Løsninger til eksamensopgaver på B-niveau 2022

20. maj 2022: Delprøve 1

20. maj 2022 Opgave 1: $f(x) = 5x^2 + 3$

a) Den afledede bestemmes ved at differentiere ledvist:

$$f'(x) = 5 \cdot 2x + 0 = \underline{\underline{10x}}$$

20. maj 2022 Opgave 2: a) Da sandsynlighederne skal summere til 100%, har man:

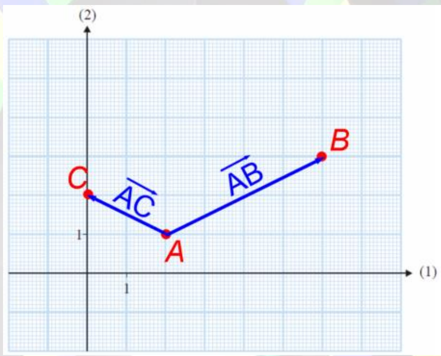
$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + P(X = x_4) = 100\% \quad \Leftrightarrow$$

$$20\% + P(X = x_2) + 10\% + 30\% = 100\% \quad \Leftrightarrow \quad P(X = x_2) = 40\%$$

Dvs. $\underline{\underline{p = 40}}$

20. maj 2022 Opgave 3: a) $6 \cdot (T-2) = M \quad \Leftrightarrow \quad (T-2) = \frac{M}{6} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{T = \frac{M}{6} + 2}}$

20. maj 2022 Opgave 4: a) $A(2,1)$, $B(6,3)$, $C(0,2)$



b) En linje parallel med vektoren $\overrightarrow{AB}$ har hældningen $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{6-2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Da linjen *l* går gennem punktet *C*, kan en ligning for den bestemmes ved:

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

$$y - 2 = \frac{1}{2} \cdot (x - 0) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = \frac{1}{2} \cdot x + 2}}$$

20. maj 2022 Opgave 5: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

a) Da grenene på parablen vender opad, er $\underline{\underline{a > 0}}$

Da parablen skærer andenaksen på den positive del, er $\underline{\underline{c > 0}}$

b) Førstekoordinaten for parablens toppunkt ligger midt mellem de to nulpunkter, og da det ene nulpunkt ligger 2 enheder til venstre for 3, må det andet nulpunkt ligge 2 enheder til højre for 3, dvs. $\underline{\underline{x = 5}}$

20. maj 2022 Opgave 6: a) Arealet af det grønne område bestemmes ved at trække arealerne af de tre orange områder fra arealet af det grønne kvadrat, hvor man har set bort fra de orange områder:

$$A(x) = A_{grønt\ kvadrat} - 2 \cdot A_{orange\ kvadrat} - A_{orange\ rektangel} = 12 \cdot 12 - 2 \cdot x \cdot x - 4x \cdot \frac{1}{2} x = 144 - 2x^2 - 2x^2 = \underline{\underline{144 - 4x^2}}$$

20. maj 2022: Delprøve 2

20. maj 2022 Opgave 7:

$f(x) = b \cdot a^x$

f er børnedødeligheden i Bangladesh målt i antal dødsfald for børn under 5 år pr. tusinde levendefødte.
x er antal år efter 2000.

a) Data hentes ind i Maple med Tools-Assistants-Import Data (cellerne A2:B21).

$$Bangladesh := \begin{bmatrix} 0. & 87.0 \\ 1.0 & 82.0 \\ 2.0 & 77.0 \\ 3.0 & 73.0 \\ 4.0 & 69.0 \\ 5.0 & 65.0 \\ 6.0 & 61.0 \\ 7.0 & 58.0 \\ 8.0 & 55.0 \\ 9.0 & 52.0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

