Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Løsninger til eksamensopgaver på B-niveau 2018

25. maj 2018: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: Da trekant *ABC* er retvinklet, kan længden af hypotenusen bestemmes med Pythagoras:

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2} = \sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = \underline{\underline{10}}$$

Da trekanterne er ensvinklede, er forholdene mellem korresponderende sider ens:

$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|DF|}{|AC|} \Leftrightarrow |DE| = \frac{|DF|}{|AC|}\cdot|AB|$$

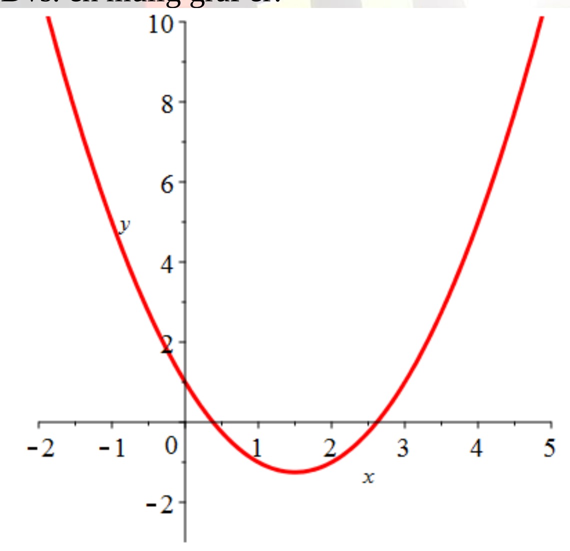
$$|DE| = \frac{4}{8}\cdot 10 = \frac{4\cdot 10}{8} = \frac{40}{8} = \underline{\underline{5}}$$

Opgave 2: Udtrykket reduceres ved at anvende en kvadratsætning på første led og gange ind i parentesen i andet led:

$$(a-2)^2 + a\cdot(6-a) - 4 = a^2 + 4 - 4a + 6a - a^2 - 4 = \underline{\underline{2a}}$$

Opgave 3: $f(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c \qquad a>0 \ , \ d>0$

Funktionsudtrykket er et andengradspolynomium, så grafen er en parabel.
Da *a*-værdien er positiv, vender grenene opad (glad parabel).
Da *d*-værdien er positiv, skærer parablen førsteaksen to steder.
Dvs. en mulig graf er:



Denne skitse viser en parabel, hvor *c*-værdien er **positiv**, da parablen skærer andenaksen på den positive del.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 4: Da trykket stiger med en fast størrelse, hver gang dybden øges med en fast størrelse, er der tale om **lineær vækst**.

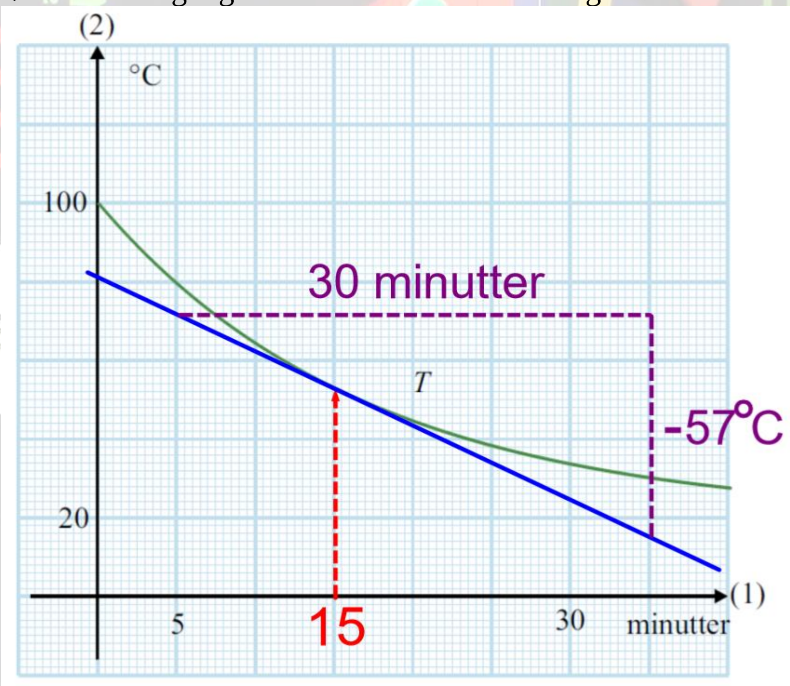
p: Trykket målt i atmosfære.

d: Dybden målt i meter under havoverfladen.

Da trykket er 1 atmosfære ved havoverfladen og stiger med 0,1 atmosfære for hver meter, har man:

$$\underline{\underline{p(d) = 0{,}1 \cdot d + 1}}$$

Opgave 5: $T'(15)$ svarer til hældningen for tangenten til grafen i 15, så på grafen går man op fra 15 på førsteaksen og tegner efter bedste evne en tangent.



Hældningen for tangenten bestemmes:

$$T'(15) = \frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{-57°C}{30\,\text{minutter}} = \underline{\underline{-2\frac{°C}{\text{min}}}}$$

Dvs. at **efter 15 minutter falder væskens temperatur med 2°C i minuttet.**

Opgave 6: Det er et bestemt integral, så svaret er et tal:

$$\int_0^3 \left(3x^2 - x + 1\right) dx = \left[x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^3 = \left(3^3 - \frac{1}{2}\cdot 3^2 + 3\right) - \left(0^3 - \frac{1}{2}\cdot 0^2 + 0\right) =$$

$$27 - \frac{9}{2} + 3 = 30 - \frac{9}{2} = \frac{60}{2} - \frac{9}{2} = \frac{60-9}{2} = \underline{\underline{\frac{51}{2}}}$$

25. maj 2018: Delprøven MED hjælpemidler

Opgave 7:

$f(x) = a \cdot x + b$

a) Funktionsforskriften viser, at der er tale om lineær vækst, så man skal anvende lineær regression. Det bemærkes, at fødselsåret måles i antal år EFTER 2005.

$Fødselsår := [0, 2, 4, 6, 8, 10]:$

$Forventetlevealder := [80.5, 80.7, 81.2, 81.9, 82.7, 82.8]:$

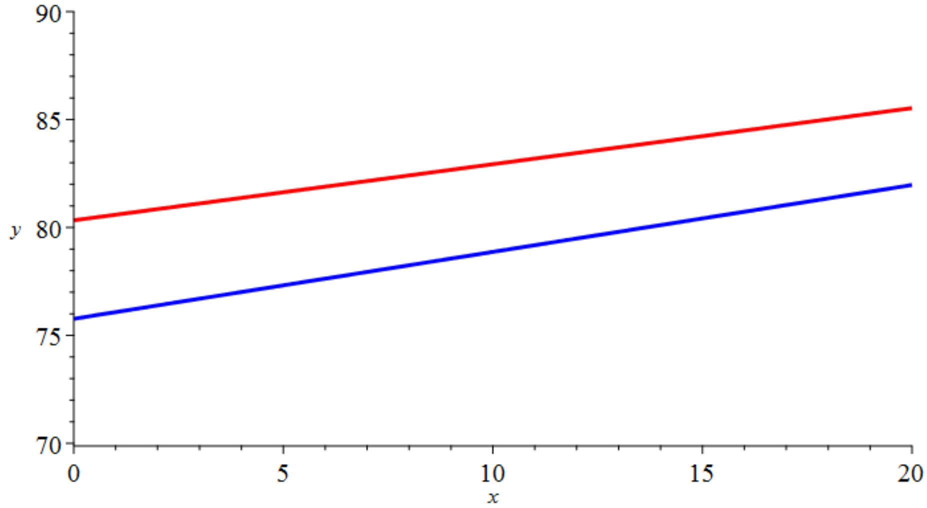
$f(x) := LinReg(Fødselsår, Forventetlevealder, x):$

$f(x) = 0.259999999999996\,x + 80.3333333333334$

Dvs. $\underline{\underline{a = 0.26}}$ og $\underline{\underline{b = 80.33}}$

b) $g(x) := 0.31 \cdot x + 75.77:$

$plot([f(x), g(x)], x = 0..20, y = 70..90, color = [red, blue], thickness = 3)$



År 2017 svarer til $x = 12$, så forskellen i forventet levealder er:

$f(12) - g(12) = 3.96333333333334$

Kvinder forventes altså at leve **3,96 år længere end mænd (gældende for personer født i 2017).**

c) Hældningskoefficienterne er:

$a_{kvinder} = 0,26$

$a_{mænd} = 0,31$

Da hældningskoefficienten for mændene er større end for kvinderne, vil mændenes levealder ifølge modellerne på et eller andet tidspunkt indhente kvindernes.

