FUNKTIONER

del 1

Funktionsbegrebet
Lineære funktioner
Eksponentialfunktioner
Logaritmefunktioner
Rentesregning
Indekstal

x-klasserne

Gammel Hellerup Gymnasium

November 2023 ; Michael Szymanski ; mz@ghg.dk

Indholdsfortegnelse

FUNKTIONSBEGREBET

Vi har i forbindelse med uendelighedsbegrebet set på injektioner, surjektioner og bijektioner, der er funktioner med bestemte egenskaber. Så du kender allerede lidt til funktioner.

Vi skal nu gå mere i dybden med, hvad en funktion er for noget, og få indført nogle standardfunktionstyper.

Efter dette emne følger infinitesimalregning (differentialregning, integralregning og differentialligninger), der tager udgangspunkt i funktionsbegrebet. Og vi skal udvide og anvende funktionsbegrebet, når vi behandler vektorfunktioner og statistik.

Funktionsbegrebet står altså meget centralt i gymnasiematematikken, ligesom det gør i den gren af matematikken, der kaldes *matematisk analyse*.

Vi ser først på en masse begreber i forbindelse med funktioner. Mængden af nye ord kan måske virke overvældende og give et indtryk af, at funktionsbegrebet er voldsom svært at arbejde med, og derfor er det vigtigt også at vide, at vi stadig arbejder med funktioner ved at opskrive en forskrift (f.eks. $f(x)=2x+7$), hvor vi kan finde funktionsværdier (f.eks. $f(3)=2\cdot 3+7=13$ og $f(-5)=2\cdot(-5)+7=-3$) eller tegne grafer for funktioner. Og det er på denne måde, du oftest kommer til at arbejde med funktioner i opgaver.

Men lad os nu definere følgende (bemærk, at der står 'entydig' og ikke 'enentydig'):

Definition 1: En *funktion* er en entydig afbildning af elementer fra en mængde *A* ind i en mængde *B*, dvs. at der til ethvert element i *A* er knyttet netop ét element i *B*.

- Mængden *A* kaldes *domænet* eller *definitionsmængden*.
- Elementerne i *A* kaldes *argumenter*.
- Mængden *B* kaldes *kodomænet*.
- De elementer i *B*, som mindst ét element fra *A* er knyttet til, kaldes *billeder* eller *værdier*.
- Mængden af værdier kaldes *billedmængden* eller *værdimængden*, og det er en delmængde af *B*. Hvis funktionen hedder *f*, betegnes værdimængden med $Vm(f)$ eller $f(A)$.
- Man siger, at funktionen *afbilder A ind i B*.

Vi kan med det samme også gentage – og supplere - definitionen fra uendelighedsemnet:

Definition 2:
- En funktion, hvor hvert element i værdimængden er billedet af netop ét argument, kaldes en *injektion*.
- En funktion *f*, hvor $f(A)=B$, kaldes en *surjektion*, og man siger i så fald, at *f afbilder A på B*.
- En funktion, der både er en injektion og en surjektion, kaldes en *bijektion*.

Bemærk følgende:

f, g, h, F, G, f', g' og lignende er **navnet** på vores funktion. Vi anvender næsten altid ét bogstav – evt. med et mærke i *afledede* funktioner *f'* og *g'* – og vi **skelner konsekvent** mellem store og små bogstaver (stamfunktioner angives typisk som *F* og *G*).
Vi kunne altså f.eks. skrive: "Om funktionen *f* gælder …"

$f(x)$ er *funktionsværdien i x*. Dvs. det er IKKE funktionens navn, men en funktionsværdi i værdimængden.

$f(x) = 3x^2 + 8x - 12$ er den måde, du altid vil møde *funktionsforskrifter* på i opgavetekster. Egentlig er det "bare" en identitet:

Funktionsværdi i *x* / Funktionsudtryk

$$\underbrace{\overbrace{f(x)} = \overbrace{3x^2 + 8x - 12}}_{\text{Identitet}}$$

For højresiden er et matematisk udtryk, der også angiver funktionsværdien i *x* (husk, at et matematisk udtryk kan udregnes, hvis man kender værdien af de indgående størrelser, og ellers kan det måske reduceres). Man får altså et sandt udsagn uanset hvilket argument, man anvender i udtrykket. Og det er præcis sådan, vi anvender ligningen:

$f(1) = 3 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 12 = -1$ udtales "f af 1 er -1", hvormed der menes "funktionsværdien i 1 er -1".

Egentlig burde en funktionsforskrift skrives på følgende måde:

$$\underbrace{\overset{\text{Funktionens navn}}{f} : x \mapsto \overbrace{3x^2 + 8x - 12}^{\text{Funktionsudtrykket}}}_{\text{Funktionsforskriften}}$$

Funktionsforskriften fortæller altså, hvad der skal gøres med argumentet *x*, dvs. hvilket udtryk – svarende til en værdi – som *x* afbildes over i.

I Maple kan man anvende begge notationer:

$$f(x) := 4x + 5^x :$$
$$g := x \to x^2 - 5x + 2 :$$
$$f(1) = 9$$
$$g(4) = -2$$

Skrivemåden anvendt for funktionen *g* kan du finde under 'Expression'. Brug 'tab'-knappen til at bevæge dig frem i skrivemåden.

Ligesom vi anvendte vores grundmængde i forbindelse med ligninger, fortæller vi med definitionsmængden og kodomænet, hvilke talmængder vi arbejder med. Vi skriver:

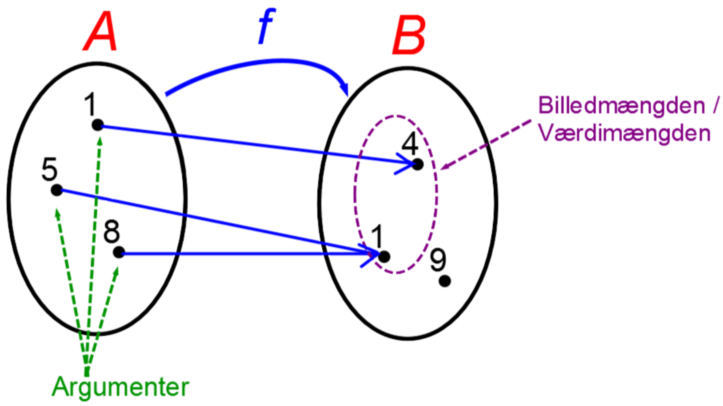
$f : A \mapsto B$ eller i et konkret tilfælde f.eks. $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

Hermed fortæller vi, at funktionen *f* kan anvendes på alle reelle tal, og at hvert argument afbildes over i en værdi, der er et reelt tal.

Vi skal nu se på forskellige måder at illustrere funktioner. Vi skal se på mængder, tabeller, grafer, maskiner og forskrifter. Det er vigtigt at huske på, at vi allerede har defineret, hvad en funktion er for noget. De forskellige beskrivelser anvendes kun for at belyse forskellige pointer ved funktionsbegrebet. De skal altså hver især ses som en hjælp til at forstå Definition 1, og de supplerer hinanden.

Funktioner beskrevet ved mængder

Vi har allerede benyttet denne beskrivelse under vores arbejde med uendeligheder. Styrken ved denne beskrivelse er, at den er god til at illustrere, hvad der menes med en *afbildning* (illustreret med de blå pile), samt at det er funktionen *f*, der afbilder fra *A* til *B*:



Det er desuden nok den bedste måde at illustrere forskellen mellem kodomænet *B* og værdimængden $f(A)$ eller $Vm(f)$. I ovenstående tilfælde tilhører tallet 9 kodomænet, men det tilhører ikke værdimængden, da ingen af argumenterne fra *A* afbildes over i 9.

Vi har desuden set, at der skal udgå netop én pil fra hvert element i *A*, hvis det skal være en funktion. Så hvis der var et element, hvorfra der ikke udgik en pil, skulle definitionsmængden indsnævres, så elementet ikke var med i *A*. Og hvis der udgik mere end én pil fra et element, ville værdien ikke være entydig (og der ville derfor ikke være tale om en funktion – jf. Definition 1).

Funktioner beskrevet ved tabeller

Vi møder funktioner på tabelform i alle regressionsopgaver i eksamenssættene. Det er desuden den form, som vi er henvist til, når vi foretager vores eksperimenter i kemi og fysik (eller enhver anden videnskab). Et eksempel:

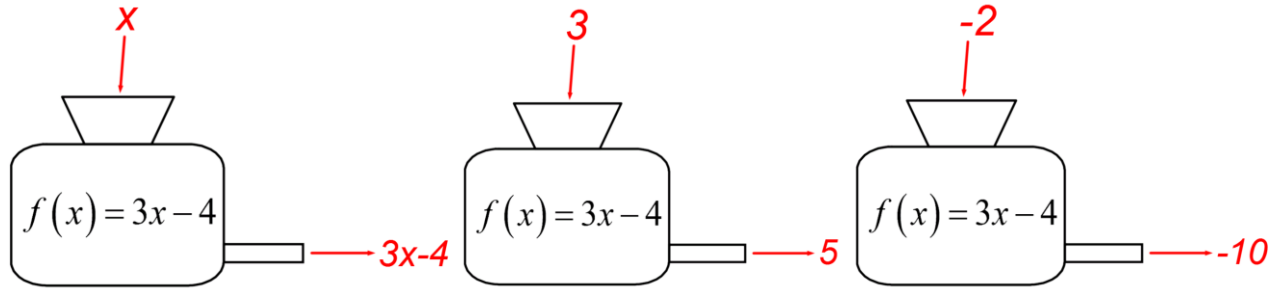
Saltindhold (gram NaCl pr. L opløsning)	50	100	150	200	250
Massefylde (gram pr. milliliter)	1,033	1,066	1,098	1,129	1,160

Vores udgangspunkt er altså, at vi kun kender et endeligt antal funktionsværdien.

Men pointen med tabeller er oftest, at man **antager**, at der bag tabellen gemmer sig en sammenhæng mellem de to variable, som man kan beskrive ved en funktion. Og det er denne funktion, man søger. Man forsøger altså ved hjælp af et endeligt antal målinger at finde en funktion, der kan anvendes på uendelig mange argumenter. En sådan funktionsforskrift kaldes en *model* eller en *formel* (alt afhængig af situationen).

Funktioner som maskiner

Man illustrerer sommetider en funktion som en maskine:



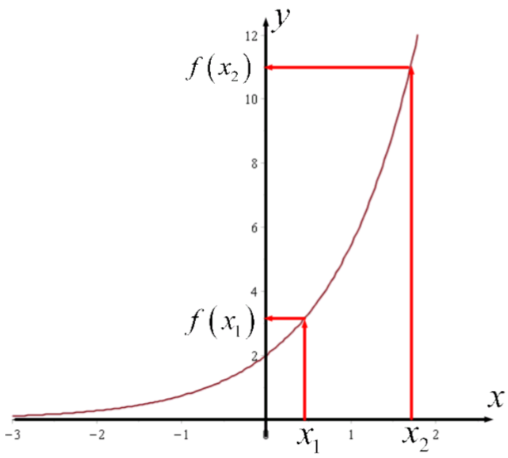
Ideen med dette er at illustrere pointen med, at funktionen virker på vores argument *x*, hvorefter vi får vores funktionsværdi $f(x)$. Dvs. vi smider vores argumenter ind i maskinen, og den gør et eller andet ved argumentet (beskrevet ved vores funktionsforskrift), hvorefter den spytter én værdi ud. Vores argumenter kommer fra *A*, og de værdier, vi får ud, udgør værdimængden.

Funktioner angivet som grafer

Grafen for en funktion minder utrolig meget om grafen for en sammenhæng beskrevet ved en given ligning. For ofte erstatter vi $f(x)$ med *y* og kalder ordinataksen for *y*-aksen. Og det er faktisk her betegnelsen *den afhængige variabel* kommer fra. For når vi arbejder med funktioner, er *x* og *y* ikke sidestillet, som de er i ligninger. Vi kan frit vælge et argument fra *A*, som vi indsætter i funktionen, og funktionsværdien afhænger så af dette valg.

$f := x \rightarrow 2 \cdot e^x :$

$plot(f(x), x = -3..3)$



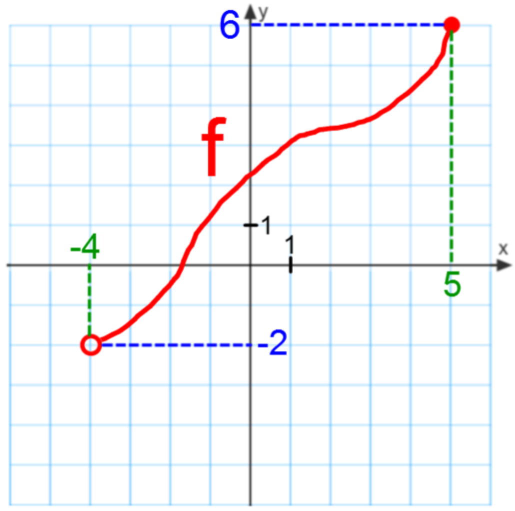
Når vi arbejder med funktioner, viser vi med pile, at vores udgangspunkt er argumenterne på abscisseaksen, mens vores billeder ligger på ordinataksen.
Fordelen ved grafer er det visuelle. Man kan direkte "se" funktionen.

En vigtig pointe ved funktioner er, at uanset hvilken lodret linje, du tegner i koordinatsystemet, må den ikke skære grafen for en funktion mere end én gang. Hvis den gjorde, ville vores entydighed ikke holde. Du kan derfor bl.a. se, at en cirkel ikke er grafen for en funktion.

Man kan direkte overføre al vores viden om parallelforskydninger og spejlinger i akserne fra ligninger. Hvis du erstatter "*x*" med "$x-a$" og "$f(x)$" med "$f(x)-b$", forskyder du grafen for *f* med *a* i *x*-aksens retning og *b* i *y*-aksens retning. MEN bemærk, at man ikke umiddelbart kan rotere grafen og stadig være sikker på, at man kan anvende en funktionsforskrift, for man kan miste entydigheden ved rotationer (tænk på pointen med den lodrette linje nævnt ovenfor).

Dm og Vm

Vi skal nu se lidt mere på definitions- og værdimængder (jf. Definition 1). Definitionsmængden er den mængde, hvorfra man henter sine argumenter (x-værdier). Så grafisk svarer det til den mængde af steder på 1. aksen, hvorfra man kan tegne en lodret linje, der rammer grafen. Værdimængden svarer til billederne af samtlige argumenter, og grafisk aflæses den som den mængde af værdier på 2. aksen, hvorfra man kan tegne en vandret linje, der rammer grafen.

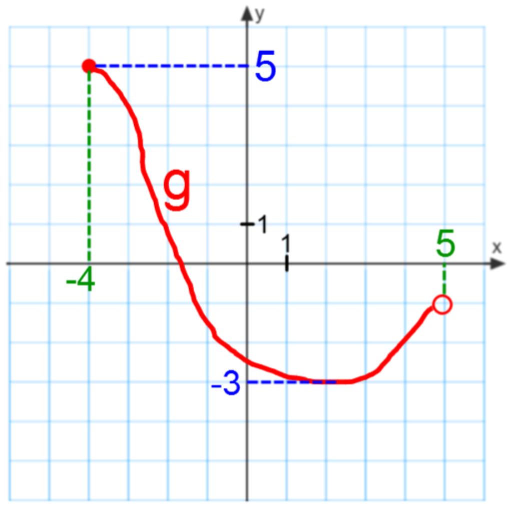


Vi husker, at en ikke-udfyldt cirkel angiver, at selve punktet ikke er med, mens den udfyldte cirkel angiver, at punktet er med.

Vi kan derfor i dette eksempel aflæse, at

$Dm(f) =]-4,5]$ og $Vm(f) =]-2,6]$.

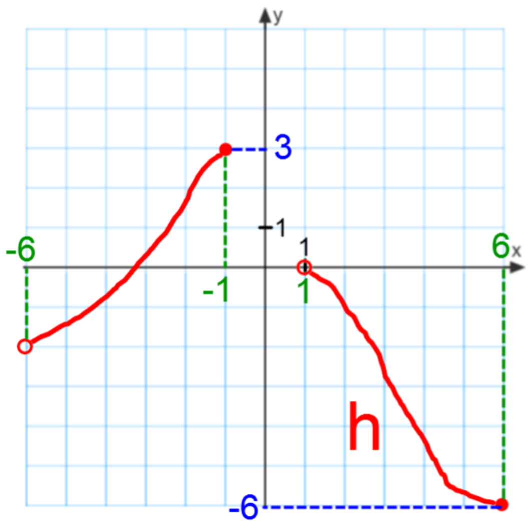
Tjek, at du har styr på, hvor tallene i intervallerne kommer fra, og hvordan de firkantede parenteser skal vende.



I dette eksempel går grafen ned i en dal. Bemærk, hvordan man aflæser:

$Dm(g) = [-4,5[$ og $Vm(g) = [-3,5]$.

Tjek igen, at du kan se, hvorfor de firkantede parenteser vender, som de gør.



Bemærk, at dette er grafen for én funktion h.

Vi aflæser her:

$Dm(h) =]-6,-1] \cup]1,6]$ og

$Vm(h) = [-6,3]$.

Disse grafer kan vi ikke bruge til så meget i praksis. De er kun tegnet for at illustrere definitionsmængder og værdimængder.

Opgaverne 600*

Funktioner angivet ved forskrifter

Det er vigtigere i praksis at kunne gennemskue definitionsmængder og værdimængder, når man ser på funktionsforskrifter. Man kan sige, at funktioner har en ”naturlig” definitionsmængde, som vi frit kan vælge at begrænse, hvis opgaven lægger op til det. Når vi kender definitionsmængden, kan vi bestemme værdimængden som alle de funktionsværdier, der fremkommer, når vi lader funktionen virke på alle elementer i definitionsmængden.

Eksempel 1: Vi ser på funktionen $f : x \mapsto \sqrt{x}$ og ønsker at bestemme (den naturlige) definitionsmængde og den tilhørende værdimængde.

Pointen, når du skal bestemme definitionsmængden, er, at du kigger på, hvad der skal gøres med argumenterne, når de smides ind i funktionen. I dette tilfælde skal du uddrage kvadratroden.

Da man ikke kan uddrage kvadratroden af negative tal (men godt af 0), får man:

$$Dm(f) = [0, \infty[\, .$$

For at finde værdimængden skal du nu forestille dig, at du lader din funktion virke på alle værdierne i ovenstående interval. Hvis du f.eks. lader *f* virke på *0*, får du værdien 0. Hvis *f* virker på 9, får du 3. Hvis *f* virker på 100, får du 10. Man kan derfor indse, at man kan opnå samtlige ikke-negative reelle tal, og dermed er:

$$Vm(f) = f([0, \infty[) = [0, \infty[$$

Eksempel 2: Vi ser nu på funktionen *g* givet ved forskriften $g(x) = \sqrt{x-5} + 3$.

Igen vil vi bestemme *Dm* og *Vm*.
Udtrykket under kvadratroden må ikke blive negativt, så vi kan se, at

$$Dm(g) = [5, \infty[\, .$$

Når vi lader *g* virke på alle elementerne i dette interval, kan vores kvadratrod give alle ikke-negative reelle tal, og da vi skal lægge 3 til dette, får vi:

$$Vm(g) = [3, \infty[$$

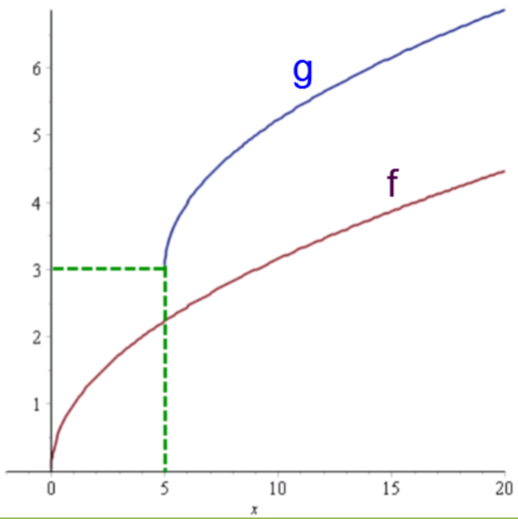
Graferne for de to funktioner fra eksemplerne 1 og 2 plottes sammen i Maple:

$$plot\left(\left[\sqrt{x}, \sqrt{x-5} + 3\right], x = -2..20\right)$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$g(x) = \sqrt{x-5} + 3$$

Fra vores arbejde med ligninger kan vi se, at grafen for *g* er en parallelforskydning af grafen for *f* med 5 i *x*-aksens retning og 3 i *y*-aksens retning.
Det sidste indses ved at erstatte g(x) med *y* og rykke 3 over på den anden side: $y - 3 = \sqrt{x-5}$



Eksempel 3: Vi ser på funktionen *h* givet ved $h(x)=x^2+3x-7$.

Vi vil gerne bestemme definitionsmængde og værdimængde.
Når man lader *h* virke på et argument, skal dette kvadreres og multipliceres med 3.
Dette kan man gøre med alle tal, og derfor er $Dm(h)=\mathbb{R}$.

Egentlig kan man jo også kvadrere komplekse tal, så de komplekse tal kunne også have fungeret som definitionsmængde. Hvis der i den pågældende sammenhæng kan opstå tvivl om, hvilken talmængde vi arbejder inden for, kan man derfor skrive:
$h:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ eller $h:\mathbb{C}\mapsto\mathbb{C}$ alt afhængig af, om man regner med komplekse tal.
Men da vi som udgangspunkt – dvs. med mindre andet er nævnt – arbejder med de reelle tal, vil man oftest udelade denne skrivemåde.
Vores definitionsmængde og vores kodomæne er altså begge mængden af reelle tal, men hvad med vores værdimængde?
Vi genkender højresiden fra vores ligning for en parabel, og vi ser på den positive *a*-værdi, at grenene vender opad. Vi udregner så toppunktets andenkoordinat for at finde den nedre grænse for værdimængden:

$$d=b^2-4ac=3^2-4\cdot1\cdot(-7)=9+28=37$$

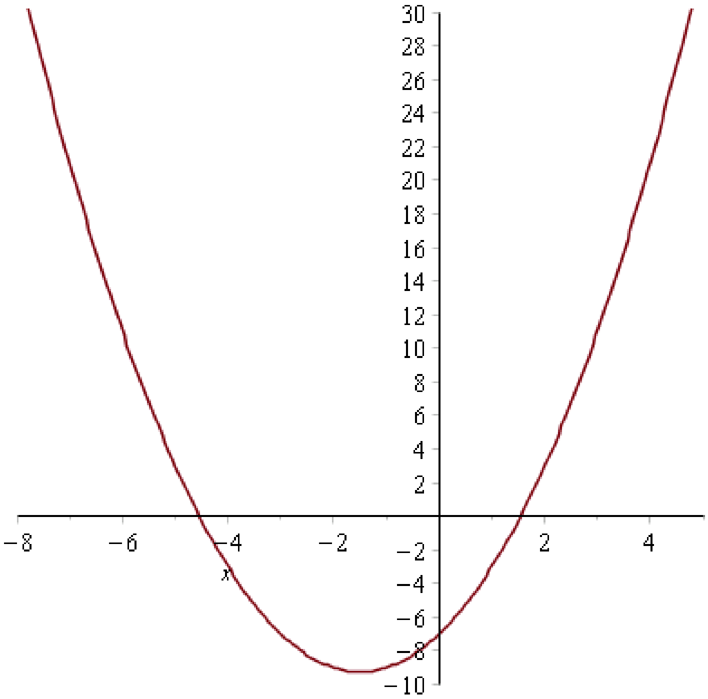
$$\frac{-d}{4a}=\frac{-37}{4\cdot1}=-\frac{37}{4}$$

Dvs. at vores værdimængde er:

$$Vm(h)=\left[-\frac{37}{4};\infty\right[$$

Vi ser på grafen:

$$plot\left(x^2+3\,x-7,\,x=-8\,..5\right)$$



Tjek igen, at du kan få *Dm* og *Vm* til at stemme med grafen.

Eksempel 4: Vi ser på funktionen $g: x \mapsto \frac{1}{x-2}+3$. Vi vil bestemme *Dm* og *Vm*.

Vores funktionsudtryk indeholder en brøk, og i en brøk må nævneren ikke være 0. Det bliver den, hvis $x=2$, og derfor må vores definitionsmængde ikke indeholde tallet 2. Vi har derfor:

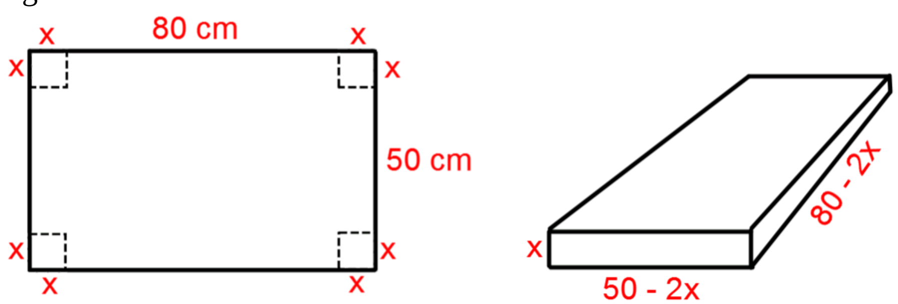
$$Dm(g)=\mathbb{R}\setminus\{2\}$$

Det kan være lidt sværere at gennemskue værdimængden. Men hvis man opdager, at grafen må være en parallelforskydning af hyperblen bestemt ved ligningen $y=\frac{1}{x}$ med 2 i *x*-aksens retning og 3 i *y*-aksens retning (da $g(x)=\frac{1}{x-2}+3$ er en omskrivning af $y-3=\frac{1}{x-2}$), så får man:

$$Vm(g)=\mathbb{R}\setminus\{3\}$$

Man kan også indse det ved at opdage, at brøken kan give alle værdier bortset fra 0.

Eksempel 5: Vi ser på en situation, hvor man ud fra et 50 cm x 80 cm stykke pap skal lave en kasse uden låg. Man klipper kvadrater med sidelængden *x* af i hjørnerne. Vi regner vores længder i *cm*:



Vi vil gerne udtrykke kassens rumfang *V* som en funktion af kvadratets sidelængde *x*. Da rumfanget af en kasse er $V=l\cdot b\cdot h$, får vi:

$$V(x)=(80-2x)\cdot(50-2x)\cdot x=4x^3-260x^2+4000x$$

Når vi kigger på funktionsudtrykket for funktionen *V*, kan vi se, at vores argument skal kuberes, kvadreres og multipliceres med 4000. Dette kan vi gøre med alle reelle tal. Så funktionens ”naturlige” definitionsmængde er alle reelle tal.

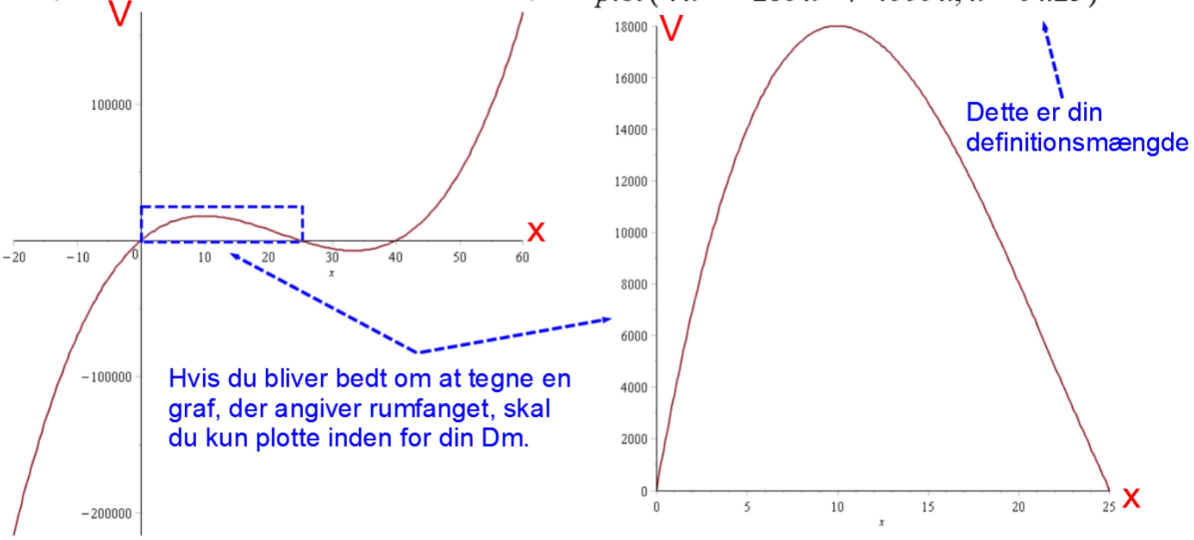
Men her kommer pointen med dette eksempel:

Vores forskrift angiver rumfanget som funktion af en sidelængde. Vi kan ikke klippe et kvadrat med en negativ sidelængde, og sidelængden 0 giver heller ikke mening, hvis vi holder fast i, at vi skal ende med en kasse.
Og vores kvadrats sidelængde skal også være under 25 cm, for ellers får kassen ikke nogen bredde, da vi kun har 50 cm at give af.
I denne situation får vi altså: $Dm(V)=]0,25[$.

Man angiver dette ved at skrive: $V(x)=4x^3-260x^2+4000x \quad ; \quad 0<x<25$

Situationen kan ses på nedenstående figur. Til venstre ses funktionen i et interval, der er større end definitionsmængden. Der er områder med negative rumfang, hvilket ikke giver nogen mening.

$plot\left(4x^3 - 260x^2 + 4000x,\ x = -20..60\right)$ $plot\left(4x^3 - 260x^2 + 4000x,\ x = 0..25\right)$



Det er **grafen til højre**, der er den rigtige i denne situation. Det er kun området mellem 0 og 25 på *x*-aksen, der er relevant.