20 × 2 Matrix

$with(Gym):$

Der kan laves eksponentiel regression med Gym-pakkens *ExpReg*

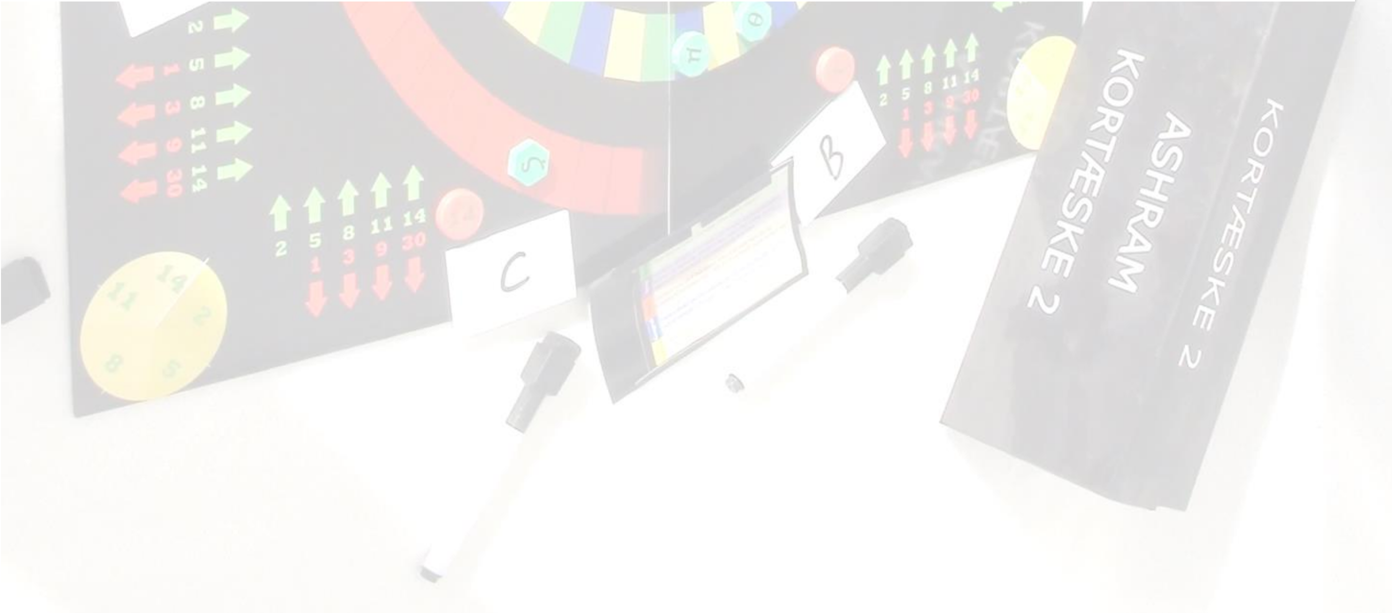
$f(x) := ExpReg(Bangladesh, x) = x \rightarrow ExpReg(Bangladesh, x)$

$f(x) = 85.5910409072237\ 0.946894001278828^x$

Dvs. $\underline{\underline{a = 0.9469}}$ og $\underline{\underline{b = 85.591}}$

b) a-værdien er fremskrivningsfaktoren, der er knyttet til vækstraten r ved $a = 1 + r$.
$r = 0.946894001278828 - 1 = -0.0531059987$
Dvs. børnedødeligheden **falder med 5,3% om året ifølge modellen.**

c) År 2030 svarer til $x = 30$:
$f(30) = 16.6521097733691 < 25$, **dvs. Bangladesh vil ifølge modellen nå FN's verdensmål for børnedødelighed.**



Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

20. maj 2022 Opgave 8:

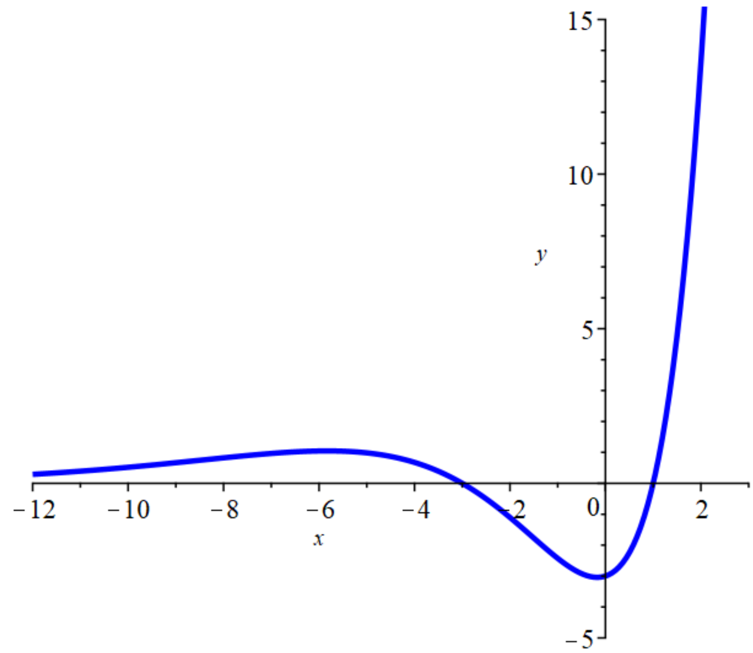
restart

with(*Gym*) :

$f(x) := \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \cdot (x^2 + 2x - 3)$:

a)

$plot(f(x), x = -12..3, y = -5..15, color = blue, thickness = 3)$



b) Nulpunkterne bestemmes ved at løse ligningen $f(x) = 0$.

$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 1\}, \{x = -3\}$

$\underline{\underline{x = -3 \lor x = 1}}$

c) Først bestemmes lokale ekstremumssteder ved at finde de steder, hvor den afledede af f er nul:

$f'(x) = 0. \xrightarrow{\text{solve}} \{x = -0.1715728752\}, \{x = -5.828427125\}$

Fortegnet for den anden afledede bestemmes disse steder:

$f''(-5.828427125) = -0.1534327695 < 0$, dvs. lokalt maksimumssted.

$f''(-0.1715728752) = 2.595902742 > 0$, dvs. lokalt minimumssted.

