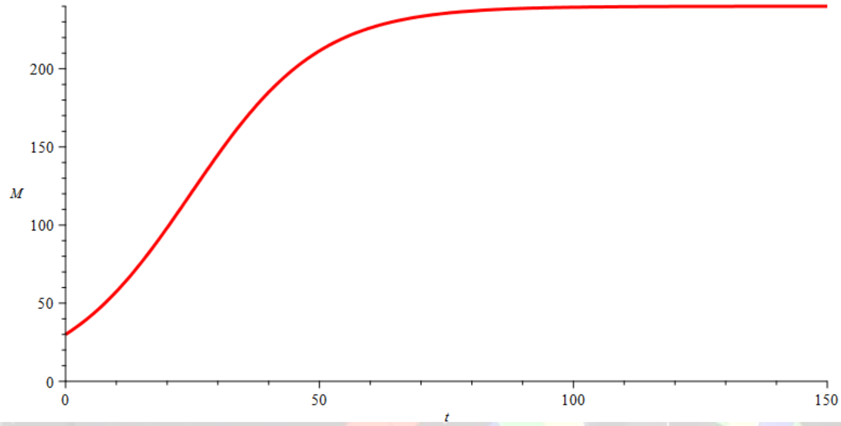
Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>Opgave 9:</u>

a) $M(t) := \dfrac{240}{1 + 7.0 \cdot e^{-0.079 \cdot t}}$:

Definitionsmængden er oplyst til $0 \leq t \leq 150$, så det er i dette interval, grafen skal tegnes:

$plot(M(t), t = 0..150, M = 0..240, thickness = 3, color = red)$



Hvis mængden af biomasse skal være 100 tons pr. ha, skal $M(t) = 100$, så denne ligning løses:

$M(t) = 100 \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t = 20.37263180]]$

Dvs. **efter 20,4 år er biomassen 100 tons pr. ha.**

b) Da funktionsforskriften er gemt i Maple, kan differentialkvotienten i 10 bestemmes:

$M'(10) = 3.452492592$

Dvs. at **efter 10 år vokser mængden af biomasse med 3,5 tons pr. ha om året.**

<u>Opgave 10:</u>

a) $f(x) := (x^2 - 3) \cdot e^{x+2}$:

For at bestemme monotoniforholdene findes først ved hjælp af den afledede funktion de steder, hvor der kan være lokale ekstrema:

$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 1], [x = -3]]$

Med den anden afledede undersøges det, hvilken slags steder, der er tale om:

$f''(-3) = -4\,e^{-1} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} -1.4715$ < 0, dvs. lokalt maksimumssted

$f''(1) = 4\,e^{3} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 80.344$ > 0, dvs. lokalt minimumssted

Dvs. **f er voksende i intervallerne]-∞,-3] og [1,∞[og aftagende i intervallet [-3,1].**

b) En ligning for tangenten kan bestemmes ud fra ligningen $y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$:

$y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \xrightarrow{\text{solve for y}} [[y = -3\,e^2\,x - 3\,e^2]]$

Dvs. tangentens ligning er $\underline{\underline{y = -3 \cdot e^2 \cdot x - 3 \cdot e^2}}$ (eller afrundet: $\underline{\underline{y = -22.167 \cdot x - 22.167}}$)

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 11:

a) Nulhypotesen er: **Der er uafhængighed mellem køn og bekymringer vedrørende klimaforandringer.**

b) Med Maples Gym-pakke kan de forventede værdier under antagelse af nulhypotesen bestemmes:

$$M := \begin{bmatrix} 353 & 117 & 54 \\ 314 & 167 & 26 \end{bmatrix}:$$

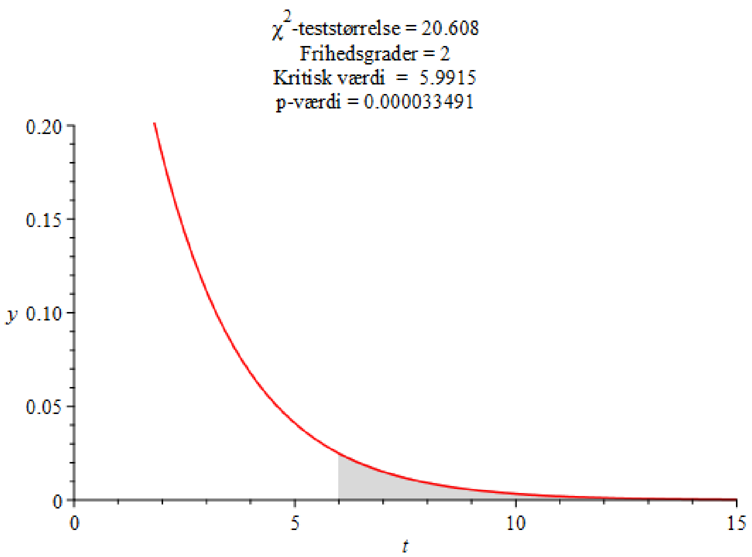
$$forventet(M) = \begin{bmatrix} 339.00 & 144.34 & 40.660 \\ 328.00 & 139.66 & 39.340 \end{bmatrix}$$

Men der skal altid være mindst ét regneeksempel. Her vises alle udregningerne:
Først bestemmes i nedenstående tabel "i alt"-cellerne ved at lægge sammen vandret og lodret.
Derefter bestemmes de forventede værdier (røde udregninger) ved at multiplicere de to "I alt"-tal fra kolonnen og cellen og dividere med 1031.