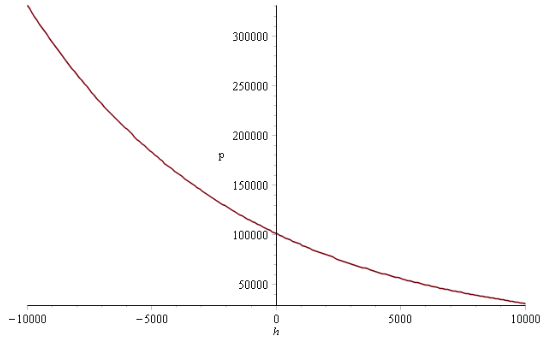
Eksempel 6: Det oplyses, at ved temperaturen 15 °C kan lufttrykket *p* som funktion af højden *h* over jordoverfladen beskrives ved funktionen:

$$p(h) = 101325 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}000118558 \cdot h} \quad ,$$

hvor *h* måles i meter, og *p* måles i bar.

Funktionsforskriften indeholder en potens med positiv rod ($\mathbf{e} = 2{,}718281828...$), og vi ved fra vores potensregning, at i sådan en potens må eksponenten være alle (reelle) tal. Ellers kan vi se det ved at plotte udtrykket i Maple:

$plot\left(101325 \cdot \mathrm{e}^{-0.000118558 \cdot h},\ h = -10000..10000\right)$



Dvs. den "naturlige" definitionsmængde er alle reelle tal. Men i denne konkrete situation vil man normalt sætte den nedre grænse for højden til 0 (selvom der er enkelte steder på landjorden, der ligger under havoverfladen). Det kan være noget sværere at fastsætte en øvre grænse, så der vil man typisk ikke begrænse mængden, men i stedet være opmærksom på, at udtrykket selvfølgelig ikke gælder meget langt væk fra jorden. Man vil altså vælge $Dm(p) = [0, \infty[$

Opgaverne 601*

Stykkevist definerede funktioner

I eksemplerne 1-6 kunne vi nøjes med én forskrift, når vi skulle angive funktionen, og sådan er det oftest. Men nogle gange har man brug for flere forskrifter til at beskrive én funktion. Man kalder i så fald funktionen for en *stykkevist defineret funktion*:

Definition 2,5: En *stykkevist defineret funktion* er en funktion, der er angivet ved mere end ét funktionsudtryk, hvor hvert funktionsudtryk gælder i hver sin delmængde af definitionsmængden.

Man angiver stykkevist definerede funktioner med *gaffelforskrifter*, der knytter hvert funktionsudtryk til den del af definitionsmængden, hvor det er gældende.

Bemærk altså, at der er tale om én funktion, selvom der indgår flere forskellige funktionsudtryk.

En *gaffelforskrift* ser ud på følgende måde:

Dette andengradspolynomium er gældende i intervallet]-∞,-4[

$$f(x)=\begin{cases} x^2+5x-3 & , \text{ for } x<-4 \\ \sin(x) & , \text{ for } -4\le x<5 \\ -4x+3 & , \text{ for } x\ge 5 \end{cases}$$

I intervallet [-4,5[gælder sinusfunktionen.

I [5, ∞ [gælder det lineære funktionsudtryk

I Maple findes symbolet for en gaffelforskrift under 'Expression' (tilføj det til dine favoritter):

$$\begin{cases} -x & x<a \\ x & x\ge a \end{cases}$$

Hvis man som i ovenstående gaffelforskrift har brug for mere end to rækker, skal man gøre følgende:

$$\begin{cases} -x & x<a \\ x & x\ge a \\ ? & ? \\ ? & ? \end{cases}$$

Indsæt gaffelforskrift-symbolet og højreklik på det.

Vælg 'Insert Row', og der dukker en ekstra række op.

Højreklik og vælg 'Insert Row' igen, hvis du vil have endnu en række.

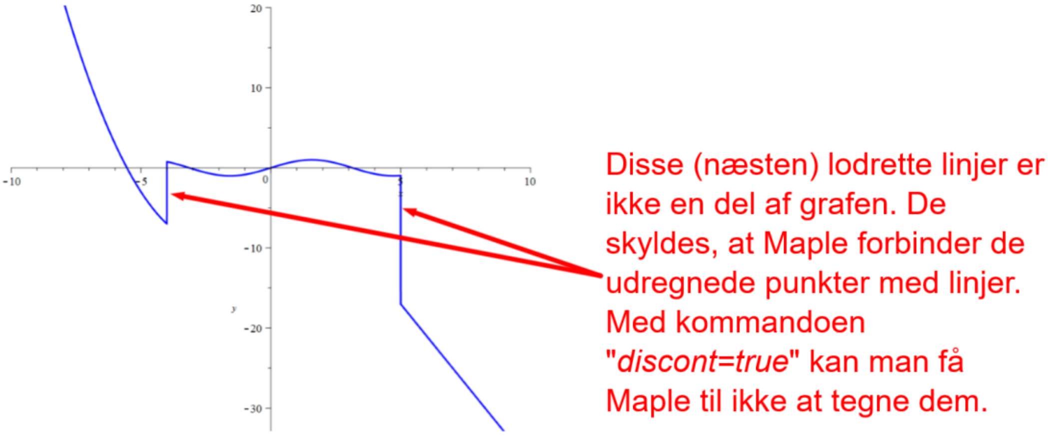
Benyt tabulatorknappen (se nedenfor) til at bevæge dig frem inden for symbolet.

Tabulatorknappens udseende: →| (*mac*) |← →| (*pc*)

Øvelse 1: Tjek, at du i Maple kan indtaste nedenstående gaffelforskrift og "plotte" grafen. Du skriver de svage ulighedstegn ved først at indtaste det skarpe ulighedstegn og lige derefter et lighedstegn.

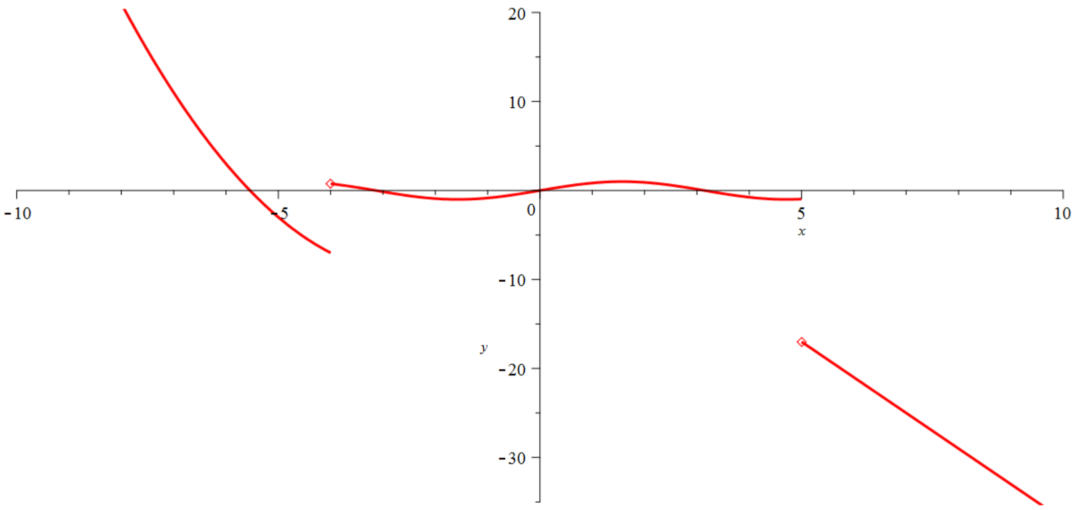
$$f(x) := \begin{cases} x^2 + 5x - 3 & x < -4 \\ \sin(x) & -4 \le x < 5 \\ -4x + 3 & x \ge 5 \end{cases}$$

$plot(f(x), x=-10..10, y=-35..20, thickness=3, color=blue)$



Med kommandoen *discont=true* fås den (næsten) rigtige graf uden lodrette linjer:

$$plot(f(x), x=-10..10, y=-35..20, thickness=3, color=red, discont=true)$$



Det eneste problem med denne graf er, at Maple anvender en cirkel i stedet for en udfyldt cirkel, når punktet er med (jf. funktionsforskriften).

Når man først har fået angivet funktionen ved en gaffelforskrift i Maple, kan man arbejde med den på samme måde, som hvis den var angivet med ét funktionsudtryk:

$f(-6) = 3$ fordi $(-6)^2 + 5 \cdot (-6) - 3 = 3$

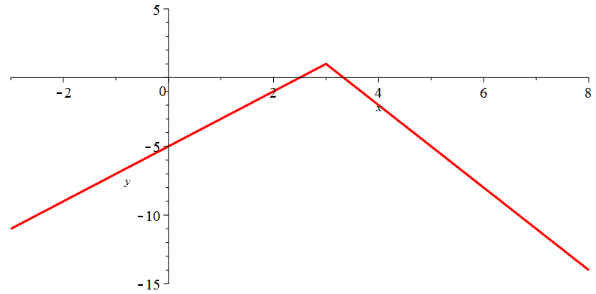
$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ fordi $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$f(8) = -29$ fordi $-4 \cdot 8 + 3 = -29$

Endnu et eksempel på en stykkevist defineret funktion angivet ved en gaffelforskrift er:

$$g(x) := \begin{cases} 2x - 5 & x < 3 \\ -3x + 10 & x \geq 3 \end{cases} :$$

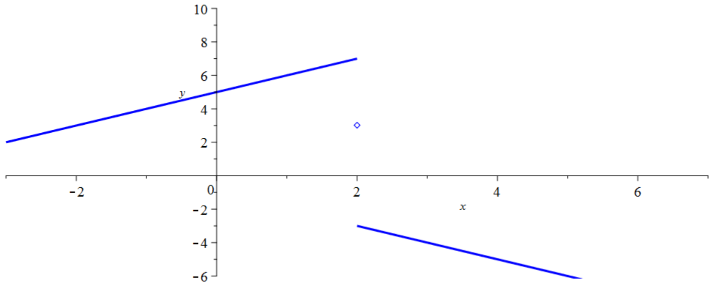
$$plot(g(x), x = -3..8, y = -15..5, thickness = 3, color = red)$$



I nedenstående eksempel gælder funktionsudtrykket 3 ikke i et interval, men kun ét sted, nemlig når $x = 2$.

$$h(x) := \begin{cases} x + 5 & x < 2 \\ 3 & x = 2 \\ -x - 1 & x > 2 \end{cases} :$$

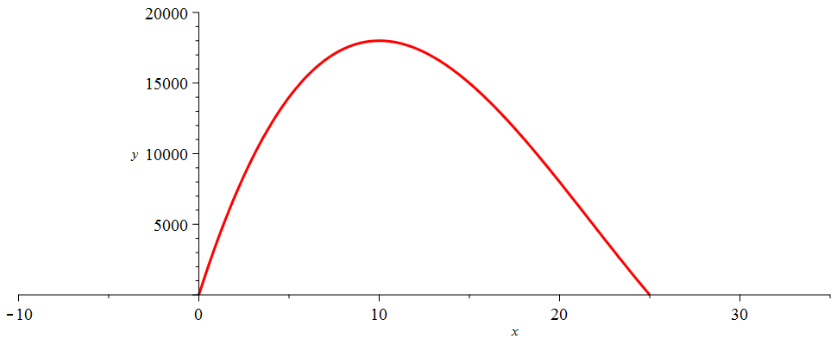
$$plot(h(x), x = -3..7, y = -6..10, thickness = 3, color = blue, discont = true)$$



Man kan også benytte gaffelforskrifter til "almindelige" funktioner, hvis definitionsmængden er begrænset. F.eks. kunne man i Eksempel 5 have skrevet:

$$k(x) := \begin{cases} undefined & x \leq 0 \\ 4x^3 - 260 \cdot x^2 + 4000 \cdot x & 0 < x < 25 \\ undefined & x \geq 25 \end{cases} :$$

$$plot(k(x), x = -10..35, y = -20..20000, thickness = 3, color = red)$$

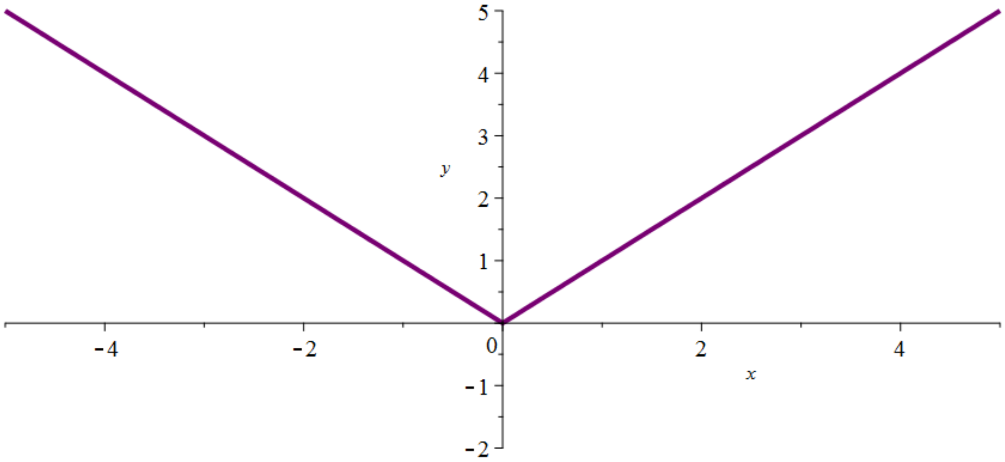


Lad os nu se på nogle standardfunktioner, der er stykkevist definerede funktioner.

Numerisk værdi (absolut værdi):

$$|x|: \quad x \mapsto \begin{cases} x & , \text{ for } x \geq 0 \\ -x & , \text{ for } x < 0 \end{cases}$$

$$plot(|x|, x = -5..5, y = -2..5, thickness = 4, color = purple)$$



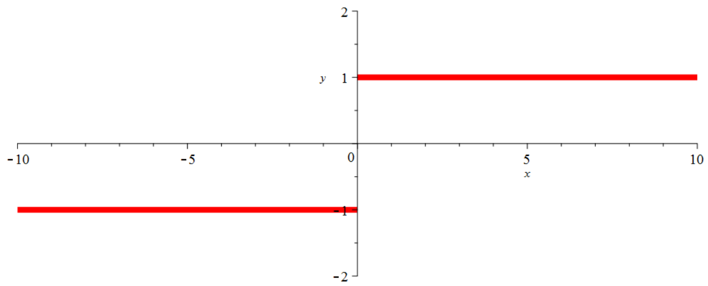
Fortegnsfunktionen:

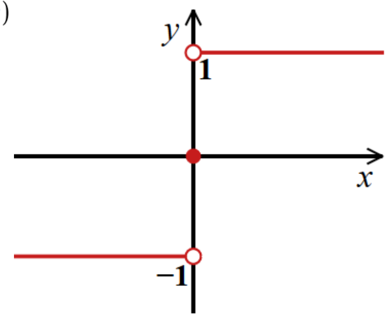
Fortegnsfunktionen *sgn* (normal notation) eller *sign* (i Maple) giver fortegnet for et tal angivet ved tallene –1, 0 og 1:

$$\text{sgn}: \; x \mapsto \begin{cases} -1 & , \text{ for } x < 0 \\ 0 & , \text{ for } x = 0 \\ 1 & , \text{ for } x > 0 \end{cases}$$

Maple anvender en anden definition og har $sign(0) = 1$ **Graf fra Wikipedia**

$plot('sign(x)', x = -10..10, y = -2..2, thickness = 8, color = red, discont = true)$





Numerisk værdi of fortegnsfunktionen kan optræde i samme ligning, for der gælder:

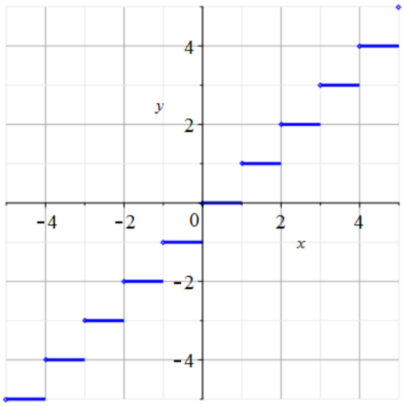
$x = \text{sgn}(x) \cdot |x|$ (tjek, at du kan se, at dette gælder)

Funktionerne 'floor' , 'ceiling' (ceil) og 'integer' (int):

Funktionerne *floor* (gulv), *ceiling* (loft) og *integer* (heltal) er beslægtede funktioner.

- *floor* giver det største heltal, der ikke er større end argumentet.
- *ceiling* giver det mindste heltal, der ikke er mindre end argumentet.
- *integer* skærer decimalerne af et tal.

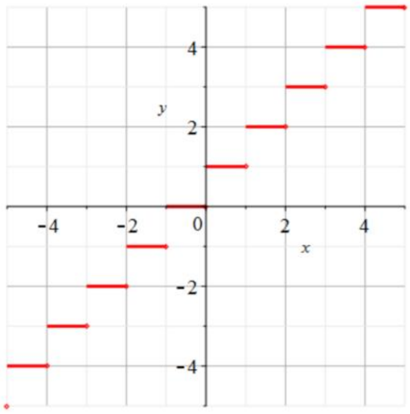
$$plot(\mathrm{floor}(x),\, x=-5..5,\, y=-5..5,\, thickness=3,\, color=blue,\, discont=true)$$



$$\boxed{floor:\quad x \mapsto \begin{cases} \vdots \\ -2\ ,\ \text{for}\ -2 \le x < -1 \\ -1\ ,\ \text{for}\ -1 \le x < 0 \\ 0\ ,\ \text{for}\ 0 \le x < 1 \\ 1\ ,\ \text{for}\ 1 \le x < 2 \\ 2\ ,\ \text{for}\ 2 \le x < 3 \\ \vdots \end{cases}}$$

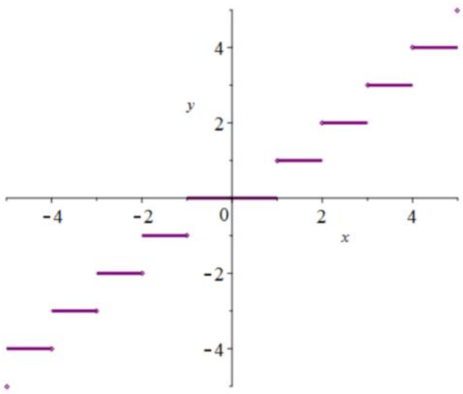
Husk, at Maple anvender cirkler, hvor der burde være udfyldte cirkler.

$$plot(\mathrm{ceil}(x),\, x=-5..5,\, y=-5..5,\, thickness=3,\, color=red,\, discont=true)$$



$$\boxed{ceiling:\quad x \mapsto \begin{cases} \vdots \\ -2\ ,\ \text{for}\ -3 < x \le -2 \\ -1\ ,\ \text{for}\ -2 < x \le -1 \\ 0\ ,\ \text{for}\ -1 < x \le 0 \\ 1\ ,\ \text{for}\ 0 < x \le 1 \\ 2\ ,\ \text{for}\ 1 < x \le 2 \\ \vdots \end{cases}}$$

$$plot(\mathrm{trunc}(x),\, x=-5..5,\, y=-5..5,\, thickness=3,\, color=purple,\, discont=true)$$



$$\boxed{\mathrm{int}:\quad x \mapsto \begin{cases} \vdots \\ -2\ ,\ \text{for}\ -3 < x \le -2 \\ -1\ ,\ \text{for}\ -2 < x \le -1 \\ 0\ ,\ \text{for}\ -1 < x < 1 \\ 1\ ,\ \text{for}\ 1 \le x < 2 \\ 2\ ,\ \text{for}\ 2 \le x < 3 \\ \vdots \end{cases}}$$

Trappekurver og sumkurver

Inden for den såkaldte deskriptive statistik møder vi *trappekurver* og *sumkurver*, der også er stykkevist definerede funktioner. Du skal ikke gå op i de konkrete tal på nedenstående grafer (de er uden betydning).

Trappekurve

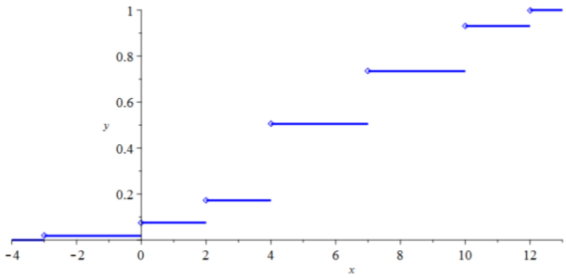
$M := \langle -3, 0, 2, 4, 7, 10, 12 \,|\, 25, 78, 132, 453, 312, 268, 94 \rangle :$

$trappekurve(M, x)$

$$\begin{cases} 0 & x < -3 \\ 0.0183553597650514 & -3 \le x < 0 \\ 0.0756240822320118 & 0 \le x < 2 \\ 0.172540381791483 & 2 \le x < 4 \\ 0.505139500734214 & 4 \le x < 7 \\ 0.734214390602056 & 7 \le x < 10 \\ 0.930983847283407 & 10 \le x < 12 \\ 1 & 12 \le x \end{cases}$$

$f(x) := trappekurve(M, x) :$

$plot(f(x), x = -4..13, y = 0..1, thickness = 3, color = blue, discont = true)$



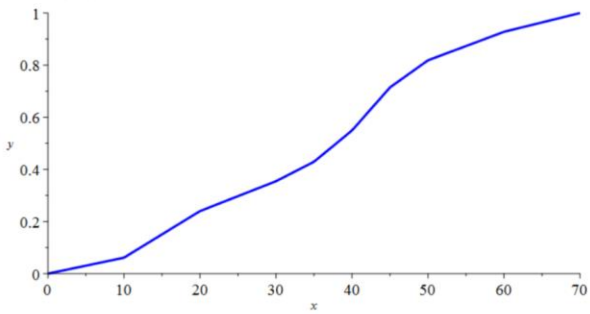
Sumkurve

$N := \langle 0..10, 10..20, 20..30, 30..35, 35..40, 40..45, 45..50, 50..60, 60..70 \,|\, 23, 67, 43, 28, 45, 62, 39, 41, 27 \rangle :$

$g(x) := sumkurve(N, x) :$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.00613333333333333\,x & 0 \le x < 10 \\ 0.0178666666666667\,x - 0.117333333333333 & 10 \le x < 20 \\ 0.0114666666666667\,x + 0.0106666666666666 & 20 \le x < 30 \\ 0.0149333333333333\,x - 0.0933333333333333 & 30 \le x < 35 \\ 0.0240000000000000\,x - 0.410666666666667 & 35 \le x < 40 \\ 0.0330666666666667\,x - 0.773333333333333 & 40 \le x < 45 \\ 0.0208000000000000\,x - 0.221333333333333 & 45 \le x < 50 \\ 0.0109333333333333\,x + 0.272000000000000 & 50 \le x < 60 \\ 0.00720000000000000\,x + 0.496000000000000 & 60 \le x < 70 \\ 1 & 70 \le x \end{cases}$$

$plot(g(x), x = 0..70, y = 0..1, thickness = 3, color = blue)$



Opgaverne 602*

MONOTONI

Ordet *monotoni* er opbygget af *mono (en)* og *tonos* (*tone*), og vi bruger det dagligt synonymt med ”ensformigt”. Det ensformige, når ordet anvendes inden for matematik om funktioner, er, om funktionens graf bliver ved med at gå opad eller bliver ved med at gå nedad, når man bevæger sig i positiv retning på *x*-aksen.

Vi definerer nemlig:

Definition 3,0: En funktion f kaldes *(strengt) voksende i et interval* $I \subseteq Dm(f)$, hvis følgende er opfyldt:

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Hvis funktionen er strengt voksende i hele sin definitionsmængde, dvs. hvis *I* kan erstattes af $Dm(f)$ i ovenstående, kaldes funktionen *(strengt) voksende*.

Dvs. at funktionen er voksende, hvis det er sådan, at uanset hvilket sted, du begynder, vil du få en større funktionsværdi, hvis du vælger et større argument.

Du kan som nævnt grafisk se det, som om du bevæger dig op ad bakke, når du bevæger dig mod højre. Dette er godt nok ikke så præcis en beskrivelse som vores definition, og man kan jo møde koordinatsystemer, hvor man har vendt retningen på abscisse- eller ordinataksen, hvorved beskrivelsen med ”op ad bakke” ikke ville gælde. Men i praksis vil ”op ad bakke”-billedet være fint.

Definition 3,1: En funktion f kaldes *(strengt) aftagende i et interval* $I \subseteq Dm(f)$, hvis følgende er opfyldt:

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Hvis funktionen er strengt aftagende i hele sin definitionsmængde, kaldes funktionen *(strengt) aftagende*.

En funktion er altså aftagende, hvis du uanset udgangspunktet oplever, at din funktionsværdi bliver mindre, når du vælger et større argument. Grafisk svarer det til, at du bevæger dig ned ad bakke, når du går mod højre.

Definition 3,2 (en meget kedelig definition): En funktion f kaldes *konstant i et interval* $I \subseteq Dm(f)$, hvis følgende er opfyldt:

$$\forall x_1, x_2 \in I : \ f(x_1) = f(x_2)$$

Hvis funktionen er konstant i hele sin definitionsmængde, kaldes funktionen *konstant*.

Definition 3,3: (Strengt) voksende funktioner, (strengt) aftagende funktioner og konstante funktioner betegnes under ét som (*strengt) monotone* funktioner.

Øvelse 2: Argumentér for, at hvis en funktion er strengt voksende eller strengt aftagende, er den injektiv. Find et eksempel på grafen for en funktion, der er injektiv, men hverken voksende eller aftagende.

Baseret på opslag på svensk, engelsk, tysk, fransk og spansk wikipedia lader det til, at man internationalt opdeler funktioner i *strengt voksende* og *voksende* funktioner (og tilsvarende med begrebet *aftagende*). *Voksende* funktioner opfylder så ”kun”: $x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \leq f(x_2)$, dvs. der anvendes svagt ulighedstegn i stedet for skarpt ulighedstegn. Dette er der ikke tradition for i danske gymnasiematematikbøger, hvor der lader til at være enighed om kun at arbejde med de skarpe ulighedstegn og samtidig stryge ordet *strengt*. Det får ingen betydning for os, men hvis du vil være sikker på at undgå misforståelser, kan du anvende betegnelserne *strengt voksende* og *svagt voksende*.

Men lad os nu fjerne fokus fra ordene og se på indholdet af begreberne gennem en række eksempler:

Eksempel 7: Vi ser på funktionen *f* givet ved forskriften $f(x)=\frac{1}{x}$; $x\neq 0$.

Skrivemåden $x\neq 0$ er en hurtigere måde at angive, at $Dm(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Bemærk, at hele definitionsmængden ikke er et interval, da der er et hul i $x=0$. Men den kan deles op i to intervaller, som vi nu skal undersøge hver for sig.

$x>0$ (dvs. $I_1=\left]0,\infty\right[$): Vi ser nu på to elementer $x_1,x_2\in I_1$, hvorom det gælder, at $x_1<x_2$. Vi foretager nu en række omskrivninger:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow$ [Vi må dividere med x_2 på begge sider uden at vende ulighedstegnet, da $x_2>0$]

$\frac{x_1}{x_2}<1 \Leftrightarrow$ [Vi dividerer med x_1 uden at vende ulighedstegnet]

$\frac{1}{x_2}<\frac{1}{x_1}$ dvs. $f(x_1)>f(x_2)$

Vi ser altså, at betingelsen fra Definition 4 er opfyldt, og *f* er derfor strengt aftagende i intervallet $\left]0,\infty\right[$.

$x<0$ (dvs. $I_2=\left]-\infty,0\right[$): Vi ser nu på to elementer $x_1,x_2\in I_2$, hvorom det gælder, at $x_1<x_2$. Vi foretager nu en række omskrivninger:

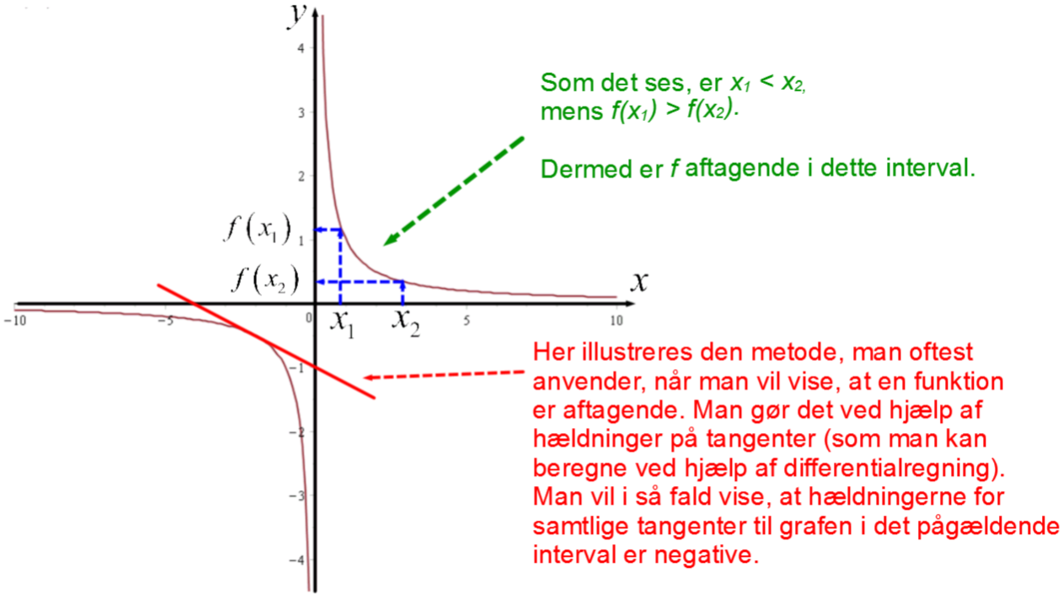
$x_1<x_2 \Leftrightarrow$ [Vi må dividere med x_2 på begge sider, når vi vender ulighedstegnet, da $x_2<0$]

$\frac{x_1}{x_2}>1 \Leftrightarrow$ [Vi dividerer med x_1 og vender igen ulighedstegnet, da også $x_1<0$]

$\frac{1}{x_2}<\frac{1}{x_1}$ dvs. $f(x_1)>f(x_2)$

Vi ser altså igen, at betingelsen fra Definition 4 er opfyldt, og *f* er derfor strengt aftagende i intervallet $\left]-\infty,0\right[$.