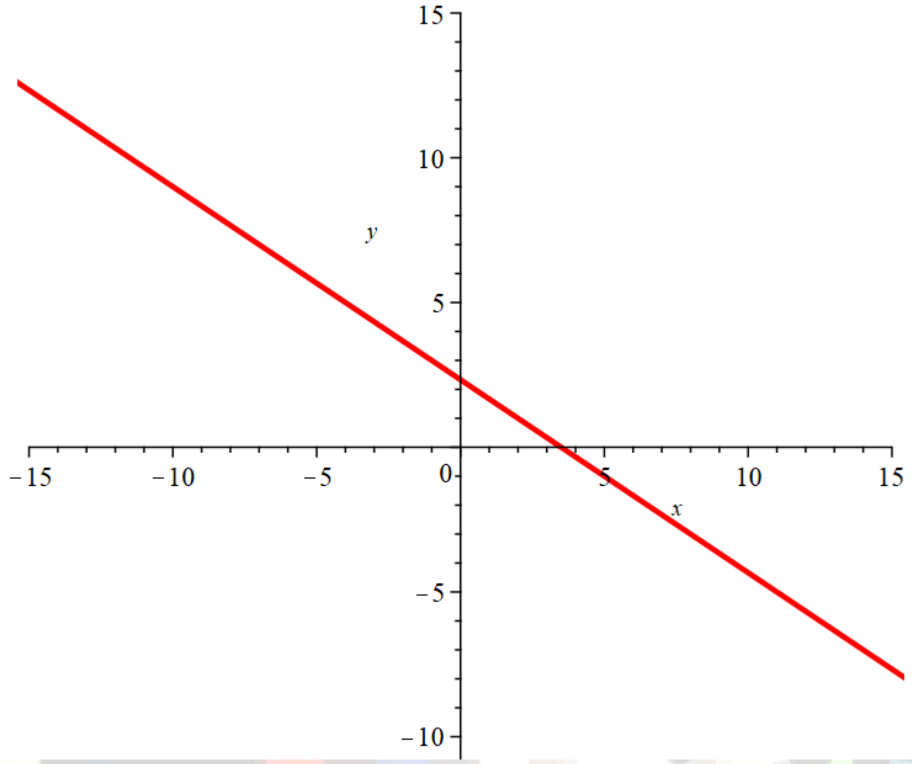
***f* er voksende i intervallet]-∞,-5.828], aftagende i [-5.828,-0.172] og voksende i [-0.172,∞[**

20. maj 2022 Opgave 9:

$l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

a) Linjen tegnes som en vektorfunktion (parameterfremstilling):

$plot([2 + 3t, 1 - 2t, t = -6..5], x = -15..15, y = -15..15, color = red, thickness = 3)$



b) $P(5, -1) \quad Q(11, 1)$

$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 11 - 5 \\ 1 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

En retningsvektor for linjen l aflæses i parameterfremstillingen $\overrightarrow{r_l} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Vinklen mellem de to vektorer bestemmes: $\cos(v) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

$Cos(v) = \dfrac{dotP(\langle 6, 2\rangle, \langle 3, -2\rangle)}{len(\langle 6, 2\rangle) \cdot len(\langle 3, -2\rangle)} \xrightarrow{\text{solve for v}} [[v = 52.12501635]]$

Dette er også den spidse vinkel mellem linjen l og $\overrightarrow{PQ}$, dvs. $\underline{\underline{v_{spids} = 52.125°}}$

20. maj 2022 Opgave 10:

a) Den estimerede sandsynlighed for en hvid bil beregnes ud fra, at 89 ud af stikprøvens 412 nye biler var hvide:

$p_{hvid} := \frac{89}{412.} = 0.2160194175$

Spredningen på denne estimerede sandsynlighed beregnes ved $s_p = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$:

$s_p := \sqrt{\frac{0.2160194175 \cdot (1 - 0.2160194175)}{412}} = 0.02027451344$

Den kritiske værdi for et 95%-konfidensinterval er 1,96 (evt. kan 2 benyttes):

$p_{hvid} - 1.96 \cdot s_p = 0.1762813712$

$p_{hvid} + 1.96 \cdot s_p = 0.2557574638$

Så 95%-konfidensintervallet er $\underline{\underline{[0.176, 0.256]}}$

Man kan også bruge en Gym-kommando:

$konfidensInterval(89, 412, 0.95) = [0.17628, 0.25576]$

b) Da 20,3% ligger i konfidensintervallet, har **andelen af hvide biler IKKE ændret sig signifikant fra 2015 til 2020.**

20. maj 2022 Opgave 11:

$f(x) := -x^3 + 6x^2 + 15x : \quad 0 \le x \le 4$

f er længden af renden målt i meter. x er arbejdstiden målt i timer.