	Ja	Nej	Ved ikke	**I alt**
Kvinder	$\frac{524\cdot 667.}{1031} = 338.9990301$	$\frac{524\cdot 284}{1031.} = 144.3414161$	$\frac{524\cdot 80}{1031.} = 40.65955383$	$353 + 117 + 54 = 524$
Mænd	$\frac{507\cdot 667}{1031.} = 328.0009699$	$\frac{507\cdot 284.}{1031} = 139.6585839$	$\frac{507\cdot 80.}{1031} = 39.34044617$	$314 + 167 + 26 = 507$
I alt	$353 + 314 = 667$	$117 + 167 = 284$	$54 + 26 = 80$	$524 + 507 = 1031$ $667 + 284 + 80 = 1031$

Der foretages et χ^2-uafhængighedstest for at afgøre, om nulhypotesen skal forkastes:

$ChiKvadratUtest(M, level = 0.05)$



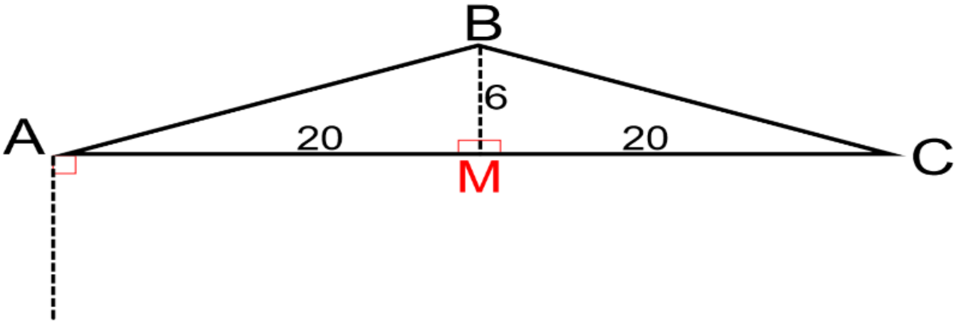
Da p-værdien er 0,0033% og altså under 5%, **forkastes nulhypotesen.**
Der er altså signifikant forskel på mænds og kvinders bekymringer vedrørende klimaforandringer.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 12:

a) $AC := 40 : DF := 40 : BE := 24 : AF := 12 : CD := 12 :$

Punkterne A og C forbindes, så der dannes en trekant ABC, og højden fra B tegnes med fodpunktet M:



Først bestemmes $\angle BAM$ i den retvinklede trekant BAM:

$$Tan(BAM) = \frac{6}{20} \xrightarrow{\text{solve for BAM}} [[BAM = 16.69924423]]$$

Vinkel A i sekskanten ABCDEF består af ovenstående vinkel samt en ret vinkel, så man har:

$A := 90 + 16.69924423 = 106.6992442$

Dvs. $\underline{\underline{\angle A = 106.7°}}$

For at bestemme vinkel B i sekskanten, bestemmes først $\angle$ABM i den retvinklede trekant ABM:

$$Tan(ABM) = \frac{20}{6} \xrightarrow{\text{solve for ABM}} [[ABM = 73.30075577]]$$

Vinkel B er dobbelt så stor, dvs. $B := 2 \cdot 73.30075577 = 146.6015115$

Altså er $\underline{\underline{\angle B = 146.6°}}$

b) Da flisen er symmetrisk omkring de to stiplede linjer, består omkredsen af 4 stykker af AB's længde og 2 stykker af AF's længde. Vi kender allerede AF's længde, og længden af AB kan bestemmes med Pythagoras' Læresætning, da trekant ABM er retvinklet:

$$O = 4 \cdot |AB| + 2 \cdot |AF| = 4 \cdot \sqrt{20^2 + 6^2} + 2 \cdot AF = 8\sqrt{109} + 24 \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 107.5224521$$

Dvs $\underline{\underline{O = 107.5 \text{ cm}}}$

I trekant ABF kender man allerede vinkel A og længden af siden AF. For at bestemme længden af siden BF, findes først længden af siden AB (igen med Pythagoras som ovenfor):

$$AB := \sqrt{20^2 + 6^2} = 2\sqrt{109}$$

Så kan man anvende en cosinusrelation i trekant ABF:

$$Cos(A) = \frac{AB^2 + AF^2 - BF^2}{2 \cdot AB \cdot AF} \xrightarrow{\text{solve for BF}} [[BF = 26.90724809], [BF = -26.90724809]]$$

Da en sidelængde ikke kan være negativ, har man:

$\underline{\underline{|BF| = 26.9 \text{ cm}}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 13:

$f(x) := 0.00005 \cdot x^3 - 0.0005 \cdot x^2 + 0.55 \cdot x :$

a) Da x er andelen målt i procent, svarer 50% til $x = 50$. Så man har:

$f(50) = 32.50000$

Dvs. **de 50% fattigste tjener 32,5% af landets samlede indkomst.**

b) $g(x) := x - f(x) :$

For at finde maksimum for funktionen g, findes først det eller de steder, hvor maksimumværdien kan antages:

$g'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = -51.54025878], [x = 58.20692544]]$

Det første sted ligger uden for definitionsmængden. Med den anden afledede undersøges det andet sted:

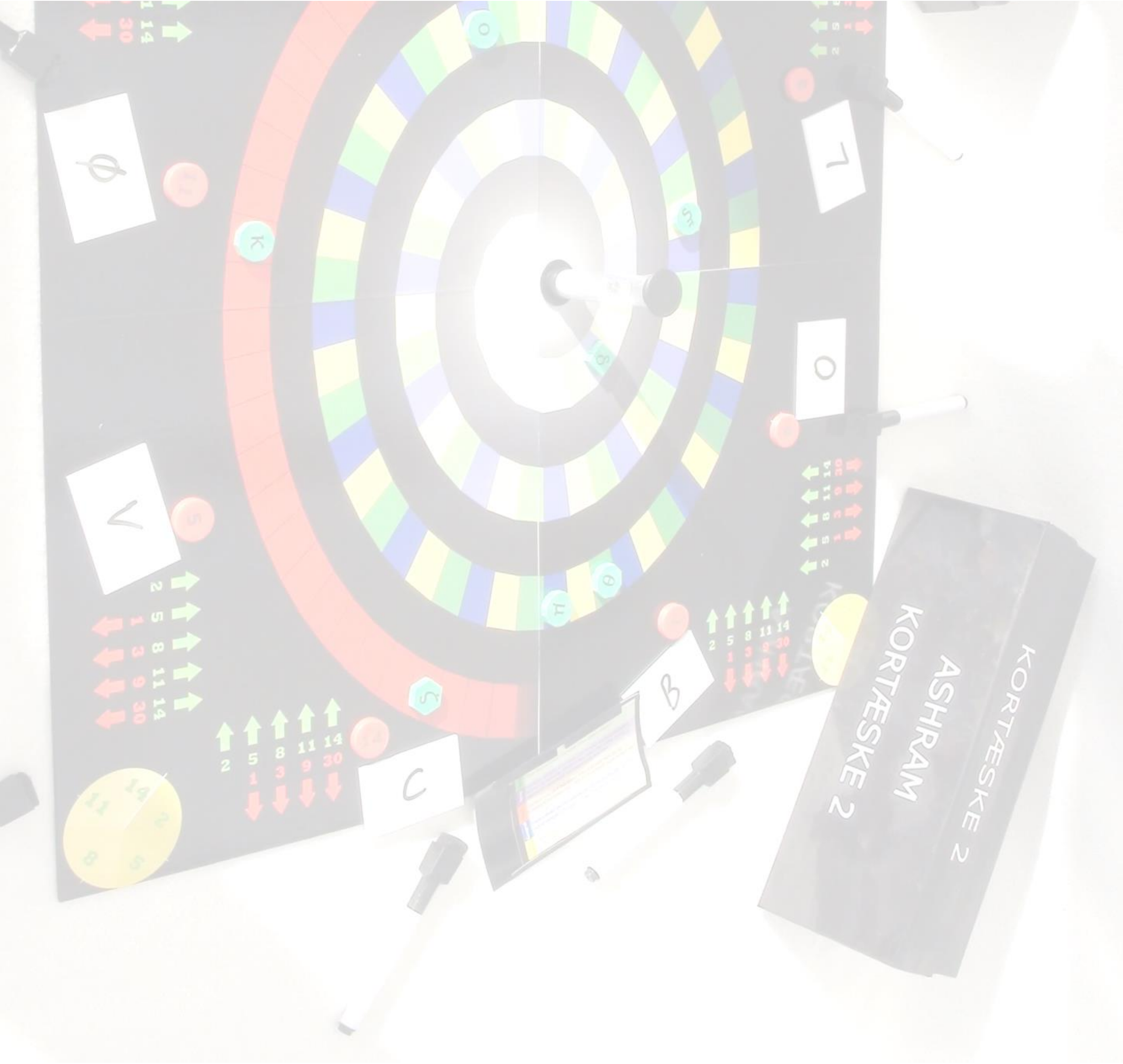
$g''(58.20692544) = -0.01646207763 < 0$ dvs. lokalt maksimumssted.

Da der ikke er nogen andre ekstremumssteder inden for definitionsmængden, er det også globalt maksimumssted.

Funktionsværdien dette sted er altså maksimum for funktionen:

$g(58.20692544) = 18.02675199$

Dvs. landets Robin Hood indeks er 18,0



Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

15. august 2017: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: Da det er en lineær funktion angivet på formen $f(x) = a \cdot x + b$, bestemmes hældningen *a* ved

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. De to kendte punkter er $P(1,2)$ og $Q(3,8)$.

$$a = \frac{8-2}{3-1} = \frac{6}{2} = \underline{\underline{3}}$$

b-værdien bestemmes ved at indsætte hældningen og et af de to punkter (her vælges *P*) i forskriften:

$$2 = 3 \cdot 1 + b \iff 2 = 3 + b \iff \underline{\underline{b = -1}}$$

Opgave 2: $x^2 - 10x + 21 = 0$

Diskriminantmetoden:

Først beregnes diskriminanten: $d = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21 = 100 - 84 = 16 > 0$

Da diskriminanten er positiv, er der to løsninger:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 4}{2} = \begin{cases} 7 \\ 3 \end{cases}$$ Dvs. $\underline{\underline{x = 3 \ \vee \ x = 7}}$

Faktorisering og nulreglen:

$$x^2 - 10x + 21 = 0 \iff (x-7) \cdot (x-3) = 0 \iff \underline{\underline{x = 7 \ \vee \ x = 3}}$$

Opgave 3: Da skalafaktoren er 2, er $|AC_1| = 2 \cdot |AC|$. Dvs. $|AC_1| = 2 \cdot 5 = \underline{\underline{10}}$

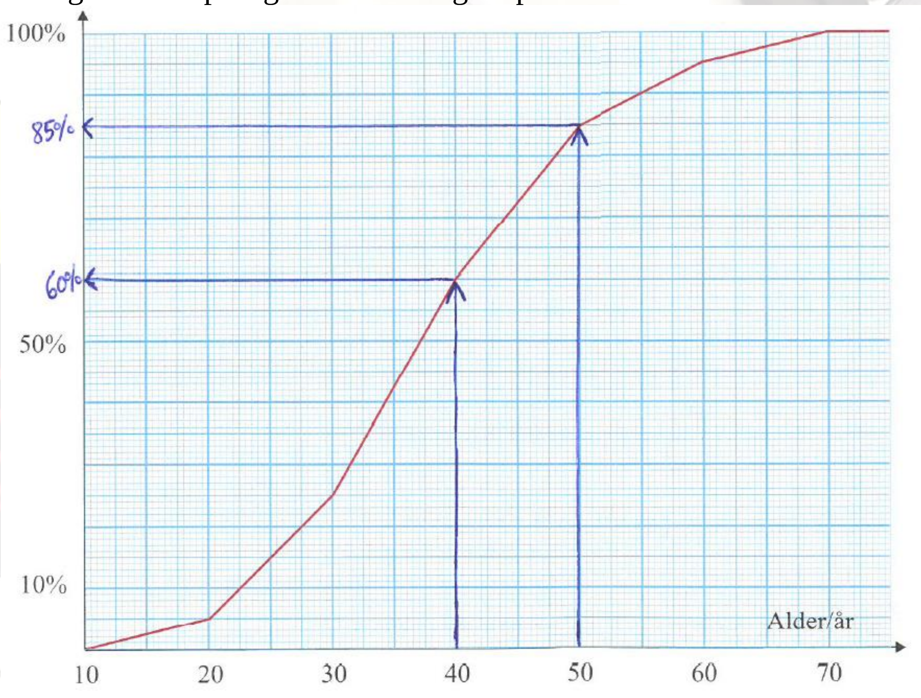
Da trekant *ABC* er retvinklet, giver Pythagoras:

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2 \iff |BC| = \sqrt{|AB|^2 - |AC|^2}$$

$$|BC| = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{36 - 25} = \underline{\underline{\sqrt{11}}}$$

Opgave 4: $\frac{h}{2} - 10 = M \iff \frac{h}{2} = M + 10 \iff h = 2 \cdot (M + 10) \iff \underline{\underline{h = 2 \cdot M + 20}}$

Opgave 5: Da man skal finde antallet af mænd mellem 40 og 50 år (incl. begge aldre), aflæses procentdelene ved at gå lodret op til grafen fra 40 og 50 på førsteaksen.



Dvs. det er $85\% - 60\% = 25\%$, der ligger i intervallet.
Da der i alt er 80 mænd på arbejdspladsen, svarer 25% til:
$\text{Antal} = 0,25 \cdot 80 = \underline{\underline{20}}$

Opgave 6: $f(x) = x^3 - 8x^2 + 3x + 2$ $\quad P(2, f(2))$

For at kunne bestemme en ligning for tangenten skal man kende tangentens hældning samt det punkt, hvor tangenten rører grafen.
Røringspunktets andenkoordinat bestemmes ved indsættelse i funktionsforskriften:
$f(2) = 2^3 - 8 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 2 = 8 - 32 + 6 + 2 = -16$
Tangentens hældning bestemmes som differentialkoefficienten i 2:
$f'(x) = 3x^2 - 16x + 3$

$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 16 \cdot 2 + 3 = 12 - 32 + 3 = -17$
Tangentens ligning er så:
$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$
$y - (-16) = -17 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = -17x + 18}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

15. august 2017: Delprøven MED hjælpemidler

Opgaverne løses med Maple.

Opgave 7:

a) Da man kender mere end to sammenhørende værdier, skal man anvende regression. Det er oplyst, at modellen er lineær ($f(x) = a \cdot x + b$). Det bemærkes, at tiden måles i antal år **efter 2010**.

$Tid := [0, 1, 2, 3, 4, 5]:$

$Antalhunde := [411, 449, 487, 524, 560, 584]:$

$f(x) := LinReg(Tid, Antalhunde, x):$

$f(x) = 35.2857142857142\, x + 414.285714285715$

Dvs.

$\underline{\underline{a = 35.286 \text{ og } b = 414}}$

b) **Hældningen *a* fortæller, at siden 2010 er antallet af hunde i Danmark hvert år øget med 35286.**

Opgave 8:

a) Det bemærkes, at man skal indføre passende **variable** (og ikke konstanter), dvs. man skal indføre:

N: Antallet af individer i populationen.

t: Tiden målt i antal måneder efter starten af optællingen.

Da modellen er eksponentiel med en vækstrate på 5% svarende til fremskrivningsfaktoren 1,05, og da antallet af individer fra start er 4500, har man:

$\underline{\underline{N(t) = 4500 \cdot 1.05^t}}$

b) Da man kender fremskrivningsfaktoren, kan fordoblingstiden bestemmes ved:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2.)}{\ln(1.05)} = 14.20669908$$

Dvs. **fordoblingstiden er 14,2 måneder.**

Opgave 9:

a) De angivne størrelser lægges ind i Maple:

$AB := 5 : AD := 7 : A := 40 :$

Da man kender en vinkel og de to hosliggende sider, kan den modstående side bestemmes med en cosinusrelation:

$$Cos(A) = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2 \cdot AB \cdot AD} \xrightarrow{\text{solve for BD}} [[BD = 4.514076759], [BD = -4.514076759]]$$

Da det er en sidelængde, forkastes den negative løsning, dvs:

$\underline{\underline{|BD| = 4.514}}$

b) Man kan bestemme arealet af trekant *BDC* ved hjælp af $T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$, så hvis man tager *CD* som grundlinje, skal man bruge højden fra *B*, der falder uden for trekant *BDC* og står vinkelret på siden *AD* (fodpunktet kaldes *E*).

Trekant *ABE* er retvinklet, så højden bestemmes ved:

$$\sin(A) = \frac{h_B}{|AB|}$$

Det udnyttes også, at $|BD| = |CD|$, og man har dermed:

$$T = \frac{1}{2} \cdot h_B \cdot g = \frac{1}{2} \cdot \sin(A) \cdot |AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot Sin(A) \cdot AB \cdot 4.514076759 = 7.253981524$$

Dvs. arealet er:

$\underline{\underline{T = 7.254}}$

Man kan også benytte en fremgangsmåde, hvor man først bestemmer $\angle ADB$ med en sinusrelation, $\angle BDC$ som dennes supplementvinkel og endelig arealet med $\frac{1}{2}$-appelsinformlen:

$$\frac{\sin(ADB)}{|AB|} = \frac{\sin(A)}{|BD|}$$

$$\frac{Sin(ADB)}{AB} = \frac{Sin(A)}{4.514076759} \xrightarrow{\text{solve for ADB}} [[ADB = 45.39634541]]$$

Da denne vinkel ikke ligger over for den længste side i trekanten, ved man, at den er spids, og dermed er det den rigtige vinkel, der er fundet.