Dette tidspunkt kan bestemmes:

$f(x) = g(x) \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 91.26666667\}$

$2005 + 91 = 2096$

Dvs. kvinder og mænd født i år 2096 vil ifølge modellerne have samme forventet levealder.

Opgave 8:

$f(x) := 4.37 \cdot x^{1.27}$:

a) En effekt på 60 watt svarer til $x = 60$, så man udregner:

$f(60) = 792.0152157$

Dvs. med en effekt på 60 watt **har en glødepære lysmængden 792 lumen**.

b) Da det er potensvækst, er sammenhængen mellem vækstraterne $(1 + r_y) = (1 + r_x)^a$

Når effekten øges med 50%, er $r_x = 0.5$. Så man har:

$1 + r_y = 1.5^{1.27} \xrightarrow{\text{solve}} \{r_y = 0.6735392370\}$

Dvs. **lysmængden øges med 67%**

Opgave 9:

a) **Nulhypotese: Der er IKKE forskel på, hvilken type undervisningsmateriale piger og drenge i gymnasiet foretrækker.**

De forventede værdier bestemmes ved først at finde summerne af rækker og søjler (blå), og derefter udfylde cellerne (rød):

	Piger	Drenge	Sum
Elektroniske bøger	$\frac{62 \cdot 50.}{123} =$ 25.20325203	$\frac{50 \cdot 61.}{123} =$ 24.79674797	$20 + 30 = 50$
Papirbøger	$\frac{45 \cdot 62.}{123} =$ 22.68292683	$\frac{45 \cdot 61.}{123} =$ 22.31707317	$30 + 15 = 45$
Ved ikke	$\frac{28 \cdot 62.}{123} =$ 14.11382114	$\frac{28 \cdot 61.}{123} =$ 13.88617886	$12 + 16 = 28$
Sum	$20 + 30 + 12 =$ 62	$30 + 15 + 16 =$ 61	$50 + 45 + 28 =$ 123 $62 + 61 = 123$

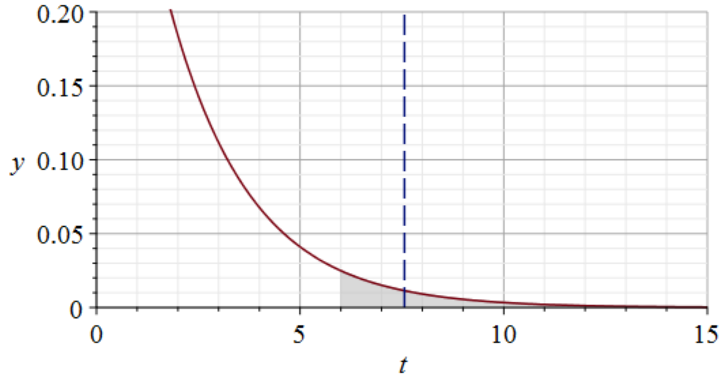
Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

b) Nulhypotesen testes med et χ^2 – uafhængighedstest:

$$M := \begin{bmatrix} 20 & 30 \\ 30 & 15 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}:$$

$ChiKvadratUtest(M, level = 0.05)$

χ^2-teststørrelse = 7.5638
Frihedsgrader = 2
Kritisk værdi = 5.9915
p-værdi = 0.022779



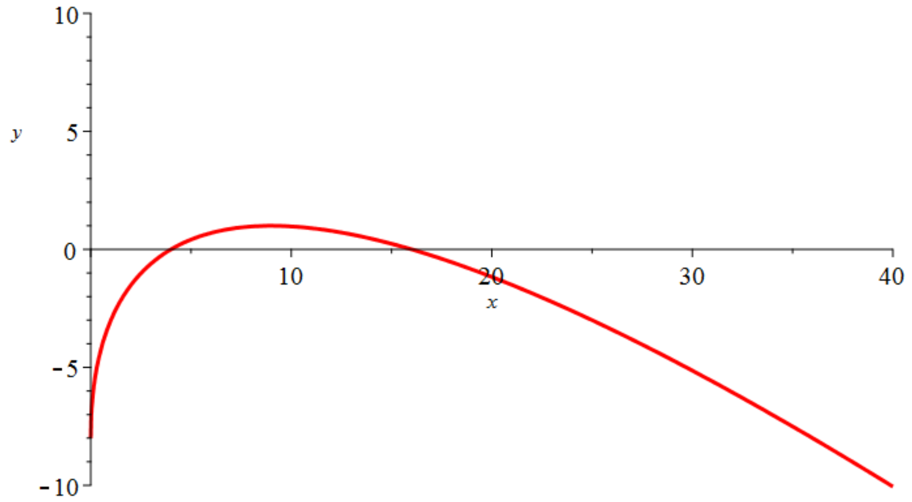
Da p-værdien (2,3%) er mindre end signifikansniveauet (5%), skal **nulhypotesen forkastes.**
Der er altså ifølge denne undersøgelse signifikant forskel på, hvilken type undervisningsmateriale piger og drenge i gymnasiet foretrækker.

Opgave 10:

$f(x) := 6\cdot\sqrt{x} - x - 8:$

a) Grafen tegnes i et passende vindue:

$plot(f(x), x = 0..40, y = -10..10, color = red, thickness = 3)$



Nulpunkter bestemmes ved hjælp af Maples 'solve':

$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 4\}, \{x = 16\}$

Dvs. nulpunkterne er $\underline{\underline{x = 4}}$ og $\underline{\underline{x = 16}}$

b) Først findes ekstremumsstederne var at finde steder med vandret tangent og efterfølgende se på fortegnet for den anden afledede, om der er tale om maksimum eller minimum.

$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 9\}$

$f''(9) = -\frac{\sqrt{9}}{54} < 0$ dvs. lokalt maksimumssted.

Dvs. *f* er voksende i intervallet]0,9] og aftagende i intervallet [9,∞[.

c) Man kender nulpunkterne fra spørgsmål a) (dvs. nedre grænse 4 og øvre grænse 16), og fra spørgsmål b) ved man, at grafen for *f* i dette interval ligger over førsteaksen. Så arealet af *M* bestemmes ved:

$A_M = \int_4^{16} f(x)\,dx = 8$

$\underline{\underline{A_M = 8}}$

Opgave 11:

$restart$

$with(Gym)$:

$AC := 25 : BC := 25 : AB := 24 :$

a) Da man kender alle tre sidelængder, kan vinklen bestemmes med en cosinusrelation:

$$Cos(v) = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC} \xrightarrow{\text{solve}} \{v = 57.37080403\}$$

Dvs. $\underline{\underline{v = 57.4°}}$

b) Det er en ligebenet trekant, så højden fra C deler siden AB i to lige store stykker og danner dermed to kongruente retvinklede trekanter, hvor den ene katete har længden 12 (halvdelen af 24) og hypotenusen har længden 25. Højden er den anden katete, og længden af denne kan bestemmes med Pythagoras:

$$h_c^{\,2} + 12.^2 = 25^2 \xrightarrow{\text{solve}} \{h_c = 21.93171220\}, \{h_c = -21.93171220\}$$

Da det er en sidelængde, forkastes den negative løsning, dvs.

$\underline{\underline{h_c = 21.9 \text{ cm}}}$

Højden x svarer til radius fratrukket højden fra c, dvs.

$x = 25 - 21.93171220 = 3.06828780$

Dvs. $\underline{\underline{x = 3.1 \text{ cm}}}$

Opgave 12:

local O :

`Warning, A new binding for the name `O` has been created. The global instance of this name is still accessible using the :- prefix, :-`O`.  See ?protect for details.`

$O(x) := x^2 + 8x + \frac{4000}{x}$:

a) Rumfanget af en kasse er givet ved $V = l \cdot b \cdot h$, og da både længde og bredde er x, har man med $V = 1000$ (det bemærkes, at de væsken kun fylder op til 2 cm under kanten, og derfor arbejdes med $h - 2$):

$$1000 = x \cdot x \cdot (h-2) \Leftrightarrow \frac{1000}{x^2} = h - 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{h = \frac{1000}{x^2} + 2}}$$

Overfladen består af 4 kongruente sider og en bund, så overfladearealet er:

$$O(x) = 4 \cdot A_{sider} + A_{bund} = 4 \cdot h \cdot x + x^2 = 4 \cdot \left(\frac{1000}{x^2} + 2\right) \cdot x + x^2 = \left(\frac{4000}{x^2} + 8\right) \cdot x + x^2 = \underline{\underline{\frac{4000}{x} + 8x + x^2}}$$

b) Den mindste sidelængde findes ved at finde de steder, hvor den første afledede er 0, samt at bestemme fortegnet for den anden afledede disse steder:

$$O'(x) = 0. \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 11.39712248\}, \{x = -7.698561241 + 10.78030823\, I\}, \{x = -7.698561241 - 10.78030823\, I\}$$

Det bemærkes, at de to sidste løsninger er komplekse, så der er kun én reel løsning, og den ligger i det angivne interval.