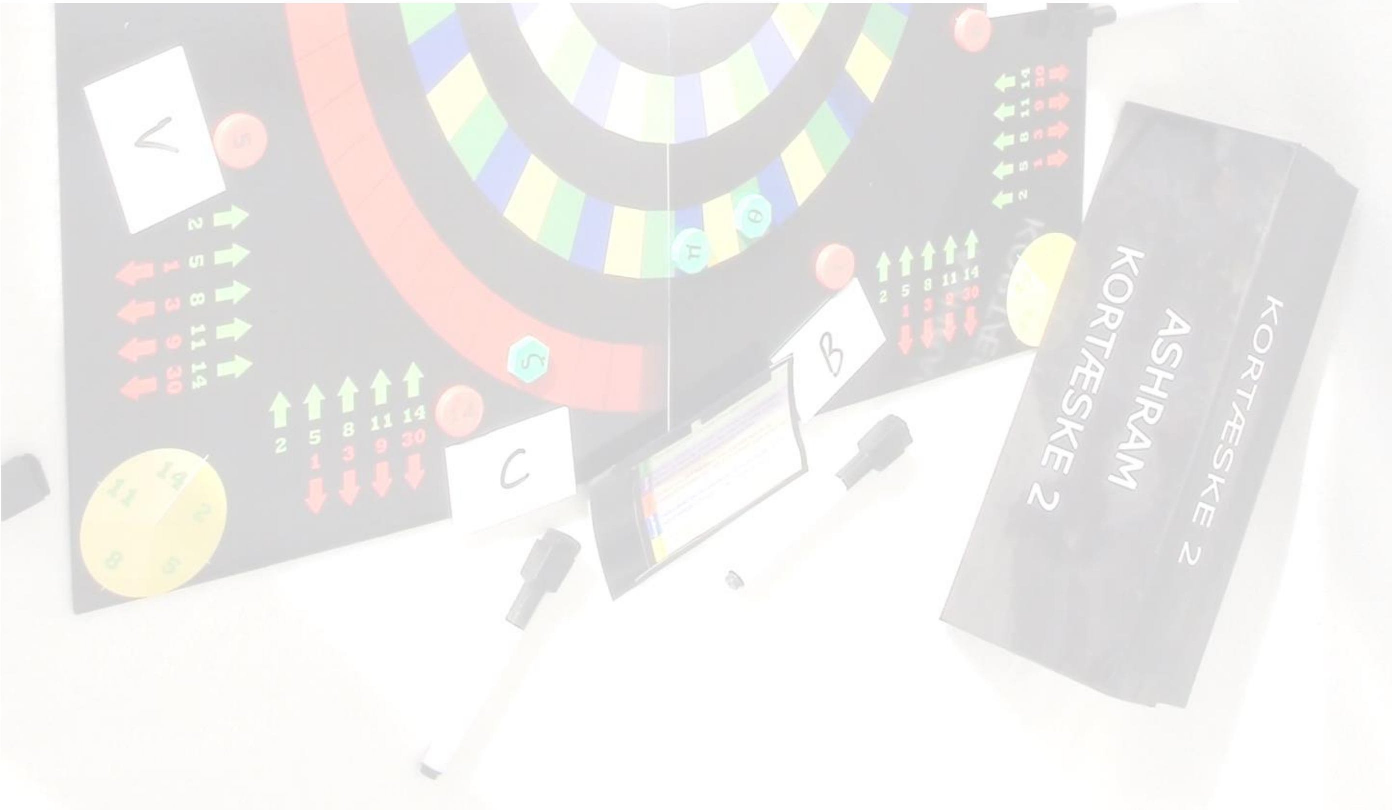
a) 2 timers arbejde svarer til $x = 2$.

$f(2) = 46$

Dvs. **efter 2 timers arbejde er renden 46 meter**

b) $f'(3) = 24$

Dvs. at **efter 3 timers arbejde øges rendens længde med hastigheden 24 meter pr. time.**



24. maj 2022: Delprøve 1

24. maj 2022 Opgave 1: $x^3 + x - 10 = 0$

a) 2 indsættes på x's plads i ligningen for at afgøre, om $x = 2$ er en løsning til ligningen:

$2^3 + 2 - 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8 + 2 - 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0$, **da dette er sandt, er $x = 2$ en løsning til ligningen**.

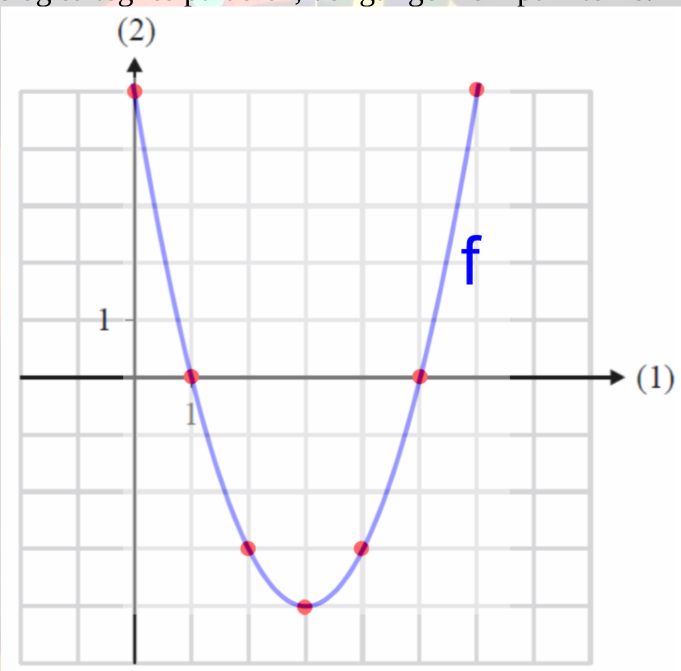
24. maj 2022 Opgave 2: $f(x) = e^x + x^3 - 4$

a) Den afledede funktion bestemmes ved at differentiere ledvist:

$f'(x) = e^x + 3x^2 + 0 = \underline{\underline{e^x + 3x^2}}$

24. maj 2022 Opgave 3: $f(x) = x^2 - 6x + 5$

a) Støttepunkterne indtegnes og så tegnes parablen, der går gennem punkterne:



b) Tabellen viser, at grafen for f går gennem $(4, -3)$.

For at kunne bestemme ligningen for tangenten skal man kende tangenthældningen:

$f'(x) = 2x - 6$

$f'(4) = 2 \cdot 4 - 6 = 8 - 6 = 2$

Så tangentens ligning bliver:

$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$

$y - (-3) = 2 \cdot (x - 4) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = 2x - 11}}$

24. maj 2022 Opgave 4:

a) $P(X \le 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}10 + 0{,}20 + 0{,}10 = \underline{\underline{0{,}40}}$

b) Da sandsynlighederne summerer til 1, har man:

$1 = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + a + P(X = 5) = 0{,}10 + 0{,}20 + 0{,}10 + a + 0{,}25 \quad \Leftrightarrow$

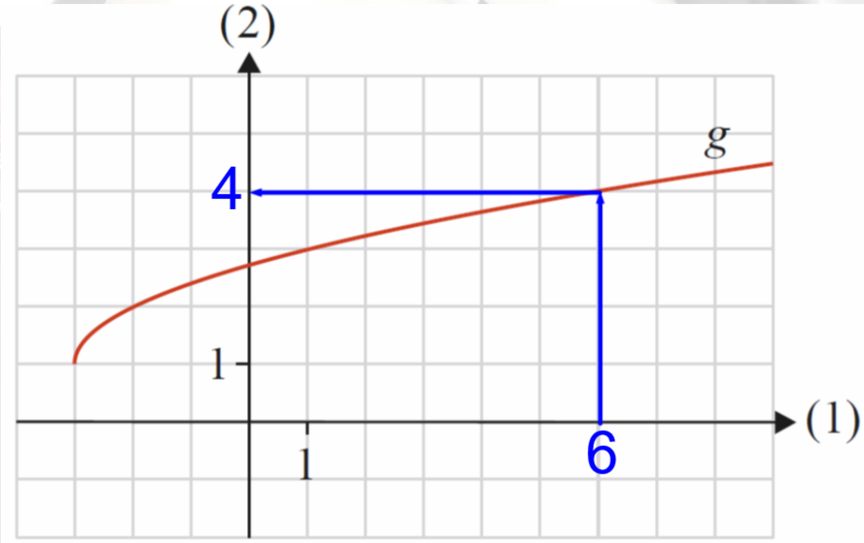
$1 = 0{,}65 + a \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{a = 0{,}35}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

24. maj 2022 Opgave 5: $f(x) = 4x + 2$

a) $f(1) = 4 \cdot 1 + 2 = 4 + 2 = \underline{\underline{6}}$

$g(f(1)) = g(6) = \underline{\underline{4}}$, hvor værdien 4 er aflæst ud fra grafen nedenfor.

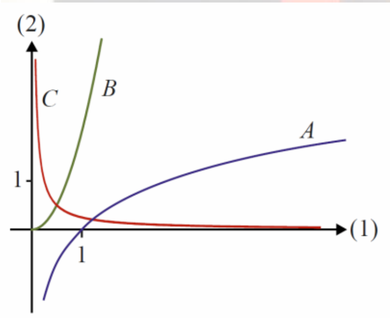


24. maj 2022 Opgave 6:

$f(x) = 2 \cdot x^2$

$g(x) = \dfrac{1}{4 \cdot x}$

$h(x) = \ln(x)$



a) Grafen *A* går gennem punktet $(1,0)$, hvilket passer med $h(1) = \ln(1) = 0$, dvs. $\underline{\underline{A \sim h}}$

$2 \cdot x^2$ er et andengradspolynomium, hvis graf er en parabel med grenene opad. Dette svarer til grafen *B*, hvor man dog kun ser den ene gren, da $x > 0$. $\underline{\underline{B \sim f}}$

Grafen for *g* er en hyperbel, og graf *C* svarer netop til den ene gren i en hyperbel, dvs. $\underline{\underline{C \sim g}}$

24. maj 2022: Delprøve 2

24. maj 2022 Opgave 7:

restart

with(*Gym*) :