$BDC := 180 - 45.39634541 = 134.6036546$

Arealet er dermed:

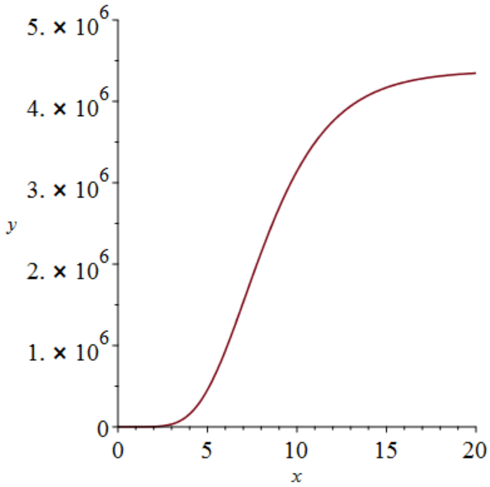
$$T = \frac{1}{2} \cdot |BD| \cdot |CD| \cdot \sin(\angle BDC) = \frac{1}{2} \cdot 4.514076759 \cdot 4.514076759 \cdot Sin(134.6036546) = 7.253981528$$

Opgave 10:

$f(x) := 4378449 \cdot e^{-15.43 \cdot e^{-0.384 \cdot x}}$:

a) Det er angivet, at $x \geq 0$, så grafen bliver:

$plot(f(x), x = 0..20, y = 0..5000000)$



b) År 2003 svarer til $x = 3$, så man finder:

$f(3) = 33398.33756$

Dvs. **i 2003 var der ifølge modellen 33398 artikler**

b) År 2003 svarer til $x = 3$, så man finder:

$f(3) = 33398.33756$

Dvs. **i 2003 var der ifølge modellen 33398 artikler**

Når antallet af artikler skal overstige 500000, skal:

$f(x) > 500000 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[5.108488114 < x]]$

Dvs. **i år 2006 overstiger antallet af artikler 500000** (2005 accepteres også)

c) $f'(10) = 400216.0404$

Dette tal viser, at **i år 2010 voksede antallet af artikler med 400216 artikler om året.**

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 11:

$f(x) := x^2 - 8\cdot\ln(x)$:

a) $f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x=2], [x=-2]]$

Da definitionsmængden er de positive tal, er det kun den første løsning, der gælder, dvs. $\underline{\underline{x=2}}$

Fortegnet for den anden afledede af f dette sted bestemmes:

$f''(2) = 4 > 0$ dvs. lokalt minimumssted.

Dermed er monotoniforholdene:

***f* er aftagende i intervallet]0,2] og voksende i intervallet [2,∞[**

Opgave 12:

a) **Populationen er alle de producerede balloner, og stikprøven er de 100 balloner, der er udvalgt tilfældigt blandt de producerede balloner.**

Nulhypotese: Der produceres lige mange balloner af hver farve.

Denne hypotese skal holdes op imod den alternative hypotese, at der ikke produceres lige mange balloner af hver farve.

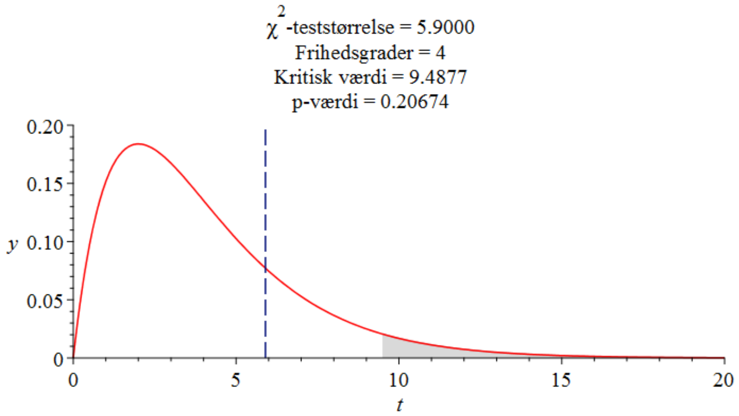
b) På baggrund af nulhypotesen ville man forvente, at de 100 balloner fordelte sig med 20 balloner i hver af de 5 farver.

Hermed kan udføres et χ^2–GOF-test:

$forv := [20, 20, 20, 20, 20]$:

$obs := [20, 28, 21, 13, 18]$:

$ChiKvadratGOFtest(obs, forv, level = 0.05)$



Da p-værdien er 0,207 og dermed større end signifikansniveauet på 0,05, skal nulhypotesen IKKE forkastes. Der er ikke signifikant forskel på den observerede og en lige fordeling af farver.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 13:

$f(x) := -x^2 + 6x:$

a) Først skal man bestemme de steder, hvor grafen skærer 1.aksen, da det er grænserne i det bestemte integral, der svarer til arealet af M:

$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 0], [x = 6]]$

Dvs.

$A_M = \int_0^6 f(x)\,dx = 36$

$\underline{\underline{A_M = 36}}$

b) En tredjedel af arealet af M er 12, dvs:

$\int_0^k f(x)\,dx = 12 \xrightarrow{\text{solve}} -1.823738649, 2.321778859, 8.501959790$

Da k skal ligge mellem 0 og 6, har man $\underline{\underline{k = 2.322}}$

7. december 2017: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: $3x+5=2x-1 \Leftrightarrow 3x-2x=-1-5 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=-6}}$

Opgave 2: $f(x)=e^x+x^2$

Funktionen differentieres ledvist:

$f'(x)=\left(e^x\right)'+\left(x^2\right)'=\underline{\underline{e^x+2x}}$

Opgave 3: $f(x)=x^2-4x$

Man kan vise, at parablen skærer førsteaksen i 0 og 4 ved at indsætte disse *x*-værdier i funktionsudtrykket og tjekke, at det giver 0, dvs. $f(x)=0$.