$O''(11.39712248) = 7.403863130 > 0$ dvs. lokalt minimum

Dvs. sidelængden, der giver det mindste overfladeareal, er $\underline{\underline{x = 7.4 \text{ cm}}}$

30. maj 2018: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: $5x-4=3x+2 \Leftrightarrow 5x-3x=2+4 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=3}}$

Opgave 2: Da stigningen har været på 10% om året, er der tale om en **eksponentiel udvikling** (konstant relativ vækst).

***t:* Tiden målt i antal år efter 2012**

***N:* Antal solgte huse pr. år.**

Da antallet af solgte huse i 2012 var 29132, er begyndelsesværdien 29132, og da vækstraten er 10%, er fremskrivningsfaktoren 1,1. Dermed bliver modellen.

$$\underline{\underline{N(t)=29132\cdot 1{,}1^t \quad , \quad t\geq 0}}$$

Opgave 3: $f(x)=x^2-4x-5$

Koordinatsættet for parablens toppunkt bestemmes ud fra toppunktsformlen:

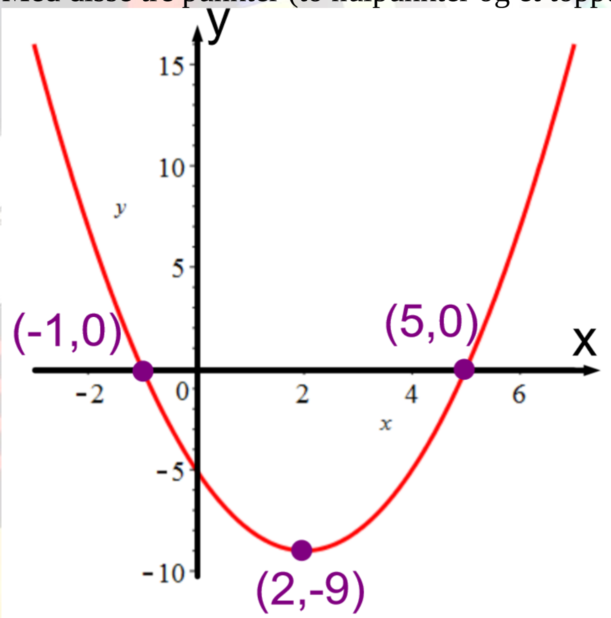
$$T\left(-\frac{b}{2a},-\frac{d}{4a}\right)=T\left(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)=$$

$$T\left(-\frac{-4}{2\cdot 1},-\frac{(-4)^2-4\cdot 1\cdot(-5)}{4\cdot 1}\right)=T\left(2,-\frac{16+20}{4}\right)=T\left(2,-\frac{36}{4}\right)=\underline{\underline{T(2,-9)}}$$

For at kunne tegne parablen skal man også kende nulpunkterne:

$$0=x^2-4x-5 \Leftrightarrow 0=(x-5)\cdot(x+1) \Leftrightarrow x=-1 \vee x=5$$

Med disse tre punkter (to nulpunkter og et toppunkt) kan parablen skitseres:



Opgave 4: Grafer for potensvækst går gennem punktet (1,b), og da alle tre grafer går gennem (1,2), kan man ikke bruge *b*-værdien til at skelne dem fra hinanden.

For potensfunktioner gælder:

$a < 0$: Aftagende funktion

$0 < a < 1$: Voksende funktion med aftagende væksthastighed (negativ acceleration). Konkav.

$a > 1$: Voksende funktion med voksende væksthastighed. Konveks.

Den søgte potensfunktion har $a = 1,5$, dvs. grafen skal være konveks, og det er **graf B**.

Opgave 5: Punktet *A*'s projektion på pladsen kaldes *D*. Da *A* er centreret, er trekant *ABD* en retvinklet trekant, hvor hypotenusen er 13 m og den ene katete 5 m (halvdelen af de 10 m fra *B* til *C*). Pythagoras' Sætning kan bruges til at bestemme længden af den anden katete, der svarer til lampens højde over pladsen:

$$h = |AD| = \sqrt{|AB|^2 - |BD|^2} = \sqrt{(13\text{m})^2 - (5\text{m})^2} = \sqrt{169\text{m}^2 - 25\text{m}^2} = \sqrt{144\text{m}^2} = \underline{\underline{12\text{m}}}$$

Opgave 6: $f(x) = 2 \cdot \mathrm{e}^x + 1 \quad P(0, f(0))$

For at bestemme en ligning for tangenten skal man kende røringspunktets koordinater samt tangentens hældning:

$f'(x) = 2 \cdot \mathrm{e}^x$ (ledvis differentiation)

y-koordinat for røringspunkt: $f(0) = 2 \cdot \mathrm{e}^0 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

Tangentens hældning: $f'(0) = 2 \cdot \mathrm{e}^0 = 2$

Så bliver tangentens ligning:

$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$

$y - 3 = 2 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2x + 3}}$

Opgave 7

a) Det er en lineær model, og da man kender mere end to par målinger, skal der anvendes regression.
Det bemærkes, at tiden måles i antal år EFTER 2000.

$Tid := [0, 5, 10, 15]:$

$Brevmængde := [1450, 1200, 900, 450]:$

$f(x) := LinReg(Tid, Brevmængde, x):$

$f(x) = -66.\,x + 1495.00000000000$

Dvs.

$\underline{\underline{a=-66 \text{ og } b=1495}}$

b) Hældningen -66 fortæller, at
for hvert år er den årlige brevmængde sendt med post i Danmark faldet med 66 millioner

c) 100 millioner breve svarer til $y = 100$ (eller $f(x) = 100$):

$f(x) < 100 \xrightarrow{\text{solve}} \{21.13636364 < x\}$

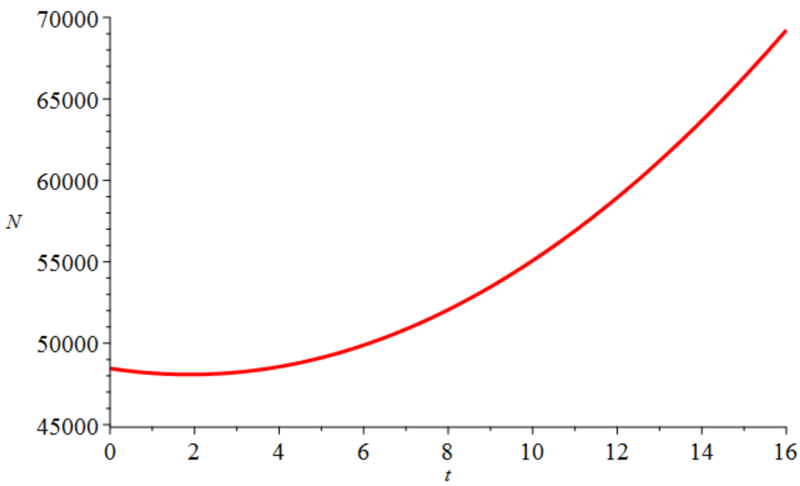
Dvs. ifølge modellen kommer man under 100 millioner breve om året i **år 2022**
(år 2021 accepteres nok også).

Opgave 8

$N(t) := 106 \cdot t^2 - 398 \cdot t + 48456:$

a) Da modellen er defineret for $t \geq 0$, skal grafen begynde her. Da grafen er en parabel, skal man desuden have nok af den med til, at man kan se, hvor befolkningstallet vender.
Bemærk, at andenaksen ikke begynder ved 0.