$f(x) = a \cdot x + b$

f er det årlige benzinforbrug i USA målt i milliarder gallon

x er antal år efter 1992

a) Data hentes med Tools-Assistants-Import data (cellerne er A2:B14)

$$Benzinforbrug := \begin{bmatrix} 0. & 110.0 \\ 1.0 & 111.0 \\ 2.0 & 113.0 \\ 3.0 & 116.0 \\ 4.0 & 118.0 \\ 5.0 & 119.0 \\ 6.0 & 123.0 \\ 7.0 & 125.0 \\ 8.0 & 126.0 \\ 9.0 & 128.0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

13 × 2 Matrix

$f(x) := LinReg(Benzinforbrug, x) = x \rightarrow LinReg(Benzinforbrug, x)$

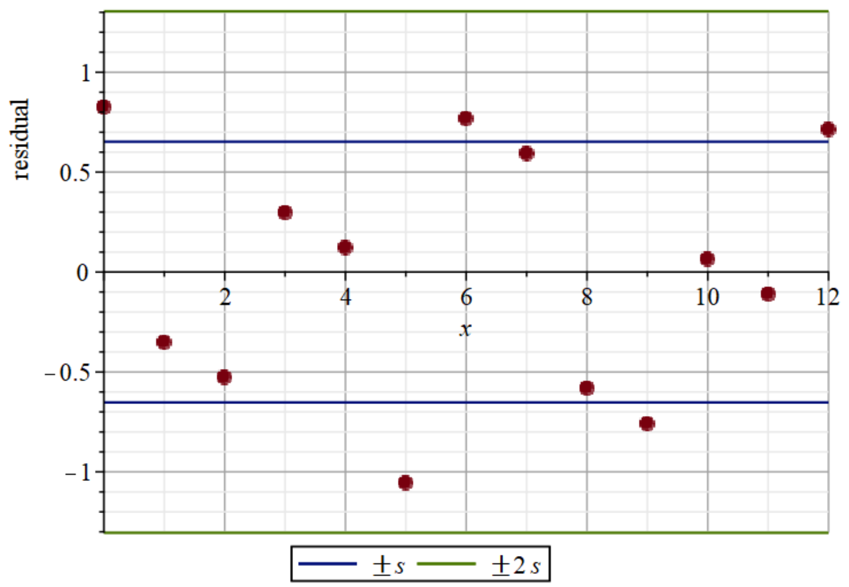
$f(x) = 2.17582417582417\, x + 109.175824175824$

Dvs. $\underline{\underline{a = 2.176}}$ og $\underline{\underline{b = 109.18}}$

b)

plotResidualer(*Benzinforbrug*, *LinReg*)

Residualspredning $s = 0.652360656059533$
Andel som er mindre end s: 61.54%
Andel som er mindre end $2\,s$: 100.00%



Da punkterne ligger usystematisk spredt omkring førsteaksen, kan modellen anvendes til at beskrive udviklingen i perioden.

c) $f(27) = 167.923076923077$

Dette tal svarer til modellens forudsigelse af benzinforbruget i 2019.

Det virkelige tal er 142, hvilket er så meget mindre end det forventede forbrug, at man kan sige, at modellen ikke længere er gyldig, men skyder over målet.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

24. maj 2022 Opgave 8:

$(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$

a) Da en cirkel med centrum i (a,b) og radius r har ligningen $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, har man:

$\underline{\underline{C(3,4) \quad r=5}}$

b) $x+y-12=0$

Skæringspunkterne bestemmes ved at løse to ligninger med to ubekendte:

$(x-3)^2+(y-4)^2=25, x+y-12=0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x=8, y=4\}, \{x=3, y=9\}$

Dvs. skæringspunkterne er $\underline{\underline{(8,4) \text{ og } (3,9)}}$

c) Vektorer $\overrightarrow{CP}$ fra centrum til punktet $P(7,7)$ står vinkelret på tangenten, dvs. det er en normalvektor til tangenten.

$\vec{n}=\overrightarrow{CP}=\begin{pmatrix}7-3\\7-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

Da tangenten går gennem P har man altså:

$a\cdot(x-x_0)+b\cdot(y-y_0)=0$

$4\cdot(x-7)+3\cdot(y-7)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{4x+3y-49=0}}$

24. maj 2022 Opgave 9:

$f(x) := 10\cdot\ln(x)-0.05\cdot x^2-x-4$:

a) Nulpunkterne bestemmes ved at løse ligningen $f(x)=0$.

$f(x)=0 \xrightarrow{\text{solve}}$

$\{x=13.12945330\}, \{x=1.819363623\}, \{x=-39.93133169+11.42720588 I\}, \{x=-39.93133169-11.42720588 I\}$

De to komplekse løsninger forkastes: $\underline{\underline{x=1.819 \vee x=13.129}}$

b) Først bestemmes steder med vandret tangent:

$f'(x)=0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x=-16.18033989\}, \{x=6.180339888\}$

Den negative løsning forkastes, da man kun arbejder med positive argumenter.