$f(0)=0^2-4\cdot 0=0$

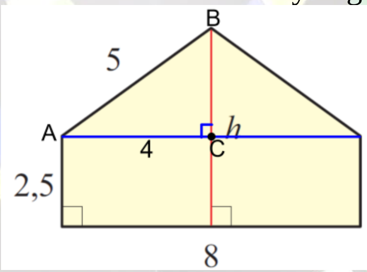
$f(4)=4^2-4\cdot 4=16-16=0$

Da begge værdier er 0, er det hermed vist, at **skæringspunkterne er (0,0) og (4,0)**.

Når man skal tegne en skitse, skal det desuden udnyttes, at benene skal vende opad (glad parabel), da a-værdien er 1 og dermed positiv.
Man skal også benytte, at toppunktets førstekoordinat er placeret midt mellem nulpunkterne, dvs. den er 2. Da $f(2)=2^2-4\cdot 2=4-8=-4$, er toppunktets koordinatsæt (2,-4).

Hermed kan man tegne en skitse.

Opgave 4: En vandret linje tegnes ved taggrænsen, så man får dannet den retvinklede trekant *ABC* med den rette vinkel *C*. Da trekanten er retvinklet anvendes Pythagoras til at finde længden af siden *BC*:



$|AC|^2+|BC|^2=|AB|^2 \Leftrightarrow |BC|=\sqrt{|AB|^2-|AC|^2}$

$|BC|=\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$

Da afstanden fra bunden op til *A* er 2,5m, er højden af gavlen altså: $h=2{,}5\,\mathrm{m}+3\,\mathrm{m}=\underline{\underline{5{,}5\,\mathrm{m}}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>*Opgave 5:*</u> $f(x) = 3x - 2$

Først integreres for at bestemme den form samtlige stamfunktioner har:

$$F_k(x) = \int f(x)\,dx = \int (3x-2)\,dx = \frac{3}{2}x^2 - 2x + k$$

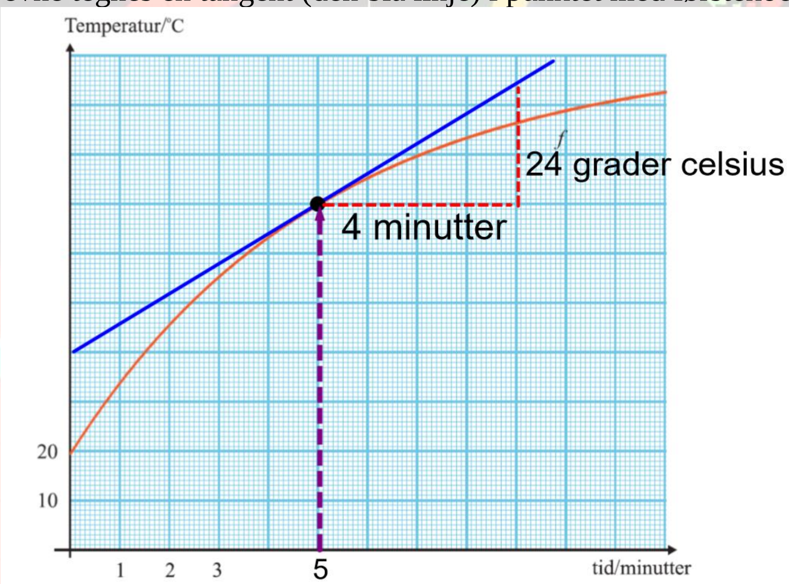
Man kan bestemme konstanten *k* ved at udnytte, at grafen skal gå gennem $P(2,1)$:

$$1 = \frac{3}{2}\cdot 2^2 - 2\cdot 2 + k \;\Leftrightarrow\; 1 = \frac{3}{2}\cdot 4 - 4 + k \;\Leftrightarrow\; 1 = 6 - 4 + k \;\Leftrightarrow\; k = -1$$

Dvs. den søgte stamfunktion er:

$$\underline{\underline{F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x - 1}}$$

<u>*Opgave 6:*</u> Efter bedste evne tegnes en tangent (den blå linje) i punktet med førstekoordinaten 5:



Tangentens hældning bestemmes ved først at måle, at når tiden øges med 4 minutter, stiger temperaturen med 24 grader, dvs. hældningen er $a = \dfrac{24\,°C}{4\,\text{min}} = 6°C$ pr. minut

Da tangentens hældning svarer til differentialkvotienten i 5, har man:

$$\underline{\underline{f'(5) = 6\,\frac{°C}{\text{min}}}}$$

Dvs. efter 5 minutter stiger temperaturen i vandbadet med 6 °C pr. minut.