$plot(N(t), t=0..16, N=45000..70000, color=red, thickness=3)$



År 2018 svarer til $t = 7$:

$N(7) = 50864$

Dvs. ifølge modellen er befolkningstallet på Færøerne i 2018 på $\underline{\underline{50864}}$

b) Årstallet med det mindste befolkningstal kan enten bestemmes ved hjælp af toppunktsformlen for en parabel (funktionsudtrykket er et andengradspolynomium), eller man kan anvende den afledede funktions nulpunkt. Da grafen er en parabel med grenene opad, ved man, at der er netop ét nulpunkt for den afledede funktion, og dette er funktionens minimumssted:

$N'(t) = 0. \xrightarrow{\text{solve}} \{t = 1.877358491\}$

Dvs. **befolkningstallet var mindst i 2013**

(egentlig skal man undersøge både 2012 og 2013: $N(1) = 48164 \quad N(2) = 48084$)

c) År 2015 svarer til $t = 4$. Væksthastigheden er værdien for den afledede funktion:

$N'(4) = 450$

Dvs. at **i 2015 voksede den færøske befolkning med 450 personer om året.**

Opgave 9

$DAB := 34.5 : ABD := 141 : DBC := 10 : AB := 3 : CD := 7 :$

a) Først bestemmes den sidste vinkel i trekant ABD:

$ADB := 180 - DAB - ABD = 4.5$

Nu kan sinusrelationerne benyttes til at bestemme en sidelængde, da man har et vinkel-side-par ($\angle ADB$ og AB):

$$BD := solve\left(\frac{BD}{Sin(34.5)} = \frac{AB}{Sin(ADB)}\right) = 21.65738332$$

Dvs. $\underline{\underline{|BD| = 21.7 \text{ km}}}$

b) I trekant BCD kender man nu to sider og en vinkel, og den søgte vinkel kan så bestemmes ved en sinusrelation, hvor man benytter informationen om, at den søgte vinkel er stump:

$$intervalsolve\left(\frac{Sin(DBC)}{7} = \frac{Sin(BCD)}{BD}, BCD = 90..180\right) = [147.5032231]$$

Dvs. $\underline{\underline{\angle BCD = 147.5°}}$

Opgave 10

$f(x) := x^3 + 1 :$

a) Maple kan beregne det bestemte integral:

$$\int_1^3 f(x)\,dx = 22$$

Men kan kan også regne i hånden:

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 (x^3+1)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x\right]_1^3 = \left(\frac{1}{4}\cdot 3^4 + 3\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot 1 + 1\right) = \frac{81}{4} + 3 - \frac{1}{4} - 1 = \frac{80}{4} + 2 = 20 + 2 = \underline{\underline{22}}$$

b) Først bestemmes den form, som samtlige stamfunktioner er på:

$$F_k(x) = \int f(x)\,dx = \frac{1}{4}x^4 + x + k$$

Da grafen skal gå gennem punktet $P(2, 4)$, har man:

$$4 = \frac{1}{4}\cdot 2^4 + 2 + k \Leftrightarrow 4 = \frac{16}{4} + 2 + k \Leftrightarrow 4 = 4 + 2 + k \Leftrightarrow k = -2$$

Hermed er den søgte stamfunktion:

$$\underline{\underline{F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x - 2}}$$

Opgave 11

a) Der laves en matrix med værdierne:

$$M := \begin{bmatrix} 0\,..2 & 514 \\ 2\,..3 & 3311 \\ 3\,..3.5 & 8411 \\ 3.5\,..4 & 10098 \\ 4\,..4.5 & 4525 \\ 4.5\,..6 & 1003 \end{bmatrix}:$$

Maple kan både finde frekvenserne og de kumulerede frekvenser, hvor man adderer frekvenserne op til og med det pågældende interval:

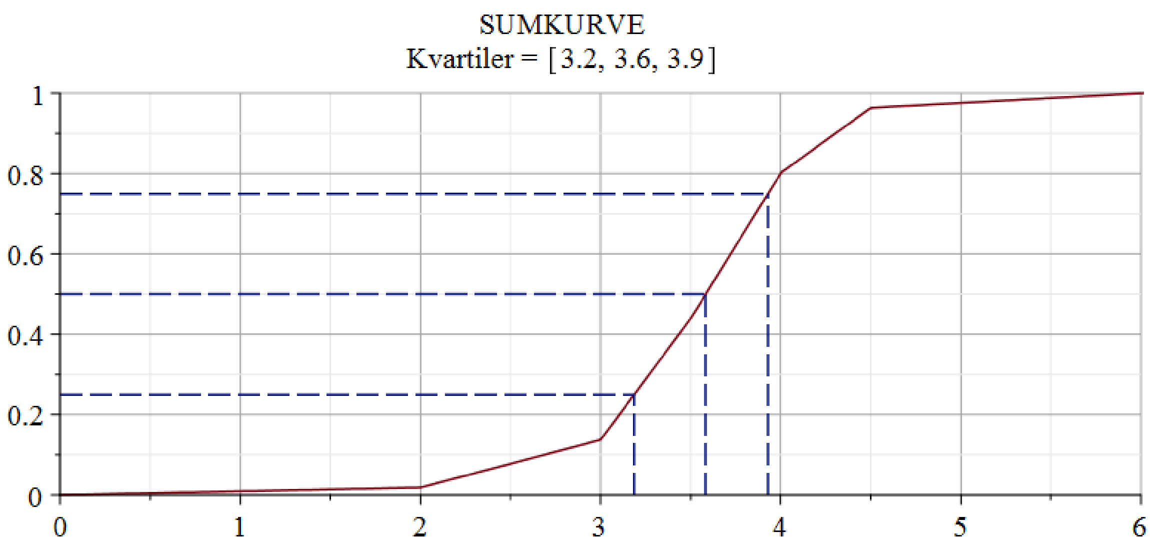
frekvensTabel(M)

observation	hyppighed	frekvens(%)	kumuleret(%)
0 .. 2	514	1.845	1.84
2 .. 3	3311	11.88	13.7
3 .. 3.5	8411	30.19	43.9
3.5 .. 4	10098	36.24	80.2
4 .. 4.5	4525	16.24	96.4
4.5 .. 6	1003	3.6	100

F.eks. er tallet 80,2% for intervallet]3,5 ; 4] fremkommet ved $1.845 + 11.88 + 30.19 + 36.24 = 80.155$

Maple kan også tegne sumkurven:

plotSumkurve(M)



b) På sumkurven er allerede angivet medianen (3,6), men den kan også findes ved en kommando:

median(M) $= 3.5839$

Dvs. **medianen er 3,584 kg**

Middelværdien bestemmes også med en kommando:

middel(M) $= 3.53498492570526$

Dvs. **middelværdien er 3,535 kg**

Opgave 12

$f(x) := x \cdot e^{-x}$:

a) Monotoniforholdene bestemmes ved først at finde de steder, hvor den afledede funktion er 0, samt med fortegnet for den anden afledede at afgøre, om der er tale om minimum eller maksimum:

$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 1\}$

$f''(1) = -e^{-1} < 0$ dvs. lokalt maksimum

Dvs. ***f*** **er voksende i intervallet]-∞,1] og aftagende i intervallet [1,∞[**

b) $g(x) := x \cdot e^{-a \cdot x}$:

Man skal bestemme a, således at den afledede funktion giver 0, når x er 2:

$solve(g'(2) = 0, a) = \frac{1}{2}$

Det tjekkes med den anden afledede, at der er tale om et maksimum:

$a := \frac{1}{2}$:

$g''(2) = -\frac{e^{-1}}{2} < 0$ dvs. lokalt maksimum

Dvs. $\underline{\underline{a = \frac{1}{2}}}$

15. august 2018: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: Da trekanterne er ensvinklede, er forholdene mellem korresponderende sider ens:

$$\frac{|DE|}{|AB|}=\frac{|DF|}{|AC|} \Leftrightarrow |DE|=\frac{|DF|}{|AC|}\cdot|AB|$$

$$|DE|=\frac{10}{5}\cdot 3=2\cdot 3=\underline{\underline{6}}$$

$$\frac{|BC|}{|EF|}=\frac{|AC|}{|DF|} \Leftrightarrow |BC|=\frac{|AC|}{|DF|}\cdot|EF|$$

$$|BC|=\frac{5}{10}\cdot 14=\frac{70}{10}=\underline{\underline{7}}$$

Opgave 2: Da antallet af tilmeldte vokser med en fast størrelse (i gennemsnit), er der tale om en lineær model.
t: Angiver tiden målt i antal år efter 2006.
N: Angiver antallet af tilmeldte til Donorregistret.
Hermed bliver modellen:

$$\underline{\underline{N(t)=59500\cdot t+321522}}$$

Opgave 3: Udtrykket reducéres ved bl.a. at anvende første kvadratsætning på sidste led:

$$2b^2-a^2+(a+b)^2=2b^2-a^2+a^2+b^2+2ab=\underline{\underline{3b^2+2ab}}=b\cdot(3b+2a)$$