Arten af punktet bestemmes ved at se på fortegnet for den anden afledede funktion:

$f''(6.180339888)=-0.3618033988<0$, dvs. det er et lokalt maksimumssted, og da det er det eneste ekstremumssted, er det også globalt maksimumssted. Funktionsværdien bestemmes:

$f(6.180339888)=6.12356273$

$\underline{\underline{(6.180, 6.124)}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

24. maj 2022 Opgave 10:

a) Når der regnes i meter, har man: $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0.60 - 0 \\ 2.25 - 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0.6 \\ 2.25 \end{pmatrix}}}$ $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0.60 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0.6 \\ 0 \end{pmatrix}}}$

b) $\cos(v) = \dfrac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|}$

$Cos(v) = \dfrac{dotP(\langle 0.6, 2.25\rangle, \langle 0.6, 0\rangle)}{len(\langle 0.6, 2.25\rangle) \cdot len(\langle 0.6, 0\rangle)} \xrightarrow{\text{solve}} \{v = 75.06858281\}$

$\underline{\underline{v = 75.1°}}$

24. maj 2022 Opgave 11:

restart

with(*Gym*) :

a) I Gym-pakken er fordelingsfunktionen for binomialfordelingen *bincdf*.

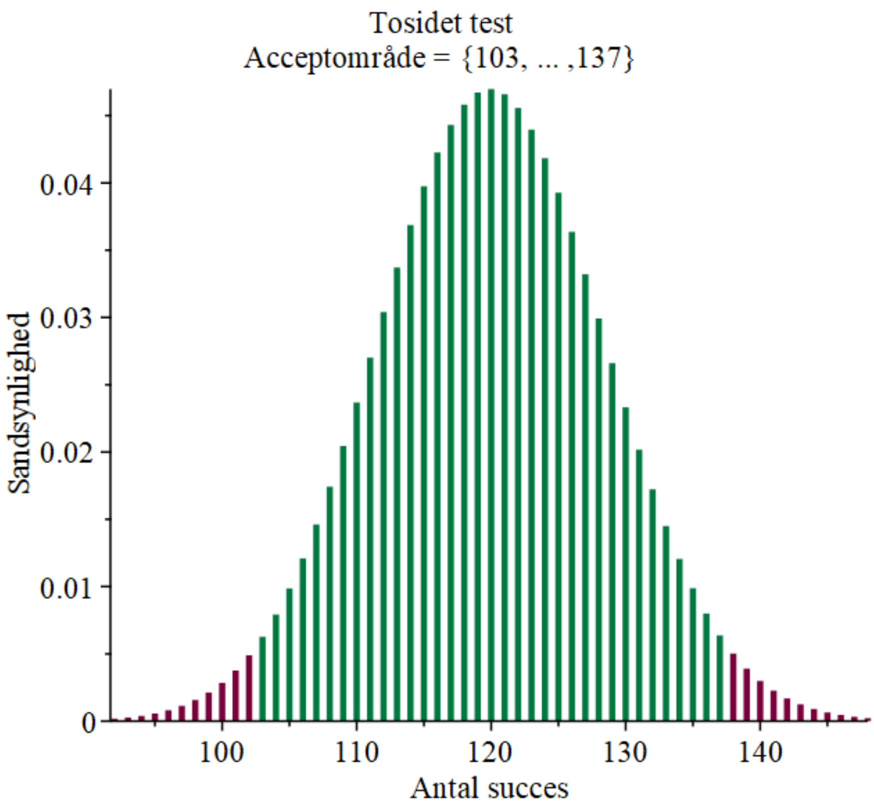
Med successandsynligheden 40% og en stikprøve på 100 har man:

$P(X \leq 30) = bincdf(100, 0.4, 30) = 0.02478282312$

Dvs. sandsynligheden er **2,48%**

b) Stikprøven er på 300 og successandsynligheden er 40%.

binomialTest(300, 0.4, *tosidet*, 0.05)



Da 140 ikke ligger i acceptområdet, **skal nulhypotesen forkastes**.

Der er signifikant flere af indbyggerne, der deltager i frivilligt arbejde.

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

12. august 2022: Delprøve 1

12. august 2022 opgave 1: a) $3\cdot(x+2)=21 \Leftrightarrow 3x+6=21 \Leftrightarrow 3x=21-6 \Leftrightarrow x=\frac{15}{3}=\underline{\underline{5}}$

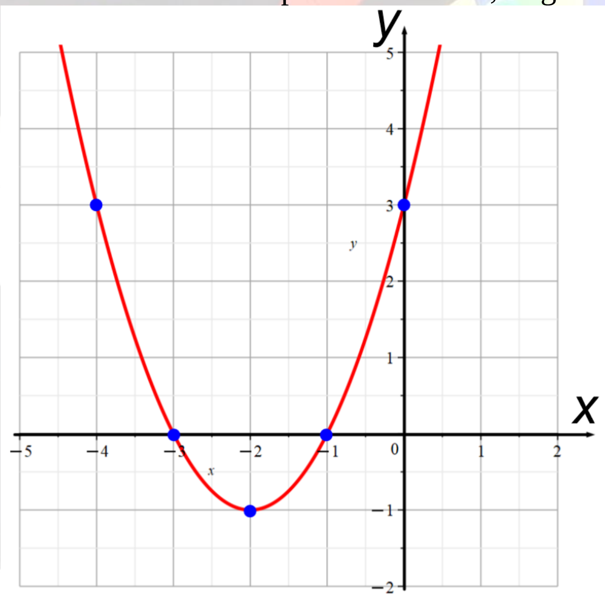
12. august 2022 opgave 2: *a)* $f(x)=x^2+4x+3$