Opgave 7:

restart

with(*Gym*) :

a) Det bemærkes, at det er en lineær model $f(x) = a \cdot x + b$, og da man kender målinger fra mere end to år, skal der anvendes regression. Det bemærkes desuden, at tidspunktet angives i antal år EFTER 2010:

$År := [0, 1, 2, 3, 4, 5]$:

$Indbyggertal := [45596, 45145, 44908, 44494, 44230, 44078]$:

$f(x) := LinReg(År, Indbyggertal, x)$:

$f(x) = -307.114285714289\, x + 45509.6190476191$

Dvs. $\underline{\underline{a = -307}}$ og $\underline{\underline{b = 45510}}$

b) At indbyggertallet er 42000 svarer til $f(x) = 42000$:

$f(x) = 42000 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 11.42772971]]$

Dvs. **i år 2022 er indbyggertallet faldet til 42000**

(der rundes op pga. formuleringen "er faldet til", men år 2021 vil også accepteres som svar)

Opgave 8:

restart

with(*Gym*) :

a) Aldersfordelingen angives i en matrix:

$$M := \begin{bmatrix} 10..20 & 9 \\ 20..30 & 31 \\ 30..40 & 27 \\ 40..50 & 16 \\ 50..60 & 10 \\ 60..70 & 5 \\ 70..80 & 2 \end{bmatrix} :$$

$frekvensTabel(M) =$

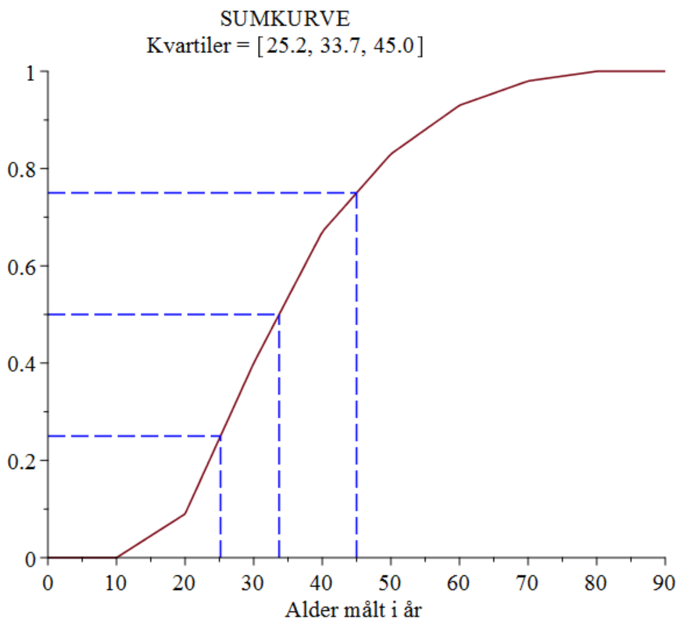
observation	hyppighed	frekvens(%)	kumuleret(%)
10 .. 20	9	9	9
20 .. 30	31	31	40
30 .. 40	27	27	67
40 .. 50	16	16	83
50 .. 60	10	10	93
60 .. 70	5	5	98
70 .. 80	2	2	100

Den kumulerede frekvens aflæses yderst til højre og svarer til summen af frekvenser op til og med det på gældende interval.

Eksempel: Kumuleret frekvens for intervallet 30-40 årige: $9\,\% + 31\,\% + 27\,\% = 67\,\%$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

plotSumkurve(*M*)



b) På sumkurven i spørgsmål a) er allerede angivet **kvartilsættet (25,2 ; 33,7 ; 45,0)**
For at kunne bestemme andelen over 55 år, skal man kunne arbejde med sumkurven som funktionsudtryk:
$S(t) := sumkurve(M, t)$:
Da det er andelen OVER 55 år, skal man trække den kumulerede frekvens ved 55 år fra 1 (100%):
$1 - S(55) = 0.120000000000000$
Dvs. at **12% af medlemmerne er over 55 år**

Opgave 9:

restart
with(*Gym*) :
a) Først fastsættes de kendte værdier i Maple: $AC := 6 : AB := 7 : C := 77$:
Man kan bestemme længden af siden *BC* direkte med en cosinusrelation, da man kender en vinkel og to sider:

$$Cos(C) = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC} \xrightarrow{\text{solve for BC}} [[BC = -2.500190707], [BC = 5.199603360]]$$

Da det er en sidelængde, er det den positive løsning, der er svaret:
$|BC| = \underline{\underline{5.20}}$

Man kan også gå en lille omvej og først bestemme vinkel *B* med en sinusrelation, derefter vinkel *A* ved trekantens vinkelsum og endelig længden af *BC* med en sinusrelation:

$$\frac{Sin(B)}{AC} = \frac{Sin(C)}{AB} \xrightarrow{\text{solve for B}} [[B = 56.63399613]]$$

Da vinkel *B* ikke ligger over for den længste side, kan den ikke være stump, så ovenstående spidse vinkel er den rigtige:
$A := 180 - C - 56.63399613 = 46.36600387$

$$\frac{Sin(A)}{BC} = \frac{Sin(C)}{AB} \xrightarrow{\text{solve for BC}} [[BC = 5.199603366]]$$

b) Arealet kan bestemmes med ½-appelsinformlen, og da man i trekant *BCD* allerede kender en vinkel og den ene hosliggende side, er kendskabet til arealet nok til at bestemme den anden hosliggende side.
$BC := 5.199603366 : T := 12$:

$$T = \frac{1}{2} \cdot DC \cdot BC \cdot Sin(C) \xrightarrow{\text{solve for DC}} [[DC = 4.737149520]]$$

Dvs. $|DC| = \underline{\underline{4.74}}$

Opgave 10:

restart

with(*Gym*) :

a) $f(x) := x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$:

Nulpunkterne er de steder, hvor $f(x) = 0$. Da funktionsudtrykket er et fjerdegradspolynomium, er der 4 nulpunkter regnet med multiplicitet (og hvoraf nogle kan være komplekse):

$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x=0], [x=2], [x=4], [x=-1]]$

Dvs. nulpunkterne er $\underline{\underline{x=-1 \vee x=0 \vee x=2 \vee x=4}}$

b) For at kunne angive monotoniforholdene bestemmes først ekstremumsstederne placering og type: Ekstremumsstederne er blandt de steder, hvor der er vandret tangent.

$f'(x) = 0. \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x=1.070464553], [x=3.253749246], [x=-0.5742137986]]$

Fortegnet for den anden afledede funktion bestemmes disse steder:

$f''(-0.5742137986) = 25.18307179 > 0$ dvs. lokalt minimumssted.