Vi har nu set, at *f* er strengt aftagende i begge de intervaller, der forenet udgør definitionsmængden, og det kunne måske derfor være fristende at hævde, at *f* er strengt aftagende. Men det er *f* IKKE. For prøv at se, hvad der sker, hvis man tager udgangspunkt i et positivt og et negativt tal.



Bemærk, at man til at bevise, at en funktion er voksende eller aftagende i et interval, altså både kan anvende selve definitionerne og en metode med at kigge på tangenthældninger.
Det er tangenthældningsmetoden, du ender med altid at skulle bruge (når vi har gennemgået differentialregning).

Øvelse 3: Vis, at funktionen $g: x \mapsto -\frac{1}{x}$ er voksende i både intervallet $]0,\infty[$ og $]-\infty,0[$, men ikke voksende (dvs. ikke voksende i hele sin definitionsmængde).

Eksempel 8: Vi ser på funktionen $f: x \mapsto x^2$; $Dm(f) = \mathbb{R}$.

Vi ser på to intervaller hver for sig:

$I_1 = [0,\infty[$: Lad altså $x_1, x_2 \in I_1$ og $x_1 < x_2$.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 < x_2 \cdot x_2 \\ x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 \cdot x_1 < x_2 \cdot x_1 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 \cdot x_1 < x_1 \cdot x_2 < x_2 \cdot x_2$$

I den øverste ulighed ganges på begge sider med det positive tal x_2.

I den nederste ulighed ganges på begge sider med det positive tal x_1.

Vi har hermed fået dannet to uligheder, og da faktorernes orden er ligegyldig, er de to gule udtryk ens. Dermed kan vi opstille de tre forskellige udtryk i ordnet rækkefølge, og vi ser altså, at $x_1^2 < x_2^2$.

Hvis $x_1 = 0$, gælder den nederste ulighed ikke, men da $x_2^2 > 0$ gælder konklusionen stadig. I dette interval er *f* altså (strengt) voksende.

$I_2 =]-\infty,0]$: Lad altså $x_1, x_2 \in I_2$ og $x_1 < x_2$.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 > x_2 \cdot x_2 \\ x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 \cdot x_1 > x_2 \cdot x_1 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 \cdot x_1 > x_1 \cdot x_2 > x_2 \cdot x_2$$

Vores ulighedstegn vendes, når vi ganger med x_1 og x_2, og dermed ender vi med $x_1^2 > x_2^2$ og konklusionen, at *f* er aftagende i $I_2 =]-\infty,0]$.

Denne gang er det x_2, der kan være 0. Overvej, hvorfor den endelige konklusion stadig holder!

Vi skriver altså nu:
f er aftagende i intervallet $]-\infty,0]$ og voksende i intervallet $[0,\infty[$.

Bemærk, at det er **funktionen**, der er voksende. Det er IKKE grafen (jf. definitionerne).

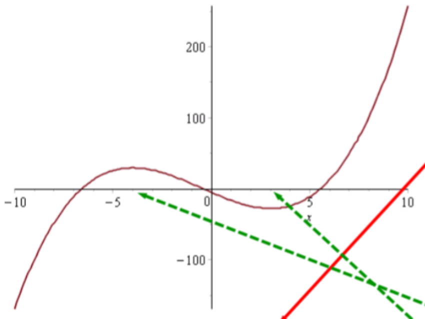
Bemærk også en central pointe:
0 er med i begge intervaller i Eksempel 8 (både i I_1 og I_2). Det følger direkte af vores definitioner.

Eksempel 9: Vi ser på funktionen *f* givet ved $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 12x - 5$; $Dm(f) = \mathbb{R}$

Denne gang arbejder vi grafisk ved hjælp af Maple.

restart
with(Gym) :
$f := x \rightarrow \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 12\,x - 5 :$
$plot(f(x))$

Med 'maximize' finder man den største funktionsværdi inden for et givet interval, der angives ved *x* = ...
Hvis man også gerne vil finde det såkaldte lokale maksimumssted (*x*-værdien), skal man tilføje 'location'.



'minimize' fungerer på samme måde. Her finder man bare den mindste værdi og med 'location' stedet for den mindste værdi.

$maximize(f(x), x = -8..-2, location) = \frac{89}{3}, \left\{\left[\{x = -4\}, \frac{89}{3}\right]\right\}$

$minimize(f(x), x = 0..5, location) = -\frac{55}{2}, \left\{\left[\{x = 3\}, -\frac{55}{2}\right]\right\}$

Vi tillader os nu (hvilket du ikke må gøre, når du har lært differentialregning) at drage en konklusion på baggrund af, hvad vi kan se med vores øjne på grafen, nemlig at:

f er voksende i $]-\infty, -4]$, aftagende i $[-4, 3]$ og voksende i $[3, \infty[$

Bemærk, at begge tallene -4 og 3 er med i to intervaller.

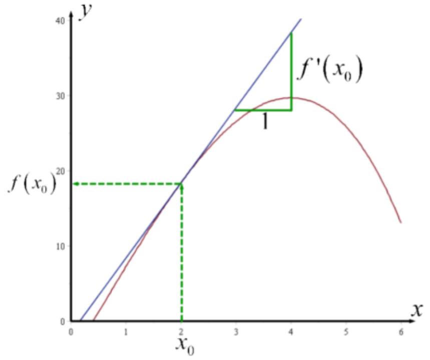
Når man anvender *maximize* og *minimize*, kigger man på grafen og finder et passende interval, der skal søges inden for. Intervallet skal altså være så stort, at man er sikker på, at man får det søgte punkt med, men det må ikke være **for** stort. For prøv at overveje (eller afprøve), hvad der var sket, hvis du havde anvendt intervallet $x = -8..10$ ovenfor i udtrykket med *maximize*.

Når man – som ovenfor – angiver de størst mulige intervaller, hvor en funktion er voksende og aftagende, siger man, at man bestemmer en funktions *monotoniforhold*.

Opgaverne 603*

Som foreløbig afslutning på behandlingen af funktioners monotoniforhold ses nu på den forbindelse mellem tangenters hældning og funktioners monotoniforhold, som du altid skal anvende, når du bliver bedt om at bestemme sidstnævnte.

For at forstå følgende sætninger skal du vide, at *den afledede funktion* $f'(x)$ *af f* er en funktion, der hvert sted angiver hældningen for den tangent til grafen for *f*, der tangerer grafen det pågældende sted.



For hvert argument x_0 har man altså, at $f(x_0)$ angiver funktionsværdien, mens $f'(x_0)$ angiver hældningen for den tangent, der rører grafen i punktet $(x_0, f(x_0))$.

Sætning 1: Lad f være en funktion og I et interval, hvori f er defineret. Der gælder så:

$$f \text{ er konstant i } I \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in I : f'(x) = 0 .$$

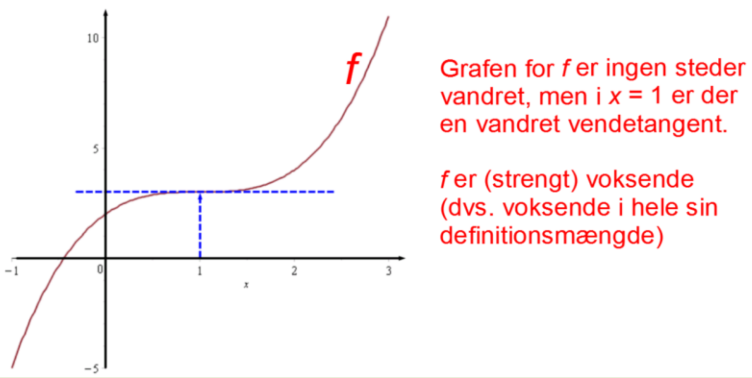
Sætning 2: Lad f være en funktion og I et interval, hvori f er defineret. Hvis f ikke er konstant i et eneste delinterval af I, gælder der:

$$f \text{ er voksende i } I \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in I : f'(x) \geq 0$$

$$f \text{ er aftagende i } I \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in I : f'(x) \leq 0$$

Bemærk den meget vigtige pointe i Sætning 2's ordlyd. Der står ”delinterval”. Dvs. grafen for f må ikke på noget tidspunkt være vandret. Men der må gerne være en vandret tangent i enkelte **punkter**! For et punkt er ikke et delinterval. Den afledede funktion må altså gerne være nul i enkelte punkter.

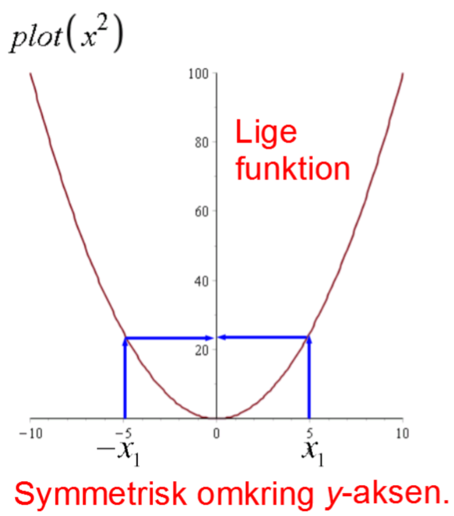
Eksempel 10:

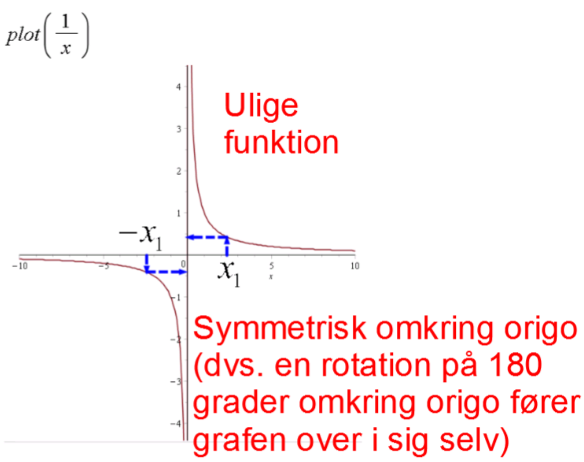


SÆRLIGE FUNKTIONSNAVNE

Definition 3,4: En *lige funktion* er en funktion f, hvorom det gælder: $\forall x \in Dm(f) : f(-x) = f(x)$.

En *ulige funktion* er en funktion f, hvorom det gælder: $\forall x \in Dm(f) : f(-x) = -f(x)$.





Ovenstående er to standardeksempler på henholdsvis en *lige* og en *ulige* funktion.

Det gælder generelt (det følger af Definition 3,4), at lige funktioners grafer er symmetriske omkring y-aksen, mens ulige funktioners grafer er symmetriske omkring origo.

Opgaverne 604*

Vi skal nu se på forskellige måder at danne nye funktioner ud fra givne funktioner. Det er vigtigt, at du ikke gør definitionen mere indviklet, end den er. For den kan godt se meget kompliceret ud med en masse definitionsmængder. Prøv hele tiden at se, hvorfor det giver sig selv med disse mængder. F.eks. indfører vi *sumfunktionen* $(f+g)$, der blot er den funktion, der lægger funktionsværdierne sammen $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$. Og når sætningen så siger, at $Dm(f+g)=Dm(f)\cap Dm(g)$, dvs. at sumfunktionens definitionsmængde er fællesmængden af de to funktioners definitionsmængder, så hænger det sammen med, at hvis sumfunktionen skal give en værdi, skal der være to værdier at lægge sammen, og det er der kun, hvis både *f* og *g* er defineret det pågældende sted.

Definition 4: Lad *f* og *g* være funktioner med definitionsmængderne $Dm(f)$ og $Dm(g)$. Og lad *k* være en konstant. Vi kan så indføre følgende funktioner.

Med definitionsmængden $Dm(f)\cap Dm(g)$:

Funktion multipliceret med konstant $(k\cdot f)$ bestemt ved $(k\cdot f)(x)=k\cdot f(x)$

Sumfunktionen $(f+g)$ bestemt ved: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$.

Differensfunktionen $(f-g)$ bestemt ved: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

Produktfunktionen $(f\cdot g)$ bestemt ved: $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$

Kvotientfunktionen $\left(\frac{f}{g}\right)$ med $Dm\left(\frac{f}{g}\right)=\left(Dm(f)\cap Dm(g)\right)\setminus\{x\mid g(x)=0\}$ bestemt ved

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

Den sammensatte funktion $(f\circ g)$ med $Dm(f\circ g)=\{x\in Dm(g)\mid g(x)\in Dm(f)\}$ bestemt ved

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$

Eksempel 11: Vi ser på funktionerne *f* og *g* givet ved $f(x)=\sqrt{x}$ og $g(x)=\dfrac{1}{2}x-3$.

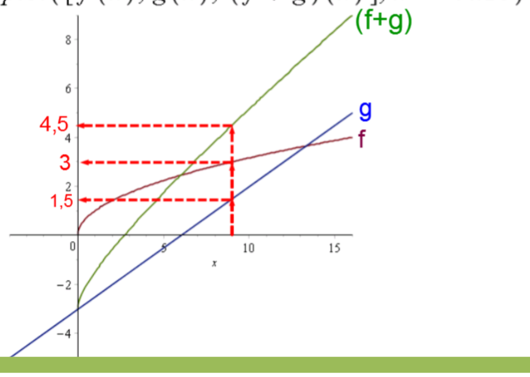
Forskriften for sumfunktionen $(f+g)$ er så $(f+g)(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}x-3$.

Grafisk får man:

$f := x \rightarrow \sqrt{x}$:

$g := x \rightarrow \dfrac{1}{2}x - 3$:

$plot([f(x), g(x), (f+g)(x)], x=-4..16)$



Her er to funktioner og deres sumfunktion plottet. Bemærk, at sumfunktionen kun er defineret for ikke-negative tal, da *f* kun er defineret for disse.

Læg mærke til, hvordan funktionsværdien for *(f+g)* hvert sted er summen af de to funktioners værdier.

Eksempel 12: Vi ser på funktionerne *f* og *g* givet ved $f(x)=x^2$ og $g(x)=3x-4$.

Så bliver differensfunktionen $(f-g)$ givet ved $(f-g)(x)=x^2-3x+4$.

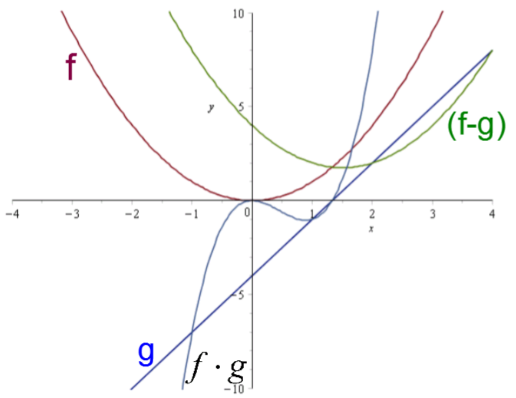
Og produktfunktionen $(f\cdot g)$ gives ved $(f\cdot g)(x)=x^2\cdot(3x-4)=3x^3-4x^2$

Grafisk ser det ud på følgende måde:

$f(x) := x^2$:

$g(x) := 3x - 4$:

$plot([f(x), g(x), (f-g)(x), (f\cdot g)(x)], x=-4..4, y=-10..10)$



Prøv at udvælge nogle steder og træk funktionsværdierne fra hinanden eller multiplicer dem, så du kan se, hvordan de ekstra grafer er fremkommet.

Maple anvender igen den rigtige notation. Dvs. du kan definere to funktioner og efterfølgende se, at Maple "forstår" den rigtige opskrivning:

$f := x \rightarrow 2^x$:

$g := x \rightarrow 3x + 5$:

$(f+g)(x) = 2^x + 3x + 5$

$(f-g)(x) = 2^x - 3x - 5$

$(f\cdot g)(x) = 2^x\,(3x+5)$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{2^x}{3x+5}$

Opgaverne 605*

Vi skal bruge ovenstående under differentialregning, da vi skal lære at differentiere alle ”almindelige” funktioner.

Se f.eks. på $f: x \mapsto (5x-2)\cdot 7^x$ eller $g: x \mapsto \sqrt{x}\cdot \sin(x)$ eller $h: x \mapsto x^4 - 3x^5 + 2x^2 + 7x - 3$.

Det ville være håbløst at skulle lære at differentiere alle sådanne funktioner. I stedet lærer man at differentiere standardfunktioner $\left(x^n, \sin(x), a^x, \ldots\right)$, og samtidig lærer man regler for, hvordan man differentierer sumfunktioner, differensfunktioner, produktfunktioner, kvotientfunktioner og sammensatte funktioner.

Sammensatte funktioner

Definition 4 nævner også *sammensatte funktioner*. Vi begynder med et konkret eksempel:

Eksempel 13: Vi ser på funktionerne *f* og *g* givet ved:

$$f(x) = \sqrt{x} \; ; \; Dm(f) = [0, \infty[\qquad \text{og} \qquad g(x) = x^2 + 9 \; ; \; Dm(g) = \mathbb{R}$$

Vi vil gerne finde funktionsudtrykket for den sammensatte funktion $f \circ g$ og benytter først definitionen direkte:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(x^2 + 9\right) = \sqrt{x^2 + 9}$$

Dette er vores definition.

Her anvender man funktionsforskriften for *g*. Husk, at det jo netop er en identitet, dvs. du kan erstatte venstresiden med højresiden.

Her lader man *f* virke på argumentet x^2+9. Dvs. man indsætter (x^2+9) alle de steder, hvor der står *x* i funktionsforskriften for *f*.

Vi er altså kommet frem til, at den sammensatte funktion $f \circ g$ har forskriften:

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 9}$$

Dette er som sagt en sammensat funktion. Men bemærk, at det jo også bare er en helt almindelig funktion. Du ville næppe have syntes, at der var noget specielt med funktionen *h*, hvis du fik forskriften $h(x) = \sqrt{x^2 + 9}$. Så hvorfor indfører man overhovedet dette ekstra begreb?

Der er to grunde til det:
Den ene er, at vi skal bruge det til snart at indføre det meget vigtige begreb *omvendt funktion*.
Den anden er igen differentialregning. Præcis som med sum-, differens-, produkt- og kvotientfunktioner findes der en regel for differentiation af en sammensat funktion, og når man anvender den, kan man gå fra at kunne differentiere $\sqrt{x}$ og $x^2 + 9$ hver for sig til at kunne differentiere $\sqrt{x^2 + 9}$.

Lad os se på definitionsmængden for $f \circ g$. Ifølge vores definition skal vi finde alle de argumenter fra *g*’s definitionsmængde, hvis billeder ligger i *f* ’s definitionsmængde. *f* ’s definitionsmængde er de ikke-negative tal, og da $x^2 + 9$ giver noget positivt, uanset hvilket reelt tal, der indsættes, er der ingen argumenter i *g*’s definitionsmængde, der giver problemer. Så vi har $Dm(f \circ g) = \mathbb{R}$.

Eksempel 14: Vi ser på funktionerne f og g bestemt ved $f(x)=3^x$ og $g(x)=2x-5$.

Definitionsmængderne for begge funktioner er alle reelle tal.

Denne gang vil vi bestemme både $f\circ g$ og $g\circ f$. På den måde kan vi også få en idé om, hvorvidt den kommutative lov gælder for sammensætning af funktioner.

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x-5)=3^{2x-5}$$
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3^x)=2\cdot 3^x-5$$

Tjek, at du har styr på hvert enkelt lighedstegn.

Eksempel 14 fortæller os en vigtig ting: **Den kommutative lov gælder IKKE for sammensætning af funktioner.** Man får altså ikke nødvendigvis det samme, når man finder $f\circ g$ og $g\circ f$.

I den sammensatte funktion $f\circ g$ kaldes g for *den indre funktion* og f for *den ydre funktion*.

Det er helt centralt for at kunne lære at differentiere sammensatte funktioner, at man er i stand til at skelne mellem den indre og den ydre funktion.

Maple anvender (igen) den rigtige notation. Den forstår både bollen (den finder du under ”common Symbols”. Den hedder ”compfn”. Du kan se navnet, hvis du går hen på den og lader pilen stå et øjeblik. Pas på ikke at forveksle den med gradtegnet.) og vores anden skrivemåde. Vi kan se det med vores kendte funktioner fra Eksempel 14:

restart

with(*Gym*) :

$f(x) := 3^x$:

$g(x) := 2x-5$:

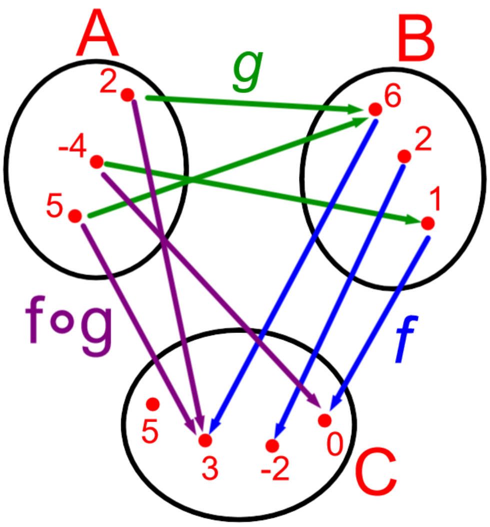
$(f\circ g)(x) = 3^{2x-5}$

$(g\circ f)(x) = 2\,3^x-5$

$f(g(x)) = 3^{2x-5}$

$g(f(x)) = 2\,3^x-5$

Hidtil har vi behandlet sammensatte funktioner alene ud fra funktionsforskrifter. Og i princippet behøver man ikke mere. Men for at give en bedre forståelse af begrebet skal vi nu betragte det fra et par andre synsvinkler. Bemærk altså, at det følgende ikke er noget andet end det, vi allerede har gennemgået. Det er bare set fra en anden synsvinkel.



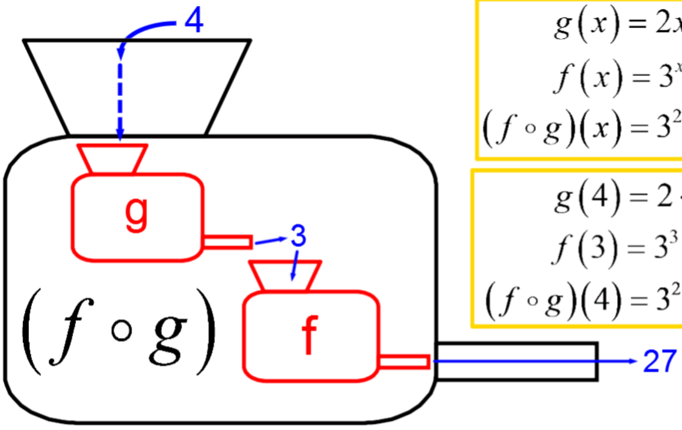
Vi har her en funktion g, der afbilder fra A til B, og en funktion f, der afbilder fra B til C. Funktionen $f\circ g$ afbilder fra A til C.

Når g virker, afbildes 2 over i 6. 6 afbildes så over i 3, når f virker. Når $f\circ g$ virker, afbildes 2 direkte over i 3.

Bemærk igen rækkefølgen: $f\circ g$ virker på samme måde, som hvis man først lader g virke og derefter f virke på g’s funktionsværdi.

Endnu en pointe er illustreret på figuren. Da $2\notin g(A)$, dvs. da 2 ikke tilhører g’s værdimængde, ender -2 med ikke at tilhøre $Vm(f\circ g)$, selvom $-2\in Vm(f)$.

Illustreret ved maskiner fungerer sammensatte funktioner på følgende måde:



$$g(x)=2x-5$$
$$f(x)=3^x$$
$$(f\circ g)(x)=3^{2x-5}$$

$$g(4)=2\cdot 4-5=3$$
$$f(3)=3^3=27$$
$$(f\circ g)(4)=3^{2\cdot 4-5}=3^3=27$$

Bemærk, at det er billedet fra *g*, der smides ind i *f*, når man skal se, hvad $(f\circ g)(4)$ er. Først virker den indre funktion *g* på 4, der afbildes over i 3. Derefter virker *f* på 3, der afbildes over i 27. Dette sker på én gang, hvis man benytter den sammensatte funktion $f\circ g$. Den afbilder 4 over i 27.

Funktioner kan godt sættes sammen med sig selv, og man kan også sætte 3 eller flere funktioner sammen (lige som man kan addere og multiplicere 3 eller flere funktioner). Vi har så:

$$(f\circ f)(x)=f\big(f(x)\big) \qquad (f\circ g\circ h)(x)=f\Big(g\big(h(x)\big)\Big)$$

Opgaverne 606*

Eksempel 15: Vi ser på funktionerne $f:x\mapsto\sqrt{x}$, $g:x\mapsto x+9$ og $h:x\mapsto x^2$. Vi har så:

$$(f\circ f)(x)=f\big(f(x)\big)=f\left(\sqrt{x}\right)=\sqrt{\sqrt{x}}=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{x}$$

$$(g\circ g)(x)=g\big(g(x)\big)=g(x+9)=(x+9)+9=x+18$$

$$(h\circ h)(x)=h\big(h(x)\big)=h\left(x^2\right)=\left(x^2\right)^2=x^{2\cdot 2}=x^4$$

Bemærk funktionen *g*, der fungerer ved at lægge 9 til argumentet. Når du sammensætter den med sig selv, får du den til at virke to gange, og dermed lægger den sammensatte funktion 18 til argumentet.

$$(f\circ g\circ h)(x)=f\Big(g\big(h(x)\big)\Big)=f\Big(g\left(x^2\right)\Big)=f\left(x^2+9\right)=\sqrt{x^2+9}$$

Læg godt mærke til hvert lighedstegn. Tjek, at du forstår hvert skridt.

Prøv at sammenligne resultaterne fra eksemplerne 13 og 15. Vi fik:

Eksempel 13: $(f\circ g)(x)=\sqrt{x^2+9}$ Eksempel 15: $(f\circ g\circ h)(x)=\sqrt{x^2+9}$

Vi har altså set, at $\sqrt{x^2+9}$ både kan være en sammensætning af 2 og 3 funktioner. Hvis du får stukket $\sqrt{x^2+9}$ i hovedet og bliver bedt om at finde ud af, hvad den indre funktion er (hvilket er nødvendigt, når du skal differentiere den), er svaret altså ikke entydigt. Faktisk kunne $\sqrt{x^2+9}$ også være $\big(f\circ(g+h)\big)(x)$. Prøv selv at overveje, hvad *f*, *g* og *h* skal være.

Ovenstående kan lyde som et problem, men det er det ikke. Det betyder bare, at du i nogle tilfælde vil kunne bruge forskellige regler til at komme frem til det rigtige resultat. Hvis du f.eks. er i stand til at differentiere $\sqrt{x}$ og x^2+9, så ser du $\sqrt{x^2+9}$ som en sammensætning af disse funktioner. Hvis du kun er i stand til at differentiere $\sqrt{x}$, x^2 og $x+9$, så ser du funktionen som sammensat af tre funktioner.

Det er denne ”afkodning” af sammensatte funktioner, som du får brug for at kunne. Når du skal gennemskue en sammensat funktion og se, hvad der er den indre funktion, og hvad der er den ydre funktion, skal du kigge på din variabel og se i hvilken rækkefølge, du ville foretage de enkelte operationer, hvis du skulle regne i hånden eller med en gammeldags lommeregner (I Maple opskriver man jo bare hele udtrykket på én gang). Hvis man f.eks. har $\sqrt{3x-7}$, skal man først gange med 3, derefter trække 7 fra værdien og endelig uddrage kvadratroden af værdien. Du kan ikke først uddrage kvadratroden, for du har ikke noget at uddrage den af, når du ikke har udregnet værdien af $3x-7$.

Igen var der mulighed for at opdele i to eller tre funktioner, men da du lærer at differentiere $3x-7$, vil du nøjes med at opdele i to.

Følgende eksempel behandler opdelingen af sammensatte funktioner:

Eksempel 16: Først skrives forskriften for den sammensatte funktion. Derefter opdeles den:

$f_1(x)=(4x+8)^5$	Indre: $x\mapsto 4x+8$		Ydre: $x\mapsto x^5$
$f_2(x)=\sin(x^2)$	Indre: $x\mapsto x^2$		Ydre: $x\mapsto \sin(x)$
$f_3(x)=\sin^2(x)$	Indre: $x\mapsto \sin(x)$		Ydre: $x\mapsto x^2$
$f_4(x)=\dfrac{1}{\sin(4^x)}$	Indre: $x\mapsto 4^x$	Mellem: $x\mapsto \sin(x)$	Ydre: $x\mapsto \dfrac{1}{x}$
$f_5(x)=\sqrt[4]{\dfrac{5}{x^2+5x-3}}$	Indre: $x\mapsto x^2+5x-3$	Mellem: $x\mapsto \dfrac{5}{x}$	Ydre: $x\mapsto \sqrt[4]{x}$

Lad os som sidste eksempel se på et tilfælde, der leder frem mod næste begreb:

Eksempel 17: Vi ser på funktionerne *f* og *g* givet ved $f(x)=x^3+7$ og $g(x)=\sqrt[3]{x-7}$.