Opgave 4: $f(x)=x^3-5x^2+8x+1 \quad P(1,f(1))$

For at kunne bestemme en ligning for tangenten til grafen for *f* i *P*, skal man kende andenkoordinaten for *P* og tangentens hældning.
Andenkoordinaten:

$$f(1)=1^3-5\cdot 1^2+8\cdot 1+1=1-5+8+1=5$$

Tangentens hældning:

$$f'(x)=3x^2-10x+8$$

$$f'(1)=3\cdot 1^2-10\cdot 1+8=3-10+8=1$$

Dvs. tangentens ligning er:

$$y-y_0=a\cdot(x-x_0)$$

$$y-5=1\cdot(x-1) \Leftrightarrow \underline{\underline{y=x+4}}$$

Opgave 5: Det bestemte integral bestemmes ved at finde en stamfunktion og indsætte grænser:

$$\int_0^2 (6x^2+1)dx=\left[2x^3+x\right]_0^2=(2\cdot 2^3+2)-(2\cdot 0^3-0)=2\cdot 8+2=\underline{\underline{18}}$$

Opgave 6: $f(x)=x^2-3x+3$

$$d=b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 3=9-12=\underline{\underline{-3}}$$

Da diskriminanten er negativ, skærer grafen for *f* ikke førsteaksen. Da koefficienten på førstegradsleddet er negativ (-3), er hældningen for tangenten til grafen for *f* i skæringspunktet med andenaksen negativ, dvs. **det er C, der er grafen for *f*.**

15. august 2018: Delprøven MED hjælpemidler

Opgaverne løses med Maple.

Opgave 7:

restart

with(*Gym*) :

a) Det er oplyst, at forskriften er $f(x) = b \cdot a^x$, så der skal anvendes eksponentiel regression.
Det bemærkes, at tidspunktet skal måles i antal år EFTER 2012:

$tid := [0, 1, 2, 3, 4]$:

$Antal := [49, 81, 122, 275, 481]$:

$f(x) := ExpReg(tid, Antal, x)$:

$f(x) = 45.5359714895805\ 1.78432749135860^x$

Dvs.

$\underline{\underline{b = 45.5 \text{ og } a = 1.784}}$

b) Når antallet af artikler skal overstige 1500, skal $f(x) > 1500$:

$f(x) > 1500 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[6.035348513 < x]]$

Dvs antallet af videnskabelige artikler vil i **år 2019** overstige 1500 (7 år efter 2012).

c) Fremskrivningsfaktoren a fortæller, at **antallet af artikler vokser med 78% om året.**

Opgave 8:

restart

with(*Gym*) :

a) Der er 15 personer, så medianen er den 8. observation (den midterste) i den ordnede opskrivning:

0, 0, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 10, 13

Så medianen aflæses til 6 (rødt tal).

Nedre og øvre kvartil er medianen blandt de 7 tal, der udgør henholdsvis den nedre og den øvre halvdel af sættet.

Nedre kvartil aflæses til 3 (violet tal)

Øvre kvartil aflæses til 7 (violet tal).

Hermed er kvartilsættet $\underline{\underline{(3, 6, 7)}}$

Sammen med kvartilsættet anvendes mindste og største observation (0 og 13) til boksplottet (medianen gentages for at få Maple til at tegne det korrekte boksplot):

boksplot([0, 3, 6, 6, 7, 13])

Kvartiler = [3., 6., 7.]

Opgave 9:

restart

with(*Gym*) :

a) Nulhypotesen er: **Den eksperimentelle fordeling følger den forventede fordeling.**

Hermed kan de forventede værdier beregnes ud fra procenterne og det samlede antal kast:

Sum	2	3	4	5	6	7	8
Forventet antal	$0.0625 \cdot 131 = 8.1875$	$0.125 \cdot 131 = 16.375$	$0.1875 \cdot 131 = 24.5625$	$0.25 \cdot 131 = 32.75$	$0.1875 \cdot 131 = 24.5625$	$0.125 \cdot 131 = 16.375$	$0.0625 \cdot 131 = 8.1875$

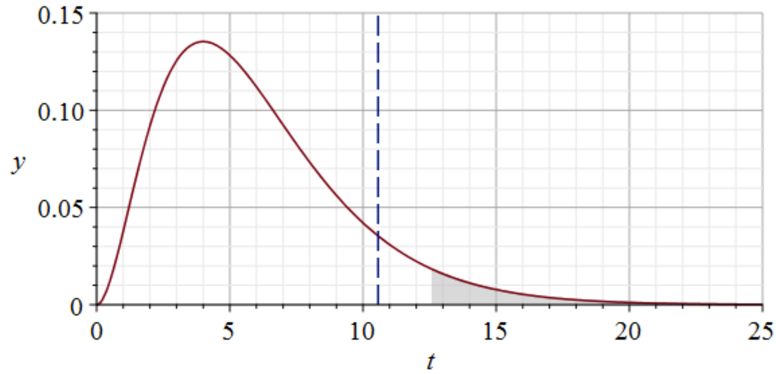
b) Der testes med chi-i-anden-GOF-test, da man skal sammenligne med en forventet fordeling:

$Forv := [8.1875, 16.375, 24.5625, 32.75, 24.5625, 16.375, 8.1875]$:

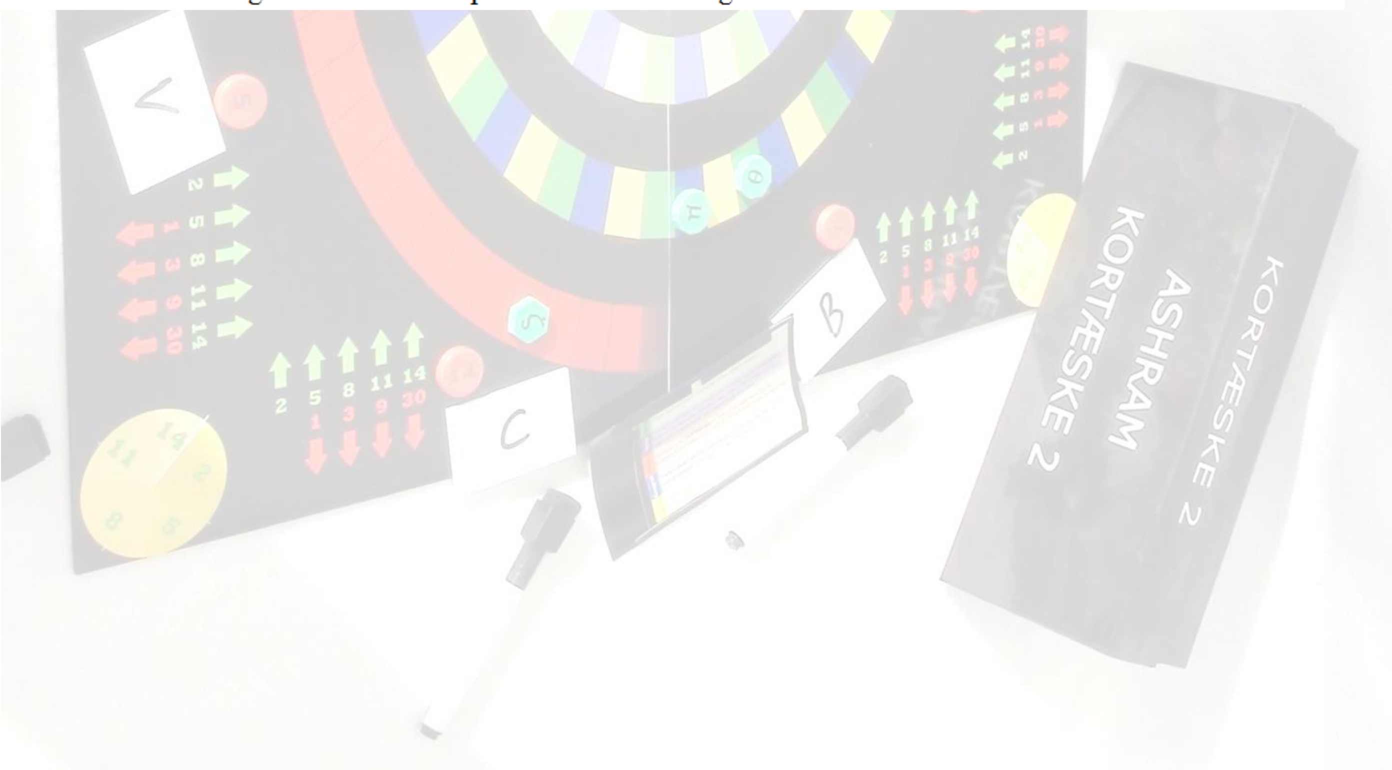
$Obs := [12, 9, 24, 39, 22, 12, 13]$:

$ChiKvadratGOFtest(Obs, Forv, level = 0.05)$

χ^2-teststørrelse = 10.567
Frihedsgrader = 6
Kritisk værdi = 12.592
p-værdi = 0.10270



Da p-værdien på 10,3% er større end signifikansniveauet på 5%, skal **nulhypotesen IKKE forkastes.**
Der er altså ikke signifikant forskel på det forventede og det observerede.