$f''(1.070464553) = -14.36320427 < 0$ dvs. lokalt maksimumssted.

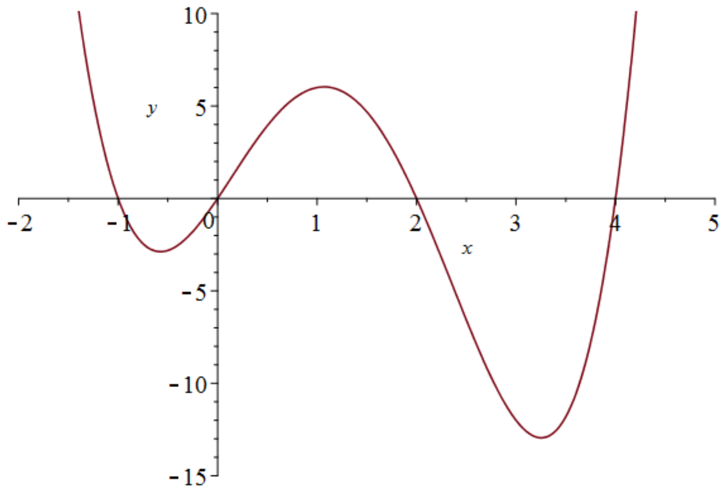
$f''(3.253749246) = 33.43013248 > 0$ dvs. lokalt minimumssted.

Dermed er monotoniforholdene:

f **er aftagende i intervallerne]-∞,-0.574] og [1.070,3.254] og voksende i intervallerne [-0.574,1.070] og [3.254,∞[**

c) Grafen tegnes for at findes placeringen af *M*:

$plot(f(x), x=-2..5, y=-15..10)$



Man kan se (ved også at anvende resultaterne fra spørgsmål a, at punktmængden M ligger i intervallet [0,2]. Hermed kan arealet bestemmes med det bestemte integral:

$$A_M = \int_0^2 f(x)\, dx = \frac{116}{15}$$

Dvs. $\boldsymbol{A_M = \frac{116}{15}}$

Opgave 11:

restart

with(*Gym*) :

a) $f(x) := 123700 \cdot 1.02^x$:

Da x angiver tidspunktet målt i år efter 2015, fortæller begyndelsesværdien 123700 i denne konkrete situation, at **i 2015 var der pr. døgn 123700 biler, der kørte på den bestemte motorvejsstrækning.**

Da fremskrivningsfaktoren er 1.02, kan man bestemme fordoblingstiden:

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2.)}{\ln(1.02)} = 35.00278878$$

Dvs. **efter 35 år vil antallet af biler pr. døgn på motorvejsstrækningen være fordoblet.**

b) Den lineære model vil med en konstant årlig stigning på 3000 biler pr. døgn få forskriften:

$g(x) := 3000 \cdot x + 123700$:

Når der skal være samme antal biler, skal $f(x) = g(x)$, og denne ligning løses med 'solve':

$$f(x) = g(x) \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 1.178294828\ 10^{-80}], [x = 19.82371944]]$$

Den første løsning svarer til $x = 0$ (bemærk eksponenten -80), så det er den anden løsning, der skal bruges, og da man angiver tiden i antal år efter 2015, har man altså:

I 2035 giver de to modeller igen det samme antal biler pr. døgn på motorvejsstrækningen.

Opgave 12:

restart

with(*Gym*) :

a) Rumfanget af en kasse er $V = l \cdot b \cdot h$, så man har:

$V = 2\,x \cdot x \cdot h = 2 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 10 = 2880$

Dvs. $\underline{\underline{V = 2880\ \text{cm}^3}}$

Det ydre overfladeareal består af bunden, 2 lange sideflader og 2 korte sideflader:

$O = A_{bund} + 2 \cdot A_{langside} + 2 \cdot A_{kortside} = 2\,x \cdot x + 2 \cdot 2\,x \cdot h + 2 \cdot x \cdot h = 2 \cdot 12 \cdot 12 + 2 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 10 + 2 \cdot 12 \cdot 10 = 1008$

Dvs. det ydre overfladeareal er $\underline{\underline{A = 1008\ \text{cm}^2}}$

b) Hvis rumfanget skal være 4000 cm^3, har man:

$$4000 = 2 \cdot x^2 \cdot h \Leftrightarrow h = \frac{4000}{2 \cdot x^2} \Leftrightarrow \underline{\underline{h = \frac{2000}{x^2}}}$$

Hermed bliver det ydre overfladeareal udtrykt alene ved x:

$$O(x) = 2\,x^2 + 4\,x \cdot h + 2\,x \cdot h = 2\,x^2 + 6 \cdot x \cdot h = 2\,x^2 + 6 \cdot x \cdot \frac{2000}{x^2} = \underline{\underline{2\,x^2 + \frac{12000}{x}}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

c)

local O :

Warning, A new binding for the name `O` has been created. The global instance of thi
using the :- prefix, :-`O`. See ?protect for details.

$O(x) := 2x^2 + \frac{12000}{x}$:

Først bestemmes de steder, hvor der er vandret tangent:

$O'(x) = 0. \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 14.42249570], [x = -7.211247852 + 12.49024766\,I], [x = -7.211247852 - 12.49024766\,I]]$

De to sidste løsninger er komplekse og forkastes derfor.

Fortegnet for den anden afledede bestemmes for at afgøre, om det er et maksimums- eller minimumssted.

$O''(14.42249570) = 12.00000000 > 0$ dvs. lokalt minimumssted.

Altså er overfladearealet mindst muligt, når $\underline{\underline{x = 14.4 \text{ cm}}}$

Vi kender sammenhængen mellem h og x:

$h = \frac{2000}{x^2} = \frac{2000}{14.42249570^2} = 9.614997140$

Dvs. $\underline{\underline{h = 9.6 \text{ cm}}}$