Vi finder følgende sammensatte funktioner:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\sqrt[3]{x-7}\right)=\left(\sqrt[3]{x-7}\right)^3+7=(x-7)+7=x$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(x^3+7\right)=\sqrt[3]{\left(x^3+7\right)-7}=\sqrt[3]{x^3+7-7}=\sqrt[3]{x^3}=x$$

Vi bemærker her to ting:

1) Vi får det samme, når vi finder $f\circ g$ og $g\circ f$, hvilket, som vi allerede har set, ikke gælder generelt.
2) Vi får en identitetsfunktion, dvs. alle vores argumenter afbildes over i sig selv.

Vi skal nu se, at vi har at gøre med såkaldt *omvendte funktioner*.

Opgaverne 607*

Omvendte funktioner

Vi skal nu til at se på omvendte funktioner og får derfor brug for først at få defineret en speciel slags funktion:

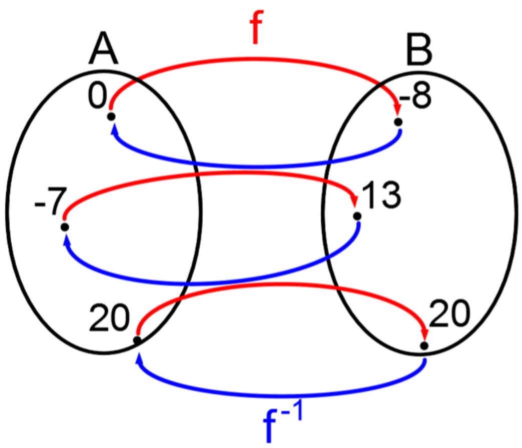
Definition 5: En funktion $f: A \mapsto A$ bestemt ved forskriften $f(x) = x$ kaldes *en identitetsfunktion*, og den betegnes id_A.

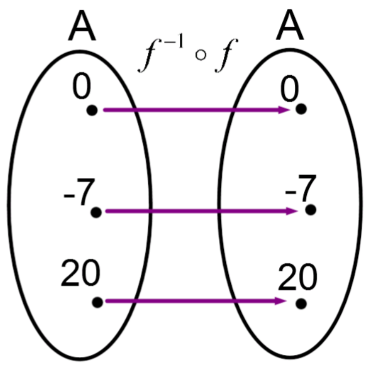
Det er altså en funktion, der ikke gør noget ved det argument, den virker på. Ethvert x afbildes over i sig selv.

Når det ikke kaldes *identitetsfunktion**en***, skyldes det definitionsmængden A, der kan variere. Én identitetsfunktion kan f.eks. have de positive reelle tal som definitionsmængde, mens en anden kan have alle reelle tal. Fælles for enhver identitetsfunktion er dog, at dens værdimængde er den samme som definitionsmængden (overvej selv hvorfor).

Måske lyder det som en meget, meget kedelig funktionstype. Men det er det ikke (tallene 0 og 1 er jo heller ikke kedelige, selvom de ved henholdsvis addition og multiplikation ikke gør noget).

Vi skal nu have defineret begrebet *omvendt funktion.* Givet en funktion f er den omvendte funktion f^{-1} kort sagt den funktion, der ophæver virkningen af f. Dvs. hvis man først lader f virke på et argument og efterfølgende f^{-1} virke på værdien, så får man det oprindelige argument. Det kan illustreres på følgende måde:





Som tegningen viser, afbilder f tallet 0 over i -8, mens den omvendte funktion f^{-1} afbilder -8 over i 0. Derfor afbilder $f^{-1} \circ f$ tallet 0 over i 0.

Som illustreret har man altså $f^{-1} \circ f = id_A$.

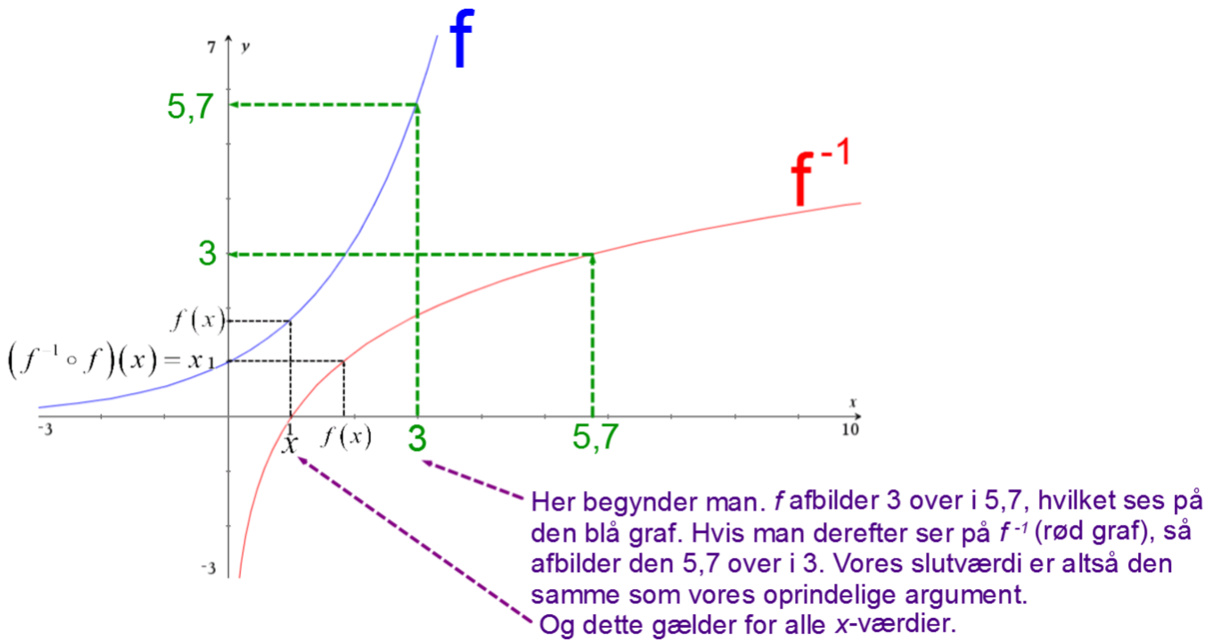
Illustreret med en tabel har man:

f (

x	0	0,5	1,3	1,9
y	8	13	27	52

) f-1

Dvs. hvis funktionen f afbilder 1,3 over i 27, så afbilder f^{-1} 27 over i 1,3. Man kan altså sige, at x- og y-værdien skifter rolle, hvilket også ses grafisk:



Vi er nu klar til en mere formel definition:

Definition 6: En funktion $f : A \mapsto f(A)$ kaldes *invertibel*, hvis der findes en funktion $f^{-1} : f(A) \mapsto A$, hvorom det gælder, at:

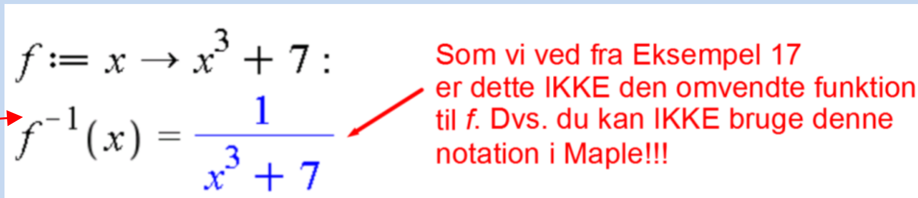
$$f^{-1} \circ f = id_A \quad \text{dvs.} \quad \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$$

Man kalder i så fald f^{-1} for *den omvendte funktion til f* eller *den inverse funktion til f.*

Det er vigtigt at være opmærksom på, at vores notation her **IKKE** betyder det samme, som når vi arbejder med tal (potensregneregler). Dvs. som udgangspunkt gælder $f^{-1} \neq \dfrac{1}{f}$.

Desuden er her en situation, hvor Maple **IKKE** anvender vores notation:

FORKERT MAPLE-INDTASTNING



Det fremgår implicit af Definition 6, at det ikke er alle funktioner, der er invertible. Dvs. det er ikke alle funktioner, der har en omvendt funktion. Ordet "den" fortæller, at hvis *f* har en omvendt funktion, så har den kun én omvendt funktion (se den følgende sætning).

"Invertibel" og "invers" er matematiske begreber, der anvendes i flere sammenhænge, bl.a. når man regner med såkaldte *matricer*. Når man har forstået begrebet i forbindelse med funktioner, kan man let overføre det til andre områder inden for matematik.

Vi samler nu nogle vigtige pointer i én sætning:

Sætning 3: Om en funktion $f: A \mapsto f(A)$ gælder:

- *f* er bijektiv, netop hvis *f* er injektiv. Og *f* er invertibel, netop hvis *f* er bijektiv.
- Hvis *f* er invertibel, findes der netop én omvendt funktion f^{-1} til *f*.
- Hvis f^{-1} er den omvendte funktion til *f*, er *f* den omvendte funktion til f^{-1}, og man siger derfor, at *f* og f^{-1} er hinandens omvendte funktioner.

$$f^{-1} \circ f = id_A \quad \text{og} \quad f \circ f^{-1} = id_{f(A)}$$

- Der gælder $Dm\left(f^{-1}\right) = Vm(f)$ og $Vm\left(f^{-1}\right) = Dm(f)$.

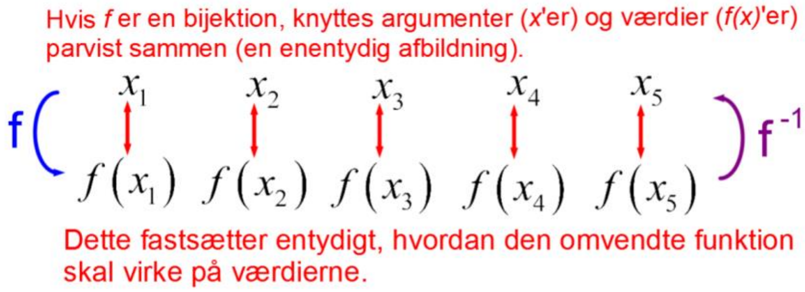
Bevis 3: De 4 punkter i Sætning 3 er tæt forbundet. For at bevise dem benytter vi definitionerne 1, 2 og 6.

Bemærk først udgangspunktet for Definition 6 og Sætning 3, der er en funktion $f: A \mapsto f(A)$. Dvs. vi har fra start sikret os, at værdimængden svarer til kodomænet (for i skrivemåden $f: A \mapsto B$ er *B* jo kodomænet, og vi kan skrive værdimængden som $f(A)$).

Dermed er *f* pr. definition surjektiv. Da en bijektion er en funktion, der både er injektiv og surjektiv, følger det altså, at *f* er en bijektion, netop hvis *f* er en injektion.

Hvis *f* ikke er injektiv (og altså heller ikke bijektiv), så findes der to forskellige argumenter $x_1, x_2 \in A$, hvor $f(x_1) = f(x_2)$, dvs. to argumenter giver samme funktionsværdi. Men så kan *f* ikke være invertibel, for en evt. omvendt funktion f^{-1}skulle virke på denne funktionsværdi og afbilde den over i …ja, skulle den afbilde den over i x_1 eller x_2? Den skulle jo gøre begge dele, hvis $f^{-1} \circ f = id_A$, men det må den ikke, for så er den ikke en funktion.

Hvis *f* er injektiv, så er *f* invertibel. For *f* er som nævnt bijektiv, dvs. elementerne i *A* og $f(A)$ er knyttet sammen parvis (en enentydig afbildning):



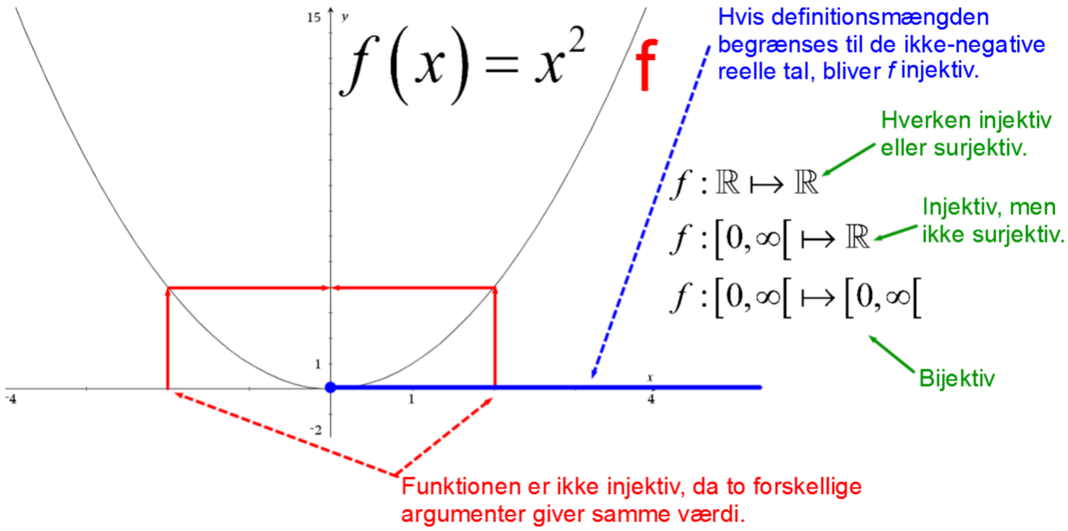
Og den omvendte funktion er så simpelthen bestemt ved, at den afbilder $f(x)$ tilbage i *x*. Heraf følger også, at *f* og f^{-1} bytter definitions- og værdimængder. Og det følger ligeledes, at den omvendte funktion er entydig.

Og endelig følger det også, at $f \circ f^{-1} = id_{f(A)}$. For som vist på ovenstående tegning, vil f^{-1} f.eks. afbilde argumentet $f(x_4)$ over i værdien x_4, hvorefter *f* vil afbilde argumentet x_4 tilbage over i $f(x_4)$.

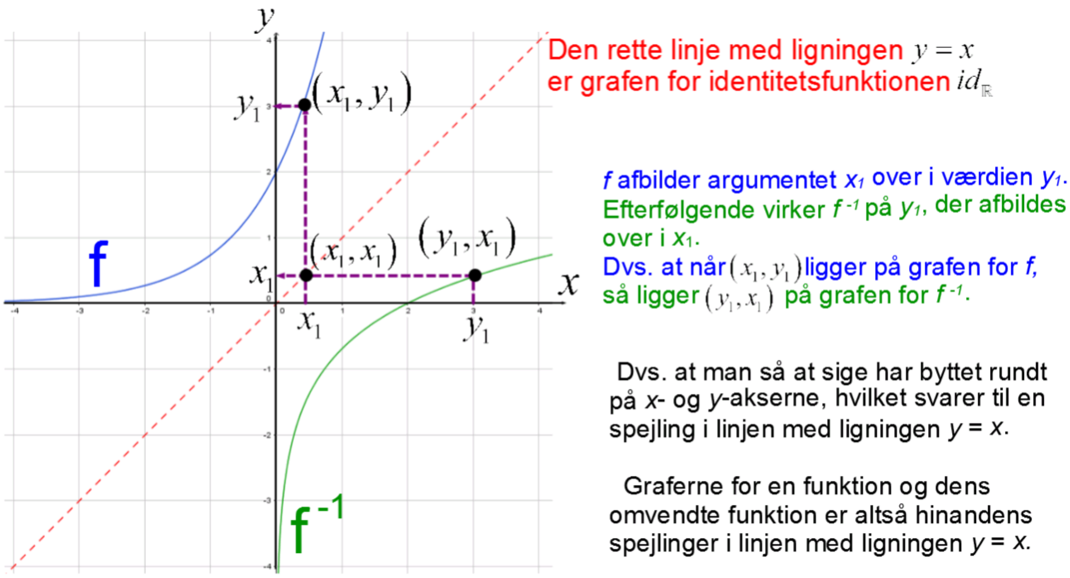
Bemærk, at sætningen siger $f^{-1} \circ f = id_A$ og $f \circ f^{-1} = id_{f(A)}$. Dvs. det er ikke nødvendigvis de samme identitetsfunktioner, vi har med at gøre. Det afhænger af, om definitionsmængden og værdimængden for *f* er ens. Fra vores behandling af uendelighedsbegrebet ved vi, at definitionsmængden og værdimængden må være lige store (have samme mægtighed), men her skal vi huske på, at vi også f.eks. viste, at der er lige så mange positive reelle tal, som der er reelle tal.

En anden vigtig pointe er, at vi hele tiden har taget udgangspunkt i surjektive funktioner, dvs. vores værdimængder har hele tiden svaret til kodomænet. Det kan måske virke, som om det begrænser vores muligheder for at finde invertible funktioner, men det gør det ikke. For vi kan tage en hvilken som helst funktion og gøre den surjektiv ved simpelthen selv at begrænse kodomænet til værdimængden. Hvis vi f.eks. har $f : [0,\infty[\mapsto \mathbb{R}$ bestemt ved $f(x) = \sqrt{x}$, hvor $Vm(f) = [0,\infty[$, så vælger vi bare den surjektive funktion $g : [0,\infty[\mapsto [0,\infty[$ bestemt ved $g(x) = \sqrt{x}$ i stedet.

Vi kan altså selv sørge for, at vores funktion bliver surjektiv. Tilsvarende kan vi selv ved at begrænse vores definitionsmængde sørge for, at vores funktion bliver injektiv.



Ikke blot bytter en funktion og dens omvendte funktion *Dm* og *Vm*. Deres grafer er hinandens spejlinger i linjen med ligningen $y = x$, da dette også er spejlingen, der bytter rundt på *x*-aksen og *y*-aksen:



Øvelse 4: Argumentér for, at hvis en funktion er voksende, er dens omvendte funktion også voksende. Og hvis en funktion er aftagende, er dens omvendte funktion også aftagende.

Vi ved nu de væsentlige ting omkring omvendte funktioner. Men vi har endnu ikke set, hvordan man bestemmer dem. Til dette kan vi benytte ovenstående figur, der viser, at vi skal bytte rundt på *x*- og *y*-værdier.

Om at bestemme omvendte funktioner til en given funktion

Vores metode til at bestemme den omvendte funktions forskrift er:

1) Vi opskriver vores funktionsforskrift for f, men erstatter $f(x)$ med *y*.
2) Symbolerne *x* og *y* **ombyttes**, så man får et nyt udtryk. Dvs. det er IKKE en matematisk operation. Der sker ingen udregninger. Det er ren symbolombytning.
3) I det nye udtryk isoleres *y*.
4) Til sidst erstattes *y* i det nye udtryk med $f^{-1}(x)$

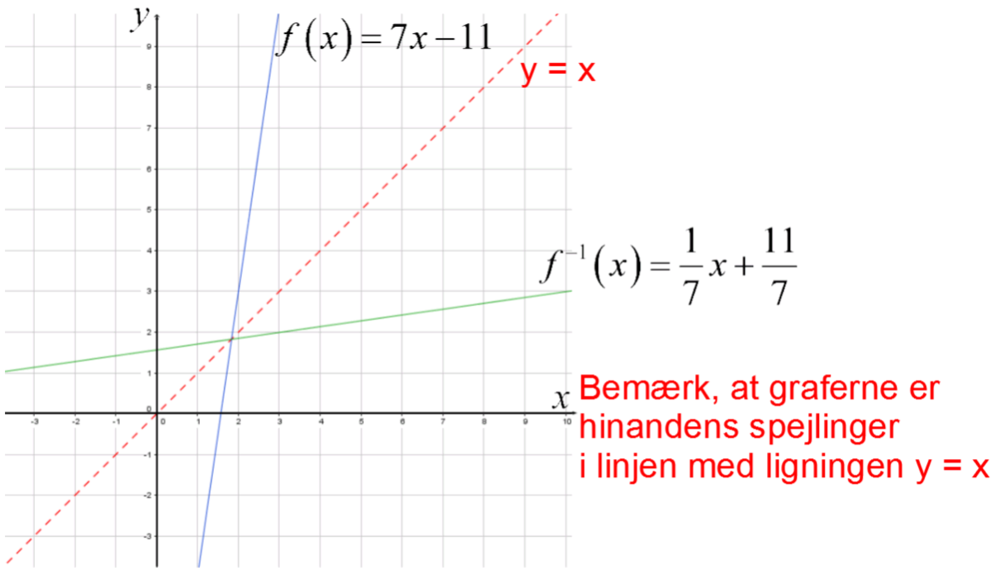
Eksempel 18: Funktionen $f: x \mapsto 7x-11$ er bijektiv (overvej!) med $Dm(f) = Vm(f) = \mathbb{R}$.

Den er derfor invertibel, og vi vil bestemme den omvendte funktions forskrift.
Vi benytter den angivne metode:

1) $y = 7x - 11$
2) $x = 7y - 11$ (Bemærk, der er IKKE foretaget nogen lovlig matematisk operation).
3) $x = 7y - 11 \Leftrightarrow 7y = x + 11 \Leftrightarrow y = \frac{1}{7}x + \frac{11}{7}$ (Her anvendes lovlige operationer).
4) $f^{-1}(x) = \frac{1}{7}x + \frac{11}{7}$

Vi har hermed fundet funktionsforskriften for den omvendte funktion f^{-1}. Bemærk, at den (i overensstemmelse med Sætning 3) har $Vm(f^{-1}) = Dm(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

Grafisk ser det således ud:



Eksempel 19: Vi ser på funktionen *g* givet ved forskriften $g(x) = 4x^3$.

Den er bijektiv med $Dm(g) = Vm(g) = \mathbb{R}$ (overvej dette!).

Vi har altså en invertibel funktion, og vi vil gerne bestemme den omvendte funktion:

1) $y = 4 \cdot x^3$

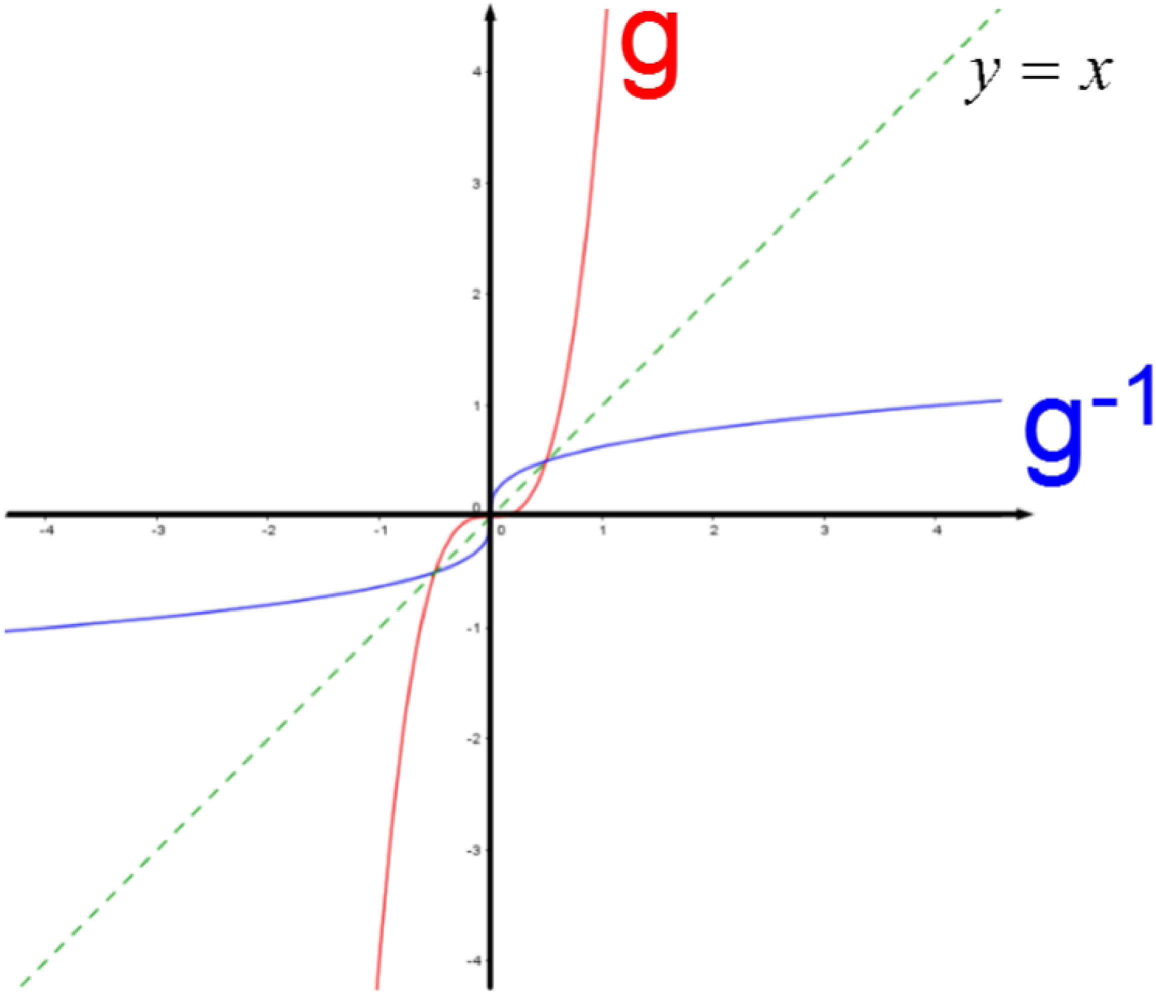
2) $x = 4 \cdot y^3$ (Vi ombytter symbolerne *x* og *y*).

3) $x = 4 \cdot y^3 \Leftrightarrow y^3 = \frac{x}{4} \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{\frac{x}{4}}$

4) $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{4}}$

Vi har hermed fundet forskriften for den omvendte funktion g^{-1}, og vi ved, at $Vm(g^{-1}) = Dm(g^{-1}) = \mathbb{R}$.

Grafisk ser det ud på følgende måde:



De to første eksempler har ikke haft begrænsninger i Dm og Vm. Vi skal nu se to eksempler, hvor vi er nødt til at begrænse vores definitionsmængde for at få bijektive funktioner.

Eksempel 20: Vi ser på funktionen $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ givet ved forskriften $f(x)=x^2$.

Denne funktion er hverken injektiv eller surjektiv.
Den er ikke injektiv, fordi der findes to forskellige *x*-værdier (argumenter), der afbildes over i den samme værdi, f.eks. 5 og -5. Grafisk svarer det til, at der findes en vandret linje, der skærer grafen mere end ét sted.
Den er ikke surjektiv, da værdimængden er alle ikke-negative tal (og altså ikke alle reelle tal).

Men hvis vi ser på $f_1:[0,\infty[\mapsto[0,\infty[$ givet ved forskriften $f_1(x)=x^2$, så har vi en bijektiv funktion med samme funktionsforskrift. Og denne funktion er altså invertibel, så vi kan bestemme den omvendte funktion.

1) $y=x^2$

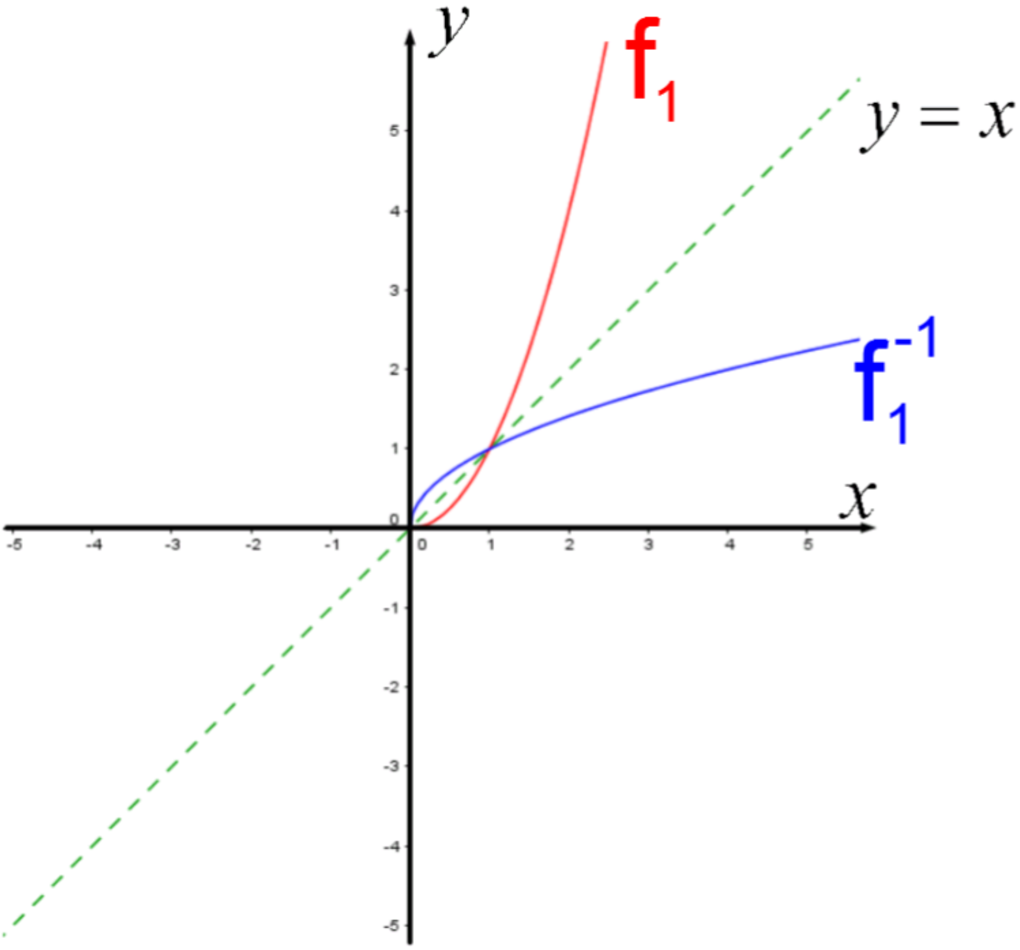
2) $x=y^2$ (Vi ombytter symbolerne *x* og *y*).

3) $x=y^2 \Leftrightarrow y=\sqrt{x}$ (Bemærk, at biimplikationen KUN gælder, fordi vi har begrænset definitionsmængden. Ellers skulle det være $x=y^2 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{x}$)

4) $f_1^{-1}(x)=\sqrt{x}$

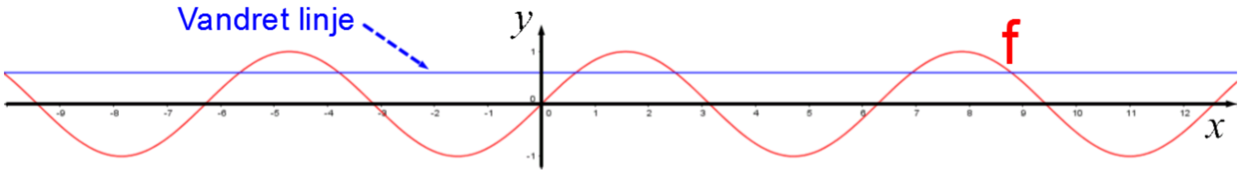
Vi har hermed fundet forskriften for den omvendte funktion f_1^{-1}, og vi ved, at $Vm(f_1^{-1})=Dm(f_1^{-1})=[0,\infty[$.

Grafisk ser det ud på følgende måde:



Eksempel 21: Vi ser på funktionen $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ givet ved forskriften $f(x)=\sin(x)$.

Denne funktion er hverken injektiv eller surjektiv:



Den er ikke injektiv, fordi der findes to forskellige *x*-værdier (argumenter), der afbildes over i den samme værdi, f.eks. 0 og π, der begge afbildes over i 0. Grafisk svarer det til, at der findes en vandret linje, der skærer grafen mere end ét sted (faktisk skærer alle vandrette linjer mellem $y=-1$ og $y=1$ grafen uendelig mange steder).

Funktionen er ikke surjektiv, da $Vm(f)=[-1{,}1]$ og altså ikke alle reelle tal.

Men hvis vi ser på $f_1:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\mapsto[-1{,}1]$ givet ved forskriften $f_1(x)=\sin(x)$, så har vi en bijektiv funktion med samme funktionsforskrift. Og denne funktion er altså invertibel, så vi kan bestemme den omvendte funktion.

1) $y=\sin(x)$

2) $x=\sin(y)$ (Vi ombytter symbolerne *x* og *y*).

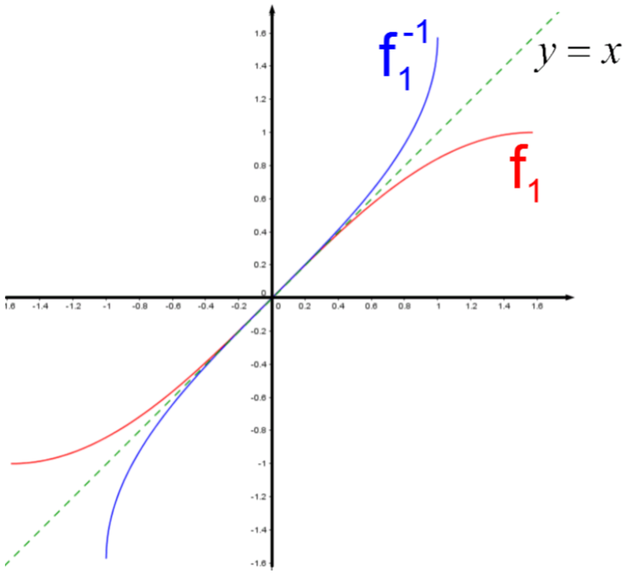
3) $x=\sin(y)\Leftrightarrow y=\sin^{-1}(x)$ (Igen gælder biimplikationen kun, fordi vi har begrænset definitionsmængden og dermed undgår det problem, vi kender fra anvendelsen af sinusrelationerne i trekantopgaver).

4) $f_1^{-1}(x)=\sin^{-1}(x)$

Vi har hermed fundet forskriften for den omvendte funktion f_1^{-1}, og vi ved, at

$Vm\left(f_1^{-1}\right)=Dm(f)=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ og $Dm\left(f_1^{-1}\right)=Vm(f)=[-1{,}1]$

Grafisk ser det ud på følgende måde:



Bemærk, at vi kun kom igennem eksemplerne 18-21, fordi vi allerede kendte de omvendte funktioner, som vi anvendte til at isolere *y*. I eksempel 18 anvendte vi subtraktion og division til at isolere *y*, fordi funktionsudtrykket indeholdt en addition og en multiplikation. I eksemplerne 19 og 20 anvendte vi vores viden om potenser og rødder. Og i eksempel 21 vidste vi, at $\sin^{-1}$ var den omvendte funktion til *sin*.

Så vi kendte altså i forvejen de omvendte funktioner, fordi vi havde defineret dem. Det er altså ikke den teoretiske behandling af omvendte funktioner, der hjælper os til at bestemme disse. Teorien fortæller os kun, hvordan en omvendt funktion "opfører" sig i forhold til den givne funktion.

Funktioner og de tilhørende omvendte funktioner er nogle, vi definerer. Prøv at tænke tilbage på vores definitioner af addition, subtraktion, multiplikation, division, potensopløftning, roduddragning og trigonometriske funktioner. Når vi senere skal indføre logaritmefunktioner, bliver det altså igen gennem definitioner.

Eksempel 22: Vi ser på funktionen $g:\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ med forskriften $g(x) = 5^x$.

Funktionen er injektiv, og da $Vm(g) = \mathbb{R}_+$, er den også surjektiv, dvs. vi har en bijektiv og dermed invertibel funktion.

Vi vil bestemme den omvendte funktion:

1) $y = 5^x$

2) $x = 5^y$ (*x* og *y* ombyttes)

3) Nu skal *y* isoleres: $x = 5^y \Leftrightarrow \ldots$hmmm, hvad gør vi nu? Det hjælper ikke at uddrage den *y*'te rod, for det giver: $x = 5^y \Leftrightarrow \sqrt[y]{x} = 5$, og det bringer os ikke tættere på at have isoleret *y*. Vores problem er, at vi har en eksponentialfunktion, hvor vores variabel står som eksponent (og ikke som rod). Vores løsning er så at definere en funktion, som vi kalder *logaritmefunktionen med grundtallet 5*, og som simpelthen er den omvendte funktion til *eksponentialfunktionen med grundtallet 5*. Vi skriver den $\log_5$, og så kan vi pludselig isolere *y* ved:

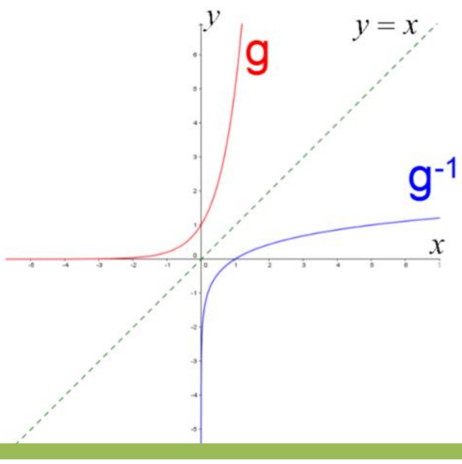
$x = 5^y \Leftrightarrow \log_5(x) = y$

4) $g^{-1}(x) = \log_5(x)$

Vores viden om omvendte funktioner fortæller os så, at:

$$Vm(g^{-1}) = Dm(g) = \mathbb{R} \text{ og } Dm(g^{-1}) = Vm(g) = \mathbb{R}_+$$

Vi ved altså allerede, at logaritmefunktioner kun kan anvendes på positive tal.



Opgaverne 608*

LINEÆRE FUNKTIONER

Der er mange fællestræk mellem lineære sammenhænge og lineære funktioner, så en del af det følgende kender vi allerede, dog med lidt andre notationer.

Vi begynder med at definere:

Definition 7: En *lineær funktion* er en funktion $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ med forskriften $f\left(x\right)=a\cdot x+b$, hvor $a,b\in\mathbb{R}$ er konstanter.

Definitionsmængden for lineære funktioner er som angivet $\mathbb{R}$, men man kan godt i en konkret situation begrænse definitionsmængden. F.eks. hvis man har en situation, hvor *x* betegner en længde og derfor ikke kan være negativ.

Som angivet er kodomænet $\mathbb{R}$. Med mindre $a=0$ vil værdimængden også som udgangspunkt være $\mathbb{R}$, men hvis definitionsmængden begrænses, vil værdimængden automatisk også blive begrænset.

Sætning 4: For en lineær funktion gælder:

- Hvis $a>0$, er funktionen strengt voksende.
- Hvis $a=0$, er funktionen konstant.
- Hvis $a<0$, er funktionen strengt aftagende.

Bevis 4: Der gennemgås to beviser. Det andet anvender differentialregning og vil altså kunne anvendes, når vi har lært at differentiere.

$a>0$: Vi ser på to argumenter, hvor der gælder $x_1<x_2$. Da *a* er positiv, kan vi gange med det på begge sider af ulighedstegnet uden at vende det, og vi kan også lægge *b* til på begge sider. Vi får dermed:

$$x_1<x_2 \;\Rightarrow\; a\cdot x_1<a\cdot x_2 \;\Rightarrow\; a\cdot x_1+b<a\cdot x_2+b \;\Rightarrow\; f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$$

Dvs. vi har vist, at et større argument giver en større funktionsværdi, dvs. vi har vist, at funktionen er voksende.

$a=0$: Vi ser på to vilkårlige argumenter x_1 og x_2, og da $a=0$, har vi:

$$f\left(x_1\right)=a\cdot x_1+b=0\cdot x_1+b=b$$

$$f\left(x_2\right)=a\cdot x_2+b=0\cdot x_2+b=b$$

Dvs. vi har vist, at $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$, og altså er funktionen konstant.

$a<0$: Vi ser på to argumenter, hvor der gælder $x_1<x_2$. Da *a* er negativ, skal vi vende ulighedstegnet, når vi multiplicerer med *a* på begge sider. Vi kan igen lægge *b* til på begge sider uden at vende ulighedstegnet. Vi får dermed:

$$x_1<x_2 \;\Rightarrow\; a\cdot x_1>a\cdot x_2 \;\Rightarrow\; a\cdot x_1+b>a\cdot x_2+b \;\Rightarrow\; f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)$$

Dvs. vi har vist, at et større argument giver en mindre funktionsværdi, dvs. vi har vist, at funktionen er aftagende.

Når vi har lært at differentiere, ved vi, at $f'(x)=a$. Husk, at den afledede funktion f' angiver hældningen for tangenten det pågældende sted, og i sætningerne 1 og 2 koblede vi fortegnet for den afledede funktion sammen med begreberne voksende, aftagende og konstant.

Vi viste, at et **positivt fortegn** for f' er ensbetydende med en **voksende funktion** *f*.

Og tilsvarende, at et **negativt fortegn** for f' er ensbetydende med en **aftagende funktion** *f*.

Det er denne sammenhæng mellem et fortegn og voksende/aftagende, som du generelt skal anvende, og i dette tilfælde har vi altså (da $f'(x)=a$):

$$a>0 \Leftrightarrow f'(x)>0 \Leftrightarrow f \text{ er voksende.}$$

$$a<0 \Leftrightarrow f'(x)<0 \Leftrightarrow f \text{ er aftagende.}$$

$$a=0 \Leftrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow f \text{ er konstant.}$$

Når vi sammenligner ligningen $y=a\cdot x+b$ for en lineær sammenhæng med funktionsforskriften $f(x)=a\cdot x+b$ for en lineær funktion, kan vi se, at vi ud fra vores arbejde med rette linjer i ”Grundlæggende matematiske begreber del 3” allerede har bevist de første fire punkter i følgende:

Sætning 5: For en lineær funktion med forskriften $f(x)=a\cdot x+b$ gælder:

- Grafen for funktionen er en ret linje med hældningen *a* og skæringen *b* med *y*-aksen.
- Hvis grafen går gennem punkterne $(x_1, f(x_1))$ og $(x_2, f(x_2))$, er

$$a=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \quad \text{og} \quad b=-a\cdot x_1+f(x_1)=-a\cdot x_2+f(x_2).$$

- Hvis grafen går gennem punktet $(x_0, f(x_0))$ og har hældningen *a*, er funktionsforskriften

$$f(x)=a\cdot(x-x_0)+f(x_0).$$

- Hvis man lægger værdien Δx til argumentet, lægges $a\cdot\Delta x$ til funktionsværdien.
- Den omvendte funktion til en lineær funktion med $a\neq 0$ er en lineær funktion.

Bevis 5: Vi vil gerne bevise det sidste punkt i Sætning 5 og benytter derfor vores metode til at finde den omvendte funktion. At der findes en omvendt funktion, følger af, at når $a\neq 0$, er funktionen voksende eller aftagende og dermed injektiv og altså invertibel.

1) $y=a\cdot x+b$

2) $x=a\cdot y+b$ (*x* og *y* ombyttes)

3) $x=a\cdot y+b \Leftrightarrow x-b=a\cdot y \Leftrightarrow y=\frac{1}{a}\cdot x-\frac{b}{a}$

4) $f^{-1}(x)=\frac{1}{a}\cdot x-\frac{b}{a}$

I trin 3) var det tilladt at dividere med *a*, da $a\neq 0$. Når vi kigger på funktionsforskriften for den omvendte funktion, kan vi se, at det er en lineær funktion, hvor grafen har hældningen $\frac{1}{a}$ og skæringen $-\frac{b}{a}$ med *y*-aksen.

Opgaverne 610*

Det fjerde punkt i Sætning 5 er det, man kalder en *vækstegenskab*. Det er en karakteristisk egenskab for lineære funktioner, at når man lægger en fast størrelse til argumentet, så ændres funktionsværdien med en fast størrelse. Vi skal senere se på vækstegenskaber for eksponentielle udviklinger, logaritmefunktioner og potensfunktioner.

Når vi behandler lineære sammenhænge og lineære funktioner rent matematisk, snakker vi om hældninger og skæringer med ordinataksen. Men når lineære funktioner anvendes som modeller for noget "virkeligt", skal du kunne fortolke og beskrive koefficienterne i **lige præcis den konkrete situation**.

Eksempel 23: Højden *h* af et træ målt i meter kan beskrives ved funktionsforskriften $h(t) = 0{,}85 \cdot t + 1{,}9$, hvor *t* er tiden angivet i antal år efter 2003.

Beskriv, hvad konstanterne fortæller om højden af træet.

Tallet 0,85 fortæller, at træet vokser med 85 cm om året, og tallet 1,9 fortæller, at i 2003 var træet 1,9 m højt.

Ovenstående er svaret på opgaven. Dvs. det er IKKE et svar på opgaven, hvis du skriver: "0,85 er hældningen, og den fortæller, hvor meget funktionsværdien går op, når argumentet øges med 1, og 1,9 er begyndelsesværdien, der fortæller, hvor grafen skærer andenaksen".
Det er ikke matematisk forkert at skrive ovenstående, men du har ikke svaret på opgaven.

Opgaverne 611*

Bemærk, at du også skal huske at inddrage enhederne, når du svarer på opgaven.

Eksempel 24: Man kan også komme ud for selv at skulle bestemme en forskrift. Det oplyses, at prisen pr. kg grus er 17 kr., og at det koster 450 kr. at få det bragt ud uanset mængden. Man skal nu indføre passende variable og bestemme et funktionsudtryk, der angiver prisen som funktion af grusmængden.

Da man kan se, at hver gang man øger grusmængden med en fast størrelse, så øges prisen også med en fast størrelse, er det en lineær funktion, man kan anvende til at beskrive situationen.
Vi indfører nu:

x er mængden af grus målt i kg.
p er den samlede pris målt i kr.

Da 450 kr. er prisen for 0 kg grus, er det begyndelsesværdien, og da prisen stiger med 17 kr., hver gang grusmængden øges med ét kg, er hældningen 17.
Altså er forskriften:

$$p(x) = 17 \cdot x + 450 \; ; \;\; x \geq 0$$

Opgaverne 612*

EKSPONENTIALFUNKTIONER

Vi får nu brug for vores viden om potenser og rødder (det gør vi også, når vi skal se på logaritmefunktioner og potensfunktioner). Lineære funktioner bygger på addition og multiplikation, mens eksponentialfunktioner bygger på potensopløftning. Der mindes derfor om følgende definitioner og regneregler:

$$a^0 = 1 \quad ; \quad a^{-p} = \frac{1}{a^p} \quad ; \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad ; \quad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \quad ; \quad a^p \cdot a^q = a^{p+q} \quad ; \quad \left(a^p\right)^q = a^{p \cdot q}$$

Både eksponentialfunktioner og potensfunktioner består af en potens. I eksponentialfunktioner står vores variabel som eksponent, mens den i potensfunktioner står som rod.

Definition 8: En *eksponentialfunktion* er en funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ med funktionsforskriften

$$f(x) = a^x \quad , a > 0,\ a \neq 1.$$

a kaldes for *fremskrivningsfaktoren* eller *grundtallet*.

Eksempel 25: Følgende er eksempler på forskrifter for eksponentialfunktioner og for funktioner, der ikke er eksponentialfunktioner.

$f_1(x) = 7^x$ *Eksponentialfunktion*

$f_2(x) = 3^x$ *Eksponentialfunktion*

$f_3(x) = 1^x$ *IKKE Eksponentialfunktion* (pga. kravet $a \neq 1$)

$f_4(x) = \mathbf{e}^x$ *Eksponentialfunktion*

$f_5(x) = 0,2^x$ *Eksponentialfunktion*

$f_6(x) = x^5$ *IKKE eksponentialfunktion* (*potensfunktion*)

$f_7(x) = (-4)^x$ *IKKE eksponentialfunktion*

Det er her valgt ikke at lade 1^x være en eksponentialfunktion. Man kunne godt have tilladt dette specialtilfælde, men at udelade det blandt eksponentialfunktionerne gør det lidt nemmere, når vi skal se på logaritmefunktioner.

I ovenstående er f_4 en ganske særlig eksponentialfunktion, der har sit eget navn:

Definition 9: Eksponentialfunktionen *exp* med forskriften $\exp(x) = \mathbf{e}^x$ kaldes *Den naturlige eksponentialfunktion*.

Husk, at **e** ligesom π er et (meget vigtigt) irrationalt tal, og at:

$$\mathrm{e} = 2,71828182845904523536028747135266249775 7...$$

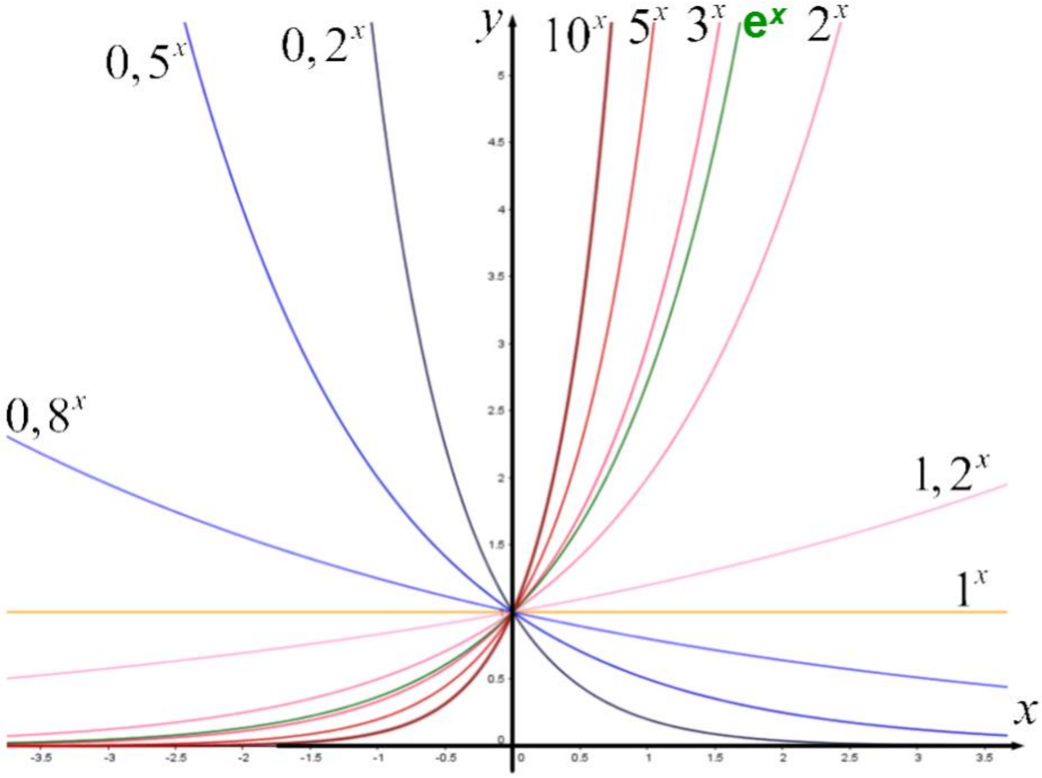
eller bare

$$\mathrm{e} \approx 2,7$$

Lad os se på nogle detaljer omkring eksponentialfunktioner.

- Definitionsmængden er som angivet $\mathbb{R}$. Det følger af vores viden om potenser, hvor vi gennem en række definitioner kom frem til, at vi kan sætte alle tal ind som eksponent, når bare roden (der her kaldes fremskrivningsfaktoren eller grundtallet) ikke er negativ.
- Og hermed har vi næsten også svaret på, hvorfor vi kræver, at *a* skal være positiv. Ved kun at arbejde med positive grundtal opnår man, at definitionsmængden er alle reelle tal. Hvis *a* havde været negativ, var $x = \frac{1}{2}$ ikke et lovligt argument, for $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, og man kan ikke uddrage kvadratroden af noget negativt (når man arbejder med reelle tal).
- Vi har lidt utraditionelt allerede begrænset vores kodomæne til $\mathbb{R}_+$. Dette skyldes, at vores værdimængde er $\mathbb{R}_+$, og med begrænsningen har vi fået en surjektiv funktion. Når vi snart viser, at den også er injektiv, kan vi altså se, at vores funktion er bijektiv og dermed invertibel, hvilket vi skal bruge, da vi skal indføre logaritmefunktioner som de omvendte funktioner til eksponentialfunktioner.
- Vi har to navne for *a*. Navnet *fremskrivningsfaktor* skal vi bruge, når vi skal se, at eksponentialfunktioner svarer til vækst med en fast procentdel. Navnet *grundtal* anvendes ved indførelsen af logaritmefunktioner, der også tildeles et grundtal. Præcis som når det samme tal fungerer som potenseksponent og rodeksponent.

Følgende figur viser grafer for eksempler på eksponentialfunktioner. Grafen for 1^x er taget med, da den fungerer som en grænse mellem aftagende og voksende eksponentialfunktioner.



Bemærk, hvordan grafen for den naturlige eksponentialfunktion er placeret mellem graferne for 2^x og 3^x.

Bemærk også, hvordan de enkelte grafer ligger i forhold til hinanden på hver side af *y*-aksen, og tænk over, hvorfor det er sådan.

Og bemærk slutteligt, at figuren stemmer med vores påståede Dm og Vm.

Ud fra figuren kan man få en mistanke om følgende sætning:

Sætning 6: For en eksponentialfunktion gælder:

- Grafen går gennem punktet $(0,1)$.
- Hvis $a>1$, er den strengt voksende.
  Hvis $0<a<1$, er den strengt aftagende.
- Den er invertibel.

Bevis 6: At grafen går gennem $(0,1)$, ses ved indsættelse i forskriften: $f(0)=a^0=1$.

Når vi har lært at differentiere funktioner, så ved vi, at $f'(x)=\ln(a)\cdot a^x$, hvor *ln* er den naturlige logaritmefunktion. Og når vi ganske snart har lært om logaritmer, så ved vi, at:

$$a>1 \;\Rightarrow\; \ln(a)>0$$

$$a<1 \;\Rightarrow\; \ln(a)<0$$

Herefter følger punkt 2 i Sætning 6 af Sætning 1 og Sætning 2.
Og det sidste punkt følger af, at funktionen som nævnt er bijektiv.

Opgaverne 613*

LOGARITMEFUNKTIONER

Vi er nu klar til at få defineret logaritmefunktionerne. De blev indført i 1614 af John Napier (1550-1617), men vores måde at indføre dem på ud fra eksponentialfunktioner skyldes Leonhard Euler (1707-1783), der også opfandt den naturlige eksponentialfunktion og den naturlige logaritmefunktion.

Vi definerer:

Definition 10: Lad $a>0 \wedge a\neq 1$. Så er *logaritmefunktionen med grundtallet a* den omvendte funktion til eksponentialfunktionen med grundtallet *a*.
Den skrives log_a.
Grundtallet *a* kaldes også for *basen*.

Betingelserne på *a* skyldes, at vi ellers ikke har en veldefineret eksponentialfunktion med det pågældende grundtal.

Punkt 3 i vores Sætning 3 samt vores viden om omvendte funktioner giver os:

Sætning 7: For logaritmefunktioner gælder:
1) $a^{\log_a(x)}=x$ og $\log_a\left(a^x\right)=x$
2) $Dm=\mathbb{R}_+$ og $Vm=\mathbb{R}$
3) Grafen går gennem $(1,0)$

$a^{\log_a(x)}=x$ udtales på følgende måde, der også kan anvendes som definition af logaritmefunktionen:
Log a af x er den potens, som a skal opløftes i, for at give x.

Eksempel 26: Vi benytter ovenstående tankegang til at bestemme følgende:

$$\log_7(49)$$
$$\log_{10}(1000)$$
$$\log_2(16)$$

Vi har:

$$\log_7(49)=2 \text{, fordi } 7^2=49$$
$$\log_{10}(1000)=3 \text{, fordi } 10^3=1000$$
$$\log_2(16)=4 \text{, fordi } 2^4=16$$

Opgaverne 614*

Som vi snart skal se, gælder der nogle regneregler for logaritmefunktioner, der ikke afhænger af grundtallet. Så på den måde er alle logaritmefunktioner ”lige gode”. Man kan sige, at de kan det samme. Alligevel findes der tre særlige logaritmefunktioner, hvoraf du kommer til at støde på to mange gange: Det er logaritmefunktionerne med grundtallene 2, **e** og 10.

$\log_2$: Logaritmen med grundtallet 2 kan være at foretrække, hvis man arbejder med computervidenskab eller musikteori, der anvender det binære talsystem. Den kan også skrives *lb* (*l* for logaritme og *b* for binære). Vi skal ikke arbejde med dette talsystem, så dette er ikke en af ”vores” særlige logaritmer

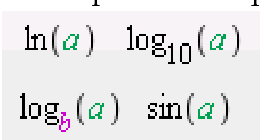
$\log_{10}$: Titalslogaritmen er naturvidenskabsfolkenes og ingeniørernes logaritmefunktion. Det er derfor den, du støder på inden for kemi (pH-begrebet) og fysik (bl.a. lydstyrke). I disse sammenhænge skrives logaritmen blot *log*, dvs. 10-tallet er underforstået, ligesom 2-tallet er underforstået i kvadratrodstegnet. Den internationale standardnotation er *lg*.

$\log_{\mathbf{e}}$: Logaritmen med grundtallet **e** (dvs. den naturlige logaritmefunktion) skrives *ln* (*l* for logaritme og *n* for naturlig). Det er matematikernes logaritmefunktion. For matematikere er det logaritmefunktion**en**. Derfor vil du i mange matematiske værker opleve, at man i stedet for *ln* bare skriver *log*. Og vigtigere for os i første omgang: Maple er skabt af matematikere, så i Maple står *log* for den naturlige logaritmefunktion.

Bemærk altså, at *log* både kan stå for titalslogaritmen og den naturlige logaritme. Og ofte bliver der ikke gjort opmærksom på, hvad du skal bruge. Så det er vigtigt at vide følgende:

1) I disse noter, i matematikopgaver i gymnasiet, i fysik og i kemi anvendes *log* for titalslogaritmen og *ln* for den naturlige logaritme. Og titalslogaritmen kaldes ofte bare ”logaritmen”.
2) I Maple står både *log* og *ln* for den naturlige logaritme. Hvis du skal anvende titalslogaritmen, skal du skrive $\log_{10}$. Maple anvender ikke standarden *lg*.

I Maple finder du logaritmefunktioner under paletten ”Expression”:



Tilføj alle tre logaritmefunktioner til dine favoritter.

Sætning 7 gælder som angivet for alle logaritmefunktioner, og derfor gælder følgende:

Sætning 8:

- $10^{\log(x)} = x$: $\log(x)$ er den potens, som 10 skal opløftes i for at give *x*.
- $\log\left(10^x\right) = x$
- $\mathbf{e}^{\ln(x)} = x$: $\ln(x)$ er den potens, som **e** skal opløftes i for at give *x*.
- $\ln\left(\mathbf{e}^x\right) = x$

Benyt tankegangen i nedenstående eksempel (læg et papir over resultaterne, så du selv kan prøve at bestemme værdien). Dvs. hvis du skal finde $\log(100)$, skal du tænke: ”Hvilken potens skal 10 opløftes i for at give 100?”, hvorefter du kommer frem til $\log(100) = 2$.

Og hvis du skal finde $\log_4(64)$, skal du tænke: ”Hvilken potens skal 4 opløftes i for at give 64?”, hvorved du kommer frem til $\log_4(64) = 3$.

Eksempel 27: Forsøg selv at bestemme følgende værdier (hold en hånd over resultaterne):

$\log(10000) = 4$

$\log_6(36) = 2$

$\ln\left(\mathbf{e}^5\right) = 5$

$\log(0{,}01) = -2$

$\log_2(64) = 6$

$\ln(1) = 0$

$\log(1) = 0$

$\log_7(1) = 0$

$\log_4(4) = 1$

$\log_9\left(\frac{1}{9}\right) = -1$

$\log_{0,5}(2) = -1$

$\log(10) = 1$

$\log_4(8) = \frac{3}{2}$

$\ln\left(\mathbf{e}^{-19}\right) = -19$

$\log(0{,}00001) = -5$

$\log_{0,2}(5) = -1$

$\ln(0) = \textit{ikke defineret}\ (Dm = \mathbb{R}_+)$

$\log_{0,1}(1000) = -3$

$\log_7\left(\sqrt{7}\right) = \frac{1}{2}$

$\log_1(10) = \textit{eksisterer ikke}\ (\textit{grundtallet må ikke være}\ 1)$

$\log(-10) = \textit{ikke defineret}\ (Dm = \mathbb{R}_+)$

Prøv også at indtaste nogle af ovenstående udtryk i Maple:

Bemærk, at Maple IKKE anvender *log* som titalslogaritmen.

$\log_{10}(1000) = 3$

$\log(1000.) = 6.907755279$

$\ln\left(e^5\right) = 5$

$\log\left(e^5\right) = 5$ I Maple står *log* for den naturlige logaritme.

$\log_6(36) = 2$

$\log_{0.2}(5) = -1.000000000$

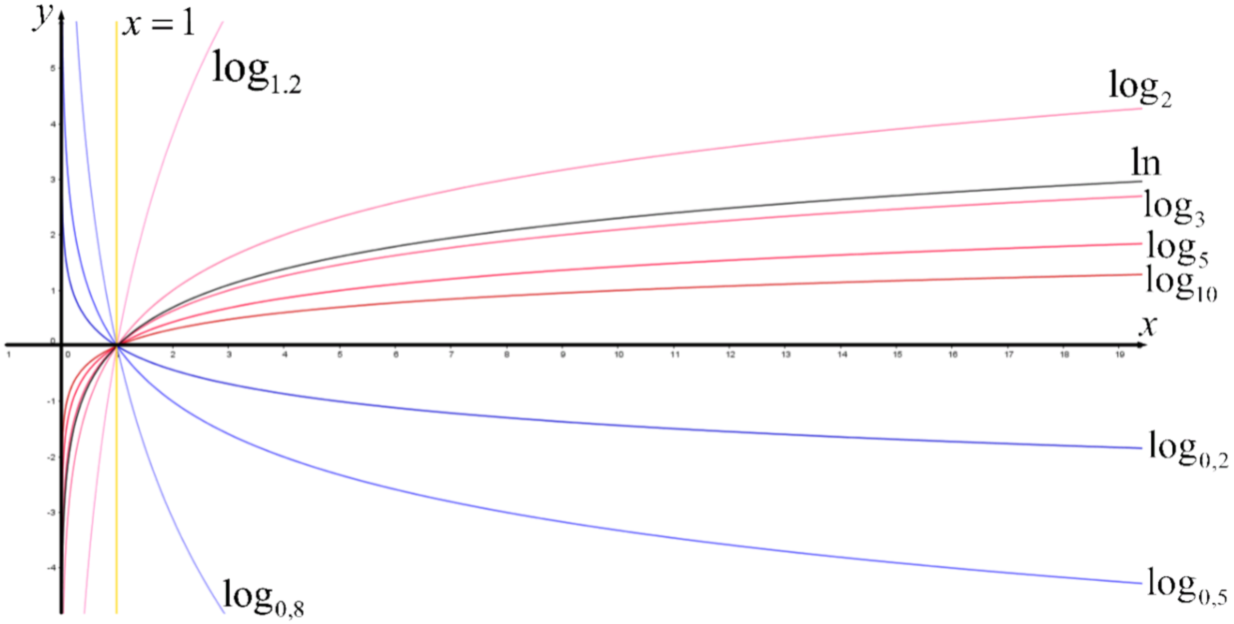
$\ln(0)$ Error, (in ln) numeric exception: division by zero

$\log_{10}(-10.) = 1.000000000 + 1.364376354\,\mathrm{I}$

Begge argumenter ligger uden for definitionsmængden.
For bemærk, at det sidste resultat er et komplekst tal.

Opgaverne 615*

Lad os se på graferne for nogle logaritmefunktioner. Sammenlign dem med graferne for eksponentialfunktioner. Husk, at graferne for eksponentialfunktioner og logaritmefunktioner med samme grundtal er hinandens spejlinger i linjen med ligningen $y = x$:



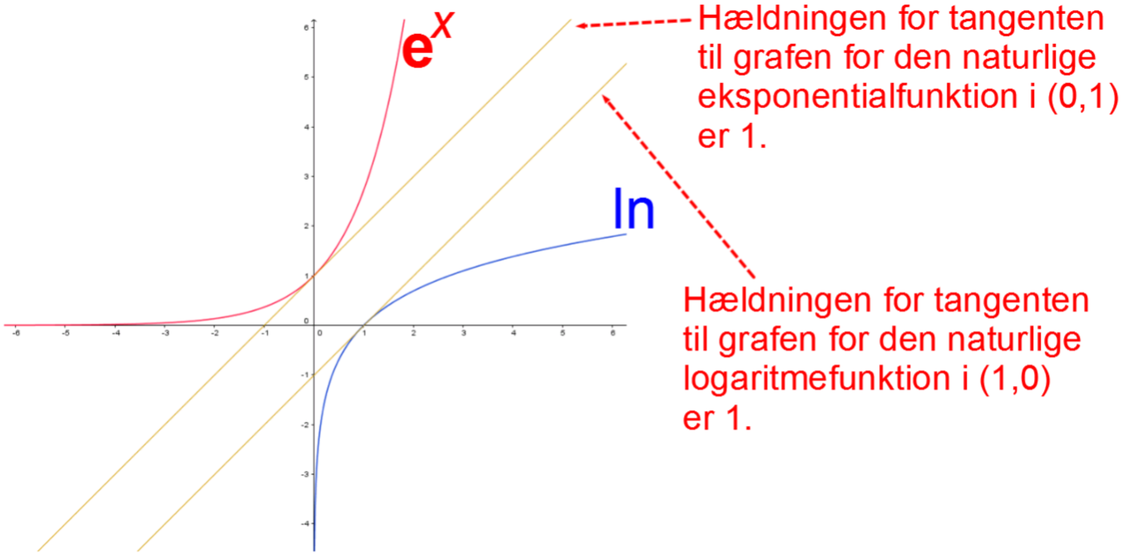
Opgaverne 616*

Bemærk, at logaritmefunktionerne lægger sig omkring *x*-aksen på præcis samme måde, som eksponentialfunktionerne lægger sig omkring *y*-aksen.

Og bemærk, hvordan graferne for logaritmefunktionerne nærmer sig den lodrette linje med ligningen $x = 1$, når grundtallene nærmer sig 1 (se graferne for $\log_{0,8}$ og $\log_{1,2}$).

Som vi allerede så i Sætning 7, går alle graferne igennem (1,0). Dvs. logaritmen til 1 er 0 uanset hvilken logaritmefunktion, du arbejder med.

En af de særlige egenskaber for den naturlige eksponentialfunktion *exp* og den naturlige logaritmefunktion *ln* er, at hældningen for tangenten i det punkt, som henholdsvis alle eksponential- og alle logaritmefunktioner går igennem, er 1.



Husk, at Sætning 8 er hele pointen med omvendte funktioner.

I $10^{\log(x)}$ er det først *log*, der virker på argumentet *x*, der afbildes over i $\log(x)$. Derefter virker eksponentialfunktionen med grundtal 10 på $\log(x)$, der afbildes over i *x*. Og dermed har vi – som altid med funktioner og deres omvendte funktioner – fået dannet en identitetsfunktion, der afbilder *x* over i *x*. Denne identitetsfunktion har $Dm = Vm = \mathbb{R}_+$.

I $\log(10^x)$ virker funktionerne i omvendt rækkefølge, dvs. først eksponentialfunktionen og derefter logaritmefunktionen. Men igen får man en identitetsfunktion. Denne identitetsfunktion har $Dm = Vm = \mathbb{R}$, så egentlig er det to forskellige identitetsfunktioner, men det vil du meget sjældent skulle tænke over.

Den væsentlige pointe er altså: Logaritmefunktioner og eksponentialfunktioner med samme grundtal ophæver virkningerne af hinanden.

Og det er lige præcis det, du skal bruge, når du skal løse ligninger med eksponentialfunktioner og logaritmefunktioner. Hvis en ligning indeholder en logaritmefunktion med grundtallet 7, skal du undervejs anvende eksponentialfunktionen med grundtallet 7 for at ophæve virkningen.

Eksempel 28: Her løses en række ligninger. Bemærk i hvert tilfælde, hvordan den omvendte funktion anvendes til at ophæve virkningen af en funktion:

1)
$$6\cdot \mathbf{e}^x = 18 \Leftrightarrow$$
$$\mathbf{e}^x = \frac{18}{6} \Leftrightarrow$$
$$\ln\left(\mathbf{e}^x\right) = \ln(3) \Leftrightarrow$$
$$\underline{\underline{x = \ln(3)}}$$

2)
$$7^x + 2 = 21 \Leftrightarrow$$
$$7^x = 21 - 2 \Leftrightarrow$$
$$\log_7\left(7^x\right) = \log_7(19) \Leftrightarrow$$
$$\underline{\underline{x = \log_7(19)}}$$

3)
$$7\cdot\log(x) = 13 \Leftrightarrow$$
$$\log(x) = \frac{13}{7} \Leftrightarrow$$
$$10^{\log(x)} = 10^{\frac{13}{7}} \Leftrightarrow$$
$$\underline{\underline{x = 10^{\frac{13}{7}}}}$$

4)
$$6 = 2 + 5\cdot\log_6(x) \Leftrightarrow$$
$$\frac{6-2}{5} = \log_6(x) \Leftrightarrow$$
$$6^{\frac{4}{5}} = 6^{\log_6(x)} \Leftrightarrow$$
$$\underline{\underline{x = 6^{\frac{4}{5}}}}$$

5)
$$\ln(x) = 8 \Leftrightarrow$$
$$\mathbf{e}^{\ln(x)} = \mathbf{e}^8 \Leftrightarrow$$
$$\underline{\underline{x = \mathbf{e}^8}}$$

Grundmængderne i opgaverne 1 og 2 er alle reelle tal, mens de i opgaverne 3, 4 og 5 er alle positive reelle tal, fordi variablen står som argument i en logaritmefunktion.

Opgaverne 617*

Ligesom vi har potensregneregler, har vi også logaritmeregneregler:

Sætning 9: For $p,q \in \mathbb{R}_+$ og $n \in \mathbb{R}$ gælder:

1) $\log_a(p \cdot q) = \log_a(p) + \log_a(q)$

2) $\log_a\left(\dfrac{p}{q}\right) = \log_a(p) - \log_a(q)$

3) $\log_a(p^n) = n \cdot \log_a(p)$

4) $\log_a\left(\sqrt[n]{p}\right) = \dfrac{1}{n} \cdot \log_a(p) \qquad , \quad n \neq 0$

Bevis 9: I beviset benytter vi Sætning 7.1 ($a^{\log_a(x)} = x$ og $\log_a(a^x) = x$) og potensregnereglerne

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}, \qquad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \qquad \text{og} \qquad \left(a^p\right)^q = a^{p \cdot q}.$$

1) Vi udnytter identiteterne $p = a^{\log_a(p)}$ og $q = a^{\log_a(q)}$ (erstat x med p eller q i sætning 7.1) og får:

$$\log_a(p \cdot q) \underset{\textit{Sætning 7.1}}{=} \log_a\left(a^{\log_a(p)} \cdot a^{\log_a(q)}\right) \underset{\textit{potensregneregel}}{=} \log_a\left(a^{\log_a(p)+\log_a(q)}\right) \underset{\textit{Sætning 7.1}}{=} \log_a(p) + \log_a(q)$$

2) Bevis selv denne regneregel ved samme fremgangsmåde (anvend en anden potensregneregel).

3) Vi udnytter igen identiteterne fra Sætning 7.1 i første og sidste skridt, og i det midterste skridt anvendes den sidste potensregneregel:

$$\log_a(p^n) = \log_a\left(\left(a^{\log_a(p)}\right)^n\right) = \log_a\left(a^{n \cdot \log_a(p)}\right) = n \cdot \log_a(p)$$

4) Udnyt din viden om sammenhængen mellem potenser og rødder til at bevise denne sætning.

Sætning 9 gælder som vist for alle logaritmer. De gælder derfor også specielt for titalslogaritmen og den naturlige logaritme. Og her er de mere overskuelige og nemmere at huske:

1) $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$	1) $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$
2) $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$	2) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
3) $\log(a^n) = n \cdot \log(a)$	3) $\ln(a^n) = n \cdot \ln(a)$

Bemærk, hvordan multiplikation bliver til addition, division til subtraktion og potensopløftning til multiplikation, når man anvender logaritmer. Man kan løst sige, at logaritmer sender regnearterne et trin ned i hierarkiet.

Denne egenskab vender vi tilbage til. I første omgang trænes indholdet af Sætning 9 gennem en række regneeksempler.

Eksempel 29: Nedenstående udtryk reduceres ved hjælp af regnereglerne:

$$\log(50) = \log(10 \cdot 5) = \log(10) + \log(5) = \underline{\underline{1 + \log(5)}}$$

$$\log(5) = \log\left(\frac{10}{2}\right) = \log(10) - \log(2) = \underline{\underline{1 - \log(2)}}$$

$$\ln(32) = \ln(2^5) = \underline{\underline{5 \cdot \ln(2)}}$$

Opgaverne 618*

Tidligere var regnereglen i Sætning 9.3 meget vigtig, når man arbejdede med eksponentialfunktioner, fordi den forklarer, hvordan man får en eksponent ned foran et udtryk. Men faktisk har vi nu mulighed for at undgå at anvende den, hvis vi i stedet bruger logaritmefunktionen med samme grundtal som eksponentialfunktionen. Dette illustreres med et eksempel, hvor den samme ligning løses på tre måder.

Eksempel 30: Vi vil løse ligningen $5\cdot 8^x = 23 \quad ; \quad G=\mathbb{R}$.

1. metode:

$$5\cdot 8^x = 23 \Leftrightarrow 8^x = \frac{23}{5} \Leftrightarrow \ln\left(8^x\right)=\ln\left(\frac{23}{5}\right) \Leftrightarrow x\cdot\ln(8)=\ln\left(\frac{23}{5}\right) \Leftrightarrow x=\frac{\ln\left(\frac{23}{5}\right)}{\ln(8)}=0{,}7338779534$$

2. metode:

$$5\cdot 8^x = 23 \Leftrightarrow 8^x = \frac{23}{5} \Leftrightarrow \log\left(8^x\right)=\log\left(\frac{23}{5}\right) \Leftrightarrow x\cdot\log(8)=\log\left(\frac{23}{5}\right) \Leftrightarrow x=\frac{\log\left(\frac{23}{5}\right)}{\log(8)}=0{,}7338779534$$

3. metode: $5\cdot 8^x = 23 \Leftrightarrow 8^x = \frac{23}{5} \Leftrightarrow \log_8\left(8^x\right)=\log_8\left(\frac{23}{5}\right) \Leftrightarrow x=\log_8\left(\frac{23}{5}\right)=0{,}7338779534$

Bemærk, at de tre metoder (selvfølgelig) fører til samme resultat. Det ses, at man slipper for en brøkstreg ved at anvende logaritmefunktionen med grundtal 8, fordi eksponentialfunktionen har grundtal 8.

Det er væsentligt at bemærke, at brøkerne $\frac{\ln\left(\frac{23}{5}\right)}{\ln(8)}$ og $\frac{\log\left(\frac{23}{5}\right)}{\log(8)}$ har samme værdi, selvom både tællerne og nævnerne er forskellige $\left(\ln\left(\frac{23}{5}\right)\neq\log\left(\frac{23}{5}\right) \text{ og } \ln(8)\neq\log(8)\right)$. Det er en karakteristisk egenskab ved logaritmefunktioner.

Eksempel 31: Her løses den samme ligning på to forskellige måder:

$$\log\left(x^5\right)-\log\left(x^3\right)=2 \quad ; \quad G=\mathbb{R}_+$$

Den første metode anvender Sætning 9.2:

$$\log\left(x^5\right)-\log\left(x^3\right)=2 \Leftrightarrow$$
$$\log\left(\frac{x^5}{x^3}\right)=2 \Leftrightarrow$$
$$\log\left(x^2\right)=2 \Leftrightarrow$$
$$10^{\log\left(x^2\right)}=10^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2=100 \Leftrightarrow$$
$$x=\pm 10$$

Kun den positive løsning tilhører grundmængden, så løsningen er $\underline{\underline{x=10}}$

Den anden metode anvender Sætning 9.3:

$$\log\left(x^5\right)-\log\left(x^3\right)=2 \Leftrightarrow$$
$$5\cdot\log(x)-3\cdot\log(x)=2 \Leftrightarrow$$
$$2\cdot\log(x)=2 \Leftrightarrow$$
$$\log(x)=1 \Leftrightarrow$$
$$10^{\log(x)}=10^1 \Leftrightarrow$$
$$\underline{\underline{x=10}}$$

Opgaverne 619*

Vores regneregler fører os til følgende nyttige identiteter:

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\left(2^{-1}\right)=-1\cdot\ln(2)=-\ln(2)$$

$$\log_a\left(\frac{1}{p}\right)=\log_a\left(p^{-1}\right)=-1\cdot\log_a(p)=-\log_a(p)$$

Sætning 10: $\log_a\left(\frac{1}{p}\right)=-\log_a(p)$ og $\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln(2)$

Opgaverne 620*

Det er også vigtigt at vide, hvordan Maple behandler logaritmer:

$\ln(8) = 3\ln(2)$

$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$

Maple omskriver, så argumentet er det mindst mulige heltal.

$\log_7(25) = \frac{2\ln(5)}{\ln(7)}$

$\log_{10}(100) = 2$

$\log_{10}(80) = \frac{\ln(80)}{\ln(10)}$

Hvis værdien ikke er et helt tal, omskriver Maple til *ln*.

$\log_{10}(80.) = 1.903089987$

Hvis man vil have et decimaltal, kan man sætte punktum efter 80.

$evalf\left(\log_{10}(80)\right) = 1.903089987$

Man kan også skrive *evalf* omkring hele udtrykket for at få et decimaltal.

Som det ses, kan man omskrive udtryk med logaritmer med ét grundtal til udtryk med logaritmer med et andet grundtal. Der gælder generelt:

Sætning 11: $\log_a(x)\cdot\log_b(a)=\log_b(x)$

Bevis 11: Vi udnytter en identitet fra Sætning 7 og benytter efterfølgende logaritmeregnereglerne:

$$a^{\log_a(x)}=x \Leftrightarrow$$

$$\log_b\left(a^{\log_a(x)}\right)=\log_b(x) \Leftrightarrow$$

$$\log_a(x)\cdot\log_b(a)=\log_b(x)$$

Der gælder altså en ligefrem proportionalitet mellem $\log_b(x)$ og $\log_a(x)$. Specielt gælder altså:

Sætning 11a: $\log_a(x)\cdot\ln(a)=\ln(x)$ og $\log(x)\cdot\ln(10)=\ln(x)$

Øvelse 5: Tjek, at du ved hjælp af Sætning 11a kan gennemskue Maples omskrivninger ovenfor.

Sætning 11 fører os også frem til den sætning, der tidligere er blevet nævnt i en konkret situation:

Sætning 12: $\frac{\log_a(p)}{\log_a(q)} = \frac{\log_b(p)}{\log_b(q)}$

Bevis 12: Vi begynder med højresiden og benytter Sætning 11, hvor *x* erstattes af henholdsvis *p* og *q*, til at udregne:

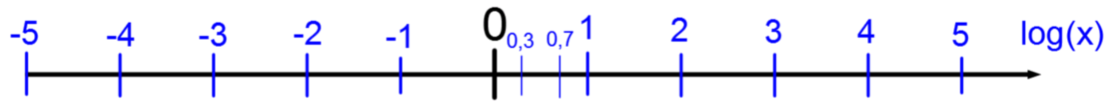
$$\frac{\log_b(p)}{\log_b(q)} = \frac{\log_a(p)\cdot\log_b(a)}{\log_a(q)\cdot\log_b(a)} = \frac{\log_a(p)}{\log_a(q)}$$

Opgaverne 621*

Efter alle disse sætninger omhandlende logaritmer skal vi nu se på de logaritmiske skalaer, som vi er stødt på i forbindelse med eksponentielle udviklinger og potensfunktioner. I første omgang ser vi på opbygningen af en logaritmisk skala, og senere skal vi se, hvorfor man med sådanne skalaer kan få eksponentielle udviklinger og potensfunktioner til at give rette linjer.

Logaritmisk skala

Vores udgangspunkt er en helt almindelig talakse:



Vi har samme afstand fra 0 til 1 som fra 1 til 2 osv. Det er vores almindelige skala.

Men pointen er, at vi nu forestiller os, at det ikke er vores argument *x*, men derimod $\log(x)$, vi afsætter på denne skala. Dvs. hvis *x* er 1000, så er $\log(x)=3$, og vi afsætter et punkt ved 3.

Og hermed kunne vi sådan set slutte. **En almindelig skala, hvor vi afsætter $\log(x)$ i stedet for *x*, fungerer som en logaritmisk skala**, og det er ikke svært at få et computerprogram til dette.

Men da det engang var ret besværligt at skulle finde logaritmen til alle argumenterne, ville man hellere direkte kunne indsætte *x*. Og det kan man komme til, hvis man én gang for alle omregner logaritmeværdierne til *x*-værdier (se nedenstående eksempler):

$$\log(x)=5 \Leftrightarrow 10^{\log(x)}=10^5 \Leftrightarrow x=100000$$

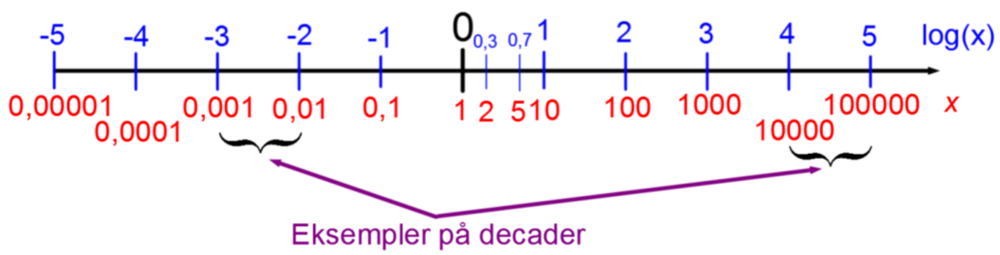
$$\log(x)=2 \Leftrightarrow 10^{\log(x)}=10^2 \Leftrightarrow x=100$$

$$\log(x)=1 \Leftrightarrow 10^{\log(x)}=10^1 \Leftrightarrow x=10$$

$$\log(x)=0{,}3 \Leftrightarrow 10^{\log(x)}=10^{0{,}3} \Leftrightarrow x=1{,}995$$

$$\log(x)=0 \Leftrightarrow 10^{\log(x)}=10^0 \Leftrightarrow x=1$$

$$\log(x)=-3 \Leftrightarrow 10^{\log(x)}=10^{-3} \Leftrightarrow x=0{,}001$$



Med de røde tal har vi altså fået dannet en skala, hvor vi kan indsætte *x*-værdierne, og det er denne skala, vi kalder en *logaritmisk skala*. Dvs. punkterne skal sættes samme sted, uanset om vi vælger at afsætte *x* på en logaritmisk skala eller $\log(x)$ på en almindelig skala. Og som vi senere skal se, er det netop dette, der kan give os rette linjer.

Vi bemærker, at afstanden fra 1 til 10 er den samme som fra 10 til 100 og fra 100 til 1000 osv. På disse ens strækninger bliver argumentet hele tiden 10 gange større, og derfor kalder man dem *decader*.

Dette er blot et specialtilfælde af noget, der gælder generelt:

Sætning 13: Hvis man i en logaritmefunktion $\log_a$ gør argumentet *p* **gange** større, så **lægges** der $\log_a(p)$ til funktionsværdien.

Bevis 13: Beviset er egentlig en direkte opskrivning af den første logaritmeregneregel:

$$\log_a(p\cdot x)=\log_a(p)+\log_a(x)$$

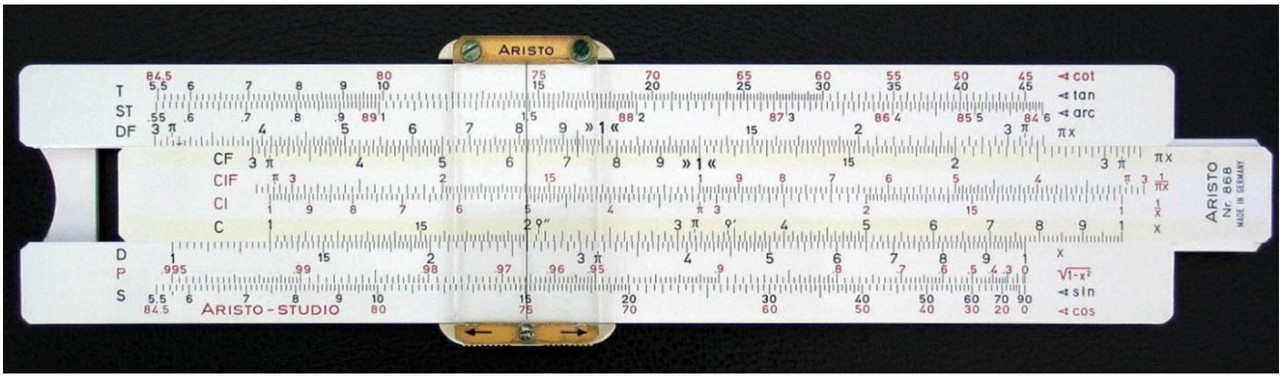
Opgaverne 622*

Sætning 13 er den karakteristiske egenskab for en logaritmefunktion.

Som afslutning på behandlingen af logaritmefunktioner ses på en række anvendelser – heraf nogle historiske.

Regnestokken

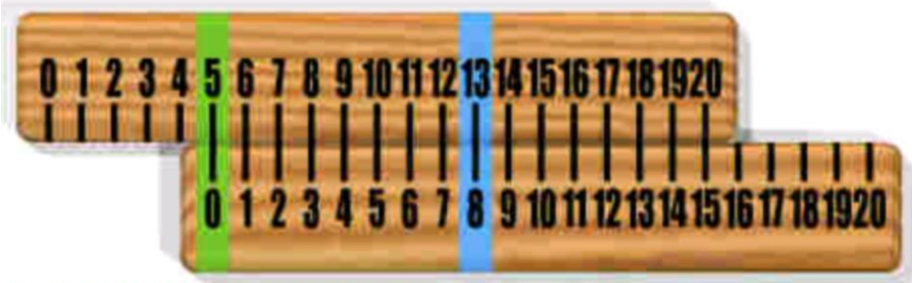
Før lommeregneren anvendtes regnestokken til at bestemme logaritmer, potenser, rødder, sinus, cosinus og tangens. Og den kunne også anvendes til at lægge og gange to tal sammen.



Som det ses på figuren, var der en skyder, der kunne bevæges frem og tilbage, og der var både almindelige og logaritmiske skalaer på selve stokken og skyderen.

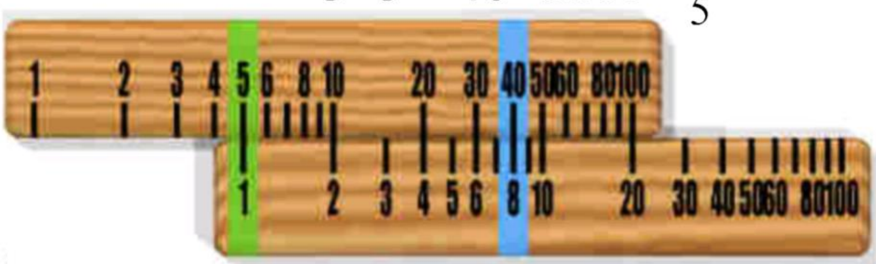
Her skitseren meget kort enkelte af anvendelserne:

$$5+8=13 \quad \text{eller} \quad 13-5=8$$



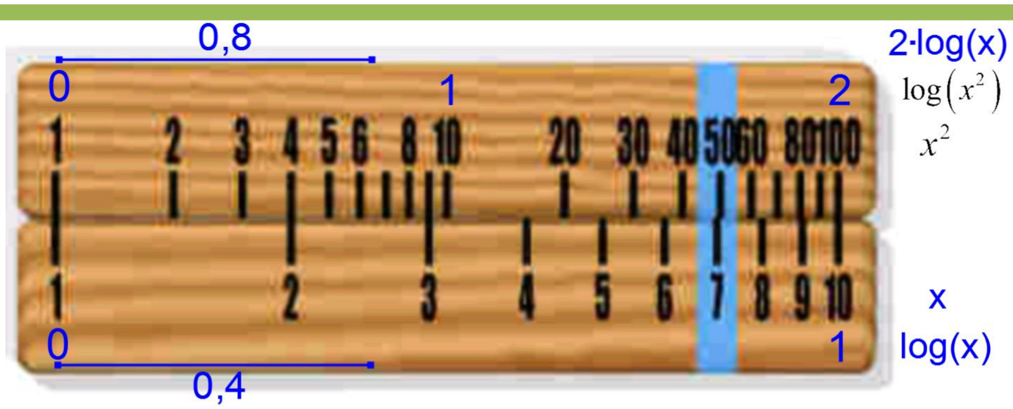
To almindelige skalaer holdes op mod hinanden.
Skyderen placeres, så 0 er under 5.
Hvis det er 5 + 8, man vil finde, går man 8 frem på den nederste skala og aflæser facit ovenover. Hvis det er 13 - 5, der skal beregnes, går man hen til 13 og aflæser resultatet nedenunder.

$$5\cdot 8=40 \quad \text{eller} \quad \frac{40}{5}=8$$



To logaritmiske skalaer.
Her udnyttes Sætning 9:

$$\log(40)-\log(5)=\log\left(\frac{40}{5}\right)=\log\left(\frac{8}{1}\right)=\log(8)-\log(1)$$



Her er to logaritmiske skalaer, men den ene har en decade, der er dobbelt så lang som den anden. Dette kan bruges til at finde kvadratrødder og kvadrater.

Se på de blå skalaer. Vi har ladet den samme længde svare til to forskellige værdier. F.eks. svarer det viste blå stykke til værdien 0,4 på den nederste skala og 0,8 på den øverste. Så hvis vi lader et stykke svare til $\log(x)$ på den nederste skala, svarer samme stykke til $2\cdot\log(x)$ på den øverste. En logaritmeregneregel fortæller os så, at $2\cdot\log(x)=\log(x^2)$. Og dermed kommer x til at svare til x^2.

Øvelse 6: Hvordan skal skalaerne være, for at man kan finde kubikrødder og kuber?

Logaritmetabeller

Inden Euler tog fat på logaritmerne og forbandt dem med eksponentialfunktioner og opfandt den naturlige logaritmefunktion, var logaritmerne blevet indført som et fantastisk redskab til at foretage multiplikationer. Metoden var baseret på vores regneregel $\log_a\left(p\cdot q\right)=\log_a\left(p\right)+\log_a\left(q\right)$ og logaritmetabeller, hvor man kunne aflæse logaritmen til en hel række tal. Henry Briggs havde indført 10-talslogaritmen, og i perioden 1617-1628 lykkedes det ham og Adriaan Vlacq at finde logaritmerne til alle tal mellem 1 og 100000 med 10 decimaler. Nedenfor ses en tabel over logaritmeværdier til nogle små tal, der benyttes til at illustrere metoden.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374	5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755	5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106	5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430	5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732	5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014	6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279	6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529	6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765	6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989	6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201	6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404	6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598	6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784	6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962	6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133	7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298	7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456	7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609	7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757	7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900	7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038	7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172	7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302	7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428	7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551	8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670	8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786	8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899	8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010	8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117	8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222	8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325	8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425	8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522	8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618	9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712	9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803	9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893	9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981	9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067	9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152	9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235	9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316	9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396	9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

Logs to Base 10 Log(x)

Tre logaritmeværdier er markeret med gult ovenfor.
Vi vil gerne bestemme værdien af udtrykket $2{,}32\cdot 2{,}96$.

Vi ser, at $\log\left(2{,}32\right)=0{,}3655$ og $\log\left(2{,}96\right)=0{,}4713$, og vi har dermed:

$$\log\left(2{,}32\cdot 2{,}96\right)=\log\left(2{,}32\right)+\log\left(2{,}96\right)=0{,}3655+0{,}4713=0{,}8368$$

Værdien 0,8368 er, som udtrykket viser, logaritmen til værdien af $2{,}32\cdot 2{,}96$. Vi finder derfor det tal blandt logaritmeværdierne, der ligger tættest på 0,8368, og det er 0,8370. Det er logaritmen til 6,87, og dermed har vi $2{,}32\cdot 2{,}96=6{,}87$.

Naturligvis mangler der nogle decimaler, men til praktiske formål er det ofte præcist nok.

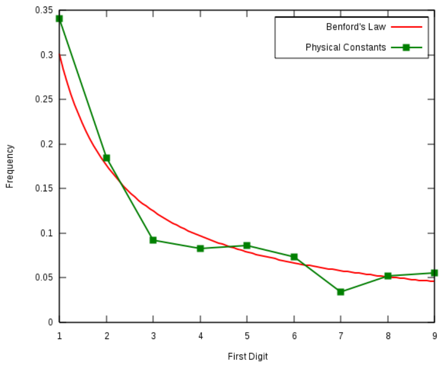
Anvendelse inden for naturvidenskaberne

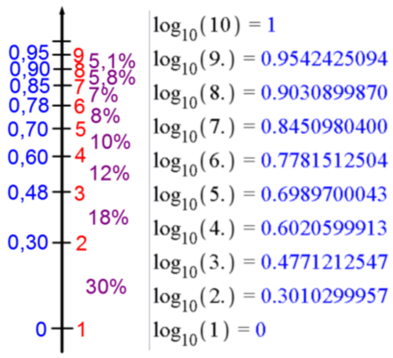
I kemi vil I bl.a. møde logaritmefunktioner i forbindelse med pH-begrebet, og i fysik optræder det bl.a. i forbindelse med lydstyrke, når man måler denne i dB (decibel). I begge tilfælde er én af grundene til at inddrage logaritmefunktionen, at man kan få nogle pæne tal, der er nemme at forholde sig til.

Men det er ikke den vigtigste årsag. I forbindelse med lydstyrke passer enheden decibel bedre til vores opfattelse af lyden, end hvis vi havde angivet lydstyrken som en intensitet, hvilket egentlig er mere naturligt. **Man siger, at vores lydopfattelse opfører sig logaritmisk**. Det skal forstås på den måde, at hver gang vi f.eks. halverer intensiteten af lyden, så vil vores subjektive opfattelse af lyden være, at dens styrke er gået det samme stykke ned. Vores opfattelse stemmer altså med logaritmefunktioners karakteristiske egenskab, at når man multiplicerer argumentet med et tal (tallet er 0,5, når man halverer), så vil værdien ændres med en fast værdi (hvilket er 3 dB, når det drejer sig om lydstyrke).

Benfords lov

Hvis man gennemgår et opslagsværk over fysiske konstanter og tabelværdier og kigger på det første ciffer i alle tallene, vil man opdage, at der ikke er en jævn fordeling. Der vil være ca. 30% af tallene, der har 1 som første ciffer (nedenfor, hvor der kun er set på fysiske konstanter, er den fundne procentdel ca. 34%), 18% med cifret 2 først og 12% med cifret 3 først. Dette kaldes Benfords lov. Det er ikke en universel lov, men den gælder med god tilnærmelse i en masse forskellige situationer (befolkningstal i verdens lande, befolkningstal i danske byer, landes BNP, antal dyrearter inden for et bestemt areal, …). Procentfordelingen i Benfords Lov bestemmes af titalslogaritmen (se de violette tal nedenfor).





Der er også masser af situationer, der helt klart ikke opfylder Benfords Lov. Telefonnumre, nummerplader, højder af mennesker målt i cm og antal vundne verdensmesterskaber i fodbold. Generelt kan man sige, at for at Benfords Lov skal gælde, skal tallene fordele sig over flere størrelsesordner og ikke være underlagt nogle menneskeskabte regler (som f.eks. telefonnumre).

Benfords Lov kan faktisk udvides til mere end bare første ciffer, og det kan anvendes til at afsløre snyd med tal, fordi mennesker har tendens til at fordele cifrene mere jævnt, end de ville være fordelt i virkeligheden.

Logaritmisk spiral

Den logaritmiske spiral har den egenskab, at tangenten til kurven og linjen fra omdrejningspunktet ud til kurven danner en konstant vinkel. Den optræder mange steder i naturen. F.eks. følger en jagende haj og et insekt en sådan kurve, når de nærmer sig henholdsvis et bytte og en lyskilde. Og man ser den i solsikker, grankogler, galakser m.fl.

RENTESREGNING

Ordet *procent* betyder *pr. hundrede*, og det angives med symbolet %.
pr. i sig selv svarer til en brøkstreg, dvs. man har:

$$34\% = \frac{34}{100} = 0,34$$

$$8\% = \frac{8}{100} = 0,08$$

$$540\% = \frac{540}{100} = 5,4$$

$$0,1\% = \frac{0,1}{100} = 0,001$$

Det er væsentligt at lægge mærke til lighedstegnene. Det gælder simpelthen, at $34\% = 0,34$. Dvs. der sker absolut intet med selve tallet. Det er præcis det samme, om du skriver 34% eller 0,34.

Det er desværre en udbredt misforståelse, at "man ganger med 100 for at få tallet i procent", hvilket kan føre til en forkert skrivemåde:

Ingen af disse lighedstegn gælder.

$$0,67 = 0,67 \cdot 100 = 67\%$$

HELT FORKERT!!!
Det første lighedstegn er forkert, da man ikke får det samme tal, når man ganger med 100. Det er 1 og ikke 100, der er det neutrale element ved multiplikation.
Det andet lighedstegn er forkert, da der på venstresiden står 67 og på højresiden 67%, og det er to forskellige tal.

$$0,67 = 0,67 \cdot 100\% = 67\%$$

Rigtigt, men unødvendigt.
Da 100% = 1, er 100% det neutrale element ved multiplikation, og man må derfor gerne gange med det.

$$0,67 = 67\%$$

Sådan skal det gøres.

Dvs. du skal ikke begynde at komplicere tingene med en udregning.

Vi ved nu, hvad ordet *procent* betyder. Den næste sproglige pointe er, at vi skal lære at skelne mellem formuleringerne "tage procent af", "lægge procent til", "trække procent fra", "procentdel af" og "procentvise forskel".

Vi skal i første omgang have indført et par begreber:

Definition 11: Om *procenttallet p, vækstraten r* og *fremskrivningsfaktoren a* gælder følgende:

$$p\% = r$$

$$a = 1 + r$$

Vækstraten kaldes også for *rentefoden*.

Eksempel 32: Hvis procenttallet er 28, er $r = 28\% = 0,28$ og $a = 1,28$.
Hvis vækstraten er 0,93, er procenttallet 93 og fremskrivningsfaktoren 1,93.
Hvis fremskrivningsfaktoren er 1,76, er vækstraten 0,76 og procenttallet 76.

Eksempel 33: Hvis $p = -15$, er $r = -15\% = -0{,}15$ og $a = 0{,}85$.
Hvis vækstraten er 123%, er procenttallet 123 og fremskrivningsfaktoren 2,23.
Hvis fremskrivningsfaktoren er 0,20, er $r = -80\%$ og $p = -80$.

Opgaverne 630*

Definition 12:

1) **Tage procent af:** *p procent af K* er $r \cdot K$
2) **Lægge procent til:** Hvis man *lægger p procent til K*, får man $(1+r)\cdot K$
3) **Trække procent fra:** Hvis man *trækker p procent fra K*, får man $(1-r)\cdot K$

Eksempel 34:

a) 12% af 200 er $12\% \cdot 200 = 0{,}12 \cdot 200 = 24$
b) Hvis man lægger 12% til 200, får man $(1+12\%)\cdot 200 = 1{,}12 \cdot 200 = 224$
c) Hvis man trækker 12% fra 200, får man $(1-12\%)\cdot 200 = (1-0{,}12)\cdot 200 = 0{,}88 \cdot 200 = 176$

Startkapital

$$\underset{\text{Slutkapital}}{K_1} = K_0 \cdot (1+r) = K_0 + \overbrace{\underset{\text{Vækstrate / rentefod}}{r} \cdot K_0}^{\text{Renten}}$$

$$K_1 = \underset{\text{Startkapital}}{200kr} \cdot (1+0{,}12) = 200kr + \underset{\text{Vækstrate}}{0{,}12} \cdot 200kr = \underset{\text{Startkapital}}{200kr} + \underset{\text{Renten}}{24kr} = \underset{\text{Slutkapital}}{224kr}$$

Bemærk pointen med alt dette: Når man tager *p* procent af en startkapital, så finder man *renten*. Og når denne lægges oven i selve startkapitalen, så har man lagt *p* procent til startkapitalen og dermed fået slutkapitalen. Hvis man trækker renten fra startkapitalen, har man trukket *p* procent fra startkapitalen.

Man kommer fra startkapital til slutkapital ved at multiplicere med fremskrivningsfaktoren.

Ovenstående forklarer navnet *fremskrivningsfaktor*. Man *fremskriver* fra startkapital til slutkapital. En *faktor* indgår i et produkt, dvs. den ganges på noget. Og dette er meget vigtigt at være opmærksom på. Fremskrivningsfaktorer er uløseligt forbundet med multiplikation og division (der jo er to sider af samme sag). Man *tilbageskriver* ved at **dividere** med fremskrivningsfaktoren.

Opgaverne 631*

I følgende tabel er nogle eksempler på vækstrater og tilsvarende fremskrivningsfaktorer. Det er meningen, at du skal kunne springe let og ubesværet fra den ene til den anden. Dvs. hvis det oplyses, at $r = 16\%$, skal du med det samme gennemskue, at $a = 1{,}16$ - og omvendt.

Vækstrate r	Fremskrivningsfaktor a	Kommentar
0,32 = 32%	1,32	
1,76 = 176%	2,76	
0,0091 = 0,91%	1,0091	Vær påpasselig med 0'erne ved små procenter. Her laves en del fejl. Bemærk, at du bare skal erstatte 0'et foran kommaet i 0,0091 med et 1-tal.
$-0{,}28 = -28\%$	0,72	
$-0{,}5 = -50\%$	0,5	En vækstrate på -50% svarer til en halvering. Det er et meget vigtigt standardtilfælde.
1 = 100%	2	En fordobling svarer til en vækstrate på 100%. Dvs. hvis du lægger 100% til en værdi, fordobler du den (ved at gange med fremskrivningsfaktoren 2). Det er det andet meget vigtige standardtilfælde.
4 = 400%	5	Hvis vækstraten er 400%, bliver værdien fem gange så stor.
0%	1	Man lægger 0% til et tal ved at gange det med 1 (det neutrale element ved multiplikation).

Vi har allerede en del viden om fremskrivningsfaktorer fra eksponentialfunktioner. Og når vi sammenholder dette med $a = 1 + r$, har vi:

Sætning 14: Følgende gælder for eksponentialfunktioner og funktionen 1^x:

Vækstraten / Rentefoden	Fremskrivningsfaktoren	Monotoniforhold
$-100\% < r < 0\%$	$0 < a < 1$	Funktionen er aftagende
$r = 0\%$	$a = 1$	Funktionen er konstant
$0\% < r$	$1 < a$	Funktionen er voksende

Sætning 14 skulle gerne give mening. En negativ vækstrate gør en kapital mindre, dvs. funktionen vil være aftagende. Det opnår man ved at multiplicere med et tal, der er positivt, men mindre end 1.

Egentlig kan vækstraten godt være -100%, men så forsvinder hele kapitalen.

Vi arbejder ikke med vækstrater under -100%. Det betyder ikke, at man ikke kan arbejde med gæld. Vi regner bare på gæld på samme måde som kapital, dvs. som et positivt tal.

Bemærk, at når vi i daglig tale f.eks. taler om at gøre noget 3 gange så stort, så svarer det til en vækstrate på 200% og fremskrivningsfaktoren 3, og når noget skal være halvt så stort, så er vækstraten -50% og fremskrivningsfaktoren 0,5.
Det er altså fremskrivningsfaktoren, vi sætter tal på i vores daglige tale.

Den helt centrale sætning inden for rentesregning er kapitalfremskrivningsformlen:

Sætning 15: Kapitalfremskrivningsformlen.

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

n: Antal terminer

K_0 : Startkapital

K_n : Slutkapital (Kapitalen efter *n* terminer)

r: Vækstrate

I Sætning 15 er begrebet *terminer* introduceret. *Termin* kommer af det latinske *terminus*, der betyder *afslutning*, *grænse* eller *finale*, og vi anvender det inden for rentesregning om det tidspunkt, hvor der tilskrives renter til en kapital eller et lån. Sommetider anvendes det dog også om selve perioden mellem to rentetilskrivninger.
Dvs. vi kan både sige, at "der er termin en gang om måneden" og "terminen er en måned".
Ofte er terminen et år, og man anvender så forkortelsen *p.a.* (pro anno).

Men pointen er altså, at antallet af terminer angiver, hvor mange gange kapitalen (der godt kan være en gæld) fremskrives. Og hermed bliver beviset ganske kort:

Bevis: Hver gang, vi fremskriver en kapital, multiplicerer vi med fremskrivningsfaktoren. Dvs. hvis startkapitalen fremskrives *n* gange, bliver slutkapitalen:

$$K_n = K_0 \cdot \underbrace{(1+r)\cdot(1+r)\cdot(1+r)\cdot\ldots\cdot(1+r)}_{n \text{ faktorer}} = K_0 \cdot (1+r)^n$$

Eksempel 35: 30000 kr. sættes i banken med rentefoden 2% p.a. (*pro anno ~ per år*). Hvor meget står på kontoen efter 7 år?

Vi indsætter i kapitalfremskrivningsformlen:

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

$$K_7 = 30000\,kr. \cdot (1+0,02)^7 = \underline{\underline{34460,57\,kr.}}$$

Eksempel 36: Odysseus har et godt overblik over sit liv og ved, at han om 8 år skal bruge 50000 kr. Han kan få 1,5% p.a. i banken. Hvor mange penge skal han indsætte på kontoen nu?

Denne gang er det startkapitalen, der skal bestemmes, så den isoleres i formlen:

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n \Leftrightarrow$$

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n}$$

$$K_0 = \frac{50000kr}{(1+0,015)^8} = \underline{\underline{44385,56\,kr.}}$$

Det væsentlige at bemærke i dette eksempel er – som også nævnt tidligere – at man tilbageskriver ved at dividere med fremskrivningsfaktoren.

Opgaverne 632*

Eksempel 35 (version 2): Vi ser nu på samme situation som i eksempel 35, men forestiller os nu, at der er to rentetilskrivninger om året (hver på 1%). På 7 år er der så 14 terminer, og vi får:

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

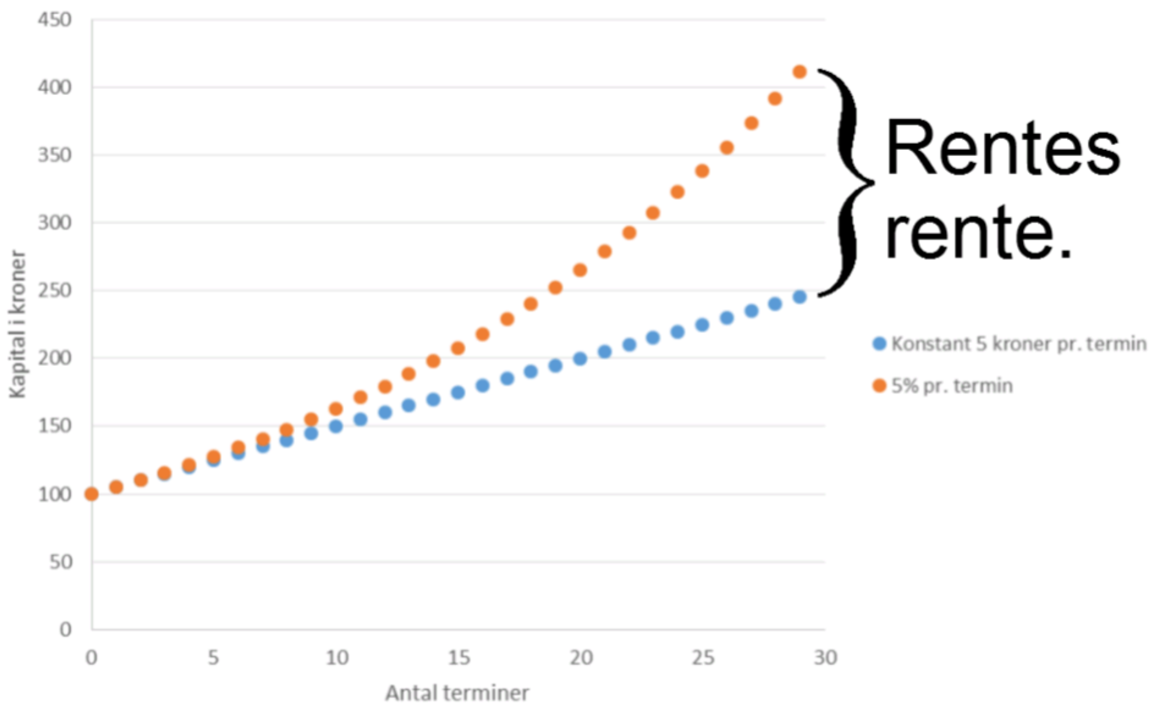
$$K_{14} = 30000\,kr. \cdot (1+0,01)^{14} = \underline{\underline{34484,23\,kr.}}$$

Vi ser altså, at vi får knap 24 kr. mere ud af de 30000 kr. end med 2% p.a.
Hvis der er mere end 1 rentetilskrivning om året, er følgende begreber relevante:

Nominel rente / Pålydende rente: Den årlige rentefod, der er oplyst.
Effektiv rente: Den årlige rentefod, der reelt har virket.

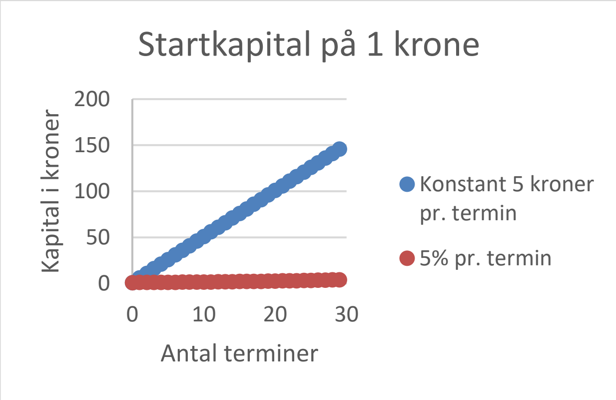
Forskellen skyldes det, der kaldes *rentes rente*. Dvs. at der også kommer renter på renterne.
Dette kan illustreres med nedenstående figur, hvor der ses på 100 kr. som startkapital.
De blå prikker viser, hvordan kapitalen udvikler sig, hvis den øges med 5 kr. hver termin. Dette giver lineær vækst.
De røde prikker viser udviklingen, hvis det er 5% pr. termin (hvilket i første termin er identisk med 5 kr.). Dette er en eksponentiel vækst.

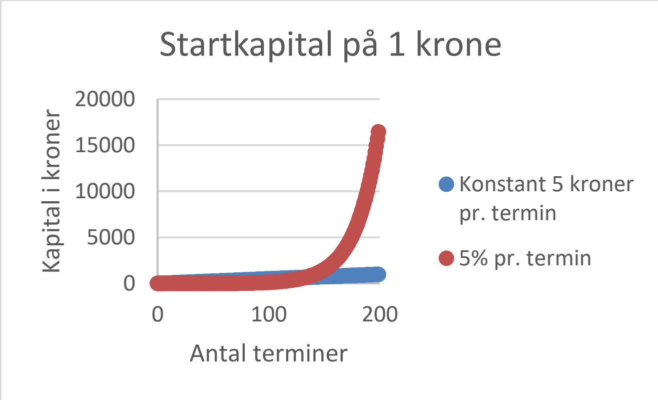
Lineær vækst vs. eksponentiel vækst



Når man lægger den samme størrelse til i hvert skridt (f.eks. 5 kr.), taler man om ***absolut vækst***, fordi beløbet ikke afhænger af kapitalen (det latinske *absolutus* kan bl.a. betyde *fuldkommen* og *uafhængig*).
Når man tilskriver den samme rentefod i hvert skridt, taler man om ***relativ vækst,*** fordi selve renten afhænger af det beløb, der tilskrives renter.

Hvis man kun har en kapital på 1 krone, kan det i begyndelsen klart bedst betale sig med absolut vækst i vores konkrete tilfælde. For vi får 5 kroner pr. termin, og efter første termin har vi derfor 6 kroner, mens vi med relativ vækst ville have haft 1,05 kroner, da renten jo afhænger af kapitalen. Grafen nedenfor til venstre illustrerer dette. Absolut vækst lægger sig klart i spidsen.





Men kig så på grafen til højre. Hvis blot man har terminer nok at tage af, skal den relative vækst nok vise sit værd. Bemærk, hvordan den nærmest eksploderer i forhold til den absolutte vækst. Man siger, at relativ vækst er *stærkere* end absolut vækst. På lang sigt vil relativ vækst altid vinde.

Som sagt er der kun forskel på nominel og effektiv rente, hvis der tilskrives renter mere end 1 gang om året. Og det kan du som udgangspunkt aldrig forvente, hvis du indsætter et beløb.

Det forekommer vist kun, hvis du låner penge, da det er en måde – sammen med et særskilt oplyst oprettelsesgebyr eller bidrag – at få tilbuddet til at se mere fordelagtigt ud, end det er.

Lad os se på et eksempel, hvor vi ser bort fra omkostninger ved at optage et lån og kun kigger på selve renterne.

Eksempel 37: Det oplyses, at renten er 9% p.a. med månedlige rentetilskrivninger.
Dvs. i dette tilfælde er den nominelle rente 9%.

Hermed menes, at der hver måned tilskrives renter med rentefoden $\frac{9}{12}\% = 0,75\%$.

12 af disse fremskrivninger giver en fremskrivningsfaktor på:

$$a_{årlig} = (1+r)^{12} = (1+0,0075)^{12} = 1,0938$$

Dvs. vi har en effektiv rente på 9,38%.

Ofte anvendes rentesregning til at angive, hvordan to størrelser forholder sig til hinanden, fordi en procentvis beskrivelse ofte bedre beskriver situationen end en absolut. F.eks. siger det dig nok ikke så meget, at det danske bruttonationalprodukt steg med 35 milliarder fra 1990 til 1991. At stigningen var 4,1%, giver nok et bedre billede.

Sætning 16: Hvis en størrelse ændrer værdi fra *A* til *B*, er den relative tilvækst $r = \frac{B-A}{A}$

Bevis 16: Vi anvender kapitalfremskrivningsformlen med $n = 1$:

$$B = A\cdot(1+r) \Leftrightarrow 1+r = \frac{B}{A} \Leftrightarrow r = \frac{B}{A} - 1 \Leftrightarrow r = \frac{B}{A} - \frac{A}{A} \Leftrightarrow r = \frac{B-A}{A}$$

Inden vi ser på et eksempel på anvendelsen af denne sætning, skal vi have defineret et begreb:

Definition 13: Den *gennemsnitlige vækstrate* er den **faste** vækstrate, der i den pågældende situation ville have bragt startkapitalen til slutkapitalen, hvis den var blevet tilskrevet i hver termin, og den angives ofte som r_g

Gennemsnitlig vækstrate er baseret på *det geometriske gennemsnit* af fremskrivningsfaktorerne.

Eksempel 38: I perioden 1990 til 2000 steg det danske BNP (bruttonationalprodukt) fra 855,6 mia. kr. til 1326,9 mia. kr. (Der er ikke korrigeret for inflation).

a) Hvad har den relative tilvækst været?
b) Hvad har den gennemsnitlige årlige vækstrate været?
c) Hvornår ville det danske BNP have oversteget 2000 mia. kr., hvis udviklingen var fortsat?

Svar:

a) Vi benytter Sætning 16 og får:

$$r = \frac{B-A}{A} = \frac{1326{,}9\,mia.kr. - 855{,}6\,mia.kr.}{855{,}6\,mia.kr.} = 0{,}5508415 = \underline{\underline{55\%}}$$

b) Der har været 10 terminer, så vi har:

$$K_n = K_0 \cdot (1+r_g)^n \Leftrightarrow \frac{K_n}{K_0} = (1+r_g)^n \Leftrightarrow 1+r_g = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \Leftrightarrow r_g = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

$$r_g = \sqrt[10]{\frac{1326{,}9\,mia.kr.}{855{,}6\,mia.kr.}} - 1 = 0{,}044856724 = \underline{\underline{4{,}5\%}}$$

c) Vi skal altså nu regne med en årlig vækstrate på 4,5%. Vores udgangspunkt er år 2000, og vores ubekendte er antal terminer:

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n \Leftrightarrow \frac{K_n}{K_0} = (1+r)^n \Leftrightarrow \log_{(1+r)}\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = \log_{(1+r)}(1+r)^n \Leftrightarrow n = \log_{(1+r)}\left(\frac{K_n}{K_0}\right)$$

$$n = \log_{1{,}045}\left(\frac{2000\,mia.kr.}{1326{,}9\,mia.kr.}\right) = 9{,}3$$ (der skal rundes op til 10, da BNP skal **overstige** 2000)

Dvs. det ville være sket i år $\underline{\underline{2010}}$

Ovenfor fik vi også set eksempler, hvor *r* og *n* var de ukendte størrelser, og hvor man skulle benytte henholdsvis roduddragning og logaritmefunktionen til at isolere den ukendte størrelse. Vi har hermed behandlet situationer med alle fire mulige ubekendte i kapitalfremskrivningsformlen.

Spørgsmål c) i Eksempel 38 kan også ende med udtrykket $n = \frac{\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\ln(1+r)}$, hvis man anvender den naturlige logaritme i stedet for logaritmen med grundtallet $(1+r)$.

Sætning 16 er også den, du skal benytte, når man inden for naturvidenskaberne taler om *procentvis afvigelse*, hvor *A* i så fald typisk vil være en forventet værdi (f.eks. en tabelværdi), mens *B* er værdien opnået i dit eksperiment.

Eksempel 39: I et fysikforsøg har du målt aluminiums specifikke varmekapacitet til $945\frac{J}{kg\cdot K}$, og tabelværdien er $897\frac{J}{kg\cdot K}$. Hvad er den procentvise afvigelse?

Vi indsætter uden enheder: $r=\frac{B-A}{A}=\frac{945-897}{897}=0,05351=\underline{\underline{5\%}}$

Eksempel 40: I et kemiforsøg har du ved nøje afmåling og udregning fremstillet en 0,0100 M $NaOH-opløsning$. Ved et titreringsforsøg bestemmer du efterfølgende koncentrationen til 0,00963 M. Hvad er den procentvise afvigelse?

$$r=\frac{B-A}{A}=\frac{0,00963\,M-0,0100\,M}{0,0100\,M}=-0,037=\underline{\underline{-3,7\%}}$$

Bemærk det meget væsentlige i formlen, at dit udgangspunkt står i nævneren. En anden ting at bemærke er, at du med denne formel får negative afvigelser, hvis din eksperimentelle værdi er mindre end udgangspunktet, og positive, hvis din målte værdi er større end udgangspunktet. Somme tider går man ikke op i dette fortegn, men oftest kan det være relevant at vide, om værdien er over eller under, når man skal vurdere fejlkilders indflydelse på resultatet.

Lad os se lidt mere på den gennemsnitlige rente. Vi har set en situation, hvor man kendte den samlede vækstrate over en periode på 10 år, hvorefter vi ønskede at bestemme den faste årlige vækstrate, der svarede til denne samlede vækstrate.

Vi skal nu se på en situation, der egentlig ender samme sted, men som i første omgang kræver nogle ekstra udregninger:

Eksempel 41: En akties værdi ændrer sig over en periode på 6 år med de årlige vækstrater 2%, 6%, 4%, 3%, 1% og 7%. Hvad har den gennemsnitlige årlige vækstrate været?

Først skal man være meget opmærksom på, at man IKKE bare lægger tallene sammen og dividerer med 6 (dvs. man kan IKKE benytte *Det Aritmetiske Gennemsnit*). For husk på, at et gennemsnit er en fast værdi, der giver samme endelige resultat som en række varierende værdier.

Vi lader vores akties startværdi være K_0. De 6 angivne årlige vækstrater fører til slutværdien:

$$K_6=K_0\cdot 1,02\cdot 1,06\cdot 1,04\cdot 1,03\cdot 1,01\cdot 1,07$$

Den gennemsnitlige årlige vækstrate er som nævnt den **faste** årlige vækstrate, der ville give samme resultat som disse 6 varierende vækstrater. Dette giver os:

$$K_0\cdot\left(1+r_g\right)^6=K_0\cdot 1,02\cdot 1,06\cdot 1,04\cdot 1,03\cdot 1,01\cdot 1,07\Leftrightarrow$$

$$\left(1+r_g\right)^6=1,02\cdot 1,06\cdot 1,04\cdot 1,03\cdot 1,01\cdot 1,07\Leftrightarrow$$

$$r_g=\sqrt[6]{1,02\cdot 1,06\cdot 1,04\cdot 1,03\cdot 1,01\cdot 1,07}-1\Leftrightarrow$$

$$r_g=0,038118567=\underline{\underline{3,8\%}}$$

I ovenstående tilfælde giver Det Aritmetiske Gennemsnit 0,038333333, så hvis man afrunder de to resultater, ville man i dette tilfælde ikke kunne se forskel. Men det ændrer selvfølgelig ikke ved, at det ville være en helt forkert metode, der ville give 0 point i en opgave. De forskellige slags gennemsnit giver bare ofte værdier tæt på hverandre.

Eksempel 41 viste os den vigtige pointe, at begyndelsesværdien ikke har betydning, når man skal finde den gennemsnitlige vækstrate. Det er udelukkende vækstraterne, man regner på. Og vi har med konkrete tal vist følgende sætning:

Sætning 17: Hvis en størrelse ændrer sig med de varierende vækstrater $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$, er den gennemsnitlige vækstrate r_g bestemt ved:

$$r_g = \sqrt[n]{(1+r_1)\cdot(1+r_2)\cdot(1+r_3)\cdot\ldots\cdot(1+r_n)} - 1$$

Lad os se på et eksempel, der også inddrager negative vækstrater:

Eksempel 42: En udspekuleret arbejdsgiver sætter hver morgen sine arbejderes løn ned med 10%, hvorefter de brokker sig højlydt, og han går med til at sætte lønnen 10% op igen.

Dette sker hver dag i en måned, hvor der er 23 arbejdsdage. Hvordan er det gået med arbejdernes løn?

Dette er tydeligvis en slags trickopgave, hvor der lægges op til, at der ikke er sket noget med arbejdernes løn, fordi den først sættes 10% ned og derefter 10% op. Men lad os regne på det. Der er 23 arbejdsdage, dvs. der er i alt 23 lønstigninger og 23 lønnedgange. En lønstigning på 10% svarer til en fremskrivningsfaktor på 1,10, mens en lønnedgang på 10% svarer til en fremskrivningsfaktor på 0,90. Så vi har:

$$(1+r_{samlet}) = 1{,}1^{23}\cdot 0{,}90^{23} \Leftrightarrow$$

$$r_{samlet} = 1{,}1^{23}\cdot 0{,}90^{23} - 1 = -0{,}2063857 \approx \underline{\underline{-20{,}6\%}}$$

Arbejdernes løn er altså faldet med 20,6% i løbet af denne måned.

$$r_g = \sqrt[46]{1{,}1^{23}\cdot 0{,}90^{23}} - 1 = -0{,}0050125629 = -0{,}5\%$$

Dvs. den gennemsnitlige vækstrate for de 46 ændringer er -0,5%.

Opgaverne 633*

Det er også væsentligt at kende et begreb, der egentlig ikke har noget med rentesregning at gøre, men som kunne lyde, som om det havde. Det er begrebet *procentpoint*. Det anvendes bl.a. i forbindelse med aktiekurser og vælgertilslutning til politiske partier. Når et parti går fra 13% vælgertilslutning til 16%, så siger man, at det er gået 3 procent**point** frem. Hvis du regner på det, kommer du frem til, at det er gået 23% frem (Sætning 16), men *procentpoint* er altså noget andet end procentvis tilvækst.

Det er meget vigtigt at lægge mærke til, at enhver multiplikation med et positivt tal kan fortolkes som en procentvis forøgelse. F.eks. kan $3\cdot 5$ fortolkes som om, man lægger 200% til 5 (eller 400% til 3). Og når du multiplicerer med 1,37, så lægger du 37% til tallet.

Selvfølgelig er det ikke altid, at det giver mening med sådan en fortolkning. Hvis du bare skal udregne det aritmetiske udtryk $2+7\cdot 4$, er der ingen grund til at begynde med sådan en fortolkning. Men det er utrolig vigtigt, at du er i stand til det, når det er relevant.

Kontinuert rente

Som afslutning på rentesregning vender vi tilbage til problemstillingen med nominel og effektiv rente, der blev behandlet i Eksempel 37. Lad os forestille os, at vi har en nominel rente på 100%.

Hvis vi har én årlig rentetilskrivning, giver det altså fremskrivningsfaktoren 2.

Hvis det er månedlig rentetilskrivning, får vi: $a_{måned} = \left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = 2{,}613035281$.

Hvis det er ugentlig rentetilskrivning, får vi: $a_{uge} = \left(1+\frac{1}{52}\right)^{52} = 2{,}6925969$

Generelt får vi med n terminer: $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$

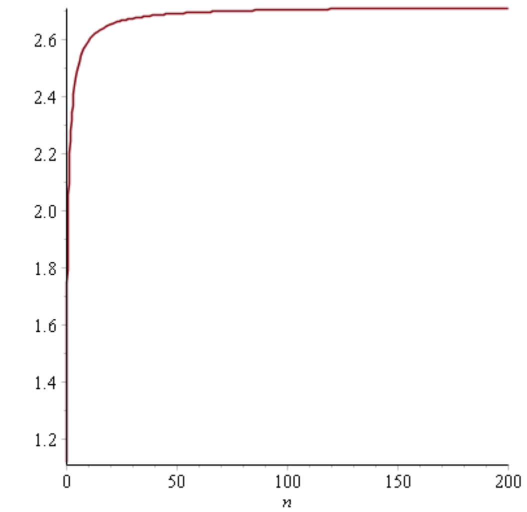
Og det er så her, at kontinuert rente kommer ind i billedet. For hvis vi nu forestiller os, at der hele tiden tilskrives renter. Ikke bare hvert sekund, men hele tiden. Så vil der på et år være uendelig mange rentetilskrivninger, men vækstraten vil også være uendelig tæt på 0. Så hvad vil der ske med udtrykket $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$?

Argumentet er uendelig tæt på 1, men eksponenten er uendelig (løst sagt). Vil udtrykket give 1, eller vil det give uendelig, eller vil det give et bestemt tal, eller kan man slet ikke sige noget om det?

Lad os først se på det grafisk ved hjælp af Maple:

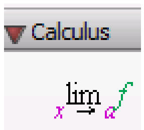
$f(n) := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$:

$plot(f(n), n = 0..200)$



Denne graf tyder på, at der rent faktisk er en eller anden værdi, som udtrykket nærmer sig, når n går mod uendelig. Maple kan beregne sådanne grænseværdier.

Find symbolet under paletten 'Calculus':



$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$$

Vi ser altså, at: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \to \mathbf{e}$ for $n \to \infty$.

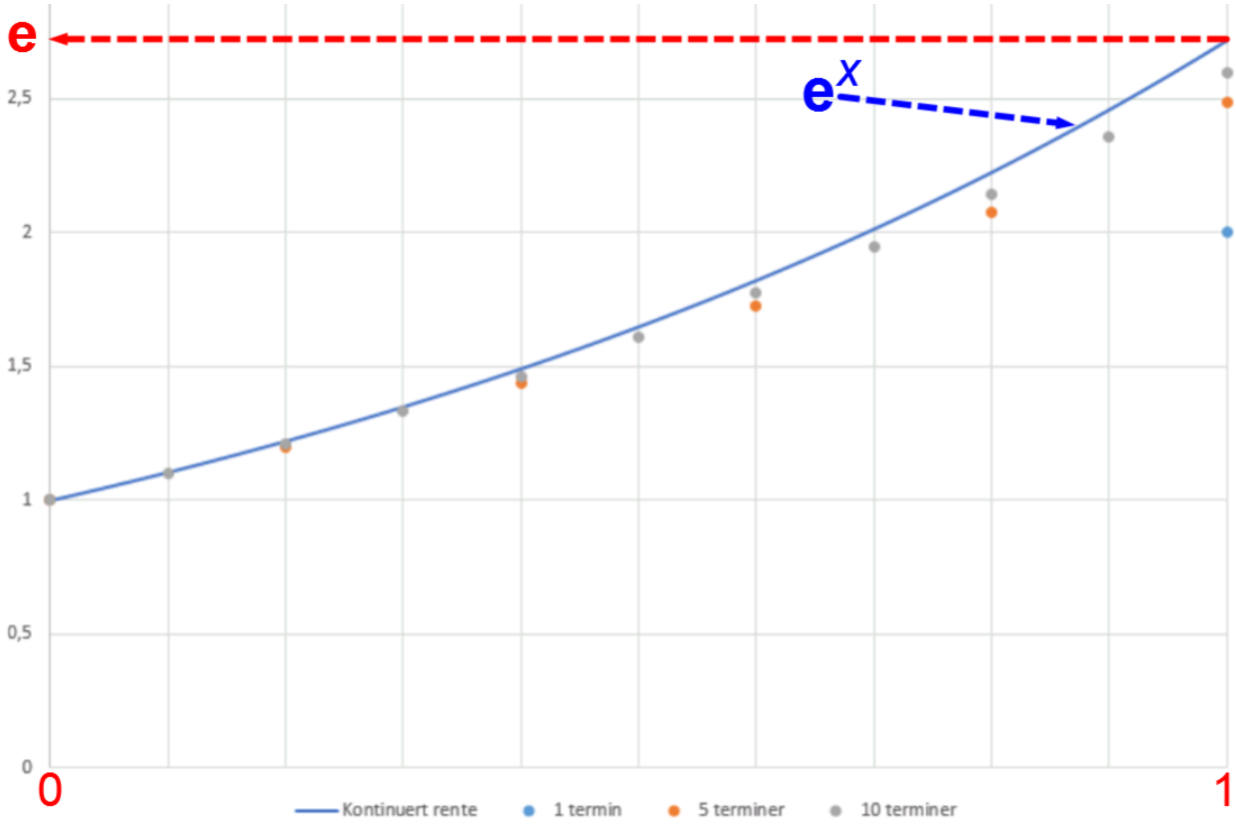
Dvs. udtrykket går mod Eulers tal, når n går mod uendelig. Med kontinuert rente vil vores fremskrivningsfaktor altså blive **e**.

Jacob Bernoulli (1655-1705) opdagede det tal, der senere blev kendt som Eulers tal, da han i 1683 fandt ud af, at $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ var et bestemt tal.

Faktisk gælder $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = \mathbf{e}^{x}$.

Dvs. man får den naturlige eksponentialfunktion, hvis man lader den nominelle vækstrate være variablen. Dette er en af indfaldsvinklerne til at forstå, hvorfor netop denne eksponentialfunktion har fået navnet *naturlig*.

Kontinuert rente er netop det, vi oplever, når vi anvender funktionsbegrebet, fordi vi har $Dm = \mathbb{R}$, dvs. der sker hele tiden noget med funktionsværdien. På nedenstående figur er vist, hvordan man kommer tættere og tættere på grafen for den naturlige eksponentialfunktion, når man opdeler et tidsrum i flere og flere terminer (her illustreret med 1, 5 og 10 terminer).



Opgaverne 634*

Kapitalfremskrivningsformlen er en *diskret funktion,* fordi dens definitionsmængde ikke består af ét eller flere intervaller, men kun punkter.
Og det er sådan set den eneste forskel mellem den og vores næste type funktion, der er *eksponentielle udviklinger*. Rent matematisk fungerer de på samme måde, men eksponentielle udviklinger har kontinuert rentetilskrivning, dvs. grafisk bliver det glatte kurver.

Men inden vi ser på nye funktionstyper, skal vi arbejde lidt videre med rentesregning. Vi skal nu se på annuitetslån og opsparingsannuiteter, der adskiller sig fra vores hidtidige situationer ved, at der ikke blot tilskrives renter, men også løbende foretages afbetalinger eller indbetalinger.

ANNUITETER

Definition 14: En *annuitet* er en række indbetalinger med fast mellemrum.

En *opsparingsannuitet* er en opsparing med fast rentefod, hvor der med fast mellemrum (termin) indbetales et fast beløb.

Et *annuitetslån* er et lån med fast rentefod, hvor der med fast mellemrum (termin) indbetales en fast ydelse (sum af rente og afdrag).

Egentlig er ordet *annuitet* misvisende, for det henviser til, at terminen er et år, hvilket ikke er tilfældet generelt. For huslån er terminen 3 måneder (et kvart år), mens forbrugslån typisk har terminen én måned.

Bemærk, at ordet *annuitet* henviser til et fast tidsrum, men ikke til hverken fast rentefod eller fast indbetalt beløb. Alligevel har de to situationer – *opsparingsannuitet* og *annuitetslån* – også fast rentefod og fast beløb.

Vi skal ikke regne på situationer, hvor rentefoden ikke er fast (f.eks. flexlån), og heller ikke på situationer med fast rentefod, men variabelt beløb (f.eks. serielån). Man kan regne på disse tilfælde med almindelig rentesregning.

Sætning 18: For en **opsparingsannuitet** med rentefoden r pr. termin er opsparingskapitalen umiddelbart efter den n'te indbetaling af terminsindbetalingen b givet ved:

$$A_n = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Bevis 18: Vi får i beviset brug for Sætning 1 fra Uendeligheder, hvor vi så på kvotientrækker:

$$\sum_{i=0}^{n} a \cdot q^i = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \ldots + a \cdot q^n = \frac{a \cdot \left(q^{n+1} - 1\right)}{q-1}$$

Vi skal finde et udtryk for A_n, der som beskrevet er opsparingskapitalen **umiddelbart efter** den n'te indbetaling. Vi finder dette ved at se på, hvad de enkelte indbetalinger hver især er blevet til ved rentetilskrivninger og derefter addere disse størrelser.

Jo tidligere en indbetaling har fundet sted, jo flere gange er den blevet tilskrevet renter.

Den n'te indbetaling (den seneste) har ikke fået tilskrevet renter. Den $(n-1)$'te indbetaling (den næstseneste) har fået tilskrevet renter én gang. Den første indbetaling har fået tilskrevet renter $(n-1)$ gange (der er $n-1$ terminer mellem de n indbetalinger). Dette giver os:

$$A_n = b + b \cdot (1+r) + b \cdot (1+r)^2 + b \cdot (1+r)^3 + \ldots + b \cdot (1+r)^{n-1} = b \cdot \frac{\left((1+r)^{(n-1)+1} - 1\right)}{(1+r) - 1} = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Eksempel 43: En børneopsparing har rentefoden 1,2% p.a., og der må højst indsættes 6000 kr. om året.

Først ses på, hvad et barn vil kunne hæve kontoen på sin 18 års fødselsdag, hvis der indbetales 6000 kr. om året fra og med den dag barnet fødes.

Der er 19 indbetalinger, så man har:

$$A_n = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$A_{19} = 6000\,\text{kr.} \cdot \frac{(1+0{,}012)^{19} - 1}{0{,}012} = 127190{,}89\,\text{kr.}$$

Hvis forældrene har det mål, at barnet skal kunne hæve 80000 kr., kan de udregne, hvad der skal indbetales hvert år:

$$b = A_n \cdot \frac{r}{(1+r)^n - 1}$$

$$b = 80000\,\text{kr.} \cdot \frac{0{,}012}{(1+0{,}012)^{19} - 1} = 3773{,}86\,\text{kr.}$$

Opgaverne 635*

Annuitetslån

I forbindelse med annuitetslån er følgende begreber relevante:

- **Hovedstol (G):** Det beløb, der lånes. Hovedstolen ændrer sig ikke.
- **Restgæld (RG):** Det beløb, der mangler at blive tilbagebetalt. Fra start svarer restgælden altså til hovedstolen, mens den er 0 efter sidste afdrag. Restgælden falder hurtigere og hurtigere, fordi afdragene bliver større og større (se nedenfor).
- **Rentefod (r):** Lånets faste rentefod **pr. termin**. Ved nogle lån kompliceres dette begreb af, at der også optræder en såkaldt *bidragsats*. F.eks. ved et huslån, hvor man betaler renter til obligationsejeren og bidrag til realkreditinstituttet (og bidragsatsen kan faktisk også variere, men det ser vi bort fra). Men bidragsatsen er også en rentefod, så man kan slå det hele sammen til én fast rentefod, hvor man altså ikke skelner mellem, hvem der modtager pengene. F.eks. kunne rentefoden være 0,9% og bidragssatsen være 0,6%, hvor man så regner med én rentefod på 1,5%. Bemærk, at det (selvfølgelig) er rentefoden pr. termin, der indgår i formlen, mens det ofte er den nominelle rentefod p.a., der oplyses.
- **Antal terminer (n):** Antallet af terminer er også antallet af indbetalinger. Man foretager af gode grunde ikke en indbetaling ved lånets optagelse (det ville jo reelt bare svare til en mindre hovedstol).
- **Ydelse (y):** Det faste beløb, der indbetales hver termin. Ydelsen er summen af rente og afdrag (se nedenstående): $y = R + A$
- **Rente (R):** Renten beregnes ud fra restgælden på sædvanlig vis: $R = r \cdot RG$. Renten bliver altså mindre og mindre i takt med, at restgælden bliver mindre.
- **Afdrag (A):** Den del af ydelsen, der går til tilbagebetaling af lånet, dvs. det beløb, man trækker fra den gamle restgæld for at få den nye restgæld: $RG_{i+1} = RG_i - A$. Da ydelsen er konstant, og renten bliver mindre og mindre, bliver afdraget større og større.

Sætning 19: For et **annuitetslån** gælder (med betegnelserne forklaret i det foregående):

$$y = G \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$$

Beviset for sætningen er baseret på en sammenligning mellem lån og opsparing.

Hvis man kunne opnå en større rentefod på en opsparing, end man skulle betale for et lån, kunne det betale sig at optage et lån og sætte pengene på en opsparing. Hvis indlåns- og udlånsrentefoden var identiske, ville det gå lige op, dvs. man kunne – som ren tidsfordriv, dvs. uden hverken at tjene eller miste noget på det – optage et lån og sætte pengene på en opsparing. Og det er denne tankegang, der benyttes i følgende bevis:

Bevis 19: Vi forestiller os, at vi i stedet for at betale løbende tilbage på vores lån med hovedstolen G, opretter en opsparingsannuitet **med samme rentefod**, hvor indbetalingerne svarer til den ydelse, vi ellers skulle have indbetalt for at afvikle lånet ($y = b$). Dvs. lånet står og passer sig selv med rentetilskrivninger hver termin, mens ydelserne hver termin går til en opsparingsannuitet, der så efter sidste termin skal have samme værdi, som lånet er vokset til, dvs.:

$$G \cdot (1+r)^n = A_n$$

Det er vigtigt at bemærke, at n'erne passer. Vores n i annuitetsopsparingen var antallet af indbetalinger, der egentlig var én mere end antal terminer, men det kommer til at passe med antal terminer i vores annuitetslån, da vi ikke indbetaler noget som opstart til første termin, dvs. vi påbegynder vores opsparing én termin senere, end formlen egentlig angiver. Herfra er det bare udregninger:

$$G \cdot (1+r)^n = A_n \Leftrightarrow G \cdot (1+r)^n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} \overset{\text{Forkorter ligningen med } (1+r)^n}{\Leftrightarrow}$$

$$G = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \Leftrightarrow y = G \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$$

Eksempel 44: Vi ser på et 30-årigt huslån med rentefoden 2,7% p.a. og hovedstolen 3,4 millioner kr. Der er 4 terminer årligt, og vi ønsker at bestemme ydelsen pr. termin.

Antallet af terminer er 120, og rentefoden pr. termin er $r = \frac{2{,}7\%}{4} = 0{,}675\%$ så vi får:

$$y = G \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-n}} = 3400000\text{kr.} \cdot \frac{0{,}00675}{1-1{,}00675^{-120}} = 41431{,}26\text{kr.}$$

Eksempel 45: Rentefoden på et 30-årigt huslån (4 terminer årligt) er 3,6% p.a., og en familie har råd til at betale en kvartalsvis ydelse på 35000 kr. Hvor stort et beløb kan de låne?

Der er 120 terminer, og rentefoden pr. termin er 0,9% (en fjerdedel af 3,6%), så man får:

$$G = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = 35000\text{kr.} \cdot \frac{1-(1+0{,}009)^{-120}}{0{,}009} = 2561844\text{kr.}$$

Sætning 19 inddrager kun hovedstol, ydelse, rentefod og antal terminer. Når man har benyttet sætningen til at finde den faste ydelse, kan man lave et Excel-ark, hvor man kan inddrage og følge restgæld, rente og afdrag (tal fra Eksempel 44):

	A	B	C	D	E	F	G
1	Termin	Rente	Afdrag	Restgæld		Hovedstol:	3400000
2	1	22950,00	18481,26	3381518,74		Ydelse:	41431,258
3	2	22825,25	18606,01	3362912,74		Rentefod p.a.	2,70%
4	3	22699,66	18731,60	3344181,14		Rentefod pr. termin:	0,675%
5	4	22573,22	18858,04	3325323,10		Antal terminer	120
6	5	22445,93	18985,33	3306337,78			
7	6	22317,78	19113,48	3287224,30			
8	7	22188,76	19242,49	3267981,81			
9	8	22058,88	19372,38	3248609,43			
10	9	21928,11	19503,14	3229106,28			
11	10	21796,47	19634,79	3209471,49			
12	11	21663,93	19767,33	3189704,17			
13	12	21530,50	19900,75	3169803,41			
14	13	21396,17	20035,08	3149768,33			
15	14	21260,94	20170,32	3129598,00			
16	15	21124,79	20306,47	3109291,53			
17	16	20987,72	20443,54	3088847,99			
18	17	20849,72	20581,53	3068266,46			
19	18	20710,80	20720,46	3047546,00			
20	19	20570,94	20860,32	3026685,68			
21	20	20430,13	21001,13	3005684,55			
22	21	20288,37	21142,89	2984541,66			
23	22	20145,66	21285,60	2963256,06			
24	23	20001,98	21429,28	2941826,78			
25	24	19857,33	21573,93	2920252,85			
26	25	19711,71	21719,55	2898533,30			
27	26	19565,10	21866,16	2876667,15			
28	27	19417,50	22013,75	2854653,39			
29	28	19268,91	22162,35	2832491,04			
30	29	19119,31	22311,94	2810179,10			
31	30	18968,71	22462,55	2787716,55			
32	31	18817,09	22614,17	2765102,38			
33	32	18664,44	22766,82	2742335,56			
34	33	18510,77	22920,49	2719415,07			
35	34	18356,05	23075,21	2696339,86			
36	35	18200,29	23230,96	2673108,90			
37	36	18043,49	23387,77	2649721,13			
38	37	17885,62	23545,64	2626175,49			
39	38	17726,68	23704,57	2602470,92			
40	39	17566,68	23864,58	2578606,34			
41	40	17405,59	24025,66	2554580,67			
42	41	17243,42	24187,84	2530392,83			
43	42	17080,15	24351,11	2506041,73			
44	43	16915,78	24515,48	2481526,25			
45	44	16750,30	24680,96	2456845,30			
46	45	16583,71	24847,55	2431997,74			
47	46	16415,98	25015,27	2406982,47			
48	47	16247,13	25184,13	2381798,34			
49	48	16077,14	25354,12	2356444,23			
50	49	15906,00	25525,26	2330918,97			

	A	B	C	D
1	Termin	Rente	Afdrag	Restgæld

…terminerne 51 – 93 er udeladt …

94	93	7113,24	34318,02	1019494,71
95	94	6881,59	34549,67	984945,04
96	95	6648,38	34782,88	950162,17
97	96	6413,59	35017,66	915144,50
98	97	6177,23	35254,03	879890,47
99	98	5939,26	35492,00	844398,47
100	99	5699,69	35731,57	808666,90
101	100	5458,50	35972,76	772694,15
102	101	5215,69	36215,57	736478,58
103	102	4971,23	36460,03	700018,55
104	103	4725,13	36706,13	663312,42
105	104	4477,36	36953,90	626358,52
106	105	4227,92	37203,34	589155,18
107	106	3976,80	37454,46	551700,72
108	107	3723,98	37707,28	513993,44
109	108	3469,46	37961,80	476031,64
110	109	3213,21	38218,04	437813,60
111	110	2955,24	38476,02	399337,58
112	111	2695,53	38735,73	360601,85
113	112	2434,06	38997,20	321604,66
114	113	2170,83	39260,43	282344,23
115	114	1905,82	39525,43	242818,79
116	115	1639,03	39792,23	203026,56
117	116	1370,43	40060,83	162965,74
118	117	1100,02	40331,24	122634,50
119	118	827,78	40603,47	82031,02
120	119	553,71	40877,55	41153,47
121	120	277,79	41153,47	0,00

Der er arbejdet med ekstra decimaler på ydelsen, så restgælden bliver 0,00 til sidst.

Opgaverne 636*

INDEKSTAL

Indekstal er opfundet for at gøre det lettere at overskue en tidslig udvikling af en størrelse, sammenligne størrelser af forskellige størrelsesordner eller sammenligne størrelser med forskellige enheder.

F.eks. kunne de benyttes til at følge udviklingen af prisen på mælk fra år til år, at sammenligne prisen på mælk med bruttonationalproduktet eller sammenligne bruttonationalproduktet med arbejdsløsheden målt i procent.

Det er altså muligt at sammenligne størrelser med forskellige enheder. Hvorvidt det giver mening med sådanne sammenligninger, er en anden sag, og det er selvfølgelig noget man altid skal overveje i det konkrete tilfælde.

Ideen er, at man vælger et år som *basisår*, og i dette år tildeles den pågældende størrelse indekstallet 100 (i hvert fald vælges 100 oftest som *basistal*). Herefter følger indekstallet og værdien af den pågældende størrelse samme relative udvikling, dvs.:

Sætning 20: Når en størrelse antager værdien *B*, har den indekstallet I_B.

Når samme størrelse på et andet tidspunkt antager værdien *S*, er dens indekstal I_S givet ved:

$$\frac{I_S}{I_B} = \frac{S}{B}$$

Ved at omskrive Sætning 20 til $\frac{I_S}{S} = \frac{I_B}{B}$, kan man også se, at forholdet mellem indekstal og værdi er konstant for en størrelse, der ændrer sig over tid.

Valget af basisår er i princippet frit, men i praksis er det vigtigt, at man forsøger at vælge et ”normalår”, dvs. et år hvor den pågældende størrelse ikke af forskellige årsager har haft en meget lille eller stor værdi.

Eksempel 46: Varen *Q* har kostet følgende pr. enhed i forskellige år:

Årstal	1985	1990	1995	2000	2005	2010	2015
Værdi	7,93 kr.	8,35 kr.	10,13 kr.	8,94 kr.	9,41 kr.	10,16 kr.	11,07 kr.

Vi ønsker at finde et basisår, og kan frit vælge blandt årstallene bortset fra 1995, hvor prisen tydeligvis har været usædvanlig høj (måske var et fragtskib med råstoffet *X* gået ned?).

Vi vælger 1985 som basisår, hvorfor indekstallet dette år bliver 100.

Et regneeksempel til udfyldning af tabellen er:

$$\frac{I_{2000}}{I_{1985}} = \frac{S_{2000}}{B_{1985}} \qquad I_{2000} = \frac{S_{2000}}{B_{1985}} \cdot I_{1985} = \frac{8,94kr.}{7,93kr.} \cdot 100 = 112,74$$

Årstal	1985	1990	1995	2000	2005	2010	2015
Værdi	7,93 kr.	8,35 kr.	10,13 kr.	8,94 kr.	9,41 kr.	10,16 kr.	11,07 kr.
Indekstal	**100**	**105**	**128**	**113**	**119**	**128**	**140**

Når du kigger på indekstallene i Eksempel 46, skulle det gerne være sådan, at du ud fra disse har nemmere ved at følge udviklingen af prisen på varen *Q*, end hvis du kigger på selve værdien.

Opgaverne 637*