Opgave 10:

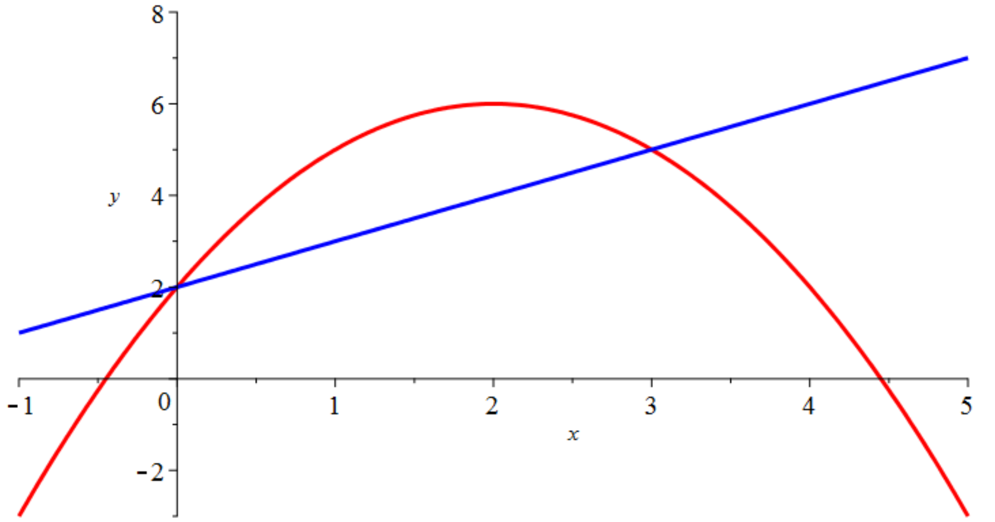
restart

with(*Gym*) :

a) $f(x) := -x^2 + 4x + 2 :$

$g(x) := x + 2 :$

$plot([f(x), g(x)], x = -1..5, y = -3..8, thickness = 3, color = [red, blue])$



Førstekoordinaten til hvert af skæringspunkterne er de steder, hvor funktionsværdierne er ens:

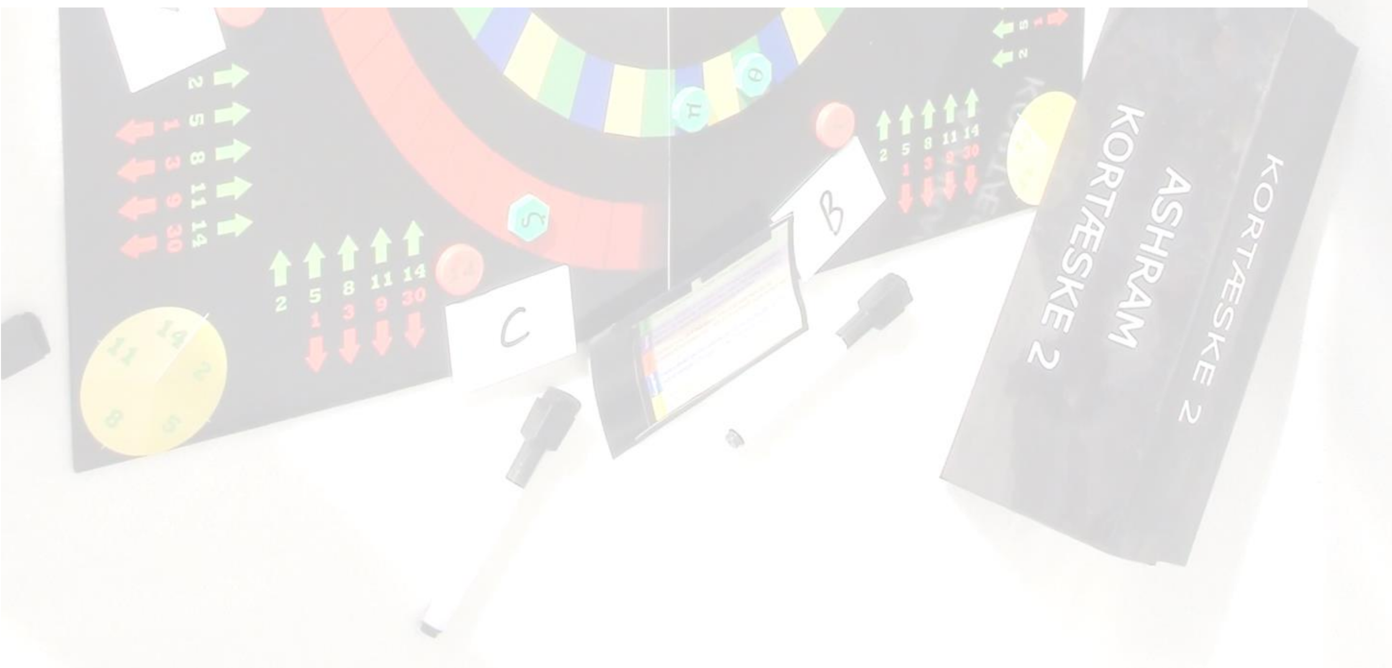
$f(x) = g(x) \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 0\}, \{x = 3\}$

Dvs. førstekoordinaterne er **0 og 3**

b) I området mellem skæringspunkterne ligger parablen (grafen for f) øverst, så arealet af M er:

$$A_M = \int_0^3 (f(x) - g(x))\,dx = \frac{9}{2}$$

Dvs. $\underline{\underline{A_M = \frac{9}{2}}}$



Opgave 11:
restart
with(*Gym*) :
a) I den retvinklede trekant ACD kender man vinklen C og den hosliggende katete:
$C := 60 : CD := 8 :$
Da det er hypotenusen i trekant ACD, der skal findes, og da man har den hosliggende katete, anvendes cosinus:
$Cos(C) = \frac{CD}{AC} \xrightarrow{\text{solve for AC}} [[AC = 16.]]$
Dvs. $\underline{\underline{|AC| = 16}}$

b) I trekant ABC kender man vinkel C og den ene hosliggende side. Den anden hosliggende side kan bestemmes ved at regne på den retvinklede trekant BCD, hvorefter arealet kan bestemmes med ½-appelsinformlen.
$\cos(BCD) = \frac{|CD|}{|BC|}$
$Cos(32) = \frac{8}{BC} \xrightarrow{\text{solve for BC}} [[BC = 9.433427228]]$
Så arealet er:
$T = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \sin(ACB) = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 9.433427228 \cdot Sin(28) = 35.42980660$
Dvs. $\underline{\underline{T_{ABC} = 35.4}}$

Opgave 12:
restart
with(*Gym*) :
a) $A(n) := 500 \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$:
Den månedlige rentefod fastsættes: $r := 0.001$:
Hermed er beløbet lige efter den 20. indbetaling:
$A(20) = 10095.57250$
Dvs. **10095,57 kr**

b) *unassign*('*r*')
Hvis beløbet skal være 10500 kr. lige efter 20. indbetaling, har man:
$fsolve(10500 = A(20), r) = 0.005103441673$
Der anvendes 'fsolve' for at undgå at få 20 løsninger.
Dvs. den månedlige rentefod skal være **0,51%**

Opgave 13:

restart

with(*Gym*) :

a) $f(x) := \frac{1}{x} + x - 1$:

For at bestemme monotoniforhold findes først de steder, hvor den første afledede er 0:

$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 1\}, \{x = -1\}$

Den negative løsning er uden for definitionsmængden, så det er kun 1, der bruges. Her bestemmes værdien af den anden afledede for at afgøre, hvad det er for et sted:

$f''(1) = 2 \quad > 0$ dvs. lokalt minimumssted.

Altså er **f aftagende i intervallet]0,1] og voksende i intervallet [1,∞[**

b) Når tangentens hældning skal være -2, betyder det, at differentialkvotienten i stedet er -2, dvs:

$f'(x) = -2 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{x = \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}, \left\{x = -\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

Igen ligger den negative løsning uden for definitionsmængden. Løsningen svarer til førstekoordinaten for skæringspunktet, og andenkoordinaten findes ved indsættelse i funktionsforskriften:

$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{3} - 1$

Dvs. røringspunktet er $\underline{\underline{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right)}}$

7. december 2018: Delprøven UDEN hjælpemidler

Opgave 1: På højresiden ganges ind i parentesen, og derefter isoleres x:

$$4x+8=2\cdot(x+3) \Leftrightarrow 4x+8=2x+6 \Leftrightarrow 4x-2x=6-8 \Leftrightarrow 2x=-2 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=-1}}$$

Opgave 2: t angiver tiden målt i antal år efter 2010.
O angiver virksomhedens omsætning målt i mio. kr.
Da omsætningen er vokset med en fast procentdel om året, er der tale om en eksponentiel udvikling. Vækstraten er 3%, så fremskrivningsfaktoren er 1,03. Da virksomhedens omsætning i 2010 var 5 mio. kr., er begyndelsesværdien 5:

$$\underline{\underline{O(t)=5\cdot 1{,}03^t}}$$

Opgave 3: $f(x)=\frac{4}{x}+x+\frac{5}{2} \qquad P(8,11)$

Punktet ligger på grafen, netop hvis man får en identitet, når man indsætter punktets koordinater i forskriften:

$$11=\frac{4}{8}+8+\frac{5}{2} \Leftrightarrow 11=\frac{1}{2}+8+\frac{5}{2} \Leftrightarrow 11=8+\frac{1+5}{2} \Leftrightarrow 11=8+3 \Leftrightarrow 11=11$$

Da man får en identitet, **ligger punktet *P* på grafen for *f*.**

Opgave 4: $f(x)=2x^2-8x+5$

Først beregnes diskriminanten for den tilsvarende andengradsligning:

$$d=b^2-4ac=(-8)^2-4\cdot 2\cdot 5=64-40=24$$

Toppunktets koordinatsæt bestemmes derefter ved indsættelse i toppunktsformlen:

$$T\left(-\frac{b}{2a},-\frac{d}{4a}\right)=T\left(-\frac{-8}{2\cdot 2},-\frac{24}{4\cdot 2}\right)=\underline{\underline{T(2,-3)}}$$

Opgave 5: $f(x)=4x^3-6x^2+1 \qquad P(2,10)$

Først bestemmes familien af stamfunktioner:

$$F_k(x)=\int f(x)\,dx=x^4-2x^3+x+k$$

Konstanten k bestemmes ved at udnytte, at grafen skal gå gennem punktet P:

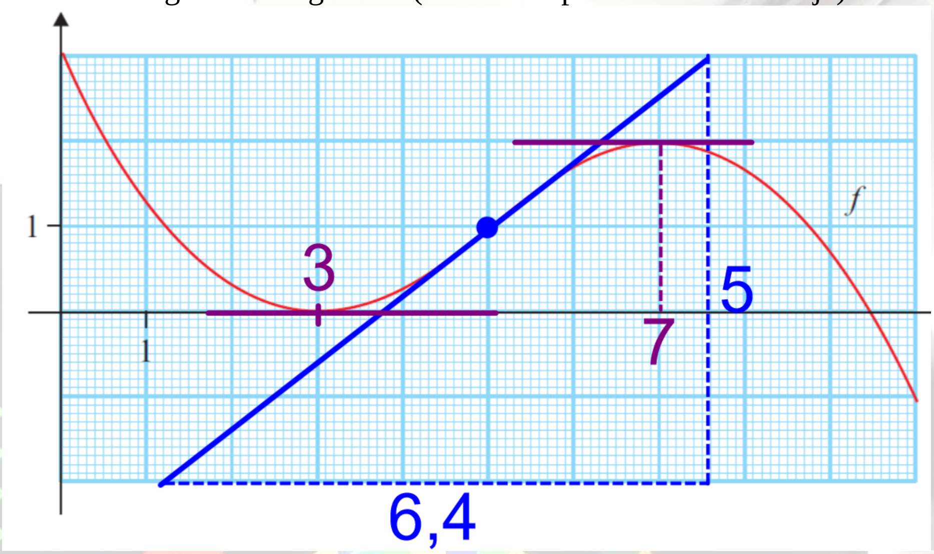
$$10=2^4-2\cdot 2^3+2+k \Leftrightarrow 10=16-16+2+k \Leftrightarrow k=8$$

Dvs. den søgte stamfunktion har forskriften:

$$\underline{\underline{F(x)=x^4-2x^3+x+8}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>Opgave 6:</u> Efter bedste evne tegnes en tangent i 5 (den fuldt optrukne blå rette linje):



Da differentialkvotienten i punkter angiver tangenthældninger, har man:

$$f'(5)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{5}{6,4}=\frac{50}{64}=\underline{\underline{\frac{25}{32}}}$$

At løse ligningen $f'(x)=0$ svarer til at finde de steder, hvor der er vandret tangent, hvilket er angivet med violet på ovenstående figur. Dvs. man har:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=3 \quad \vee \quad x=7}}$$

7. december 2018: Delprøven MED hjælpemidler

Opgave 7:
restart
with(*Gym*) :
a) Da man kender værdier for mere end to årstal, skal der anvendes regression, og det er oplyst, at det er en lineær model $(f(x) = a \cdot x + b)$.
Det bemærkes desuden, at tidspunktet angives i antal år EFTER 2010.
tidspunkt := [0, 3, 4, 5] :
Elproduktion := [28114, 40044, 47083, 50879] :
$f(x)$:= *LinReg*(*tidspunkt*, *Elproduktion*, x) :
$f(x) = 4607.07142857142\,x + 27708.7857142857$
Dvs.
$\underline{\underline{a = 4607}}$ og $\underline{\underline{b = 27709}}$

b) Hældningskoefficienten a fortæller, at
elproduktionen fra danske vindkraftanlæg øges med 4607 TJ om året.

c) År 2016 svarer til $x = 6$:
$f(6) = 55351.2142857143$
Dvs. i år 2016 var den årlige elproduktion fra danske vindkraftanlæg på $\underline{\underline{55351 \text{ TJ}}}$

Opgave 8
restart
with(*Gym*) :
a) Aldersfordelingen gemmes i en matrix:

$$M := \begin{bmatrix} 0..30 & 20 \\ 30..40 & 35 \\ 40..50 & 25 \\ 50..60 & 50 \\ 60..70 & 10 \end{bmatrix} :$$

frekvensTabel(*M*)

observation	hyppighed	frekvens(%)	kumuleret(%)
0 .. 30	20	14.29	14.3
30 .. 40	35	25	39.3
40 .. 50	25	17.86	57.1
50 .. 60	50	35.71	92.9
60 .. 70	10	7.143	100

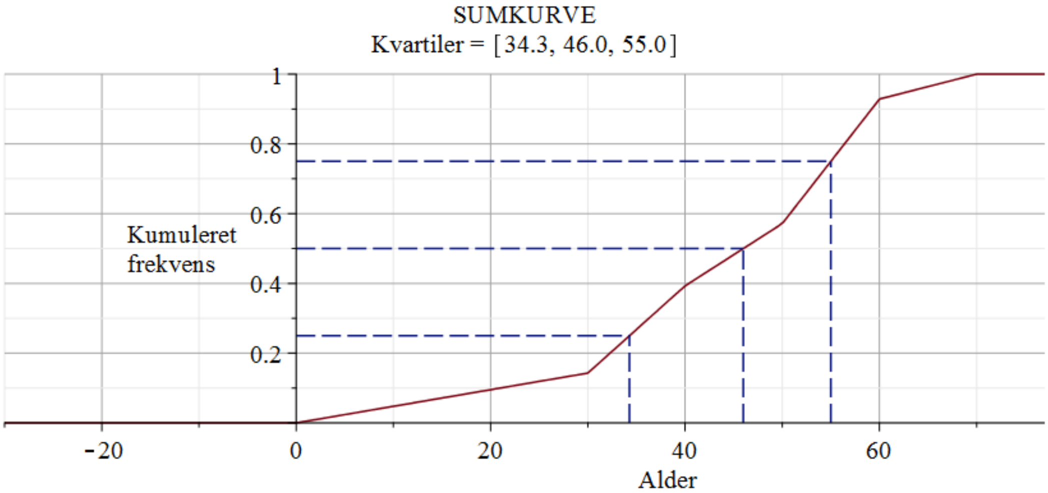
Antallet af medarbejdere i virksomhedern er $20 + 35 + 25 + 50 + 10 = 140$

Frekvenserne beregnes som hyppigheden divideret med det samlede antal, f.eks.]0,30]: $\dfrac{20}{140.} = 0.1428571429$

Den kumulerede frekvens beregnes som summen af frekvenserne op til og med det pågældende interval, f.eks.:]40,50]: $14.29 + 25 + 17.86 = 57.15$

Sumkurven tegnes med en Gym-kommando:

$plotSumkurve(M)$



b) Kvartilsættet er beregnet i forbindelse med sumkurven, og det er $\underline{\underline{(34.3,\ 46.0,\ 55.0)}}$

For at kunne bestemme procentdelen af medarbejdede over 57 år, skal man kunne arbejde med sumkurven som funktion.
$S(x) := sumkurve(M, x)$:
Sumkurven angiver procentdelen **til og med** den pågældende alder, men man skal finde procentdelen **over** 57 år, dvs.
$1 - S(57) = 0.178571428571429$
Dvs. $\underline{\underline{18\ \%}}$ af medarbejderne er over 57 år.

Opgave 9
restart
$with(Gym)$:

a) $S(x) := 0.0583 \cdot x^{1.09}$:
En skeletvægt på 8 kg svarer til $S(x) = 8$.
$S(x) = 8 \xrightarrow{\text{solve}} 91.39808446$
Dvs. kropsvægten er $\underline{\underline{91\text{kg}}}$

b) Først bestemmes skeletvægten af et dyr på 800 kg:
$S(800) = 85.12098502$
Skeletvægtens del af kropsvægten er så:
$$\frac{85.12098502}{800} = 0.1064012313$$
Dvs. skeletvægten udgør $\underline{\underline{10.6\ \%}}$ af kropsvægten.

Opgave 10

restart

with(*Gym*) :

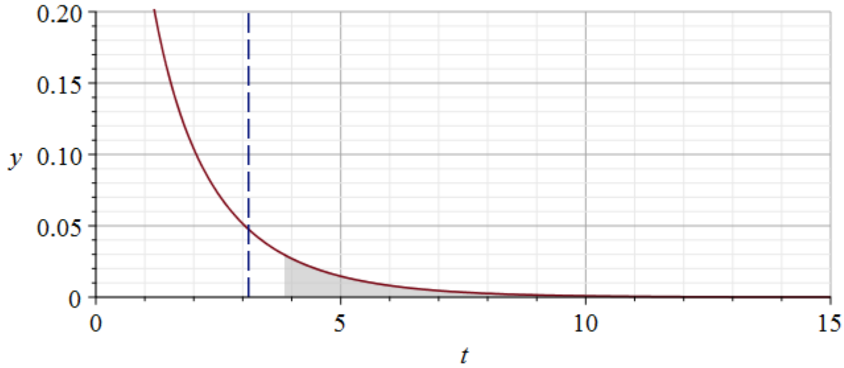
a) Nulhypotesen er, at **musenes overlevelse er uafhængig af, om de bliver udsat for stress eller ej.**

Nulhypotesen undersøges med et χ^2-uafhængighedstest.

$$M := \begin{bmatrix} 21 & 30 \\ 31 & 22 \end{bmatrix} :$$

ChiKvadratUtest(*M*, *level* = 0.05)

χ^2-teststørrelse = 3.1165
Frihedsgrader = 1
Kritisk værdi = 3.8415
p-værdi = 0.077501



Da p-værdien på 7,8% er større end signifikansniveauet på 5%, skal **nulhypotesen IKKE forkastes.**
Der er ikke signifikans forskel på de to gruppers overlevelsesrate.

Opgave 11

restart

with(*Gym*) :

a) $AB := 7 : AC := 8 : T := 14 :$

Da man kender længden af de to hosliggende sider til vinkel A samt arealet af trekanten, kan man bestemme vinkel A med ½-appelsinformlen. Det udnyttes, at det er oplyst, at vinkel A er spids.

$$intervalsolve\left(T = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot Sin(A), A = 0..90\right) = [30.00000000]$$

Dvs. $\underline{\underline{\angle A = 30°}}$

$A := 30 :$

For at kunne bestemme omkredsen skal man kende længden af den sidste side, og den kan bestemmes med en cosinusrelation:

$$Cos(A) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \xrightarrow{\text{solve}} \{BC = 4.000644292\}, \{BC = -4.000644292\}$$

Da det er en sidelængde forkastes den negative løsning.

Omkredsen kan så beregnes:

$O = AB + AC + BC = 7 + 8 + 4.000644292 = 19.00064429$

Dvs. $\underline{\underline{O = 19}}$

Opgave 12

$f(x) := (x^2 - 2x + 1) \cdot e^{-x}$:

a) Ligningen for tangenten i punktet $P(0, f(0))$ bestemmes ved at indsætte i ligningen for en ret linje ud fra punkt og hældning $y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$.

$y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) = y - 1 = -3x$

Dvs. tangentens ligning er:

$\underline{\underline{y = -3x + 1}}$

b) Monotoniforholdene bestemmes ved først at finde de steder, hvor den afledede funktion er nul:

$solve(f'(x) = 0, x) = 3, 1$

Fortegnet for den anden afledede bestemmes disse steder.

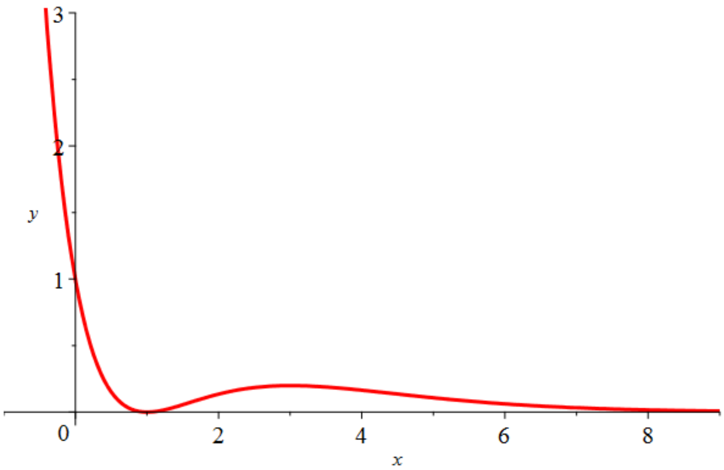
$f''(1) = 2e^{-1} > 0$ dvs. lokalt minimumssted

$f''(3) = -2e^{-3} < 0$ dvs. lokalt maksimumssted

Altså er ***f* aftagende i intervallerne]-∞,1] og [3,∞[og voksende i intervallet [1,3].**

c) Der laves et plot af grafen for f:

$plot(f(x), x = -1..9, y = -0.1..3, thickness = 3, color = red)$



Så bestemmes det bestemte integral:

$\int_2^5 f(x)\,dx = 5e^{-2} - 26e^{-5} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 0.5014897940$

Da grafen for f ligger over førsteaksen i området (der er kun ét nulpunkt, nemlig $x = 1$), fortæller dette tal, at **arealet af den punktmængde, der afgrænses af grafen, førsteaksen og linjerne med ligningerne $x = 2$ og $x = 5$ er 0,5015.**

Opgave 13

restart

with(*Gym*) :

$AF := 4 : AB := 10 :$

a) Da trekant ACF er retvinklet, kan længden af siden CF bestemmes med Pythagoras' Læresætning:

$|CF|^2 = |AF|^2 + |AC|^2$

$|CF| = \sqrt{4^2 + x^2} = \sqrt{16 + x^2}$

Desuden har man:

$|BC| = |AB| - |AC| = 10 - x$

Da man måler prisen i tusinde kr., svarer 80.000 kr og 50.000 kr. til henholdsvis 80 og 50.

Disse priser ganges på strækningerne (målt i km) for at få den samlede pris:

$P(x) = 80 \cdot |CF| + 50 \cdot |BC|$

$\boldsymbol{P(x) := 80 \cdot \sqrt{16 + x^2} + 50 \cdot (10 - x)} = x \rightarrow 80\sqrt{16 + x^2} + 500 - 50\,x$

b) Prisen skal være mindst mulig, dvs. man søger et ekstremumssted, dvs. et sted hvor den afledede funktion er 0:

intervalsolve$(P'(x) = 0., x = 0..10) = [3.202563076]$

Med fortegnet for den anden afledede undersøges det, om der er tale om lokalt maksimum eller minimum:

$P''(3.202563076) = 9.513864131 > 0$ dvs. lokalt minimumssted

Da der ikke er andre lokale ekstremumssteder i intervallet, bliver den samlede pris mindst mulig, når $\underline{\underline{x = 3.2\text{km}}}$