Parablens toppunkt bestemmes ved hjælp af toppunktsformlen, hvor man først udregner diskriminanten:

$d=b^2-4ac=4^2-4\cdot1\cdot3=16-12=4$

$T\left(-\frac{b}{2a};-\frac{d}{4a}\right)=T\left(-\frac{4}{2\cdot1};-\frac{4}{4\cdot1}\right)=\underline{\underline{T(-2,-1)}}$

b) Man kender parablens toppunkts koordinater, og da *a* er positiv, vender grenene opad. Da *a* er 1, har parablen samme udseende som parablen givet ved $f(x)=x^2$, den er bare parallelforskudt. Ud fra dette kan de blå støttepunkter afsættes, så grafen kan skitseres.



12. august 2022 opgave 3: Ved hjælp af potensregnereglerne fås: $\frac{a^2\cdot a^5}{a^4}=\frac{a^{2+5}}{a^4}=\frac{a^7}{a^4}=a^{7-4}=\underline{\underline{a^3}}$

12. august 2022 opgave 4: $l: 2x+3y+1=0$

a) Ud fra ligningen aflæses en normalvektor for linjen *l* til $\vec{n_l}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

Da $m\perp l$, er ovenstående normalvektor en retningsvektor for linjen *m*, dvs. $\vec{r_m}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

Da linjen *m* går gennem punktet $P_0(5,-7)$, er en parameterfremstilling for *m*: $\underline{\underline{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>*12. august 2022 opgave 5:*</u> *a*) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x-9$

Den afledede funktion bestemmes ved ledvis differentiation: $f'(x)=\frac{1}{3}\cdot 3x^{3-1}-3\cdot 2x^{2-1}+8-0=\underline{\underline{x^2-6x+8}}$

b) Først findes stederne med vandret tangent ved at løse ligningen $f'(x)=0$.

$x^2-6x+8=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)\cdot(x-4)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2 \ \vee \ x=4$

Fortegnet for den anden afledede disse steder bestemmer typen af punkt.

$f''(x)=2x-6$

$f''(2)=2\cdot 2-6=-2<0$ Dvs. lokalt maksimumssted

$f''(4)=2\cdot 4-6=2>0$ Dvs. lokalt minimumssted

Dvs. $\underline{\underline{x_1=2 \text{ og } x_2=4}}$

<u>*12. august 2022 opgave 6:*</u> Alle oprydningsgrupper på 3 personer har samme sandsynlighed for at blive sammensat, da udvælgelsen er lodtrækning, så der er tale om et symmetrisk sandsynlighedsfelt, dvs. sandsynligheden for en hændelse *A* er $P(A)=\frac{\text{Antal gunstige oprydningsgrupper}}{\text{Antal mulige oprydningsgrupper}}$

Det mulige antal oprydningsgrupper er antallet af 3-mængder (størrelsen af oprydningsholdet), der kan udtages fra en 9-mængde (det samlede antal personer), dvs. $K(9,3)$.

De gunstige oprydningsgrupper er dem, der består af udelukkende voksne, dvs. her skal man udtage en 3-mængde (størrelsen af oprydningsholdet) fra en 5-mængde (antal voksne), dvs. $K(5,3)$.

Og hermed har man $P(A)=\frac{K(5,3)}{K(9,3)}$

12. august 2022: Delprøve 2

12. august 2022 opgave 7:

a) Modellen er et andengradspolynomium $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Datamaterialet lægges ind i lister, og der laves polynomiel regression af graden 2:

$Kastevinkel := [20, 30, 40, 50, 60, 70]:$

$Kastelængde := [113, 141, 155, 153, 133, 98]:$

$f(x) := PolyReg(Kastevinkel, Kastelængde, 2, x):$

$f(x) = -0.0805357142857143\, x^2 + 6.95964285714286\, x + 5.55714285714284$

Dvs. $\underline{\underline{a = -0.0805 \ \wedge \ b = 6.9596 \ \wedge \ c = 5.5571}}$

b) Den kastevinkel, der giver den største kastelængde, vil være førstekoordinaten til toppunktet for parablen (da grenene peger nedad).

$$T = -\frac{b}{2\,a} = -\frac{6.95964285714286}{2 \cdot (-0.0805357142857143)} = 43.20842571$$

Dvs. kastevinklen for den maksimale kastelængde er 43.2°

c) At løse ligningen $f(x) = 145$ svarer til at finde de kastevinkler, der giver kastelængden 145 meter.

$f(x) = 145. \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 31.56682740\}, \{x = 54.85002405\}$

Dvs. at man opnår kastelængden 145 meter med kastevinklerne 31.6° og 54.9°

12. august 2022 opgave 8:

12. august 2022 opgave 9:

12. august 2022 opgave 10:

12. august 2022 opgave 11:

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk

Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD