FUNKTIONER

del 2

Eksponentielle udviklinger
Trigonometriske funktioner
Potensfunktioner
Polynomier
Modeller
Regression

x-klasserne

Gammel Hellerup Gymnasium

November 2023 ; Michael Szymanski ; mz@ghg.dk

Indhold

EKSPONENTIELLE UDVIKLINGER

Der indledes med en definition:

Definition 15: En *eksponentiel udvikling* er en funktion $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}_+$ med funktionsforskriften

$$f(x)=b\cdot a^x \quad , a>0,\ a\neq 1,\ b>0$$

a kaldes for *fremskrivningsfaktoren* eller *grundtallet*.
b kaldes *begyndelsesværdien* eller *startværdien*.

Hvis man sammenligner med Definition 8, ses det, at en *eksponentialfunktion* simpelthen er en *eksponentiel udvikling* med begyndelsesværdien 1. Dvs. enhver eksponentialfunktion er også en eksponentiel udvikling, men en eksponentiel udvikling er ikke nødvendigvis en eksponentialfunktion.

Overvejelser omkring Dm, Vm, *a* og *b*.

Lige som med eksponentialfunktioner er betingelserne på konstanterne knyttet nøje sammen med Dm og Vm.

Når vi kræver, at $a>0$, får vi mulighed for at anvende alle argumenter (hvis *a* måtte være negativ, ville argumentet $x=\frac{1}{2}$ give os problemer, da man ikke kan uddrage kvadratroden af et negativt tal). Vi har altså $Dm=\mathbb{R}$, fordi vi kan opløfte alle positive tal i en hvilket som helst (reel) potens.

Det er lidt anderledes med betingelsen $b>0$. Prøv at kigge på funktionsforskriften. Her står, at man skal multiplicere med *b*, og vi ved, at man må multiplicere med alle reelle tal. Så faktisk er der ingen algebraisk begrundelse for betingelsen $b>0$. Det er simpelthen noget, man **vælger.** Det skyldes, at man ikke har brug for negative værdier til de formål, man anvender eksponentielle udviklinger til, og vores udelukkelse af negative *b*-værdier gør det nemmere at beskrive monotoniforholdene for eksponentielle udviklinger.

Det er betingelsen $b>0$, der giver os $Vm=\mathbb{R}_+$, og når man også **vælger** kodomænet til $\mathbb{R}_+$, får man bijektive funktioner.

Bemærk altså, at betingelsen $a>0$ er algebraisk begrundet, mens $b>0$ er et valg.

b kaldes begyndelsesværdien, fordi $f(0)=b\cdot a^0=b\cdot 1=b$, dvs. når argumentet er 0, er funktionsværdien *b*. Grafen for en eksponentiel udvikling går altså gennem punktet $(0,b)$.

Hvis vi opstiller kapitalfremskrivningsformlen og funktionsforskriften for en eksponentiel udvikling over hinanden, kan vi se, at de fungerer algebraisk ens:

$$K_n=K_0\cdot(1+r)^n$$
$$f(x)=b\cdot a^x$$

Vi kalder K_0 for startkapitalen og *b* for startværdien, men de fungerer jo på samme måde i formlen. Og *n* er antal terminer, mens *x* er argumentet, og her er den eneste forskel, at *n* er et naturligt tal, mens *x* kan være alle reelle tal. Desuden har vi, at $a=1+r$.

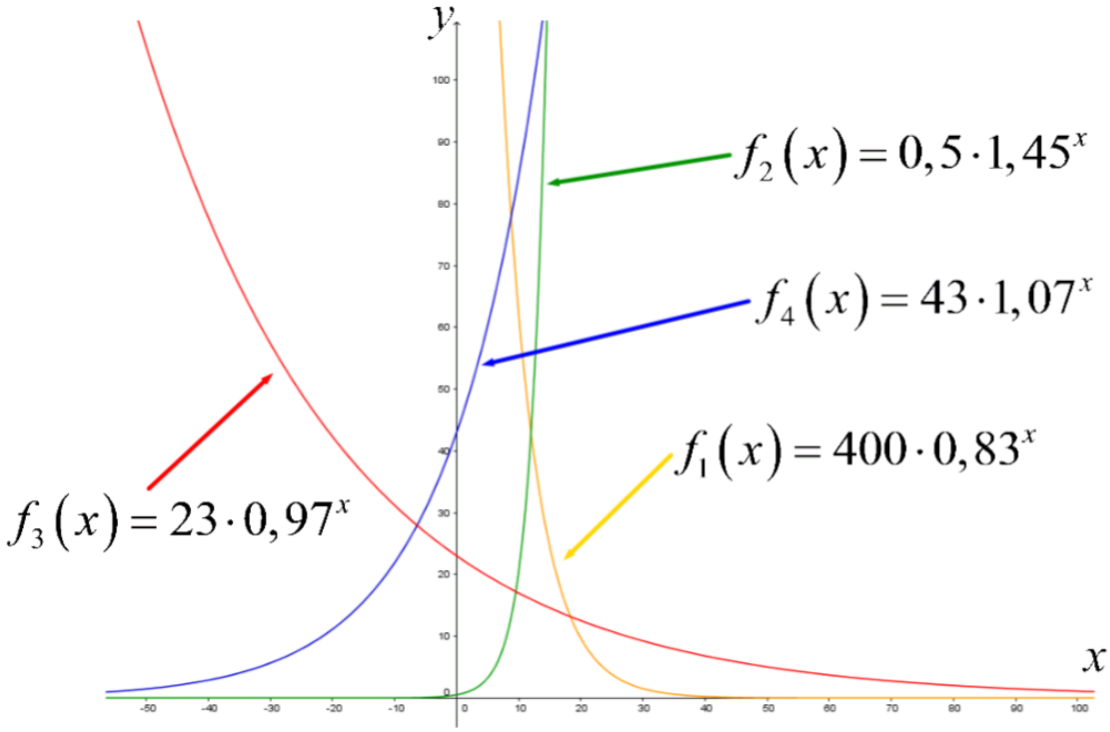
Vores b er blot en koefficient, der ganges på vores eksponentialfunktion, og da b er positiv, ændrer det ikke noget ved monotoniegenskaberne, der kan overføres direkte fra eksponentialfunktionerne.

Sætning 21: For en eksponentiel udvikling med fremskrivningsfaktoren a gælder:

$a > 1$: Funktionen er voksende.

$0 < a < 1$: Funktionen er aftagende.

Nedenstående figur viser grafer for 4 eksempler på eksponentielle udviklinger. Tjek, at du kan se sammenhængen mellem grafen og forskriften (skæring med ordinataksen og voksende/aftagende funktion).



Vi ser nu på konstanternes betydning rent matematisk og deres fortolkninger i konkrete situationer:

Eksempel 47: Vi ser på den eksponentielle udvikling med forskriften $f_4(x) = 43 \cdot 1,07^x$.

Begyndelsesværdien er 43, og fremskrivningsfaktoren er 1,07. Dermed er vækstraten 7%. Grafen for funktionen går altså gennem punktet $(0,43)$, og **hver gang *x*-værdien øges med 1, øges funktionsværdien med 7%**.

Eksempel 48: Vi ser på den eksponentielle udvikling med forskriften $f_3(x) = 23 \cdot 0,97^x$.

Begyndelsesværdien er 23, og fremskrivningsfaktoren er 0,97. Dermed er vækstraten -3%. Grafen for funktionen går gennem punktet $(0,23)$, og hver gang x-værdien øges med 1, mindskes funktionsværdien med 3%.

Opgaverne 640*

Ovenstående er de matematiske beskrivelser.

Når du møder eksponentielle udviklinger i forbindelse med virkeligheden, er det afgørende, at du kan fortolke konstanterne i den helt **konkrete** situation (ligesom vi så med lineære funktioner).

Eksempel 49: Værdien *p* (målt i tusinde kr.) af en bil kan som funktion af tiden *t* (målt i antal år efter købet) beskrives ved forskriften $p(t)=452\cdot 0,83^t$.

Hvad fortæller konstanterne om bilens værdi?

452 fortæller, at bilen, da den blev købt, havde værdien 452000 kr.
0,83 fortæller, at for hvert år siden købet er værdien faldet med 17%.

Eksempel 50: Antallet *N* af bakterier i en bakteriekultur kan som funktion af tiden *t* målt i minutter beskrives ved forskriften $N(t)=25\cdot 1,034^t$.

Hvad fortæller konstanterne om antallet af bakterier?

25 fortæller, at der er 25 bakterier fra start.
1,034 fortæller, at antallet af bakterier vokser med 3,4% i minuttet.

Eksempel 51: Intensiteten *I* (målt i $\frac{W}{m^2}$) af en lysstråle, der bevæger sig gennem et gennemsigtigt materiale, kan som funktion af den tilbagelagte strækning *x* (målt i cm) i materialet beskrives ved forskriften $I(x)=760\cdot 0,937^x$.

Hvad fortæller konstanterne om lysstrålens intensitet?

760 fortæller, at når lysstrålen rammer materialets overflade, er dets intensitet $760\frac{W}{m^2}$.

0,937 fortæller, at lysstrålens intensitet falder med 6,3% for hver centimeter, den bevæger sig gennem materialet.

Opgaverne 641*

Forskrift ud fra to punkter

Lige som med en lineær funktion kan man bestemme forskriften for en eksponentiel udvikling, hvis man kender to punkter, som grafen går igennem (hvilket svarer til at kende funktionsværdierne to steder).

Der er en formel til dette, men oftest er det meget bedre at kende en metode, da det giver bedre matematisk forståelse og ikke kræver så meget udenadslære. Så vi begynder med metoden, som vi egentlig kender i forvejen, bare ikke anvendt på denne funktionstype.

Metode

Eksempel 52:

Det er oplyst, at grafen for en eksponentiel udvikling går gennem punkterne $(2,20)$ og $(6,320)$.

Vi vil bestemme en forskrift.

Vi ved, at den generelle forskrift er $f(x) = b \cdot a^x$, og vi indsætter punkternes koordinater:

$$\left.\begin{array}{r} 320 = b \cdot a^6 \\ 20 = b \cdot a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{320}{20} = \frac{b \cdot a^6}{b \cdot a^2} \Leftrightarrow 16 = a^{6-2} \Leftrightarrow a = \pm\sqrt[4]{16} \Leftrightarrow a = \pm 2$$

Vi dividerer venstreside med venstreside og højreside med højreside og opnår dermed, at *b*-værdien kan forkortes ud. Da vi har betingelsen $a > 0$, har vi altså $\underline{a = 2}$.

Dette indsættes i den ene af ligningerne. Her vælges den nederste:

$$20 = b \cdot 2^2 \Leftrightarrow b = \frac{20}{4} = 5$$

Dvs. forskriften er $\underline{\underline{f(x) = 5 \cdot 2^x}}$

Eksempel 53: Vi anvender metoden på to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2):

Punkternes koordinater indsættes i forskriften:

$$\left.\begin{array}{r} y_2 = b \cdot a^{x_2} \\ y_1 = b \cdot a^{x_1} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = \frac{b \cdot a^{x_2}}{b \cdot a^{x_1}} \Leftrightarrow \frac{y_2}{y_1} = a^{x_2 - x_1} \Leftrightarrow a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$$

I sidste skridt blev det benyttet, at vi ved, at *a* er positiv.

Når vi kender *a*-værdien, kan *b*-værdien bestemmes ved indsættelse i en af ligningerne:

$$y_2 = b \cdot a^{x_2} \Leftrightarrow b = \frac{y_2}{a^{x_2}}$$

$$y_1 = b \cdot a^{x_1} \Leftrightarrow b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

Når du anvender metoden, er det en god idé at sørge for, at den højeste *x*-værdi havner i tælleren, for ellers får du rødder med negative rodeksponenter. Disse kan godt regnes ud (se vores gennemgang af rødder og potenser), men de fleste vil have nemmere ved at arbejde med positive rodeksponenter.

Eksempel 53 er beviset for den følgende sætning:

Formel:

Sætning 22: Konstanterne for en eksponentiel udvikling *f* med forskriften $f(x) = b \cdot a^x$, hvis graf går gennem punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2), eller hvor man kender funktionsværdierne $f(x_1)$ og $f(x_2)$, kan bestemmes ved:

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} \qquad a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{f(x_2)}{f(x_1)}}$$

$$b = \frac{y_2}{a^{x_2}} \qquad b = \frac{f(x_2)}{a^{x_2}}$$

Eksempel 54: Om den eksponentielle udvikling *f* ved vi, at $f(1) = 2$ og $f(3) = 72$.

Vi vil bestemme en forskrift for *f* og indsætter derfor i formlerne fra Sætning 18:

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{f(x_2)}{f(x_1)}} = \sqrt[3-1]{\frac{72}{2}} = \sqrt[2]{36} = \sqrt{36} = 6$$

$$b = \frac{f(x_1)}{a^{x_1}} = \frac{2}{6^1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Dermed er forskriften: $\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{3} \cdot 6^x}}$

Hvis man har hjælpemidler til rådighed, kan Maple bestemme forskriften på flere måder:

Regression:

restart

with(*Gym*) :

argumenter := [1, 3] :

værdier := [2, 72] :

ExpReg(*argumenter*, *værdier*, *x*) = $0.333333333356036 \; 5.99999999983167^x$

Bemærk, at Maples resultat ikke er helt præcist. I sådanne situationer skal du kigge på resultatet og vurdere, at tallene er $\frac{1}{3}$ og 6.

To ligninger:

$f(x) := b \cdot a^x$:

$solve([f(1) = 2, f(3) = 72]) = \left\{a = 6, b = \frac{1}{3}\right\}, \left\{a = -6, b = -\frac{1}{3}\right\}$

Her skal du kaste den sidste løsning væk, da *a*-værdien er negativ.

Opgaverne 642*

Grafisk

Vi har allerede i introduktionsforløbet set, at grafen for en eksponentiel udvikling er en ret linje i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem. Vi er nu klar til at bevise det.

Vi tager udgangspunkt i forskriften $f(x) = b \cdot a^x$.

Et punkt (x, y) på grafen for *f* opfylder altså ligningen $y = b \cdot a^x$.

Dette er en ligning, og vi må derfor tage logaritmen på begge sider:

$$y = b \cdot a^x \Leftrightarrow$$

$$\log(y) = \log\left(b \cdot a^x\right) \Leftrightarrow \qquad \left[\text{Første logaritmeregneregel benyttes}\right]$$

$$\log(y) = \log(b) + \log\left(a^x\right) \Leftrightarrow \quad \left[\text{Tredje logaritmeregneregel benyttes}\right]$$

$$\log(y) = \log(b) + x \cdot \log(a)$$

Hældning: log(a)

Argumentet / Uafhængig variabel: *x*

Skæring med *y*-aksen: log(b)

Funktionsværdi / Afhængig variabel: log(*y*)

Pointen er, at der er en lineær sammenhæng mellem $\log(y)$ og *x*, for $\log(a)$ og $\log(b)$ er konstanter, der grafisk svarer til henholdsvis hældningen og skæringen med *y*-aksen.

Dvs. hvis man afsætter punkterne $(x, \log(y))$ i stedet for (x, y), så vil punkterne danne en ret linje i et almindeligt koordinatsystem.

Og som vi viste i forbindelse med logaritmiske skalaer, skal punkterne sættes samme sted, uanset om man vælger at afsætte $\log(y)$ på en almindelig skala eller *y* på en logaritmisk skala.

Derfor får vi også en ret linje, hvis vi afsætter (x, y) i et koordinatsystem, hvor andenaksen er gjort logaritmisk (dvs. et enkeltlogaritmisk koordinatsystem).

Sætning 23: Grafen for en eksponentiel udvikling er en ret linje i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem.

Vi kan faktisk også få lidt mere ud af vores udledning, for det er egentlig første skridt på vejen til at isolere *x*:

$$x \cdot \log(a) = \log(y) - \log(b) \Leftrightarrow$$

$$x \cdot \log(a) = \log\left(\frac{y}{b}\right) \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{1}{\log(a)} \cdot \log\left(\frac{1}{b} \cdot y\right)$$

Vi har hermed isoleret *x*, og hvis vi bytter om på *x* og *y*, ser vi altså:

Den omvendte funktion f^{-1} til den eksponentielle udvikling *f* med forskriften $f(x) = b \cdot a^x$ er den logaritmiske funktion med forskriften $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{\log(a)} \cdot \log\left(\dfrac{1}{b} \cdot x\right)$.

Karakteristisk egenskab

Vi er nu nået til det helt centrale punkt i forbindelse med eksponentielle udviklinger, nemlig deres vækstegenskab. Vi har tidligere vist for lineære funktioner, at når man lægger en fast størrelse til argumentet, så ændres funktionsværdien med en fast størrelse. Lad os se, hvad der sker, hvis vi lægger en fast størrelse til argumentet i en eksponentiel udvikling. Dvs. vi tager udgangspunkt i et vilkårligt argument med tilhørende funktionsværdi og vil så se, hvad der sker med funktionsværdien, når vi lægger størrelsen Δx til argumentet:

$$f(x_1) = b \cdot a^{x_1}$$

1. potensregneregel

$$f(x_1 + \Delta x) = b \cdot a^{x_1 + \Delta x} = b \cdot a^{x_1} \cdot a^{\Delta x} = f(x_1) \cdot a^{\Delta x}$$

Her er pointen!

Vi lægger altså Δx til argumentet og ser, at vores funktionsværdi dermed bliver multipliceret med $a^{\Delta x}$, der er et tal. Vi ser altså, at hvis vi bliver ved med at lægge Δx til argumentet, så vil vores funktionsværdi hele tiden blive multipliceret med tallet $a^{\Delta x}$. Og vi husker fra rentesregning, at det at gange med et tal svarer til at lægge procent til eller trække procent fra.

Vi har altså set følgende karakteristiske egenskab for eksponentielle udviklinger:

Sætning 24: Den karakteristiske vækstegenskab for en eksponentiel udvikling er, at når man lægger en fast størrelse til argumentet, ændres funktionsværdien med en fast procentdel.

Bemærk, at hele argumentationen er baseret på, at vores argument ikke indgår i den størrelse $a^{\Delta x}$, som vi multiplicerer med. For Δx har netop ikke noget at gøre med vores udgangspunkt x_1.

Denne egenskab ses ikke hos andre funktionstyper.

Vi kan gå videre end dette og finde en formel, så vi får en sammenhæng mellem vores vækstrate og den faste størrelse, der lægges til argumentet. Da vi netop har opdaget, at denne faste størrelse kan knyttes til en vækstrate, ændrer vi dens symbol, så vi nu arbejder med:

r_y: Den vækstrate, som funktionsværdien skal ændres med.

$X_{(1+r_y)}$: Den faste størrelse, der skal lægges til *x*-værdien for at funktionsværdien ændres med r_y.

Vi anvender "stort X", når vores argument er *x*. Hvis vi anvender et andet bogstav som argument, anvender vi et andet bogstav. Oftest anvendes f.eks. *t* for tiden, og så anvendes *T* om den faste størrelse.

I vores udledning af Sætning 24 ender vi med at multiplicere med $a^{\Delta x}$, som med vores nye notation altså hedder $a^{X_{(1+r_y)}}$. Vi ved fra rentesregning, at det er fremskrivningsfaktoren, vi har multipliceret med. Så hvis funktionsværdien er ændret med vækstraten r_y, har vi:

$$(1 + r_y) = a^{X_{(1+r_y)}}$$

Kig grundigt på dette udtryk og tænk over det. Husk, at *a* er fremskrivningsfaktoren for den eksponentielle udvikling, mens r_y er vækstraten, der beskriver ændringen i funktionsværdien. Så egentlig er det et velkendt udtryk, vi er kommet frem til. Hvis f.eks. $X_{(1+r_y)} = 4$, så svarer det til at gå 4 enheder hen på *x*-aksen eller tilsvarende at have 4 terminer (rentetilskrivninger). Og når man tilskriver renter 4 gange, så ganger man med fremskrivningsfaktoren i fjerde potens.

Hvis vi gerne vil vide, hvor langt vi skal gå hen ad *x*-aksen for at ændre funktionsværdien med vækstraten r_y, skal vi have isoleret $X_{(1+r_y)}$ i ligningen:

$$\left(1+r_y\right) = a^{X_{(1+r_y)}} \Leftrightarrow \log_a\left(1+r_y\right) = \log_a\left(a^{X_{(1+r_y)}}\right) \Leftrightarrow X_{(1+r_y)} = \log_a\left(1+r_y\right)$$

Eller hvis vi hellere vil benytte den naturlige logaritmefunktion:

$$\left(1+r_y\right) = a^{X_{(1+r_y)}} \Leftrightarrow \ln\left(1+r_y\right) = \ln\left(a^{X_{(1+r_y)}}\right) \Leftrightarrow \ln\left(1+r_y\right) = X_{(1+r_y)} \cdot \ln(a) \Leftrightarrow X_{(1+r_y)} = \frac{\ln\left(1+r_y\right)}{\ln(a)}$$

Vi kunne også have anvendt titalslogaritmen i stedet for den naturlige logaritme. Regnereglerne dækker jo alle logaritmefunktioner. Så vi har hermed vist sætningen:

Sætning 25: For en eksponentiel udvikling med fremskrivningsfaktoren *a* gælder, at hvis funktionsværdien skal ændres med vækstraten r_y, skal man lægge $X_{(1+r_y)}$ til argumentet, hvor $X_{(1+r_y)}$ er bestemt ved enhver af disse formler:

$$X_{(1+r_y)} = \log_a\left(1+r_y\right) \qquad X_{(1+r_y)} = \frac{\ln\left(1+r_y\right)}{\ln(a)} \qquad X_{(1+r_y)} = \frac{\log\left(1+r_y\right)}{\log(a)}$$

Bemærk, at $\left(1+r_y\right)$ optræder to gange i hver formel, men den ene gang er det "bare" som indeks. Når der står $X_{(1+r_y)}$, så er $\left(1+r_y\right)$ ikke en del af en udregning.

Eksempel 55: To eksponentielle udviklinger *f* og *g* er givet ved forskrifterne $f(x) = 34 \cdot 1{,}08^x$ og $g(x) = 17 \cdot 0{,}84^x$. Vi bemærker, at *f* er en voksende funktion, da $a_f > 1$, og da *g* har $a_g < 1$, er det en aftagende funktion. Det giver derfor kun mening at snakke om positive vækstrater for *f* og negative vækstrater for *g*.

Der ses på tre forskellige situationer for hver funktion, så der bliver mulighed for at anvende alle de tre formler fra Sætning 25. Men bemærk, at der er ingen grund til at foretrække den ene formel frem for den anden i de enkelte tilfælde. Man kunne i hvert tilfælde have anvendt enhver af formlerne.

a) Hvor meget skal lægges til argumentet (*x*-værdien) for at øge *f* 's funktionsværdi med 20%?
Man har $r_y = 0{,}20$, så $X_{1,2} = \log_{1,08}\left(1+0{,}20\right) = \log_{1,08}\left(1{,}2\right) = 2{,}369011$
Så funktionsværdien øges med 20%, hver gang der lægges 2,37 til *x*-værdien.

b) Hvornår er $f(x)$ 4 gange så stor som begyndelsesværdien?
Dette svarer til $r_y = 300\% = 3$, så $X_4 = \frac{\ln(1+3)}{\ln(a)} = \frac{\ln(4)}{\ln(1.08)} = 18{,}012937$
Da udgangspunktet er $x = 0$, og vi skal lægge 18,01 til dette, er svaret $\underline{\underline{x = 18{,}01}}$

Eksempel 55 (fortsat): $f(x)=34\cdot 1{,}08^x$ og $g(x)=17\cdot 0{,}84^x$

c) Hvor meget skal lægges til argumentet for at fordoble *f* 's funktionsværdi?

En fordobling svarer til $r_y=100\%=1$, så $X_2=\dfrac{\log(1+1)}{\log(a)}=\dfrac{\log(2)}{\log(1.08)}=9{,}0063$

Dvs. hver gang man lægger 9 til *x*-værdien, fordobles funktionsværdien.
Og hvis man gør det to gange, har man altså lagt 18 til *x*-værdien og gjort funktionsværdien 4 gange så stor (som vi også så i spørgsmål b)).

d) Hvornår er $g(x)$ nede på 10% af sin begyndelsesværdi?

Bemærk ordlyden: ”Nede **på** 10%”. Man har altså ikke trukket 10% fra, men derimod 90%.

Så $r_y=-90\%=-0{,}90$, og man har $X_{0{,}10}=\dfrac{\log(1-0{,}90)}{\log(a)}=\dfrac{\log(0{,}10)}{\log(0{,}84)}=13{,}2064$

Dvs. at når $\underline{\underline{x=13{,}2}}$, er man nede på 10% af begyndelsesværdien (der i dette tilfælde er 17, men det er fuldstændig uden betydning).

e) Hvor meget skal lægges til argumentet for at mindske *g*'s funktionsværdi med 30%?

Her er $r_y=-30\%=-0{,}30$, dvs. $X_{0{,}70}=\log_{0{,}84}(1-0{,}3)=\log_{0{,}84}(0{,}7)=\underline{\underline{2{,}0457}}$

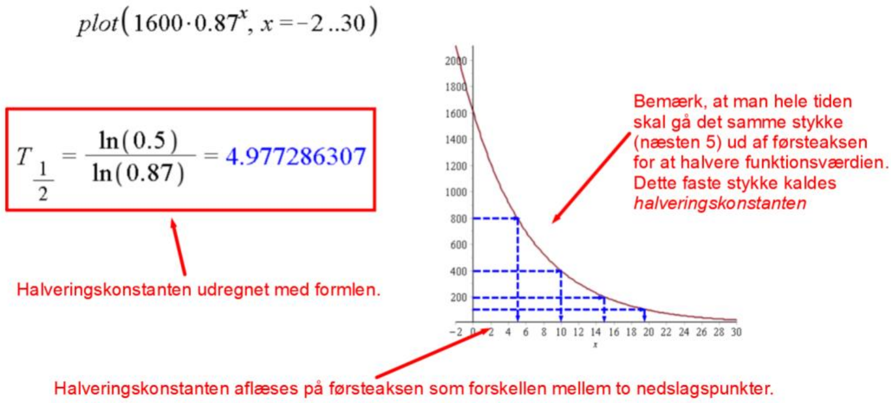
f) Hvor meget skal lægges til argumentet for at halvere *g*'s funktionsværdi?

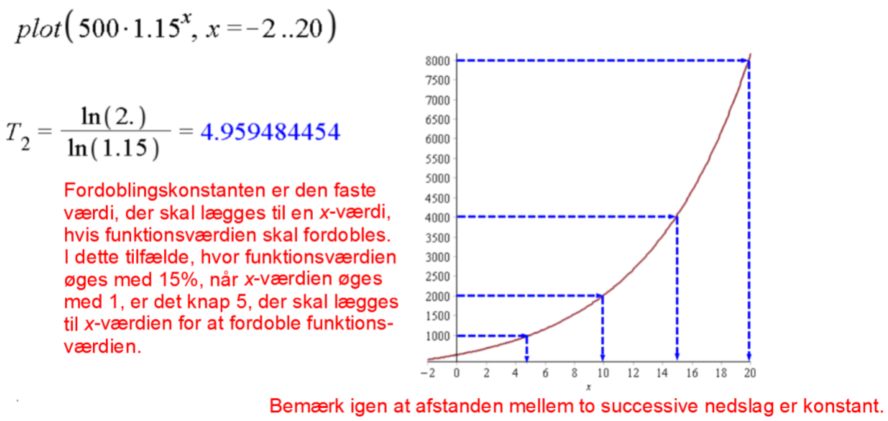
En halvering svarer til $r_y=-50\%=-0{,}50$, så $X_{\frac{1}{2}}=\dfrac{\ln(1-0{,}50)}{\ln(a)}=\dfrac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(0{,}84)}=3{,}9755$

Dvs. hver gang der lægges 3,9755 til argumentet, halveres funktionsværdien.

Opgaverne 643*

I vores introduktionsforløb så vi nedenstående to figurer:





Vi har nu set, at halveringskonstanter og fordoblingskonstanter blot er specialtilfælde af noget mere generelt. For det gælder for en hvilken som helst procentvis ændring af funktionsværdien, at den bliver ved med at forekomme, når man lægger et bestemt tal til argumentet.
Man kunne derfor lige så godt have snakket om tredoblingskonstanten eller enfjerdedelskonstanten.

Man vælger selvfølgelig halvering og fordobling, fordi det er let at forholde sig til, og vi angiver derfor formlerne for disse her.

Sætning 26: For en eksponentiel udvikling $f: x \mapsto b \cdot a^x$ gælder:

Hvis $a > 1$: Fordoblingskonstanten er $X_2 = \log_a(2)$ eller $X_2 = \dfrac{\ln(2)}{\ln(a)}$.

Hvis $0 < a < 1$: Halveringskonstanten er $X_{\frac{1}{2}} = \log_a\left(\dfrac{1}{2}\right)$ eller $X_{\frac{1}{2}} = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(a)}$.

Man kan også som nævnt en del gange anvende titalslogaritmen i stedet for den naturlige logaritme, så den er bare undladt i Sætning 26 for overskuelighedens skyld.

Opgaverne 644*

Og egentlig kunne man så tro, at vi var færdige med gennemgangen af eksponentielle udviklinger, for vi har nu styr på følgende ting:

- Forskrift, Dm, Vm og konstanternes betydning.
- Bestemmelse af forskrift ud fra to punkter.
- Monotoniegenskaber.
- Grafers udseende (herunder en ret linje i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem).
- Omvendt funktion.
- Karakteristiske vækstegenskab (herunder halverings- og fordoblingskonstanter).

Men man har flere forskellige måder at angive eksponentielle udviklinger på, og dem skal vi se på nu.

Eksponentiel udvikling på formen $f(x) = b \cdot \mathbf{e}^{k \cdot x}$

Vi ser, at b-værdien optræder på samme måde i forskrifterne $f(x) = b \cdot a^x$ og $f(x) = b \cdot \mathbf{e}^{k \cdot x}$. Så b har samme betydning i begge tilfælde.
Vi har set, at det kun er a-værdien (fremskrivningsfaktoren), der har betydning, når vi ser på monotoniegenskaber og vækstegenskaber. Vi vil nu finde sammenhængen mellem k og a, så vi kan bruge vores viden om $f(x) = b \cdot a^x$ til at sige noget om $f(x) = b \cdot \mathbf{e}^{k \cdot x}$:

Forskrifterne fortæller os, at $a^x = \mathbf{e}^{k \cdot x}$ skal være en identitet. Det er det kun, hvis:

$$a = \mathbf{e}^k \quad \Leftrightarrow \quad \ln(a) = k$$

Vi ved, at $\log_b(1) = 0$. Og for alle logaritmefunktioner med grundtal over 1 (heriblandt den naturlige logaritmefunktion) gælder det, at værdien er positiv, når argumentet er over 1, og negativ, når argumentet er under 1. Når vi sammenholder dette med $k = \ln(a)$, får vi følgende sætning:

Sætning 27: For en eksponentiel udvikling *f* med forskriften $f(x)=b\cdot \mathbf{e}^{k\cdot x}$ gælder:

- Hvis $k>0$ (svarende til $a>1$), er funktionen voksende, og $X_2=\dfrac{\ln(2)}{k}$.
- Hvis $k<0$ (svarende til $0<a<1$), er funktionen aftagende, og $X_{\frac{1}{2}}=\dfrac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{k}$.

Du vil oftest i fysik og kemi møde eksponentielle udviklinger på denne form. Dog skal du være opmærksom på henfaldsloven i fysik, hvor forskriften er $N(t)=N_0\cdot \mathbf{e}^{-k\cdot t}$, dvs. der er tilføjet et negativt fortegn i eksponenten. Dette gør, at man får $T_{\frac{1}{2}}=\dfrac{\ln(2)}{k}$, fordi $\ln(2)=-\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Årsagen til anvendelsen af $f(x)=b\cdot \mathbf{e}^{k\cdot x}$ vil vi se, når vi kommer til differentialligninger. For en af de mest almindelige differentialligninger er $y'=k\cdot y$, hvor *k* i en konkret situation kan fortolkes. Og når denne løses, får man netop $f(x)=b\cdot \mathbf{e}^{k\cdot x}$, hvor *k* altså optræder i løsningen. Det ville være uhensigtsmæssigt at omskrive til $f(x)=b\cdot a^x$, da man så skulle indføre et *a*, der ikke indgik i den oprindelige differentialligning.

Opgaverne 645*

Eksponentiel udvikling på formen $f(x)=b\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{X_{1/2}}}$ eller $f(x)=b\cdot 2^{\frac{x}{X_2}}$

Man kan også angive eksponentielle udviklinger på en af formene $f(x)=b\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x}{X_{1/2}}}$ og $f(x)=b\cdot 2^{\frac{x}{X_2}}$ afhængig af, om funktionen er aftagende eller voksende og dermed har en halveringskonstant eller en fordoblingskonstant. Vi ser igen, at *b*-værdien optræder på samme måde som i de andre forskrifter.

Vi kender allerede sammenhængen mellem *a* og $X_{\frac{1}{2}}$ og X_2, så vi mangler bare at vise, at de nye skrivemåder rent faktisk er funktionsforskrifter for eksponentielle udviklinger.

Vi benytter $X_{\frac{1}{2}}=\log_a(0{,}5)$ og $X_2=\log_a(2)$ og udregner så:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{X_{1/2}}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{\log_a(0,5)}}=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\log_a(0,5)}}\right)^x=\left(\left(a^{\log_a(0,5)}\right)^{\frac{1}{\log_a(0,5)}}\right)^x=\left(a^{\log_a(0,5)\cdot\frac{1}{\log_a(0,5)}}\right)^x=\left(a^1\right)^x=a^x$$

Husk definitionen på logaritmefunktioner:
$\log_a(0{,}5)$ er den potens, som *a* skal opløftes i for at give 0,5.

Og tilsvarende har man:

$$2^{\frac{x}{X_2}}=2^{\frac{x}{\log_a(2)}}=\left(a^{\log_a(2)}\right)^{\frac{x}{\log_a(2)}}=a^{\log_a(2)\cdot\frac{x}{\log_a(2)}}=a^x$$

Vi har altså vist:

Sætning 28: En aftagende eksponentiel udvikling kan skrives på formen $f(x)=b\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{X_{\frac{1}{2}}}}$ og en voksende eksponentiel udvikling kan skrives på formen $f(x)=b\cdot 2^{\frac{x}{X_2}}$, hvor $X_{\frac{1}{2}}$ og X_2 er henholdsvis halverings- og fordoblingskonstanten.

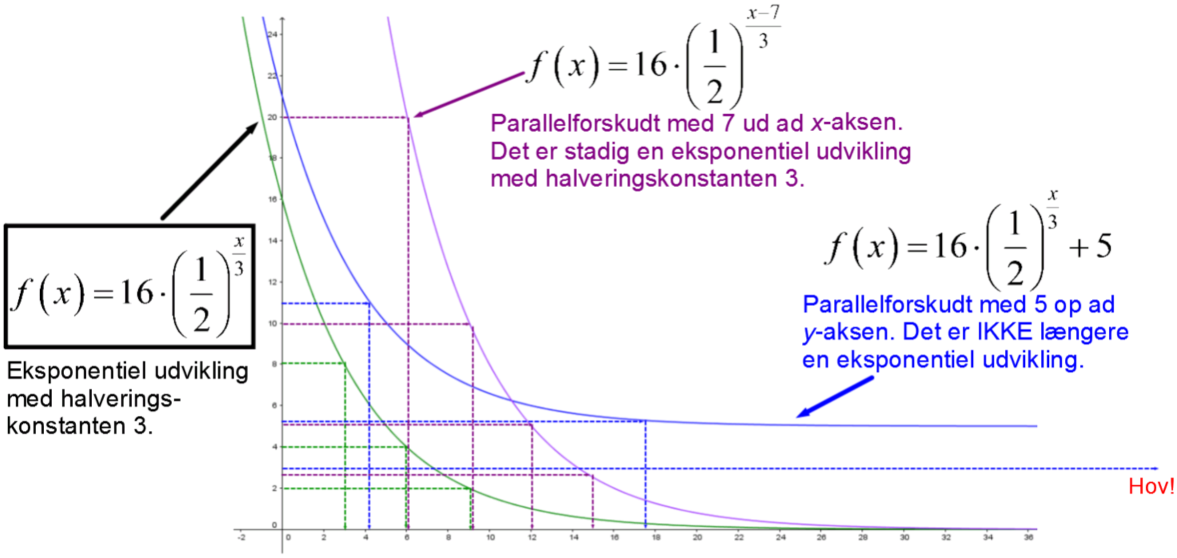
Det smarte ved denne form er, at hvis man kender halverings- eller fordoblingskonstanten, kan man med det samme opskrive forskriften for funktionen, dvs. man behøver ikke først at beregne fremskrivningsfaktoren.

Desuden er det på sin vis den mest intuitive opskrivning – i hvert fald hvis man tænker på vækstegenskaben. For prøv at kigge på eksponenterne. Hver gang man til argumentet lægger X_2 eller $X_{\frac{1}{2}}$, bliver brøken 1 større. Dvs. man skal multiplicere en ekstra gang med enten 2 eller $\frac{1}{2}$, hvorved man netop får halveret eller fordoblet funktionsværdien.

Parallelforskydninger

Fra vores behandling af ligninger ved vi, at vi kan parallelforskyde graferne med *k* langs *y*-aksen ved alle steder at erstatte *y* med $y-k$ og med *k* langs *x*-aksen ved alle steder at erstatte *x* med $x-k$.

Vi kan overføre dette til funktioner, hvor vi behandler $f(x)$ som *y*:

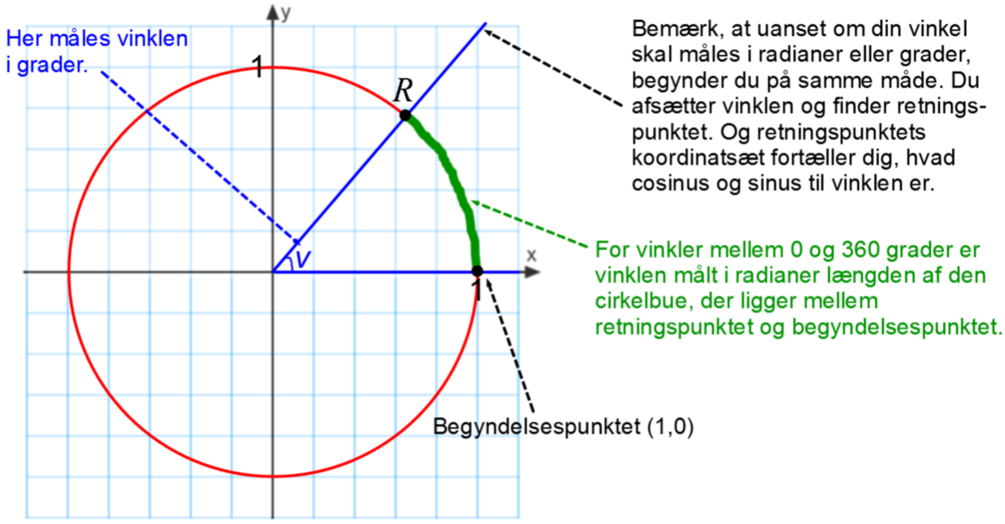


Vi ser, at vores lodrette forskydning giver os en funktion, der ikke er en eksponentiel udvikling, mens vores vandrette forskydning bare fører til en anden eksponentiel udvikling. Prøv selv at vise dette, dvs. prøv at lave en generel vandret forskydning og arbejd med funktionsforskriften, indtil du er kommet frem til en ny eksponentiel udvikling.

TRIGONOMETRISKE FUNKTIONER

Vi skal nu have kombineret vores funktionsbegreb med begreberne sinus, cosinus og tangens, som vi indførte i forbindelse med trekanter, og som vi arbejdede videre med i trigonometriske ligninger.

Vi indførte enheden radianer for vinkler ved hjælp af nedenstående figur:



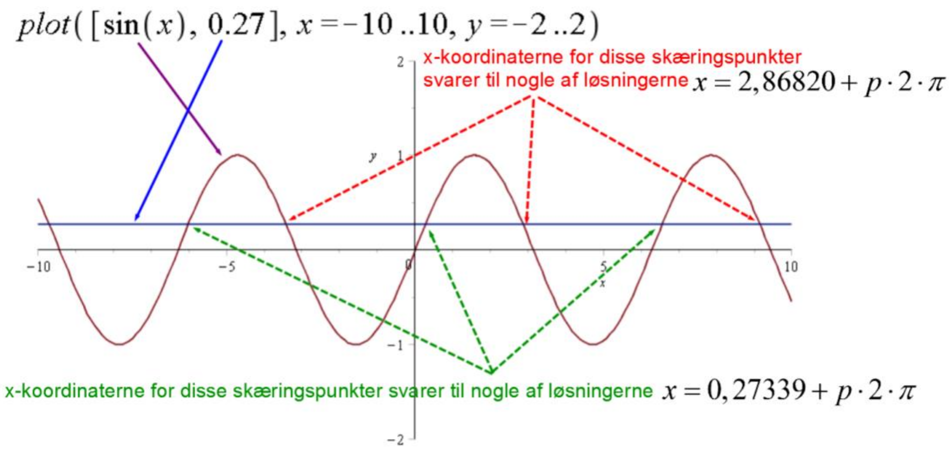
I trigonometriske ligninger arbejder vi med vinkler målt i radianer, og vi skal gøre det samme med trigonometriske funktioner. Vores trigonometriske ligninger kunne f.eks. have formen $\tan(x) = -5{,}1$ og $\sin(x) = 0{,}43$ og $\cos(x) = -0{,}93$.

Vores trigonometriske funktioner er $f(x) = \tan(x)$, $g(x) = \cos(x)$ og $h(x) = \sin(x)$ eller justeringer af disse.

Så forskellen er den sædvanlige mellem funktioner og ligninger med én variabel: Vi *løser* ligninger, dvs. vi finder den eller de *x*-værdier, der gør udsagnet sandt, mens funktioner er afbildninger, hvor vi knytter et argument (en *x*-værdi) sammen med en funktionsværdi.

De to begreber bliver dog kombineret ret ofte i praksis. Hvis man f.eks. tager udgangspunkt i en funktion med forskriften $f(x) = 2 \cdot \sin(4x+5)$ og spørger, hvornår den antager værdien 1,76, så har man pludselig en ligning $1{,}76 = 2 \cdot \sin(4x+5)$.

Og modsat: Da vi skulle løse trigonometriske ligninger, gjorde vi bl.a. brug af nedenstående grafiske fremstilling:



Her har vi benyttet grafen for den trigonometriske funktion $f : x \mapsto \sin(x)$ til at illustrere løsningen til ligningen $\sin(x) = 0{,}27$.

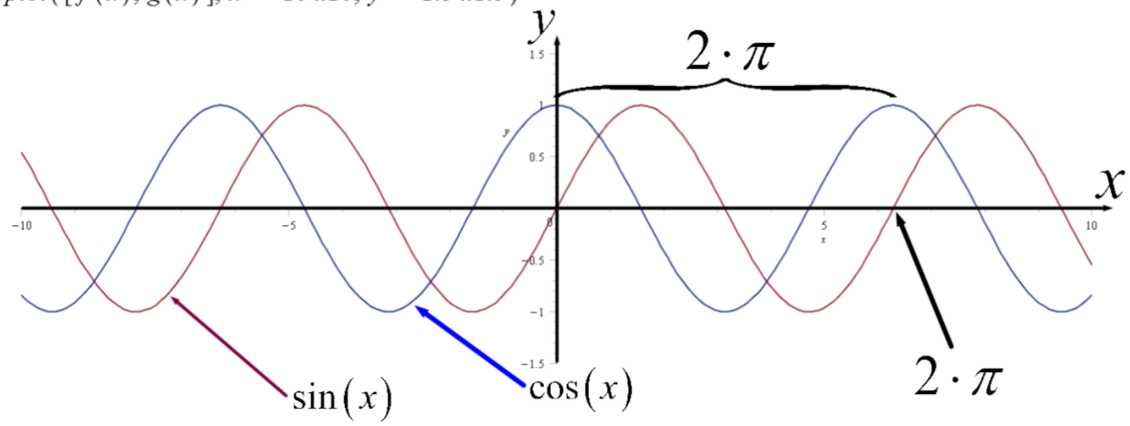
Du skal altså ikke undre dig, hvis enkelte ting i det følgende virker bekendt.
Lad os først se på graferne for de tre trigonometriske funktioner:

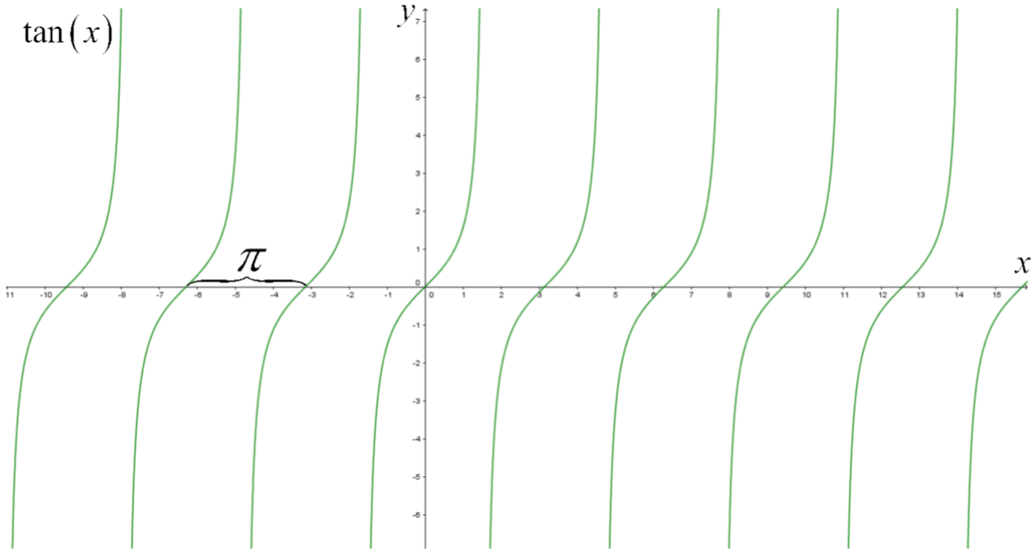
$$f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R} \text{ bestemt ved forskriften } f(x)=\sin(x).$$

$$g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R} \text{ bestemt ved forskriften } g(x)=\cos(x).$$

$$h:\mathbb{R}\setminus\left\{x \mid x=\frac{\pi}{2}+p\cdot\pi\right\}\mapsto\mathbb{R} \text{ bestemt ved forskriften } h(x)=\tan(x).$$

$f := x \to \sin(x)$:
$g := x \to \cos(x)$:
$h := x \to \tan(x)$:
$plot([f(x), g(x)], x=-10..10, y=-1.5..1.5)$



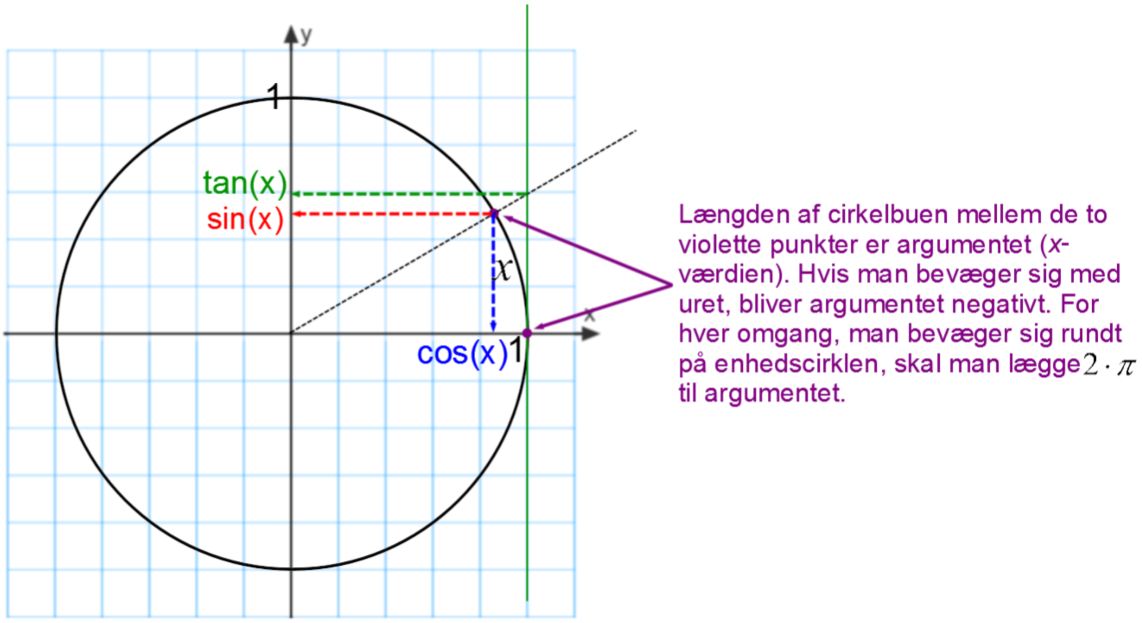


Bemærk, at alle tre grafer hele tiden gentager sig selv. Sinus og cosinus gentager sig selv efter stykket $2\cdot\pi$ og tangens efter π. Denne egenskab kaldes *periodicitet*. Sinus og cosinus er *periodiske* med *perioden* $2\cdot\pi$. Tangens er *periodisk* med *perioden* π.

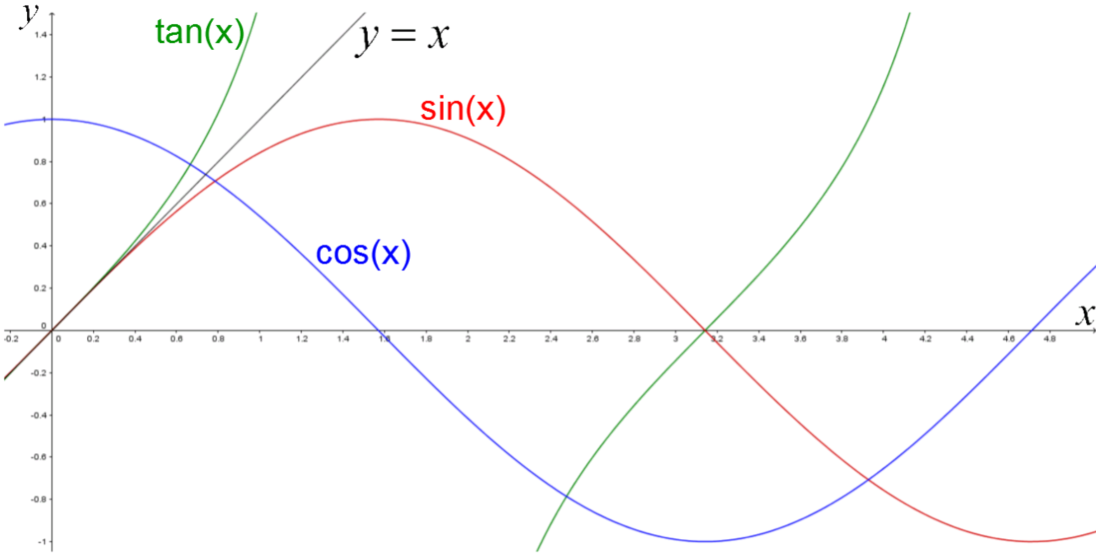
Masser af fænomener i naturen er periodiske (Jordens omløb om Solen, Jordens rotation, lydbølger, lysbølger, forskellige døgnrytmer, et pendul, vekselstrøm, …), og man kan oftest anvende én eller flere trigonometriske funktioner til at beskrive et sådant fænomen.

Kig på graferne for sinus- og cosinusfunktionerne. Bemærk, at den ene blot er en parallelforskydning af den anden langs *x*-aksen. Og husk, at vi kan lave en sådan forskydning ved blot at erstatte *x* med $x-k$. Vi har altså ikke brug for både sinus- og cosinusfunktionen. Man har valgt at benytte sinusfunktionen, og det er derfor den, vi snart skal arbejde videre med.

Men lad os inden da se på, hvordan graferne fremkommer ud fra enhedscirklen:



Kig på ovenstående figur og sammenlign den med graferne for $\sin(x)$, $\cos(x)$ og $\tan(x)$ nedenfor. Du skal kunne se, hvordan man kommer fra enhedscirklen til graferne i koordinatsystemet. Bemærk f.eks., at cosinusfunktionen skærer *y*-aksen i 1 og næsten ikke ændrer sin værdi på det første stykke, når *x* bliver større end 0 (grafen kan tilnærmes med en vandret linje på dette stykke):

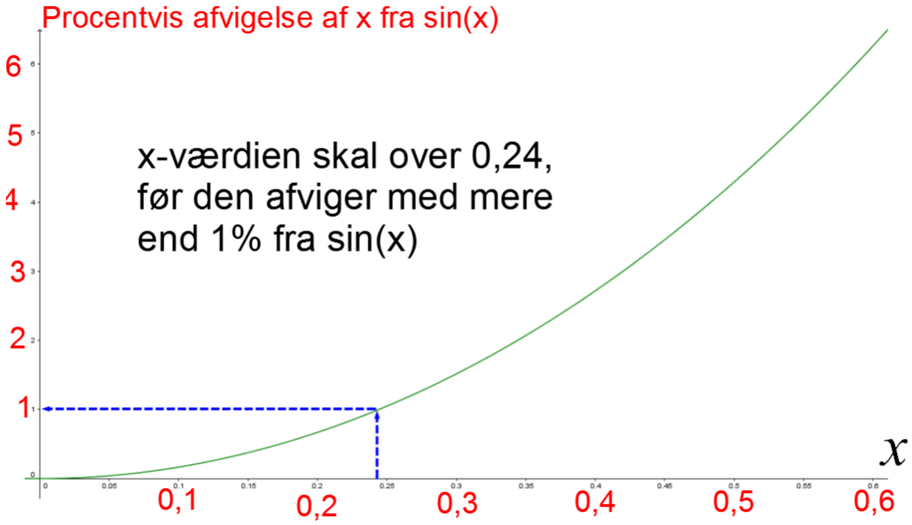


Linjen med ligningen $y = x$ er lagt ind, da den er god at sammenligne sinus- og tangensfunktionerne med. Prøv på enhedscirklen at sammenligne længden af cirkelbuen, der angiver *x*-værdien, med længden af de to lodrette stykker, der angiver sinus- og tangensværdierne. De tre længder er næsten ens, og de lægger sig med $\sin(x) < x < \tan(x)$. Dette ses også på graferne, hvor graferne for sinus og tangens i begyndelsen følger linjen med ligningen $y = x$, dog med tangens over og sinus under.

Ofte kan man derfor med god tilnærmelse erstatte $\sin(x)$ med *x*, hvis *x* ikke kommer langt fra 0. Dvs. man kan udnytte følgende sætning:

Sætning 29: For små værdier af *x* gælder $\sin(x) \approx x$

Dette er naturligvis en løs formulering. Hvis man vil have nogle tal på, kan man tegne en graf, der viser den procentvise afvigelse af x fra $\sin(x)$:



Opgaverne 646*

Omvendte trigonometriske funktioner

I trekantopgaver har vi anvendt $\sin^{-1}, \cos^{-1}$ og $\tan^{-1}$ som vores omvendte funktioner til sin, cos og tan, når vi arbejdede med ukendte vinkler. Vi har også set på, at dette er en uheldig notation, da vores -1 ikke fungerer som en eksponent, dvs. tallene har forskellige betydninger i $\sin^{-1}(x)$ og $\sin^2(x)$. Og vi husker også, at notationen $\sin^{-1}(x)$ IKKE fungerer i Maple.

Vi anvender *invSin, arcSin, invCos, arcCos, invTan* og *arcTan*, når vi arbejder med vinkler i grader og bruger Gym-pakken. Med vinkler i radianer anvendes *arcsin, arccos* og *arctan*.
"arc" betyder bue, og når man anvender en af disse funktioner, er det netop længden *x* af cirkelbuen, man finder.

arc er derfor ikke en generel notation for omvendte funktioner. Det er kun en notation, der anvendes i forbindelse med trigonometriske funktioner.

I Eksempel 21 (i del 1) så vi på *arcsin*. Vi så dér, at vi er nødt til at begrænse vores Dm og kodomæne for sinusfunktionen for at få en bijektion, så vi kan finde den omvendte funktion.

Vi arbejdede med $f: x \mapsto \sin(x)$ og $Dm(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ og $Vm(f) = [-1,1]$, hvorfor vi kom frem til: $Dm(\arcsin) = [-1,1]$ og $Vm(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Lad os nu se på cosinus, dvs. $g: x \mapsto \cos(x)$.

Ud fra grafen kan vi se, at hvis vi sætter $Dm(g) = [0, \pi]$, får vi en bijektion med $Vm(g) = [-1,1]$.

Da en funktion og dens omvendte funktion bytter Dm og Vm, har vi altså:

$Dm(\arccos) = [-1,1]$ og $Vm(\arccos) = [0, \pi]$.

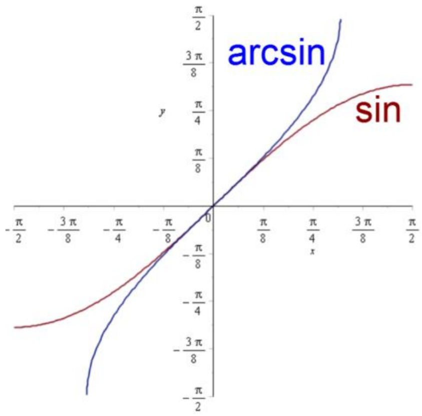
Vi ser altså, at *arccos* kan give os vinkler svarende til vinkler mellem 0° og 180°, hvilket er grunden til, at vi altid kan finde den rigtige vinkel, når vi løser trekantopgaver med cosinus – også selvom vinklen skulle være stump.

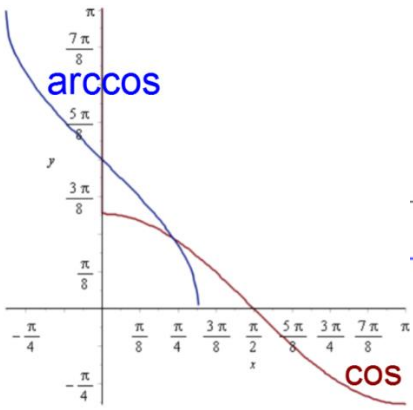
Med tangens har vi:

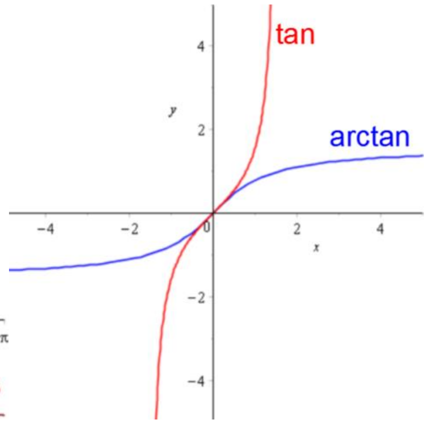
$Dm(\tan) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ og $Vm(\tan) = \mathbb{R}$.

$Dm(\arctan) = \mathbb{R}$ og $Vm(\arctan) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Grafisk har vi:







Bemærk endnu engang, at graferne er hinandens spejlinger i linjen med ligningen $y = x$.

Egentlig er de blå grafer ovenfor graferne for funktionerne *Arcsin*, *Arccos* og *Arctan* (altså med stort begyndelsesbogstav). Men Maple skriver dem med småt, og vi kommer ikke nærmere ind på forskellen her.

Harmoniske svingninger

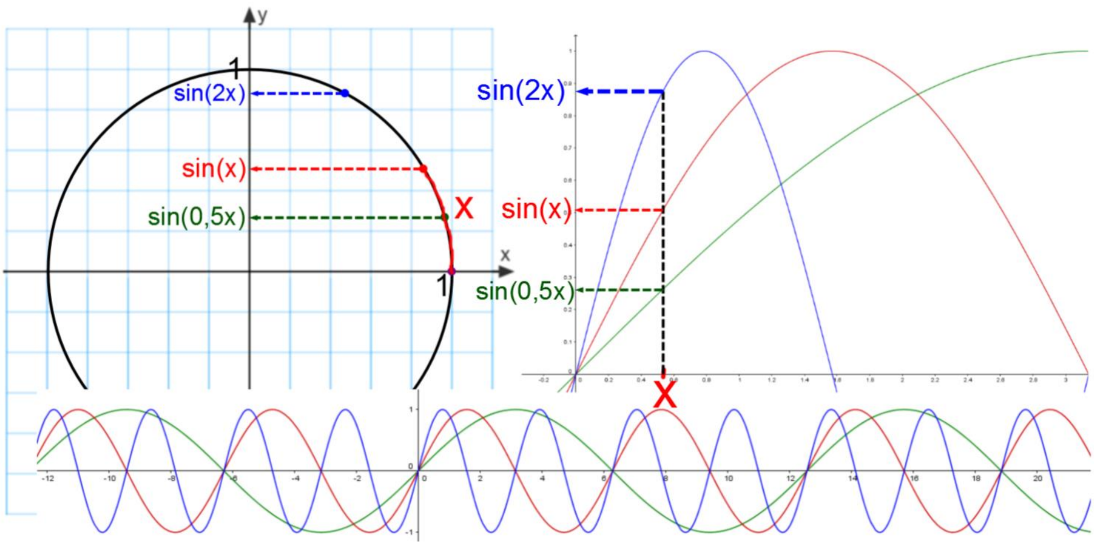
Harmoniske svingninger er svingninger, der kan beskrives ved en sinusfunktion:

$$f : x \mapsto A \cdot \sin(k \cdot x + \varphi) + c \quad , A > 0 \; , \; k > 0$$

Vi har indført 4 konstanter: A, k, φ og c (φ er den lille udgave af det græske bogstav ’phi’)

Sinusfunktioner bruges til at beskrive mange forskellige fænomener, og *k* erstattes sommetider af et andet bogstav, der dækker over et andet begreb. Vi skal i første omgang koncentrere os om de fire konstanters betydning for grafens udseende. Bagefter indføres navnene på de begreber, som bogstaverne repræsenterer.

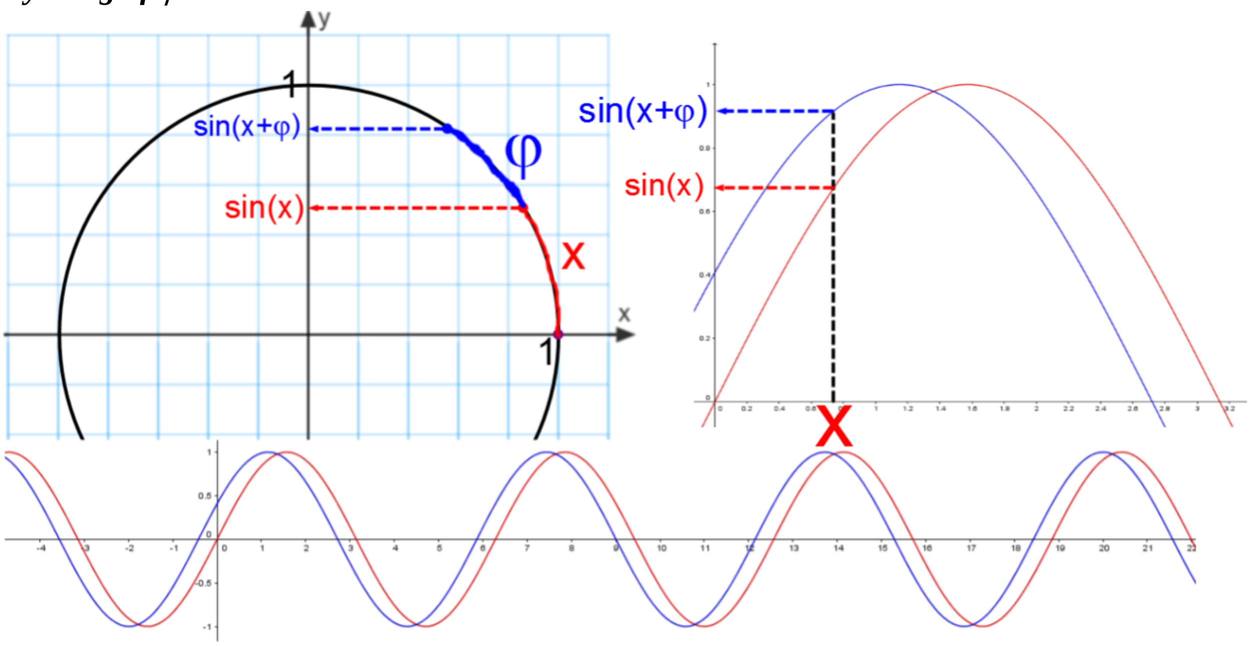
Betydning af k: $(k > 0)$



På figuren sammenlignes graferne for $\sin(2x), \sin(x)$ og $\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$. Bemærk, at *x* er førstekoordinaten til punkterne i alle tre tilfælde. Det er kun funktionsværdierne, der er forskellige. Når argumentet for sinusfunktionen er $2x$, kommer man dobbelt så hurtigt rundt på enhedscirklen, som når argumentet er *x*.

Dermed bliver bølgen smallere, jo større *k* er. Men der sker ikke noget med værdimængden, for funktionsværdierne aflæses stadig som retningspunktets andenkoordinat, og den ligger mellem -1 og 1.

Betydning af φ:



På figuren sammenlignes graferne for $\sin(x)$ og $\sin(x+\varphi)$. Bemærk igen pointen, at *x* er førstekoordinaten for punkterne på begge grafer, men andenkoordinaten er anderledes, fordi man med $\sin(x+\varphi)$ hele tiden er stykket φ foran på enhedscirklen. Men dermed er bølgerne også lige bredde, for det er hele tiden det samme ekstra stykke φ, man skal bevæge sig rundt på enhedscirklen. Man får altså to grafer, der er parallelforskudt langs *x*-aksen i forhold til hinanden.

Vi kan nu udnytte vores viden om parallelforskydninger til at få sat nogle værdier på parallelforskydningen. Vi foretager derfor følgende omskrivning:

$$\sin(k \cdot x + \varphi) = \sin\left(k \cdot \left(x + \frac{\varphi}{k}\right)\right).$$

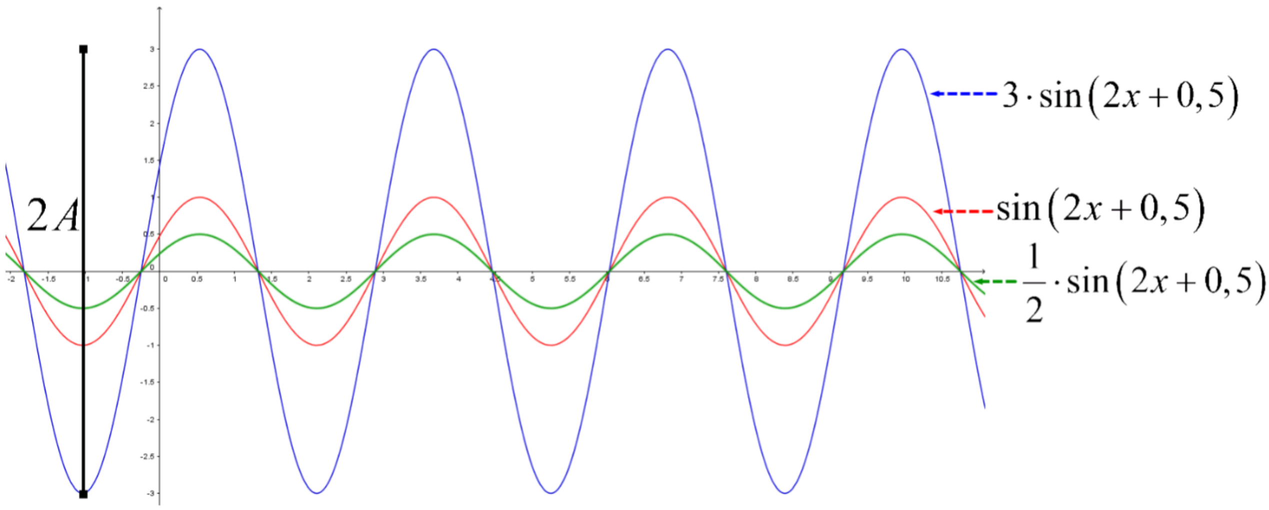
Vi ved, at man parallelforskyder med *a* langs *x*-aksen ved at erstatte *x* med $x - a$ alle steder i en ligning (og dermed også i en funktionsforskrift).

Vi kan derfor se, at grafen for $\sin(k \cdot x + \varphi)$ er forskudt med $-\frac{\varphi}{k}$ langs *x*-aksen i forhold til grafen for $\sin(k \cdot x)$.

Betydning af A: $A > 0$

Bemærk, hvordan *A* virker i funktionsforskriften $f(x) = A \cdot \sin(k \cdot x + \varphi)$.

A multipliceres med sinusværdien, dvs. hvis man sammenligner funktionsværdierne for $\sin(k \cdot x + \varphi)$ og $A \cdot \sin(k \cdot x + \varphi)$ de samme steder, vil funktionsværdien være *A* gange større (eller mindre, hvis *A* er mellem 0 og 1). Dermed vil bølgerne være lige bredde (se nedenfor).



Vi ser, at $Vm\big(A \cdot \sin(k \cdot x + \varphi)\big) = [-A, A]$

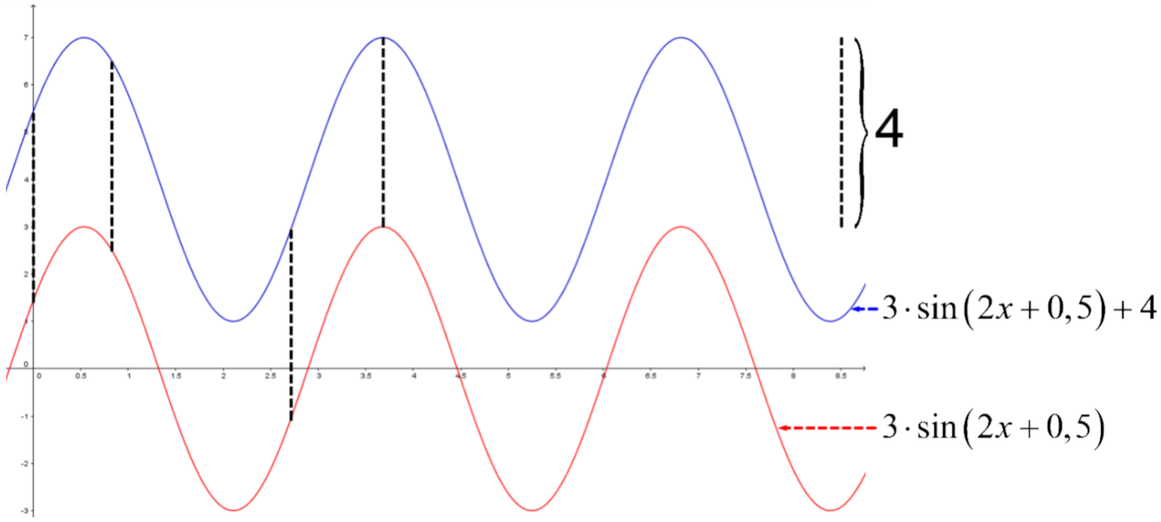
Betydning af c:

Da vi ved, hvordan man parallelforskyder lodret, kan vi ret hurtigt indse, at *c* netop angiver en sådan forskydning. Hvis vi anvender *y* som vores funktionsværdi, kan vi lave følgende omskrivning:

$$y = A \cdot \sin(k \cdot x + \varphi) + c \Leftrightarrow y - c = A \cdot \sin(k \cdot x + \varphi)$$

Vi ved, at man parallelforskyder langs *y*-aksen ved at erstatte *y* med $y - c$ i ligningen. Så vi ser, at grafen for $A \cdot \sin(k \cdot x + \varphi) + c$ er en parallelforskydning af grafen for $A \cdot \sin(k \cdot x + \varphi)$ med *c* op ad *y*-aksen.

Dette kan man også indse ved at kigge på, hvordan *c* optræder i funktionsforskriften. Den lægges som det sidste til værdien af $A \cdot \sin(k \cdot x + \varphi)$, og derfor bliver funktionsværdien *c* større (hvis *c* er positiv).



Bemærk, at den blå graf er en parallelforskydning af den røde graf med 4 op ad *y*-aksen.

Begrebers navne

Definition 16 og Sætning 30: For den harmoniske svingning, der kan beskrives ved funktionen $f: x \mapsto A \cdot \sin(k \cdot x + \varphi) + c$, gælder:

- $(k \cdot x + \varphi)$ kaldes *fasen*. Dvs. det er fasen, der optræder som argument i sinusfunktionen.
- Én svingning er en sammenhængende del af grafen, der svarer til ét omløb på enhedscirklen, dvs. en forøgelse af fasen med $2 \cdot \pi$.
- $\boldsymbol{k}$ kaldes den *cykliske frekvens* (angiver antal svingninger inden for et interval af længden $2 \cdot \pi$ på førsteaksen).
- $\boldsymbol{\varphi}$ og k angiver tilsammen *faseforskydningen*, der er $-\frac{\varphi}{k}$.
- $\boldsymbol{C}$ angiver den lodrette forskydning af ligevægten.

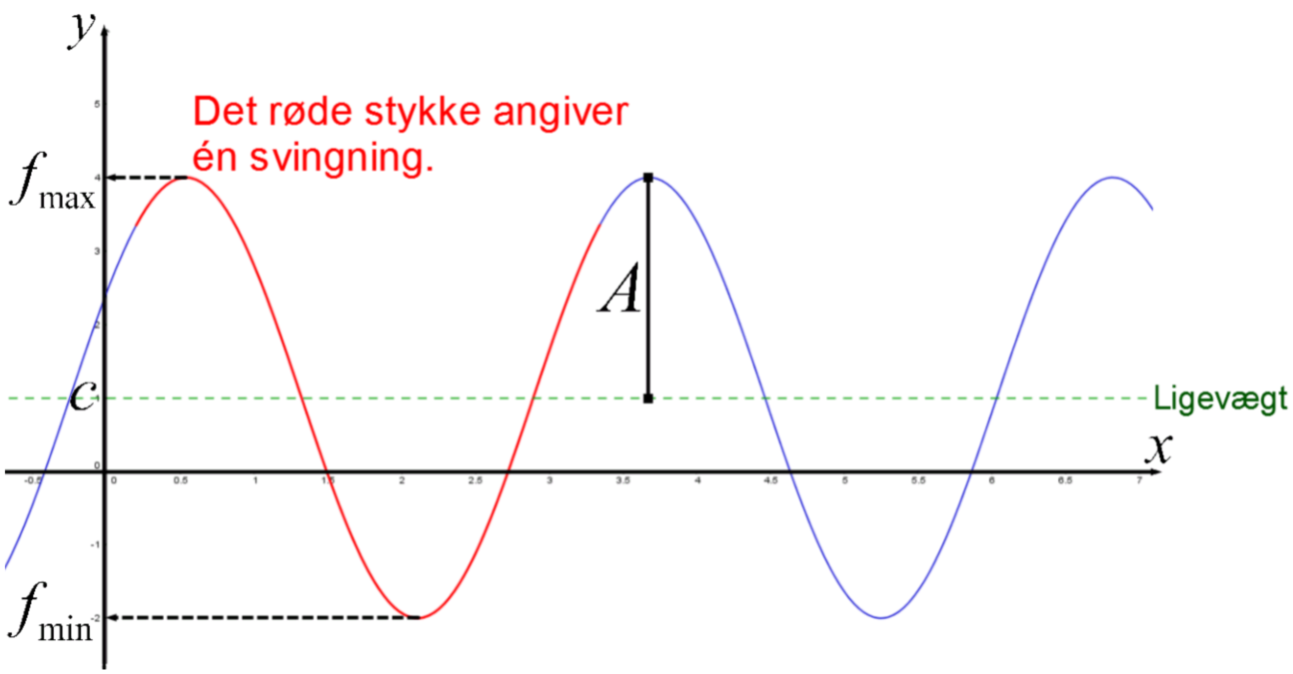
  x-aksen angiver ligevægten for den harmoniske svingning $A \cdot \sin(k \cdot x + \varphi)$.

  Den vandrette linje med ligningen $y = c$ er ligevægten for $A \cdot \sin(k \cdot x + \varphi) + c$.

  Hvis man grafisk skal aflæse c-værdien, kan man benytte: $c = \frac{f_{max} + f_{min}}{2}$.

- $\boldsymbol{A}$ kaldes *amplituden* og angiver det maksimale udsving fra ligevægten.

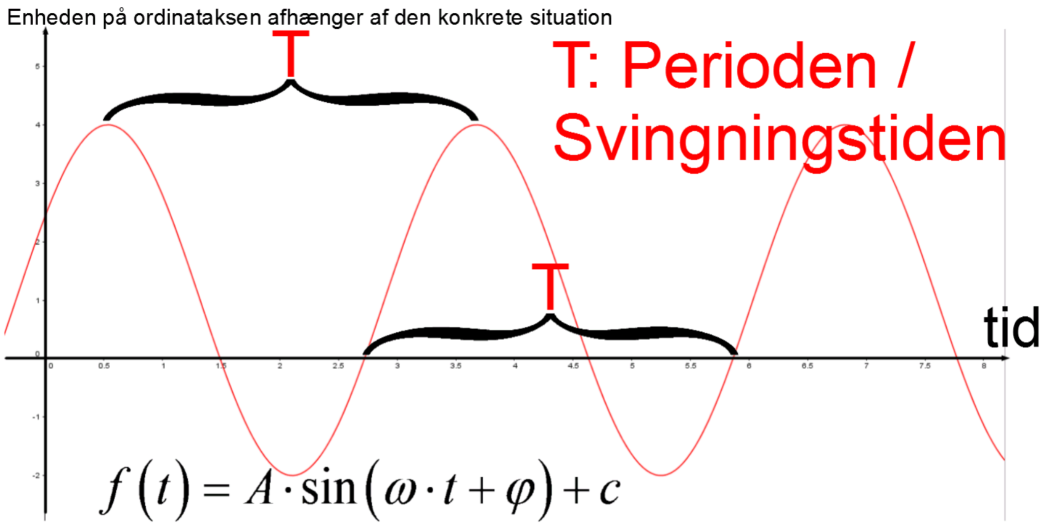
  Dvs. $A = \frac{f_{max} - f_{min}}{2}$ og $Vm(f) = [-A + c, A + c]$



Opgaverne 647*

Tidsvarierende svingning

Når vi beskriver tidsvarierende svingninger med sinusfunktioner, indføres nogle nye begreber:



Definition 17 og Sætning 31: For en tidsvarierende svingning angivet ved funktionen

$$g : t \mapsto A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + c \text{ gælder:}$$

- *Perioden T* er tiden for én svingning. Den kaldes også *svingningstiden*.
- *Frekvensen f* er antallet af svingninger inden for et givet tidsrum.
- Sammenhængen mellem T og f er: $f = \frac{1}{T}$.
- ω (lille græsk omega) kaldes *vinkelhastigheden* eller *vinkelfrekvensen*.
- Der gælder: $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$ og $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$

Bevis 31: Sammenhængen mellem frekvens og periode følger direkte af definitionerne på de to begreber (tjek selv). Det er væsentligt at bemærke, at det er en formel med kun én frihedsgrad. Hvis perioden er angivet, så kender man også frekvensen – og omvendt.

De to formler med ω fortæller det samme. I den ene har man bare erstattet perioden med frekvensen. Så vi behøver kun at argumentere for den første:
Perioden er tiden for én svingning, dvs. fasen øges med $2 \cdot \pi$, når man øger tiden med én periode, fordi $2 \cdot \pi$ svarer til én tur rundt på enhedscirklen. Man har derfor:

$$\omega \cdot (t_1 + T) + \varphi = \omega \cdot t_1 + \varphi + 2 \cdot \pi$$

(tjek, at du kan se sammenhængen mellem ligningen og teksten).

ω isoleres i udtrykket, og vi opdager undervejs, at φ forsvinder:

$$\omega \cdot (t_1 + T) + \varphi = \omega \cdot t_1 + \varphi + 2 \cdot \pi \Leftrightarrow$$

$$\omega \cdot t_1 + \omega \cdot T = \omega \cdot t_1 + 2 \cdot \pi \Leftrightarrow$$

$$\omega \cdot T = 2 \cdot \pi \Leftrightarrow$$

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

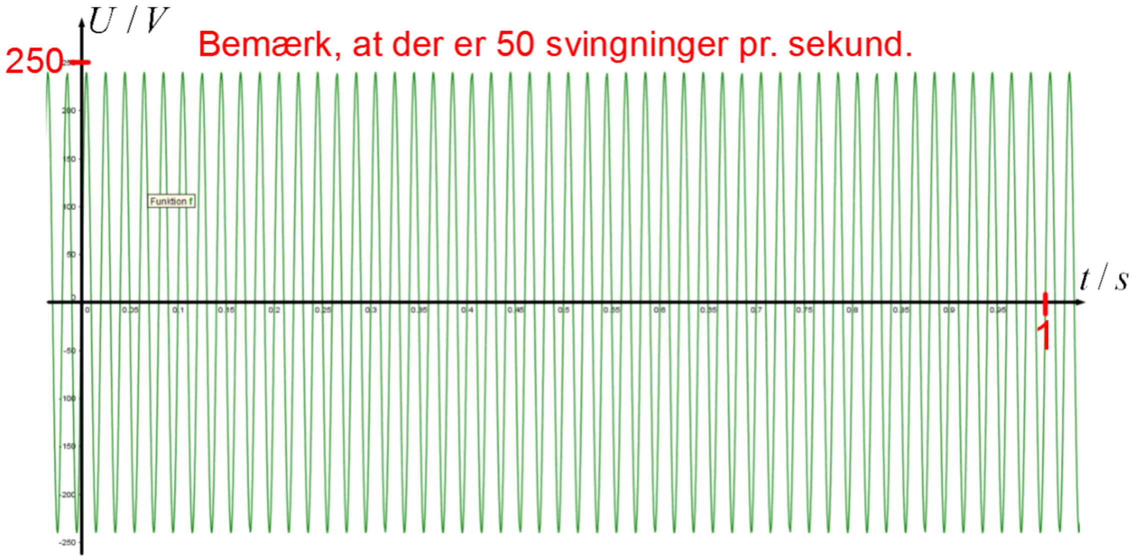
Navnet *vinkelhastighed* følger af formlen $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$. For en hastighed er en tilbagelagt strækning pr. tid, og i formlen er $2 \cdot \pi$ netop den strækning, som vinklen gennemløber i tidsrummet *T*.

Efter en lang teoretisk behandling er det tid til eksempler.

Eksempel 56: I et vekselstrømskredsløb kan spændingen målt i volt beskrives ved funktionen

$U : t \mapsto 240 \cdot \sin(100 \cdot \pi \cdot t + 0{,}0013)$, hvor *t* er tiden målt i sekunder.

Inden vi begynder at foretage beregninger, ser vi på grafen og sammenligner med de aflæste størrelser:



Bemærk, at vi nu kan sætte enhed på ordinataksen. I dette tilfælde er det spændingen, der beskrives, og det er derfor den, der afsættes på andenaksen.
Vi kan se på funktionsforskriften, at der ikke er nogen forskydning *c* af ligevægten, og det passer med grafen, hvor toppene når lige langt væk fra *x*-aksen på begge sider af denne.
Vores amplitude aflæses ud fra forskriften til 240, og vi ser på grafen, at det passer.

Vi kan i forskriften aflæse $\omega = 100 \cdot \pi$. Dermed har vi:

$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{100 \cdot \pi} = \frac{1}{50}$. Dvs. perioden er 0,02 sekunder.

Hermed er frekvensen: $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}02s} = 50s^{-1} = 50\,Hz$

Vi har her indført enheden hertz, der svarer til ”pr. sekund” eller s^{-1}.
På grafen kan man også se, at frekvensen er 50 Hz, da man kan tælle antal toppe pr. sekund.

Hvis vi – af uransagelige årsager – ønsker at vide, hvad spændingen er efter 0,352 s, indsætter vi i funktionsforskriften. Vi husker, at vi skal bruge små bogstaver, når vi arbejder med trigonometriske funktioner i Maple:

$$U := t \rightarrow 240 \cdot \sin(100 \cdot \pi \cdot t + 0.0013) :$$

$$U(0.352) = 240 \sin(35.200\,\pi + 0.0013) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} -140.28$$

Eksempel 57: Dagslængden *L* (målt i timer) i en sibirisk by kan som funktion af tiden *t* (målt i døgn efter årsskiftet) beskrives ved funktionsforskriften:

$$L(t) = 6,61 \cdot \sin(0,0172 \cdot t - 1,303) + 12,2 \;\; ; \;\; 0 \le t \le 365$$

Først analyseres forskriften med definitionsmængde:

- Tiden skal ligge mellem 0 og 365 døgn, fordi det er længden af ét år.
- Amplituden aflæses til 6,61. Det fortæller os, at forskellen mellem den længste og den korteste dag er $2 \cdot 6,61\,timer = \underline{\underline{13,22\,timer}}$.
- Den lodrette forskydning er 12,2. Dvs. ”ligevægten” af dagslængden er 12,2 timer. Den korteste dag har længden $(12,2 - 6,61)\,timer = 5,59\,timer$, og den længste dag har længden $(12,2 + 6,61)\,timer = 18,81\,timer$.

  Man kan komme frem til dette på flere måder:

  1) Man kan udnytte, at $Vm(L) = [-A + c, A + c]$, hvilket giver udregningerne ovenfor.
  2) Den bedste metode (der også forklarer ovenstående metode) er at kigge på funktionsforskriften og udnytte, at man ved, at en sinusværdi mindst kan give -1 og højst 1. Dermed kan leddet med sinus højst give 6,61 og mindst -6,61. Man skal så selvfølgelig også lige være sikker på, at definitionsmængden svarer til mindst én hel svingning, så man ved, at alle de mulige funktionsværdier antages.
  3) Man kan benytte Maples ’maximize’ og ’minimize’:

$L := t \to 6.61 \cdot \sin(0.0172 \cdot t - 1.303) + 12.2 :$

$maximize(L(t), location, t = 0..365) = 18.81000000, \{[\{t = 167.0811818\}, 18.81000000]\}$

$minimize(L(t), location, t = 0..365) = 5.590000000, \{[\{t = 349.7319175\}, 5.590000000]\}$

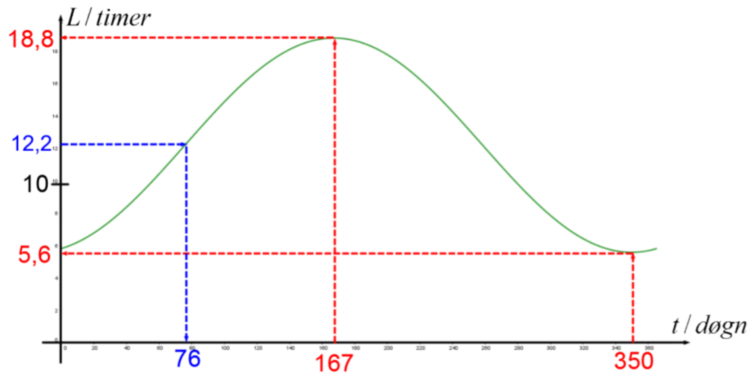
  Ved at benytte ’location’ har vi også fundet ud af, at den længste dag er 167 døgn efter årsskiftet, mens den korteste dag ligger 15 dage før årsskiftet.

- Vinkelhastigheden er 0,0172 (målt i enheden "pr. døgn"). Dette betyder, at retningspunktet pr. døgn bevæger sig stykket 0,0172 på enhedscirklen. Vi kan bestemme perioden ud fra dette:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{0,0172 døgn^{-1}} = 365\,døgn$$

- Vi kan også se, at faseforskydningen er $-\frac{-1,303}{0,0172} = 75,8$, dvs. sinuskurven er forskudt knap 76 døgn. Det skulle altså betyde, at dagens længde var 12,2 timer (ligevægten) efter 75,8 døgn, hvilket vi tjekker i Maple:

$$L(75.75581395) = 12.2$$

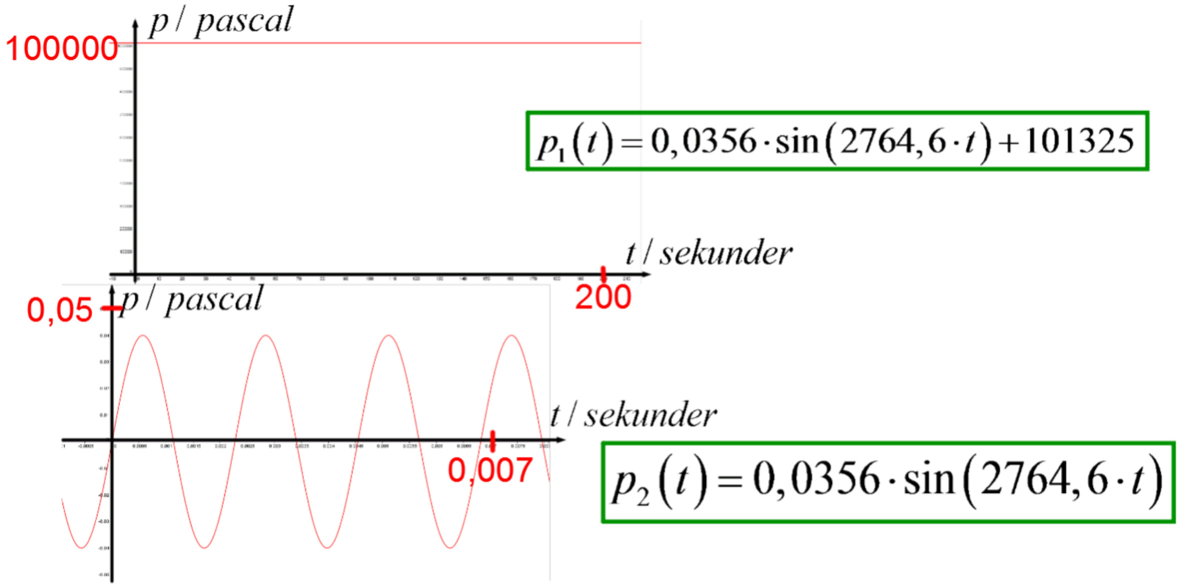


Eksempel 58: En tonegenerator udsender en lyd (trykbølge), hvor trykket *p* (målt i pascal) et bestemt sted i rummet kan beskrives ved $p: t \mapsto 0{,}0356 \cdot \sin(2764{,}6 \cdot t) + 101325$, hvor *t* er tiden målt i sekunder.

- Vi aflæser vinkelhastigheden til 2764,6 (med enheden "pr. sekund"). Hermed kan vi bestemme frekvensen til: $f = \dfrac{\omega}{2 \cdot \pi} = \dfrac{2764{,}6 s^{-1}}{2 \cdot \pi} = 440 Hz$

  Det er altså *kammertonen*, der udsendes.
- Bemærk den lodrette forskydning *c* og amplituden. Den lodrette forskydning er langt større end amplituden. Den lodrette forskydning er atmosfæretrykket, dvs. det tryk, der er tilstede, når der ikke er nogen lyd. Amplituden er et udtryk for, for kraftig lyden er. I dette tilfælde svarer lydstyrken til 65 dB, der nogenlunde er som en høj samtale. Her udgør amplituden 0,000035% af den lodrette forskydning. Smertegrænsen for lyd, der ligger omkring 130 dB, svarer til en amplitude, der er ca. 0,06% af atmosfæretrykket. Dvs. vores bidrag til lufttrykket kan virke totalt ubetydeligt, men alligevel kan vi snakke sammen.

  Grafisk ser det ud på følgende måde:



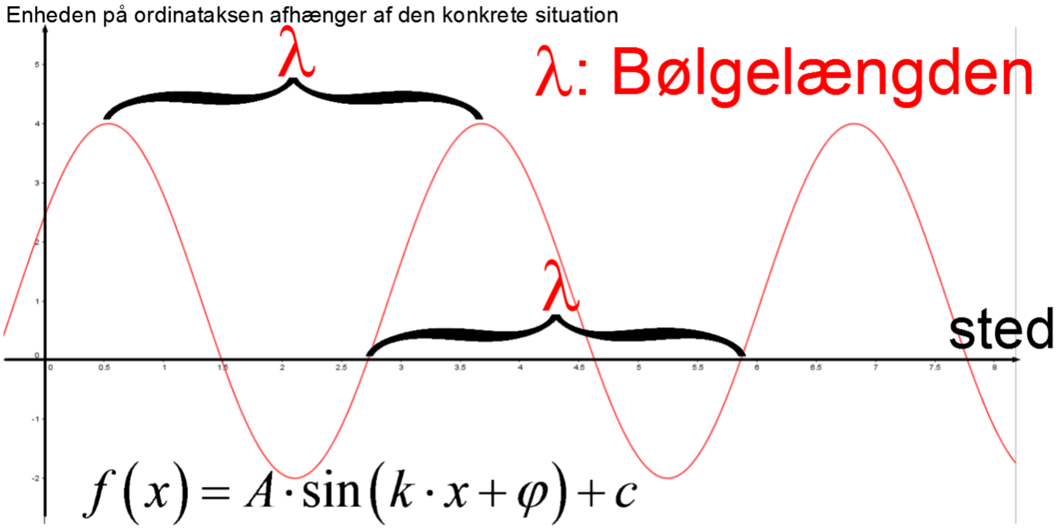
På den øverste graf kan man slet ikke se bølgen. Det er helt umuligt at vise udsvinget, hvis man også skal kunne se origo. I sådanne situationer gør man derfor normalt det, at man ser bort fra lufttrykket og kun ser på den ændring af trykket, der skyldes lyden.

Desuden er der problemer med tidsaksen i det øverste tilfælde. Vinkelhastigheden er så stor, at man skal arbejde med små enheder på tidsaksen, hvis man skal kunne se svingningerne.

Bemærk altså, at man, når man arbejder med grafer, kan være nødt til at tænke grundigt over den konkrete situation og rette akserne til, så man kan se det væsentlige. Den øverste graf viser ingenting, selvom det er det rigtige funktionsudtryk, der er indtastet.

Bølgeudbredelse i rummet

Når vi vil beskrive den rumlige udbredelse af en bølge (det kunne være en lydbølge, et sjippetov eller en vandbølge), indfører vi et nyt begreb:



Det nye begreb er bølgelængden, der angives med λ (et lille græsk *lambda*). Sammenlign med den tilsvarende figur for tidsvariationerne. Perioden og bølgelængden fungerer på samme måde matematisk. Det er kun et spørgsmål om, hvorvidt den uafhængige variabel er tiden eller stedet.

Vi har altså:

Definition 18 og Sætning 32: For en bølgeudbredelse i rummet beskrevet ved

$f : x \mapsto A \cdot \sin(k \cdot x + \varphi) + c$ gælder:

- *Bølgelængden* λ er længden af én svingning.
- Sammenhængen mellem den cykliske frekvens k og λ er: $k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$

Opgaverne 648*

Både tid og rum

Som nævnt kan man både betragte lyd som en bølgeudbredelse i tid og rum. Vi har set på situationerne hver for sig, fordi vi har arbejdet med funktioner med én variabel. Hvis man arbejder med funktioner med flere variable, kan man udtrykke en lydbølge ved:

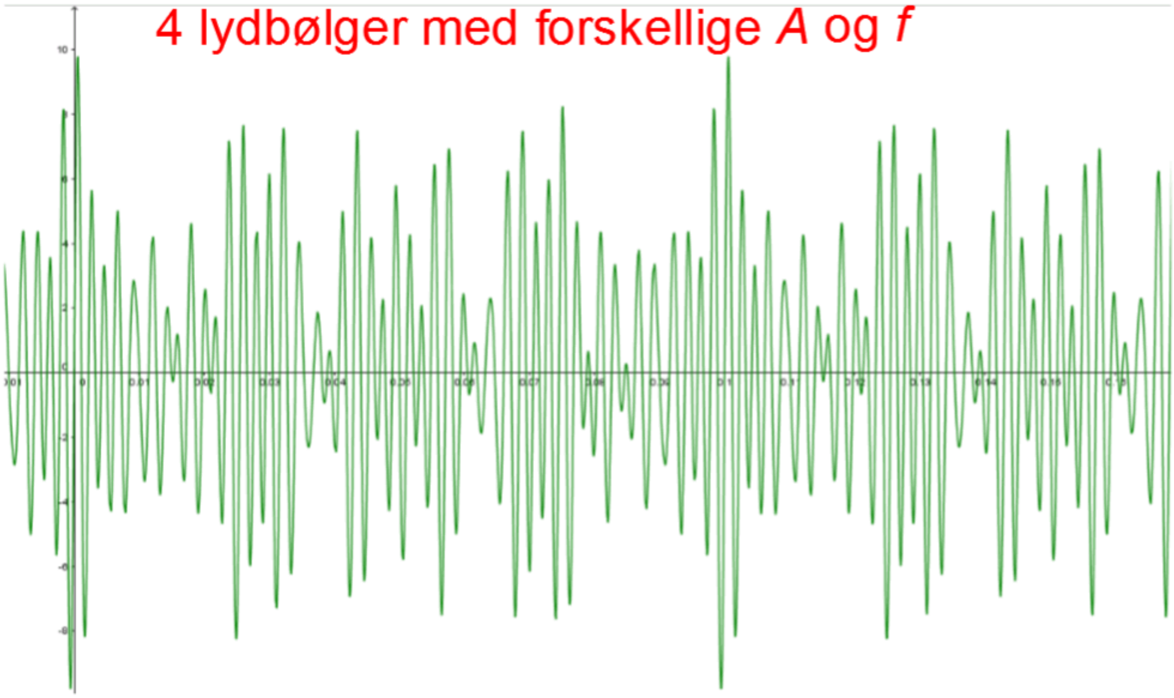
$$f(x,t) = A \cdot \sin(k \cdot x + \omega \cdot t + \varphi) + c$$

Sammensætning af harmoniske bølger

Hvis flere harmoniske lydbølger afspilles samtidig, får man en ikke-harmonisk bølge, dvs. vi kan ikke snakke om begreberne bølgelængde og frekvens, selvom der stadig er et tydeligt ”næsten”-mønster.

Her ses grafen for summen af to lydbølger:

Og her er tilføjet yderligere to lydbølger. Bemærk, at man stadig får fornemmelsen af en slags mønster, men nu er det mindre klart.



Det helt store spørgsmål er så, om man kan gå den anden vej. Dvs. kan man, hvis man får udleveret ovenstående billede, få identificeret de enkelte harmoniske bølger, som billedet er opbygget af?

Svaret er, at det kan man gøre med *fourieranalyse* (et muligt emne at inddrage i et studieretningsprojekt).

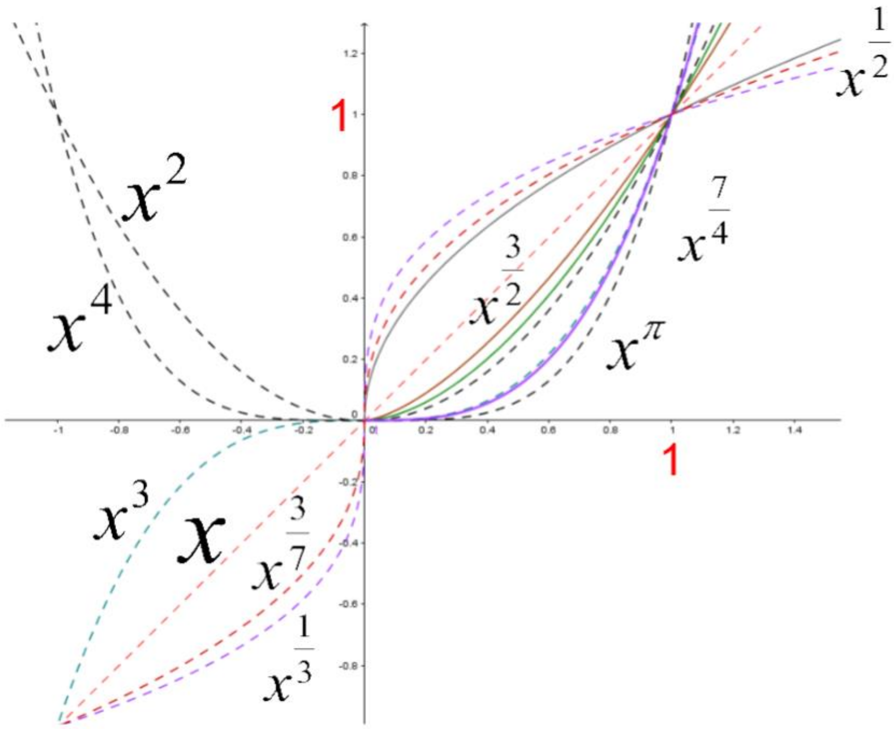
POTENSFUNKTIONER

Vi indleder med en definition:

Definition 19: En *potensfunktion* er en funktion $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ med forskriften:

$$f(x) = x^a \quad , \; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Som det ses af definitionen, sætter man $Dm(f) = \mathbb{R}_+$. Men det er udelukkende for at gøre beskrivelsen mere simpel. For der er masser af situationer, hvor man kan udvide definitionsmængden til alle reelle tal. Se f.eks. nedenstående grafer:



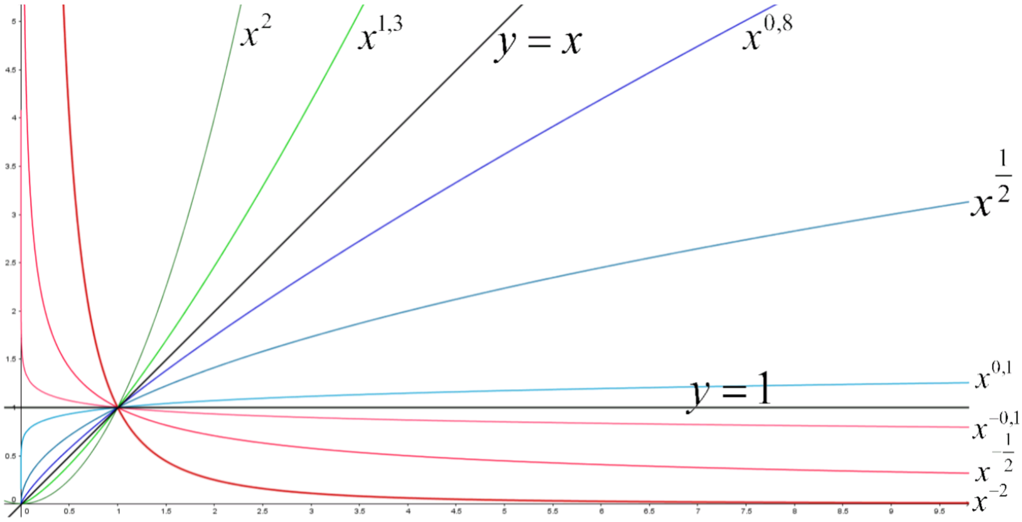
Der er tegnet grafer for ti funktioner. For at gøre det lidt mere overskueligt er der anvendt stiplede linjer for de funktioner, hvor Dm kan udvides til alle reelle tal, og deres funktionsudtryk er angivet til venstre for *y*-aksen.

Vi skal tilbage til vores potensregneregler for at forstå, hvorfor funktionerne til højre for *y*-aksen kun har positive tal i deres definitionsmængde. Vi husker, at $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$, og vi kan ikke uddrage den *q*'te rod af et negativt tal, hvis *q* er et lige tal. Desuden kan vi se, at vi har problemer med irrationale eksponenter.

Man står altså over for et valg: Enten skal man udelukke en masse eksponenter, som man egentlig gerne vil kunne arbejde med, eller man skal begrænse definitionsmængden. Man vælger at gøre det sidste, MEN man har "lov" til at udvide definitionsmængden, når det er muligt. Og det vil vi gøre i næste emne, da polynomier er opbygget af potensfunktioner med heltallige eksponenter, hvor der ikke er problemer med Dm.

Graferne giver os en idé om, at grafen for enhver potensfunktion går gennem punktet $(1,1)$, og ved indsættelse i funktionsforskriften ser vi, at det passer: $f(1) = 1^a = 1$.

Vi har endnu ikke set grafer for negative *a*-værdier, så lad os inden den egentlige analyse se på en række grafer, der kan give os en idé om potensfunktioners monotoniegenskaber.



Opgaverne 649*

Ud over graferne for nogle udvalgte potensfunktioner er indtegnet den vandrette linje med ligningen $y = 1$, da den fungerer som en slags grænse mellem to typer af grafer. Det samme gør den skrå linje med ligningen $y = x$, men den er også i sig selv grafen for en potensfunktion.

Vores grafer giver os en idé om følgende sætning:

Sætning 33: For en potensfunktion med forskriften $f(x) = x^a$, $x > 0$, $a \neq 0$ gælder:

- Hvis $a < 0$, er funktionen aftagende.
- Hvis $0 < a < 1$, er funktionen voksende med aftagende hastighed (konkav).
- Hvis $a = 1$, er funktionen voksende med konstant hastighed.
- Hvis $a > 1$, er funktionen voksende med voksende hastighed (konveks).

Bevis 33: Man kan godt overbevise sig selv om sætningens rigtighed ved at udnytte vores viden om potenser og tænke over, hvad der sker, når *x*-værdierne bliver større i de enkelte tilfælde. Men den slags formuleringer er sjældent gode i beviser. Så vi vil igen benytte Sætning 2, der fortæller, at vi bestemmer en funktions monotoniegenskaber ved at se på den afledede funktions fortegn. Dvs. dette bevis vil først give fuld mening, når du læser det under en repetition, hvor du har lært at differentiere:

Vi lærer, at den afledede funktion af en potensfunktion er:

$f'(x) = a \cdot x^{a-1}$. Dette svarer til hastighedsfunktionen.

Den anden afledede af en potensfunktion er:

$f''(x) = a \cdot (a-1) \cdot x^{a-2}$. Dette svarer til accelerationen, hvis fortegn fortæller, om hastigheden er voksende eller aftagende.

Da $x > 0$, er samtlige størrelser, hvor *x* indgår, positive. Vi har derfor:

Hvis $a < 0$, er $f'(x) < 0$, og dermed er *f* en aftagende funktion.

Hvis $0 < a < 1$, er $f'(x) > 0$, men $f''(x) < 0$, så *f* er voksende med aftagende hastighed.

Hvis $a = 1$, er $f'(x) > 0$ og $f''(x) = 0$, så *f* er voksende med konstant hastighed.

Hvis $a > 1$, er $f'(x) > 0$ og $f''(x) > 0$, så *f* er voksende med voksende hastighed.

Vi har nu fået styr på potensfunktioner, der er den centrale størrelse i følgende type funktioner:

Definition 20: Ved *potensvækst* forstås funktioner $f:\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ med forskriften:

$$f(x) = b \cdot x^a \quad , b > 0 \; , \; a \neq 0 \; .$$

Man kalder det også en *potensfunktion ganget med en konstant*.

Præcis som for eksponentielle udviklinger er betingelsen $b > 0$ et valg, der træffes, så monotoniegenskaberne kan overføres direkte fra potensfunktionerne, og så alle grafer kommer til at ligge i første kvadrant. Der ville ikke have været noget algebraisk problem i at multiplicere med et negativt tal.

Ved indsættelse i funktionsforskriften fås $f(1) = b \cdot 1^a = b \cdot 1 = b$, dvs. graferne går gennem $(1, b)$.

Vi oplevede, at *b*-værdien for både lineære funktioner og eksponentielle udviklinger angav begyndelsesværdien, men bemærk, at dette ikke er tilfældet for potensvækst. Her er der ingen begyndelsesværdi, da $Dm(f) = \mathbb{R}_+$, dvs. 0 ligger ikke i definitionsmængden.

Ligesom i det lineære og det eksponentielle tilfælde skal man kende funktionsværdien to steder for at kunne bestemme forskriften. Dvs. man skal kende to punkter på grafen.

Der er igen formler til at finde konstanterne, men endnu engang er det bedre at anvende vores generelle metode, der også anvendes til at udlede formlerne:

Eksempel 59: Grafen for potensfunktionen $f: x \mapsto b \cdot x^a$ går gennem punkterne $(6,12)$ og $(9,27)$.

Bestem forskriften.

Vi indsætter vores kendte værdier i forskriften og dividerer ligningerne (venstreside med venstreside og højreside med højreside):

$$\left.\begin{matrix} 27 = b \cdot 9^a \\ 12 = b \cdot 6^a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{27}{12} = \frac{b \cdot 9^a}{b \cdot 6^a} \Rightarrow \frac{9}{4} = \frac{9^a}{6^a} \Leftrightarrow \frac{9}{4} = \left(\frac{9}{6}\right)^a \Leftrightarrow \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^a$$

Her ser vi, at $a = 2$ gør udsagnet sandt, og det er et meget vigtigt sted i udregningen, for hvis man ikke ser det, "tvinges" man til at bruge logaritmer, og det kan ofte gøre udregningen sværere.

a-værdien indsættes i den nederste ligning for at bestemme *b*-værdien:

$$12 = b \cdot 6^2 \Leftrightarrow 12 = b \cdot 36 \Leftrightarrow b = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \; .$$

Dvs. at forskriften er:

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^2}}$$

Vi ser nu på et eksempel, hvor vi anvender den naturlige logaritme undervejs. Men du kan godt selv prøve, om du kan gennemskue, hvad *a*-værdien skal være, uden at anvende logaritmer.

Eksempel 60: Om potensvæksten bestemt ved $f(x)=b\cdot x^a$ vides, at $f(4)=6$ og $f(25)=15$.

Bestem forskriften.

Vi indsætter vores kendte værdier i forskriften og dividerer ligningerne (venstreside med venstreside og højreside med højreside):

$$\left.\begin{aligned}15&=b\cdot 25^a\\ 6&=b\cdot 4^a\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{15}{6}=\frac{b\cdot 25^a}{b\cdot 4^a}\Rightarrow \frac{5}{2}=\frac{25^a}{4^a}\Leftrightarrow \frac{5}{2}=\left(\frac{25}{4}\right)^a\Leftrightarrow \ln\left(\frac{5}{2}\right)=a\cdot\ln\left(\frac{25}{4}\right)$$

Her bemærkes det, at både 4 og 25 er kvadrattal, så man har:

$$\ln\left(\frac{5}{2}\right)=a\cdot\ln\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)\Leftrightarrow \ln\left(\frac{5}{2}\right)=a\cdot 2\cdot\ln\left(\frac{5}{2}\right)\Leftrightarrow 1=a\cdot 2\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$$

Dette indsættes i den nederste af ligningerne for at finde b:

$$6=b\cdot 4^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow 6=b\cdot 2\Leftrightarrow b=3.$$

Dvs. at forskriften er:

$$\underline{\underline{f(x)=3\cdot x^{\frac{1}{2}}}}$$

I næste eksempel lader vi de to kendte punkter være vilkårlige, så vi får udledt de formler, der gælder for potensvækst.

Eksempel 61: Vi ser på $f(x)=b\cdot x^a$ og punkterne (x_1,y_1) og (x_2,y_2).

Punkternes koordinater indsættes i funktionsforskriften, og vi arbejder videre som i de forrige eksempler:

$$\left.\begin{aligned}y_2&=b\cdot x_2^a\\ y_1&=b\cdot x_1^a\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{y_2}{y_1}=\frac{b\cdot x_2^a}{b\cdot x_1^a}\Rightarrow \frac{y_2}{y_1}=\frac{x_2^a}{x_1^a}\Leftrightarrow \frac{y_2}{y_1}=\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a\Leftrightarrow \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)=a\cdot\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\Leftrightarrow$$

$$a=\frac{\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}=\frac{\ln(y_2)-\ln(y_1)}{\ln(x_2)-\ln(x_1)}$$

Som det ses, kan man angive formlen for a-værdien på flere måder (man kunne også have anvendt en hvilken som helst anden logaritmefunktion). Oftest anvender man den sidste skrivemåde, der svarer til udtrykket for en lineær funktion bare med logaritmer foran alle koordinaterne.

b-værdien bliver så:

$$y_2=b\cdot x_2^a\Leftrightarrow b=\frac{y_2}{x_2^a}$$

Øvelse 7: Vis, at der også gælder $a=\log_{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$

Sætning 34: For en potensvækst givet ved forskriften $f(x) = b \cdot x^a$, hvor grafen går gennem punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2), er:

$$a = \frac{\ln(y_2) - \ln(y_1)}{\ln(x_2) - \ln(x_1)}$$

$$b = \frac{y_2}{x_2^a}$$

Opgaverne 650*

Lad os nu se på vækstegenskaberne for en potensvækst. Vi har allerede set på tre forskellige vækstegenskaber, og vi mangler bare at vise vækstegenskaben for potensfunktioner for at få nedenstående skema:

4 vigtige typer af funktioner	ABSOLUT VÆKST Hvis man vedvarende ændrer argumentet med en fast størrelse (dvs. lægger en negativ eller positiv konstant til *x*-værdien) ...	RELATIV VÆKST Når argumentet vedvarende ændres med en fast procentdel (ganges med en konstant) ...
ABSOLUT VÆKST ... ændres funktionsværdien vedvarende med en fast størrelse.	LINEÆRE FUNKTIONER Grafen er en ret linje i et almindeligt koordinatsystem	LOGARITME-FUNKTIONER Grafen er en ret linje i et koordinatsystem, hvor førsteaksen er logaritmisk.
RELATIV VÆKST ...ændres funktionsværdien vedvarende med en fast procentdel (dvs. *y*-værdien ganges med en konstant).	EKSPONENTIELLE UDVIKLINGER Grafen er en ret linje i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem (andenaksen logaritmisk)	POTENSVÆKST Grafen er en ret linje i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem

Bevis 35: Vi skal altså vise, at når vi i en potensfunktion multiplicerer argumentet med en konstant, så vil funktionsværdien også blive multipliceret med en (anden) konstant, der altså ikke afhænger af udgangspunktet for vores argument.

Vores udgangspunkt er altså $f(x_1) = b \cdot x_1^a$, og vi ser nu på, hvad der sker, når vi ganger *x*-værdien med en konstant:

$$f(k \cdot x_1) = b \cdot (k \cdot x_1)^a = b \cdot k^a \cdot x_1^a = k^a \cdot b \cdot x_1^a = k^a \cdot f(x_1)$$

Vi ser altså, at når *x*-værdien ganges med en konstant *k*, så ganges funktionsværdien med en konstant k^a, hvor pointen er, at k^a ikke afhænger af *x*-værdien. Vi har hermed vist den sidste firkant i ovenstående skema (bortset fra pointen med det dobbeltlogaritmiske koordinatsystem som vi snart ser på).

Vi kan gå endnu videre og få sat størrelser på vækstraterne for de relative ændringer af argument og funktionsværdi. For vi ved fra rentesregning, at hvis vækstraten er *r*, skal man multiplicere argumentet med fremskrivningsfaktoren $(1+r)$. Vores udregning fra beviset bliver så:

$$f\left((1+r_x) \cdot x_1\right) = b \cdot \left((1+r_x) \cdot x_1\right)^a = b \cdot (1+r_x)^a \cdot x_1^a = (1+r_x)^a \cdot b \cdot x_1^a = (1+r_x)^a \cdot f(x_1)$$

Når funktionsværdien ændres med r_y, svarer det til en multiplikation med $(1+r_y)$. Altså har vi:

Sætning 35: For en potensvækst med forskriften $f(x)=b\cdot x^a$ gælder:

Når argumentet ændres med vækstraten r_x, ændres funktionsværdien med vækstraten r_y, hvor:

$$(1+r_y)=(1+r_x)^a$$

Ovenstående sætning beskriver altså potensvækstens vækstegenskab, dvs. du kan sammenligne den med $X_{(1+r_y)}=\frac{\ln(1+r_y)}{\ln(a)}$ fra de eksponentielle udviklinger.

Eksempel 62: En potensfunktion er givet ved forskriften $f(x)=83\cdot x^{0,74}$.

Vi vil besvare følgende spørgsmål:

a) Hvor mange procent ændrer funktionsværdien sig, når *x*-værdien bliver 20% større?
b) Hvor mange procent skal *x*-værdien øges for at øge *y*-værdien med 45%?
c) Hvor mange procent skal *x*-værdien øges for at fordoble *y*-værdien?
d) Hvor mange procent ændrer *y*-værdien sig, når *x*-værdien halveres?

Som gennemgået i introduktionsforløbet, kan man indsætte direkte i formlen og lade Maple finde den ønskede størrelse. Vores opskrivning bliver derfor:

a)
restart
with(*Gym*) :
$a := 0.74 : r_x := 0.2 :$
$(1+r_y)=(1+r_x)^a \xrightarrow{\text{solve}} \{r_y = 0.1444428810\}$
Dvs. y-værdien øges med $\underline{\underline{14.4\ \%}}$

b)
restart
with(*Gym*) :
$a := 0.74 : r_y := 0.45 :$
$(1+r_y)=(1+r_x)^a \xrightarrow{\text{solve}} \{r_x = 0.6522085600\}$
Dvs. x-værdien øges med $\underline{\underline{65.2\ \%}}$

c)
restart
with(*Gym*) :
$a := 0.74 : r_y := 1 :$
$(1+r_y)=(1+r_x)^a \xrightarrow{\text{solve}} \{r_x = 1.551510098\}$
Dvs. x-værdien øges med $\underline{\underline{155\ \%}}$

d)
restart
with(*Gym*) :
$a := 0.74 : r_x := -0.5 :$
$(1+r_y)=(1+r_x)^a \xrightarrow{\text{solve}} \{r_y = -0.4012606477\}$
Dvs. y-værdien falder med $\underline{\underline{40\ \%}}$

Bemærk igen, at en fordobling svarer til vækstraten $100\%=1$ og en halvering til vækstraten $-50\%=-0,50$.

Og endnu vigtigere: Husk, at dette intet har med fordoblings- eller halveringskonstanter at gøre, fordi det ikke er en fast størrelse, men en fast procentdel, man ændrer med.

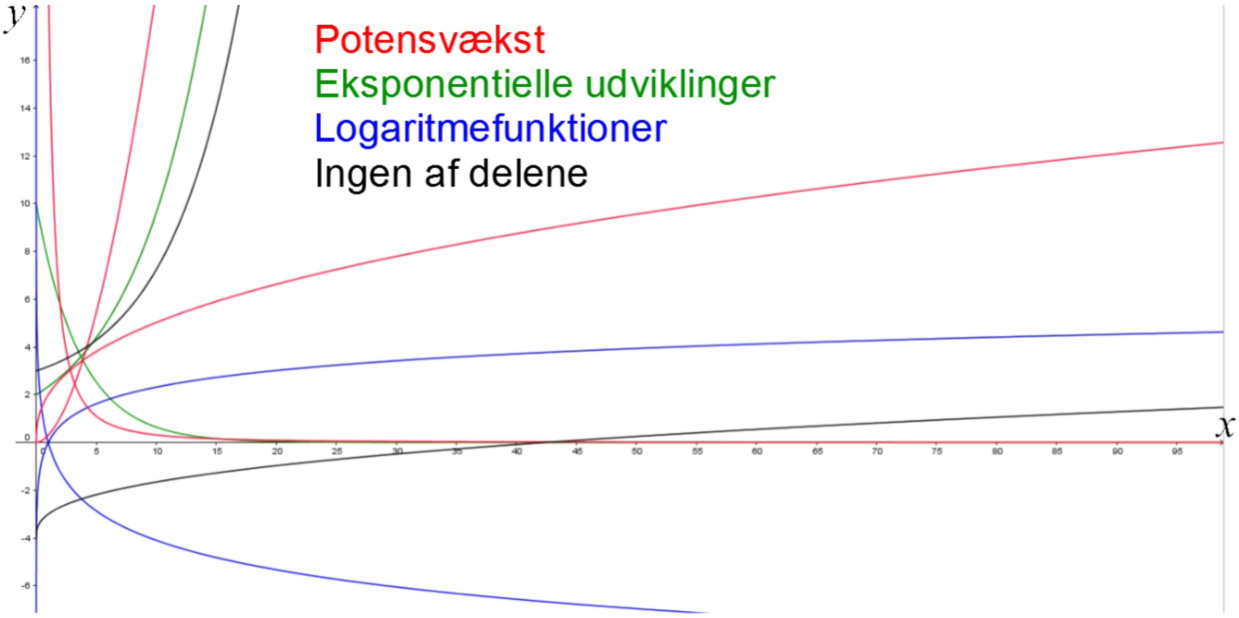
Opgaverne 651*

Vi mangler endnu at vise, at grafen for en potensvækst er en ret linje i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem. Dette indses ved følgende udregninger:

$$y = b \cdot x^a \Leftrightarrow \log(y) = \log\left(b \cdot x^a\right) \Leftrightarrow \log(y) = \log(b) + \log\left(x^a\right) \Leftrightarrow \log(y) = \log(b) + a \cdot \log(x)$$

Vi ser her, at hvis vi i et almindeligt koordinatsystem indsætter $\log(y)$ som funktion af $\log(x)$, får vi en ret linje med hældningen *a* og skæringen $\log(b)$ med ordinataksen. Hermed ved vi, at vi også får en ret linje, hvis vi afsætter (x, y) i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem.

Som tidligere nævnt, er det kun rette linjer, man kan genkende. Buede grafer kan stamme fra alverdens forskellige funktioner. Følgende figur viser grafer for tre slags potensvækst, to eksponentielle udviklinger, to logaritmefunktioner og to funktioner, der ikke er nogen af delene:



Omvendte funktioner til potensfunktioner

Vi har tidligere set, at den omvendte funktion til en lineær funktion er en anden lineær funktion, samt at eksponential- og logaritmefunktioner er hinandens omvendte. Vores skema med vækstegenskaber kunne så give os den formodning, at den omvendte funktion til en potensvækst er en anden potensvækst. Vi kan hurtigt vise, at det er rigtigt:

Vi ”snød” lidt under definitionen på potensvækst og satte med det samme kodomænet til $\mathbb{R}_+$, hvilket også er værdimængden. På den måde opnåede vi, at potensvækst er bijektioner, og at de dermed også er injektive. Vi ved altså, at vi kan finde omvendte funktioner, og vi benytter den sædvanlige metode med at bytte rundt på *x* og *y*:

$$y = b \cdot x^a$$

$$x = b \cdot y^a \quad [x \text{ og } y \text{ har byttet roller }]$$

$$\frac{1}{b} \cdot x = y^a \Leftrightarrow y = \sqrt[a]{\frac{1}{b} \cdot x} \Leftrightarrow y = \sqrt[a]{\frac{1}{b}} \cdot \sqrt[a]{x} \Leftrightarrow y = \sqrt[a]{\frac{1}{b}} \cdot x^{\frac{1}{a}}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[a]{\frac{1}{b}} \cdot x^{\frac{1}{a}}$$

Vi ser altså, at den omvendte funktion er en potensvækst, og eksponenten er det reciprokke element til den oprindelige potensvæksts eksponent.

FUNKTIONSSTYRKER

Som opsamling ses på de forskellige funktionstypers styrke. Vi ser på de voksende funktioner, men noget tilsvarende gælder for de aftagende funktioner. Dvs. når eksponentialfunktioner er ”stærkest” til at vokse, er de også ”stærkest” til at aftage. Der gælder:

FUNKTIONERS STYRKE
Eksponentialfunktioner
Potensfunktioner med *a* > 1
Lineære funktioner
Potensfunktioner med *0* < *a* < 1
Logaritmefunktioner

Øget styrke

Funktioners ”styrke” er et udtryk for, hvad der vil ske ”i sidste ende”, dvs. hvad der sker ved grænseovergangen $x \to \infty$. Dette kan illustreres med brøker. Når eksponentialfunktioner er stærkere end potensfunktioner, vil det sige, at en funktion med forskriften $f(x) = \frac{x^{a_1}}{a_2^x}$ vil have egenskaben $f(x) \to 0$ for $x \to \infty$, fordi nævneren ”vinder” over tælleren i **sidste ende**.

Lad os forsøge at illustrere det med et konkret eksempel (vi beviser ikke noget). Vi ser på det ekstreme tilfælde med $f(x) = \frac{x^{1000}}{1.001^x}$. Vi har en potensfunktion i tælleren og en eksponentialfunktion i nævneren, og tælleren er tydeligvis en hurtig starter, der lægger sig klart i spidsen. Vi lader Maple beregne forskellige størrelser:

$$f(x) := \frac{x^{1000}}{1.001^x}:$$

$f(2) = 1.069368800\ 10^{301}$

Tælleren lægger meget hårdt ud og giver allerede for *x* = 2 et vanvittig stort tal (nævneren er tæt på 1).

$f(10) = 9.900547809\ 10^{999}$

$f(100) = 9.048826307\ 10^{1999}$

$f(1000) = 3.680633043\ 10^{2999}$

$f(10000) = 4.562734588\ 10^{3995}$

$f(100000) = 3.910678090\ 10^{4956}$

$f(1000000) = 8.366054345\ 10^{5565}$

$f(10000000) = 1.679603665\ 10^{2659}$

$f(100000000) = 1.786767877\ 10^{-35408}$

Bemærk, hvad der sker her. Et sted mellem 100000 og 10000000 har nævneren fået overtaget.
Og ved 100000000 dominerer den langt, langt mere end tælleren på noget tidspunkt har gjort.

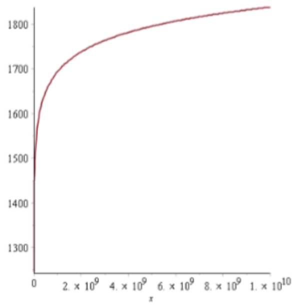
$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$

Maple beregner korrekt grænseværdien til 0.

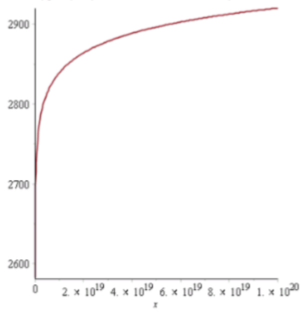
Vi kan se på endnu et eksempel illustreret grafisk. Vi ser på $f(x) = \frac{\log_{1,01}(x)}{x^{0,01}}$. Vores potensfunktion skulle altså ifølge skemaet være stærkere end logaritmefunktionen, så der skulle gælde $f(x) \to 0$ for $x \to \infty$. Vi lader Maple plotte nogle grafer:

$$f(x) := \frac{\log_{1.01}(x)}{x^{0.01}}:$$

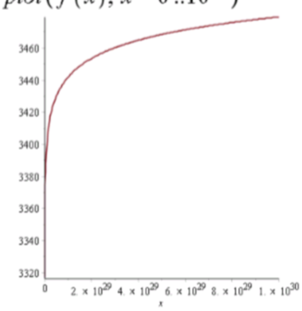
$plot(f(x), x = 0..10^{10})$



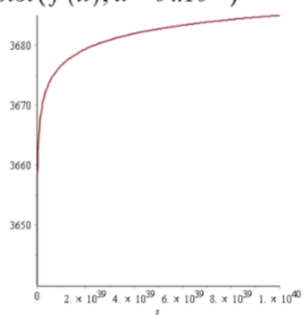
$plot(f(x), x = 0..10^{20})$



$plot(f(x), x = 0..10^{30})$

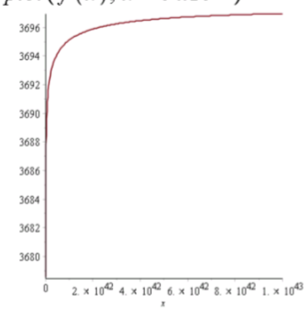


$plot(f(x), x = 0..10^{40})$

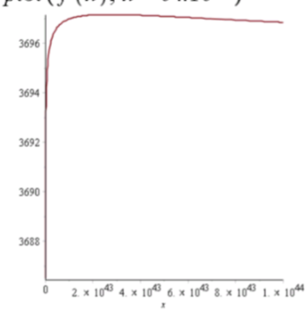


Bemærk, at der hele tiden tilføjes 10 ekstra 0'er til intervallet på førsteaksen. Det er derfor nærliggende at tro, at nu sker der altså ikke mere med den graf. Men prøv at se, hvad der sker mellem 43 og 44 0'er:

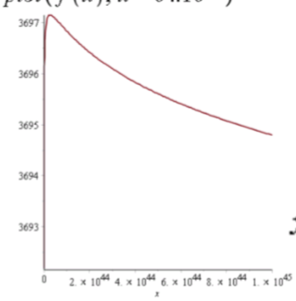
$plot(f(x), x = 0..10^{43})$



$plot(f(x), x = 0..10^{44})$



$plot(f(x), x = 0..10^{45})$



$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$

$$f(10^{50}) = 3658.880046$$
$$f(10^{100}) = 2314.078926$$
$$f(10^{1000}) = 0.00002314078926$$

Potensfunktionen får overtaget, og Maple finder korrekt grænseværdien til 0.

Men som de udvalgte funktionsværdier illustrerer, foregår tingene ikke så voldsomt som i det første eksempel.

POLYNOMIER

Et polynomium er et algebraisk udtryk, men det behandles her blandt funktionerne, fordi polynomier i gymnasiet oftest indgår som funktionsudtryk.

Definition 21: Et *polynomium i én variabel* er et algebraisk udtryk på formen

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i \quad \text{dvs. } a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \,,$$

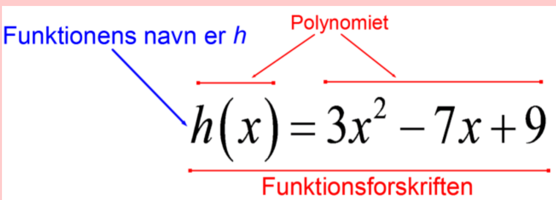
hvor n er et ikke-negativt heltal, x er en variabel og a'erne er konstanter.
Eksponenterne i de enkelte leds potenser angiver leddets *grad*, og den højeste grad blandt de led, der ikke er 0, angiver *polynomiets grad*.
0 kaldes *nulpolynomiet* og har ingen grad (ikke at forveksle med graden 0).
a_i er *koefficienten* til i'te gradsleddet.

Eksempel 63: Her følger en række eksempler på polynomier.

$2x^3 + 4x^2 - x + 8$	: Et tredjegradspolynomium med koefficienterne 2, 4, -1 og 8.
$x^5 - 2x^3 + 3x^2 + x$	: Et femtegradspolynomium. Koefficienten til 4. gradsleddet er 0.
$5x^2 + 8x - 1$	: Et andengradspolynomium. Førstegradsleddet er $8x$.
0	: Nulpolynomiet. Det har ingen veldefineret grad.
$0 \cdot x^7 + 3 \cdot x^6 + 2x - 9$	: Et sjettegradspolynomium. Normalt skriver man ikke leddet $0 \cdot x^7$.
8	: Et nultegradspolynomium.
-13	: Også et nultegradspolynomium.
$4x + 5$	: Et førstegradspolynomium.

Kommentarer til Definition 21:

- Et eksempel på et polynomium i flere variable er $x^3y + 3x^2y^2 - 2xy^3 + y^4$. Dette er endda et *homogent polynomium* (af grad 4), da summen af eksponenterne i hvert led har samme værdi.
- Nulpolynomiet udgør en fuldstændig ligegyldig detalje i gymnasiets matematik. Vi skal ikke bruge det til noget. Men det er vigtigt, når man skal konstruere den matematiske struktur *en polynomiumsring*. Vi har hidtil mødt de matematiske strukturer *Tallegeme* og *Vektorrum*. En *ring* er en anden slags struktur, men tankegangen bag den er den samme. Man definerer nogle begreber og opstiller en række regler (aksiomer), som begreberne skal opfylde, og ud fra dette kan man udlede en række egenskaber. I vores definition har nulpolynomiet ingen veldefineret grad. Men man kan også vælge at tildele det graden -1, eller som jeg lærte det, graden -∞.
- Bemærk, at a_0 kan betragtes som et tal, der ganges på x^0 (hvilket også fremgår af sumtegnet). Det er derfor, det ligesom de andre a'er kaldes en koefficient. Det kaldes også *konstantleddet*.
- Hvis vi har en funktion med forskriften $f(x) = 4 \cdot \mathbf{e}^x$, er det f, der er funktionen (og ikke $f(x)$). Men eftersom polynomiet er det algebraiske udtryk på højresiden i $g(x) = x^2 + 3x - 7$, så er det $g(x)$, der er polynomiet (og ikke g). Vi har altså:



En *lineær funktion* er en funktion, hvor funktionsudtrykket er et polynomium, hvor graden ikke er over 1.

Vores behandling af polynomier kommer i høj grad til at handle om rødder, så vi skal lige have defineret, hvad en rod er for en størrelse:

Definition 22: Givet en funktion $f: A \mapsto B$ er en *rod* et argument $x_i \in A$, der afbildes over i 0, dvs. $f(x_i) = 0$. En rod kaldes også for et *nulpunkt*.

Grafisk svarer en rod altså til de steder, hvor grafen skærer *x*-aksen. Bemærk, roden eller nulpunktet er IKKE et punkt i koordinatsystemet. Det er *x*-værdien (eller førstekoordinaten) for skæringspunktet med førsteaksen.

Definition 23: Givet et polynomium $f(x)$ er en *rod* en værdi x_i for variablen *x*, for hvilken der gælder $f(x_i) = 0$.

Vi har set, hvordan man grafisk kunne angive løsningerne til ligningerne med 2 eller 3 variable, og vi har set på grafer for funktioner. Vi kan også se på polynomiers grafer, hvorved vi forstår grafen for den funktion, der har det pågældende polynomium som funktionsudtryk. Hermed får rødder præcis samme grafiske betydning for polynomier, som de har for funktioner generelt.

Vores arbejde med andengradsligninger og parabler kan som følge af ovenstående definitioner direkte overføres til andengradspolynomier, så følgende sætning indeholder en del gentagelser:

Sætning 36: For andengradspolynomiet $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$ gælder:

- Grafen er en parabel med toppunkt i $T\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right)$, hvor $d = b^2 - 4ac$.
- Hvis $d < 0$, har polynomiet ingen rødder, og vi kan ikke faktorisere polynomiet til en form som i de to nedenstående tilfælde.
- Hvis $d = 0$, har polynomiet én rod $r = \frac{-b}{2a}$, der kaldes en *dobbeltrod*. Vi kan i så fald faktorisere polynomiet til $f(x) = a \cdot (x - r) \cdot (x - r) = a \cdot (x - r)^2$
- Hvis $d > 0$, har polynomiet to rødder $r_1 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2 \cdot a}$ og $r_2 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2 \cdot a}$. Vi kan i så fald faktorisere polynomiet til $f(x) = a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2)$

Bemærk, at det nye i Sætning 36 er faktoriseringerne. Begrebet *dobbeltrod* svarer til, når vi om andengradsligninger siger, at en løsning har *multipliciteten* 2. Faktoriseringen forklarer tallet 2 og ordet "dobbelt".

Bevis 36: Vi tager de tre tilfælde i omvendt rækkefølge af sætningen.

$d > 0$: Vi kender udtrykkene for rødderne og regner løs på den angivne faktorisering for at vise, at vi får det oprindelige polynomium:

$$a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) =$$
$$a \cdot \left(x - \frac{-b + \sqrt{d}}{2 \cdot a} \right) \cdot \left(x - \frac{-b - \sqrt{d}}{2 \cdot a} \right) =$$
$$a \cdot \left(x^2 - x \cdot \frac{-b - \sqrt{d}}{2 \cdot a} - x \cdot \frac{-b + \sqrt{d}}{2 \cdot a} + \frac{-b + \sqrt{d}}{2 \cdot a} \cdot \frac{-b - \sqrt{d}}{2 \cdot a} \right) =$$
$$a \cdot \left(x^2 - x \cdot \frac{-b - \sqrt{d} - b + \sqrt{d}}{2a} + \frac{\left(-b + \sqrt{d}\right) \cdot \left(-b - \sqrt{d}\right)}{4a^2} \right) =$$
$$a \cdot \left(x^2 - x \cdot \frac{-2b}{2a} + \frac{b^2 - d}{4a^2} \right) =$$
$$a \cdot \left(x^2 + x \cdot \frac{b}{a} + \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2} \right) =$$
$$a \cdot \left(x^2 + x \cdot \frac{b}{a} + \frac{4ac}{4a^2} \right) =$$
$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$d = 0$: Vi kender udtrykket for roden og regner løs på den angivne faktorisering:

$$a \cdot (x - r)^2 =$$
$$a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 =$$
$$a \cdot \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) =$$
$$a \cdot x^2 + bx + \frac{b^2}{4a}$$

Her går man umiddelbart i stå, for udtrykket ligner jo ikke vores oprindelige udtryk. Faktisk mangler vi helt bogstavet c.

Men her husker vi på, at $d = 0$, så vi har: $b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow b^2 = 4ac$.

Når dette indsættes, får vi:

$$ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} =$$
$$ax^2 + bx + \frac{4ac}{4a} =$$
$$ax^2 + bx + c$$

$d < 0$: Hvis vi havde kunnet faktorisere polynomiet til en form indeholdende bl.a. faktoren $(x - k)$, så fortæller vores nulregel os, at polynomiet ville have værdien 0, når $x = k$, og det er i modstrid med, at der ikke er nogen rødder. Derfor findes en sådan faktorisering ikke.

Vi har allerede set en del af indholdet af Sætning 36, når vi løste andengradsligninger ved at ”gætte” løsninger.

F.eks. kunne vi sige $0 = x^2 + 5x - 24 = (x+8)\cdot(x-3)$, hvorefter nulreglen gav os $\underline{\underline{x = -8 \vee x = 3}}$.

Der havde vi bare en del betingelser på ligningen. Sætning 36 gælder generelt.

Eksempel 64: Vi vil gerne om muligt faktorisere polynomiet $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$.

Først bestemmes diskriminanten: $d = b^2 - 4ac = 9^2 - 4\cdot 3\cdot(-12) = 81 + 144 = 225$

Da diskriminanten er positiv, er der to rødder, og polynomiet kan dermed faktoriseres. Rødderne bestemmes:

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{d}}{2\cdot a} = \frac{-9+\sqrt{225}}{2\cdot 3} = \frac{-9+15}{6} = 1$$
$$r_2 = \frac{-b-\sqrt{d}}{2\cdot a} = \frac{-9-\sqrt{225}}{2\cdot 3} = \frac{-9-15}{6} = -4$$

Da *a*-værdien er 3, har vi altså faktoriseringen:

$$f(x) = 3\cdot(x-1)\cdot(x-(-4)) = \underline{\underline{3\cdot(x-1)\cdot(x+4)}}$$

Vi tjekker med Maple:

$$f := x \rightarrow 3\,x^2 + 9\,x - 12 :$$
$$factor(f(x)) = 3\,(x+4)\,(x-1)$$

Eksempel 65: Vi vil gerne om muligt faktorisere polynomiet $p(x) = 4x^2 + 8x + 15$.

Først bestemmes diskriminanten: $d = b^2 - 4ac = 8^2 - 4\cdot 4\cdot 15 = 64 - 240 = -176$

Da diskriminanten er negativ, er der ingen rødder, og polynomiet kan ikke faktoriseres.

Vi tjekker med Maple:

$$p := x \rightarrow 4\,x^2 + 8\,x + 15 :$$
$$factor(p(x)) = 4\,x^2 + 8\,x + 15$$

Som forventet kan Maple heller ikke faktorisere polynomiet.

Opgaverne 652*

Vi har tidligere set, hvordan vi ud fra to punkter på grafen kunne bestemme forskriften for en lineær funktion, en eksponentiel udvikling eller en potensvækst. Da vi har tre koefficienter i et andengradspolynomium, har vi brug for tre punkter, så vi kan ende ud med et ligningssystem bestående af 3 ligninger med 3 ubekendte.

Eksempel 66: Bestem andengradspolynomiet, hvis graf går gennem punkterne $(-2,21), (1,0)$ og $(4,15)$. Vi får følgende ligningssystem:

$$\left.\begin{array}{r} 21 = a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + c \\ 0 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c \\ 15 = a\cdot 4^2 + b\cdot 4 + c \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 21 = 4a - 2b + c \\ 0 = a + b + c \\ 15 = 16a + 4b + c \end{array}\right\}$$

Man kan godt løse dette ligningssystem i hånden, men her lader vi Maple gøre det:

$$[21 = 4\,a - 2\,b + c,\ 0 = a + b + c,\ 15 = 16\,a + 4\,b + c] \xrightarrow{\text{solve (specified)}} \{a = 2,\ b = -5,\ c = 3\}$$

Dvs. at polynomiet er $2x^2 - 5x + 3$

En anden fremgangsmåde i Eksempel 66 er at lade Maple foretage alle udregninger:

$$f(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c :$$
$$solve([f(-2) = 21, f(1) = 0, f(4) = 15], \{a, b, c\}) = \{a = 2, b = -5, c = 3\}$$

Opgaverne 653*

Polynomier med grader over 2

I denne afsluttende del må vi springe beviser over. Vi begynder med Algebraens Fundamentalsætning (ikke at forveksle med Aritmetikkens Fundamentalsætning, som vi kender fra vores behandling af primtal). Det er en sætning, der var længe undervejs og efterfølgende længe om at blive bevist. Mange store matematikere har beskæftiget sig med den (bl.a. Leibniz, Euler, d'Alembert, Lagrange, Laplace og Gauss, der er navne, man ikke kan undgå at støde på som matematiker eller fysiker). Det lykkedes ikke Euler at bevise den, og det lykkedes ikke Gauss i første forsøg. En pudsig pointe er, at sætningen ikke kan vises ved udelukkende at anvende algebra (beviserne indeholder også enten geometri eller analyse).

Sætning 37: Algebraens Fundamentalsætning.
Ethvert polynomium i én variabel af grad *n* (med komplekse koefficienter) har netop *n* rødder (regnet med multiplicitet) og kan dermed faktoriseres til

$$a_n \cdot (x - z_1) \cdot (x - z_2) \cdot (x - z_3) \cdot \ldots \cdot (x - z_n),$$

hvor z_i er en kompleks rod, og hvor nogle af rødderne gerne må være ens.

Det er ikke så vigtigt med de "komplekse koefficienter", for de reelle tal er jo en delmængde af de komplekse tal, så den gælder også med reelle koefficienter. Men det væsentlige er altså, at det KUN er, hvis man regner med komplekse tal, at man kan være sikker på, at der er *n* rødder.

Blandt de komplekse rødder kan vi "normalt" kun bruge dem, der også er reelle. "Vores" sætning bliver altså:

Sætning 38: Et polynomium i én variabel af grad *n* har højst *n* reelle rødder.

Man kan sige, at Algebraens Fundamentalsætning er et meget stærkt argument for at arbejde med komplekse tal, da det er en smuk sætning.

Prøv også at sammenligne den med Aritmetikkens Fundamentalsætning: $a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$, hvor *p*'erne er primtal (der gerne må være ens). Man kan sige, at faktorerne $(x - z_i)$ fungerer som de "primtal", et polynomium er opbygget af.

Øvelse 8: 1) Konstruér et n'te gradspolynomium ved at opbygge det af faktorerne $(x - r_i)$, dvs. f.eks. $f(x) = (x-4)\cdot(x+3)\cdot(x-2)\cdot(x+5)$. Lad Geogebra tegne grafen og tjek, at rødderne aflæst ud fra faktorerne passer med rødderne aflæst ud fra grafen.
2) Brug 'expand' i Maple og bestem på den måde polynomiet.
3) Gør som i 1) og 2), men tilføj denne gang også faktorer af formen $(x^2 + c)$, hvor *c* er et **positivt tal**.
4) Gør som i 1), men lad denne gang to af faktorerne være $(x + 1{,}1)$ og $(x + 0{,}9)$. Erstat disse to faktorer med $(x+1)$ og $(x+1)$. Sammenlign de to grafer. Kan det forklare ordene *dobbeltrod* og *multiplicitet*?

Vi kender nu det højest mulige antal rødder. Men hvad med det lavest mulige?

Her er polynomiets grad afgørende. Det er den højeste potens, der i sidste ende ”vinder”, dvs. uanset koefficienterne vil polynomiets værdi, når x kommer tilstrækkelig langt væk fra origo, få samme fortegn som n’te gradsleddet. Der gælder:

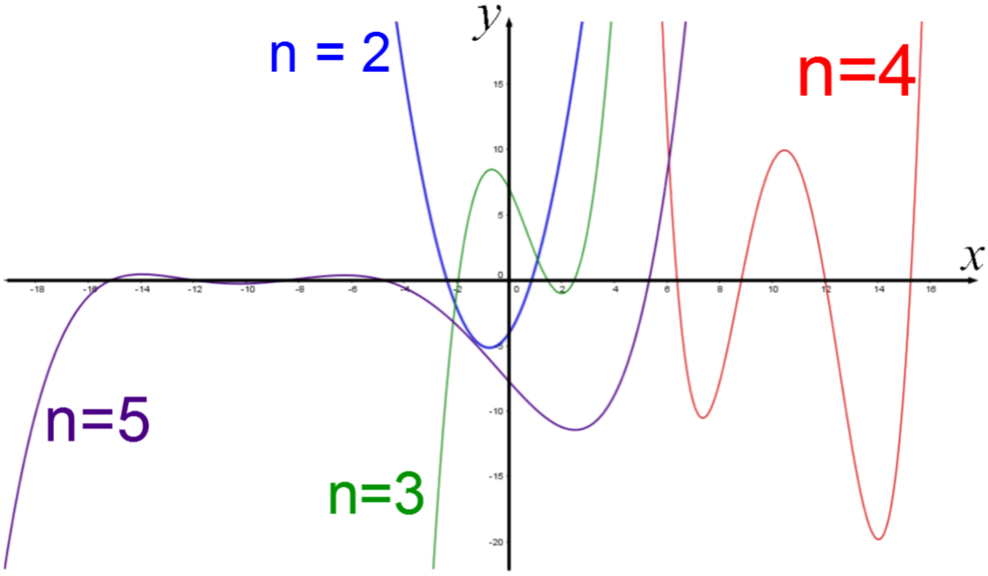
$$n \text{ ulige: } x^n \to -\infty \text{ for } x \to -\infty \text{ og } x^n \to \infty \text{ for } x \to \infty$$

$$n \text{ lige: } x^n \to \infty \text{ for } x \to -\infty \text{ og } x^n \to \infty \text{ for } x \to \infty$$

Dvs. hvis n er ulige, skal grafen på et eller andet tidspunkt krydse x-aksen. Vi har derfor:

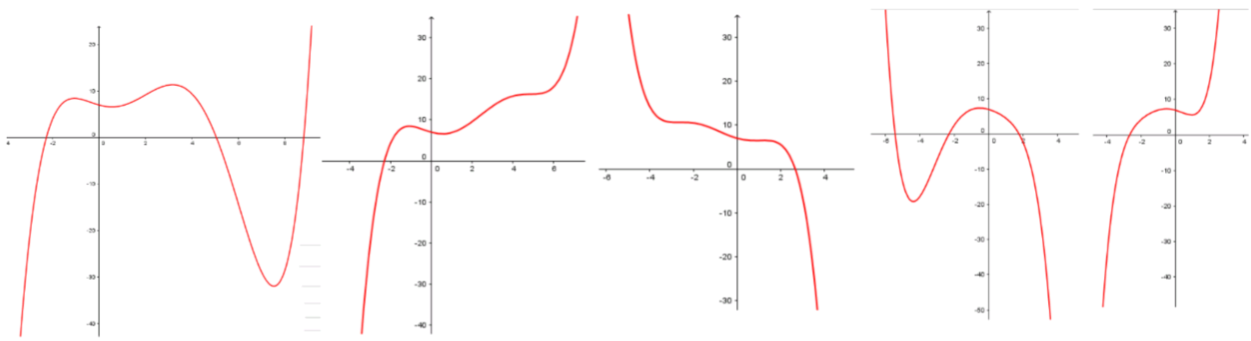
Sætning 39: Om et polynomium i én variabel af grad n gælder:
n ulige: Polynomiet har mindst én rod, dvs. det mulige antal rødder er 1, 2, 3, … , n.
n lige: Polynomiet har mindst 0 rødder, dvs. det mulige antal rødder er 0, 1, 2, …, n.

Nedenstående figur kan måske hjælpe med at forstå Sætning 39. Polynomiets grad er angivet ved de enkelte grafer. Prøv at lave lodrette forskydninger af de enkelte grafer og tjek, at du på den måde kan opnå alle de forskellige, mulige antal rødder nævnt i Sætning 39.



Bemærk, at for hver grad får polynomiet mulighed for at vende en gang mere. Andengradspolynomiet vender 1 gang. Tredjegradspolynomiet kan vende op til 2 gange. Fjerdegradspolynomiet kan vende op til 3 gange, osv.

Men bemærk også, at det kun er en **mulighed.** Nedenstående figur viser grafer for fem forskellige femtegradspolynomier, og som det ses, vender de ikke alle sammen 4 gange.



Grafer for fem forskellige 5. gradspolynomier

Når man kigger på grafen for et polynomium, kan skæringspunktet med *y*-aksen og området omkring dette fortælle os, hvad fortegnene på koefficienterne for andengradsleddet, førstegradsleddet og konstantleddet er.

Vi får igen brug for noget differentialregning, dvs. igen kommer nogle postulater, som du først under repetitionslæsning kender baggrunden for.

Vi opskriver polynomiet samt den første og anden afledede af den funktion, der har polynomiet som funktionsudtryk:

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$$f'(x) = n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} \cdot x^{n-2} + (n-2) \cdot a_{n-2} \cdot x^{n-3} + \ldots + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + 2 \cdot a_2 \cdot x + a_1$$

$$f''(x) = n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2} + (n-1) \cdot (n-2) \cdot a_{n-1} \cdot x^{n-3} + (n-2) \cdot (n-3) \cdot a_{n-2} \cdot x^{n-4} + \ldots + 6 \cdot a_3 \cdot x + 2 \cdot a_2$$

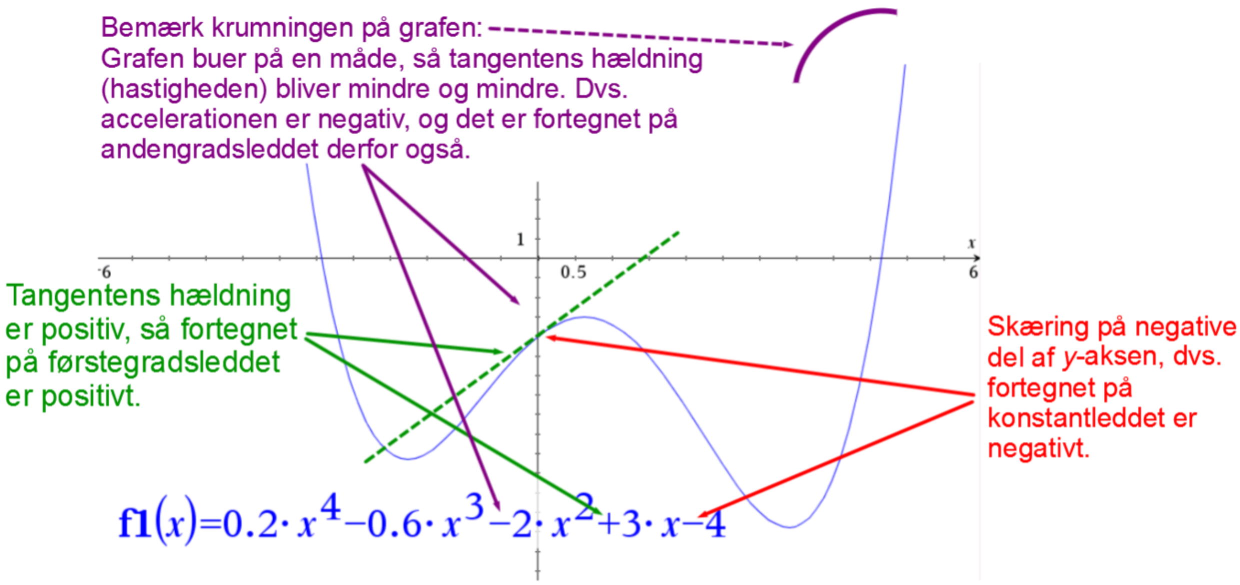
Det er de gule områder, vi skal være opmærksomme på, for det er fortegnene på a_0, a_1 og a_2, vi skal finde. Og vi vil benytte de tre funktioners værdier i 0, så dem regner vi ud (bemærk, at alle led med *x* forsvinder, når vi indsætter $x = 0$):

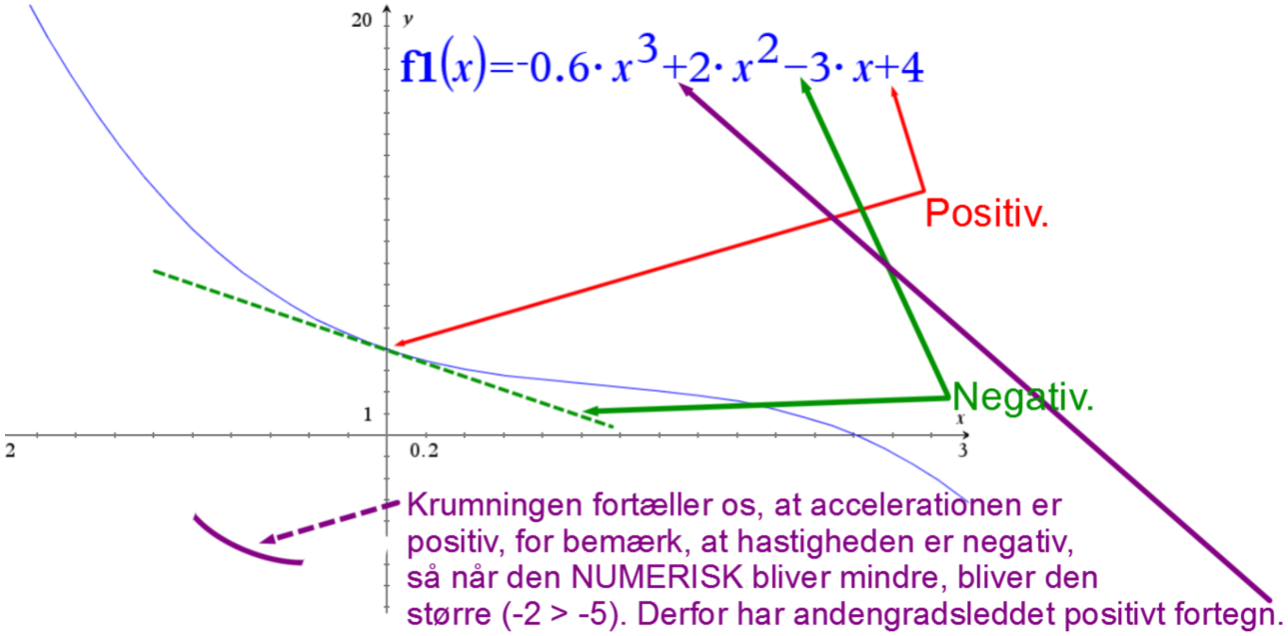
$$f(0) = a_0$$
$$f'(0) = a_1$$
$$f''(0) = 2 \cdot a_2$$

$f(0)$ angiver skæringen med *y*-aksen, så hvis grafen skærer *y*-aksen på den positive del, er a_0 positiv, og hvis skæringen er på den negative del, er a_0 negativ.

$f'(0)$ angiver hastigheden i 0, hvilket svarer til hældningen af den tangent, der rører grafen i grafens skæringspunkt med *y*-aksen. Hvis tangentens hældning er positiv, er a_1 positiv, og hvis hældningen er negativ, er a_1 negativ.

$f''(0)$ angiver accelerationen i 0, dvs. den fortæller os, om hastigheden er ved at vokse eller aftage. Det kan ses på krumningen (se nedenstående eksempler). Hvis accelerationen er positiv, er a_2 positiv, og hvis accelerationen er negativ, er a_2 negativ.





Opgaverne 654*

Øvelse 9: 1) Indtast forskellige polynomier i Geogebra eller Maple og tjek, at du ud fra grafen kan bestemme fortegnene på de tre led med graderne 0, 1 og 2 (som du selvfølgelig allerede kender, da du selv har skrevet udtrykkene).
2) Prøv også at lade koefficienten i andengradsleddet være 0. Hvordan ses det på grafen?

Øvelse 10: Hvordan bestemmer man fortegnet på n'tegradsleddet, når man har et n'tegradspolynomium?

LOGISTISK VÆKST

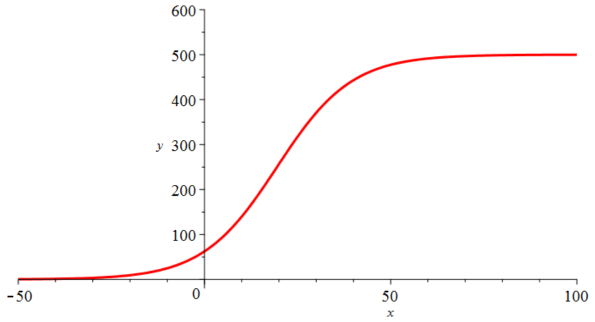
Som en sidste funktionstype ser vi nu på såkaldt *logistisk vækst*, som vi også skal beskæftige os en hel del med i forbindelse med infinitesimalregning, hvor logistisk vækst bliver udtrykt ved en differentialligning, der kort fortalt sætter en grænse for væksten. Funktionerne, der er løsninger til denne differentialligning, er:

Definition 24: Ved *logistisk vækst* forstås funktioner $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}_+$ givet ved forskriften

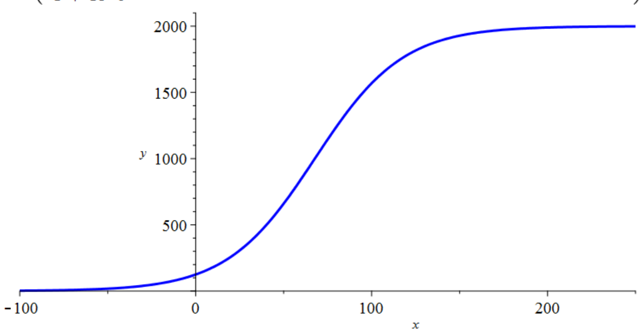
$$f\left(x\right)=\frac{M}{1+c\cdot \mathrm{e}^{-k\cdot x}}\quad ;\ c>0\ ;\ k>0\ ;M>0$$

Et par eksempler på graferne for to af denne type funktioner er:

$plot\left(\frac{500}{1+7\cdot \mathrm{e}^{-0.1\cdot x}}, x=-50..100, y=0..600, thickness=3, color=red\right)$



$plot\left(\frac{2000}{1+15\cdot \mathrm{e}^{-0.04\cdot x}}, x=-100..250, y=0..2100, thickness=3, color=blue\right)$



Ved at kigge på graferne kan man få en idé om nogle af punkterne i nedenstående sætning:

Sætning 40: For logistisk vækst givet ved Definition 24 gælder:

1. $Vm=\left]0,M\right[$, dvs. 0 er den *nedre grænse* og M er den *øvre grænse*. Bemærk, at ingen af værdierne antages, men man kan altså komme vilkårlig tæt på dem.
2. Væksthastigheden er størst, når funktionen antager værdien $\frac{M}{2}$.
3. Grafen skærer y-aksen i punktet $\left(0,\frac{M}{1+c}\right)$.

Eksempel 67: Vi ser på den logistiske vækst givet ved funktionen f med forskriften:

$$f\left(x\right)=\frac{750}{1+9\cdot \mathrm{e}^{-0,34\cdot x}}$$

Vi kan sige følgende:

- Den øvre grænse for funktionsværdierne er 750.
- Grafen skærer andenaksen i $\frac{750}{1+9}=75$.
- Væksthastigheden er størst, når funktionsværdien er 375. Stedet bestemmes med Maple:

$$375=\frac{750}{1+9\cdot \mathrm{e}^{-0.34\cdot x}}\xrightarrow{\text{solve}}\{x=6.462425227\}$$

Bevis 40:

Punkt 1: Vi ser først på grænseovergangen $x \to \infty$. Her gælder:

$$e^{-k\cdot x} \to 0 \text{ for } x \to \infty \text{, da } -k\cdot x \to -\infty \text{ for } x \to \infty \quad (k \text{ er positiv ifølge Definition 24})$$

Dvs. at $1+c\cdot e^{-k\cdot x} \to 1$ for $x \to \infty$, og dermed $\dfrac{M}{1+c\cdot e^{-k\cdot x}} \to M$ for $x \to \infty$.

Så ses på grænseovergangen $x \to -\infty$. Her gælder:

$$e^{-k\cdot x} \to \infty \text{ for } x \to -\infty \text{, da } -k\cdot x \to \infty \text{ for } x \to -\infty$$

Dvs. at $1+c\cdot e^{-k\cdot x} \to \infty$ for $x \to -\infty$, og dermed $\dfrac{M}{1+c\cdot e^{-k\cdot x}} \to 0$ for $x \to -\infty$.

Desuden bemærkes, at $e^{-k\cdot x}$ er en monoton funktion (den er aftagende). Dermed bliver f også en monoton funktion (den er voksende). Dermed er værdimængden begrænset af de to grænseværdier for grænseovergangene ovenfor.

Punkt 2: Vises i forbindelse med infinitesimalregning.

Punkt 3: Vises som altid ved at indsætte $x=0$ i funktionsforskriften.

Det er vigtigt at bemærke 1-tallet i første led i nævneren i Definition 24. For værdierne for M og c (og dermed øvre grænse, maksimal veksthastighed og skæring med andenaksen) er baseret på dette 1-tal.

Man kan sommetider i forbindelse med løsning af differentialligningen for logistisk vækst opleve, at et computerprogram giver en forskrift, hvor der ikke står et 1-tal. Man skal i så fald forkorte brøken med det tal, der står i stedet for 1-tallet:

Eksempel 68: Vi har fået følgende funktionsforskrift for logistisk vækst:

$$f(x) = \frac{7839}{18+57\cdot e^{-0{,}062\cdot x}}$$

Vi ønsker at kunne anvende Sætning 40 og er derfor nødt til at forkorte brøken med 18:

$$f(x) = \frac{7839}{18+57\cdot e^{-0{,}062\cdot x}} = \frac{\frac{7839}{18}}{\frac{18}{18}+\frac{57}{18}\cdot e^{-0{,}062\cdot x}} = \frac{435{,}5}{1+3{,}17\cdot e^{-0{,}062\cdot x}}$$

Bemærk, at vi (selvfølgelig) forkorter ved at dividere med 18 i **hvert led** i tæller og nævner.
Vi er nu i stand til at konkludere, at:

- Den øvre grænse er 435,5.
- Der er maksimalhastighed, når funktionen antager værdien 217,75.
- Grafen skærer andenaksen i (0,104.52)

Opgaverne 655*

MODELLER

En *(matematisk) model* er en beskrivelse af et (virkeligt) system ved hjælp af matematiske begreber (variabler, konstanter, ligninger, funktioner, …).

Eksemplerne 23, 24, 49, 50 og 51 er eksempler på modeller. I Eksempel 23 er funktionsforskriften en *model*, der beskriver træets højde, og i Eksempel 24 er funktionsforskriften en *model*, der beskriver prisen ved køb af grus.

Formler inden for kemi og fysik (Eksempel 51) er andre eksempler på modeller.

Typisk bruges modeller til et eller flere af nedenstående punkter:

- **At kunne sætte ord og tal på noget karakteristisk ved det konkrete system**
(F.eks. vokser træets højde i Eksempel 23 med 0,85 m om året).

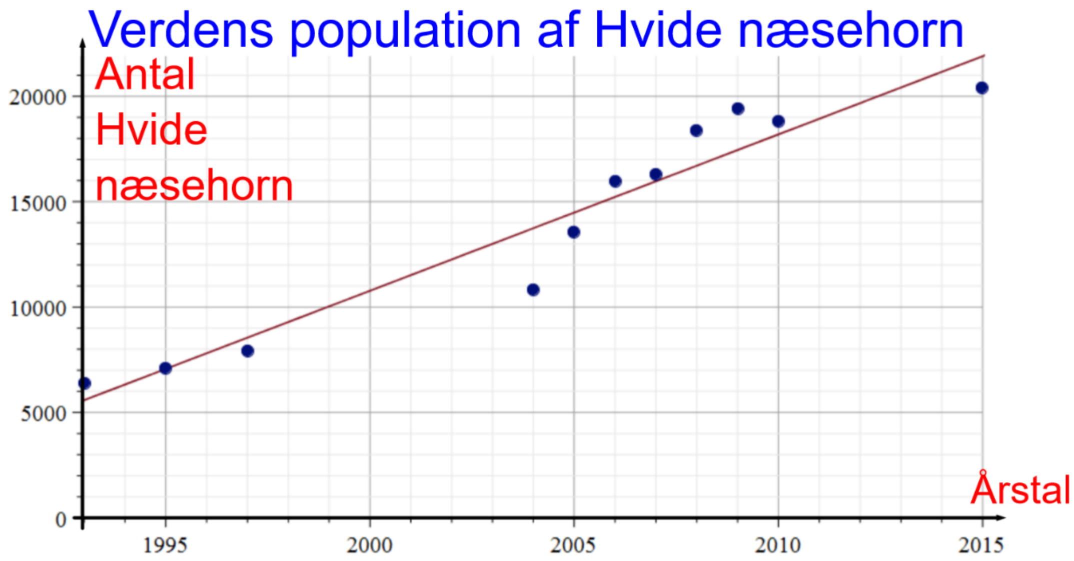
- ***Ekstrapolation:*** At kunne forudsige noget om systemet
(F.eks. vil træet i Eksempel 23 i år 2033 have højden 27,4 m, da $h(30) = 27,4$).

- ***Interpolation:*** At udfylde "huller" i systemet
(Måske kender man kun de faktiske værdier for en størrelse i lige år, og modellen kan så bruges til at estimere værdier i ulige år).

- **At forstå systemet**
(Dette ser vi først på i forbindelse med infinitesimalregning. Kort fortalt er det sådan, at man ved analyse af et system (f.eks. en fysisk analyse af et frit fald i tyngdefeltet) kan komme frem til en såkaldt *differentialligning*, hvis løsninger er funktioner. Og hvis eksperimenters værdier passer med en løsning, vil man sige, at man forstår systemet).

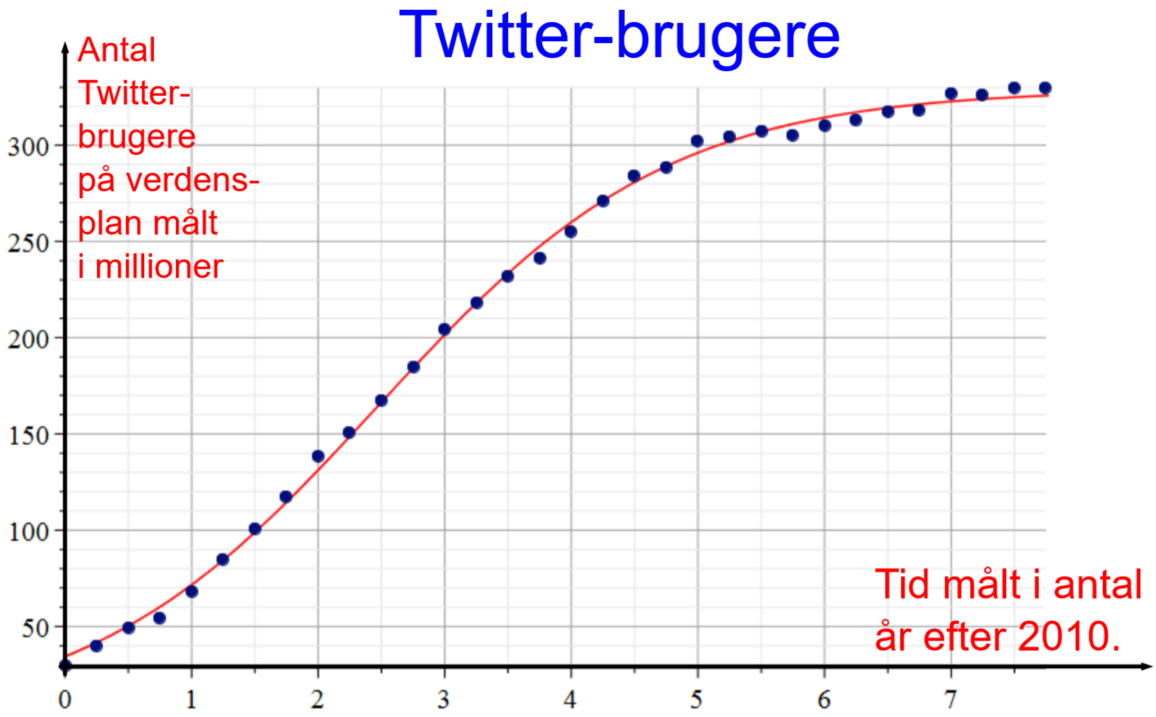
Der er dog meget stor forskel på modeller, og hvad de kan anvendes til.
F.eks. kan man ikke gå ud fra, at modellen for træets højde i Eksempel 23 er helt præcis. De værdier, der kan beregnes ud fra den vil kun tilnærmelsesvis stemme overens med virkeligheden. Modsat er modellen i Eksempel 24 eksakt. Den giver den nøjagtige pris for et læs grus, hvis man antager, at man kender massen af grus eksakt.

Vi ser nu på nogle eksempler, der illustrerer forskellige punkter, der er afgørende for, hvad de enkelte modeller kan bruges til.



- **Hvide næsehorn:**

1. Det er tydeligt, at antallet af hvide næsehorn er voksende. Men det bemærkes, at der er stor forskel på, hvor meget populationen vokser fra år til år. Der er derfor tydeligvis ikke nogen simpel funktion, der kan beskrive populationen. I diagrammet har man forsøgt sig med en *lineær model*, dvs. populationen forsøges beskrevet med en lineær funktion $N : t \mapsto a \cdot t + b$, hvor t er tiden angivet i år, mens N er antallet af hvide næsehorn. Den rette linje er den såkaldt *bedste rette linje* bestemt ved *mindste kvadraters metode*, der går ud på, at summen af kvadraterne på de lodrette afstande fra punkterne til linjen har den mindst mulige værdi. Vi skal som en del af infinitesimalregning se på, hvordan man i praksis finder denne *bedste rette linje*. Det er den bedste rette linje, men det er ikke nødvendigvis den bedste model. Den lineære model er valgt, fordi den er simpel, og fordi der ikke er noget oplagt bedre alternativ. Og nu kommer så første pointe: **Når modellen er lavet, er det modellens tal, der gælder.** Denne pointe var specielt vigtig, dengang man på øjemål tegnede den bedste rette linje, da man efterfølgende skulle finde hældningen ud fra to punkter. Her **SKAL** punkterne vælges på den rette linje (modellen), og må altså aldrig udvælges fra tabellen (de virkelige tal). For at forstå vigtigheden af dette, kan du se på, hvad der sker, hvis du finder hældningen ud fra de virkelige tal fra årene 2004 og 2006 (kig på grafen).
2. Beregninger ud fra den lineære model (bedste rette linje) fortæller, at der i 2003 var 13000 hvide næsehorn (*interpolation*), og at der i 2016 forventes at være 22642 (*ekstrapolation*). Hvis man kigger på de målte værdier i de tilstødende år 2004 (10796) og 2015 (20375), kan man se, at modellens værdier sandsynligvis afviger ret meget fra virkeligheden. For hvis der i 2003 var 13000 hvide næsehorn, skulle der på ét år være forsvundet 2204 hvide næsehorn. Og fra 2015 til 2016 skal der komme 2267 hvide næsehorn, hvilket er væsentlig mere end de 742 næsehorn, der i gennemsnit kommer (hældningen). Pointen er: **Denne model er ikke god til at udfylde huller og komme med kortsigtede forudsigelser**.
3. Men det er ikke umuligt, at modellen kan bruges til relativt gode langsigtede forudsigelser (f.eks. til at forudsige antallet af hvide næsehorn i år 2025, hvor modellen siger 29318). For at kunne afgøre dette, skal man ind og se på de faktorer, der har betydning for populationens vækst og prøve at vurdere disse. For de hvide næsehorn kunne det være ting som krybskytteri, levesteder og sygdomme. Vurderingen af disse punkter har vist ikke så meget med matematik at gøre, men kræver anvendelse af andre fag. Men en pointe er altså: **Det er ikke umuligt, at en model kan være (relativt) bedre til langsigtede end til kortsigtede forudsigelser.**



- **Twitter-brugere:**
  Denne gang forsøger vi os ikke med en ret linje, for det er tydeligvis en dårlig model. Vi har valgt en *logistisk model* (den røde kurve).

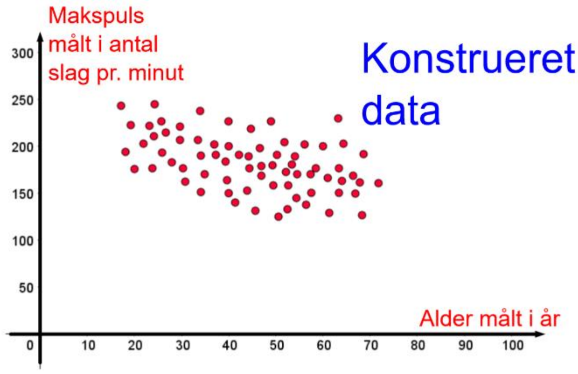
1. I dette tilfælde er modellen god til at udfylde huller, for punkterne (de virkelige værdier) afviger på intet tidspunkt meget fra modellen. Der ser altså ikke ud til at være nogle faktorer, der på kort sigt kan ændre væksten i antallet af twitterbrugere markant (de har i hvert fald ikke vist sig i den periode på 8 år, som tallene dækker).
2. Det er ikke overraskende, at den logistisk model passer fint. Den er baseret på, at der er en vis mængde mennesker, der er potentielle twitterbrugere, og i begyndelsen vil det være sådan, at jo flere brugere, jo større sandsynlighed er der for, at potentielle brugere kender en bruger og derfor selv bliver bruger. Men efterhånden vil der ikke være så mange potentielle brugere tilbage, og derfor vil væksten blive mindre og mindre. Denne argumentation kan opskrives i den tidligere omtalte differentialligning, hvis løsning er den logistiske model. Da modellen passer godt, kan man hævde, at man har – i hvert fald en vis – forståelse for systemet.
3. Den logistiske model forudsiger, at antallet af twitterbrugere har en øvre grænse på 329 millioner. Og da punkterne følger den røde kurve så godt, vil man være tilbøjelig til at mene, at det er en meget pålidelig forudsigelse. Men der er dog en grænse. Det er næppe sandsynligt, at Twitter eksisterer om 100 år. Man taler om modellens *rækkevidde* eller *gyldighedsområde*. Nogle gange kan gyldighedsområdet fastsættes helt præcist, men i dette tilfælde er det ikke muligt. Det er dog et helt generelt problem, og pointen er: **Du skal altid overveje modellens gyldighedsområde, og når du laver en graf, skal du tage højde for gyldighedsområdet**.

For at illustrere pointen med modellers gyldighedsområde ses nu på et eksempel med menneskers maksimalpuls:

Der er foretaget et utal af studier omkring menneskers maksimalpuls *MP* (der måles i antal slag pr. minut), og en af de simple tommelfingerregler siger, at makspulsen aftager lineært med alderen *t* (målt i år):

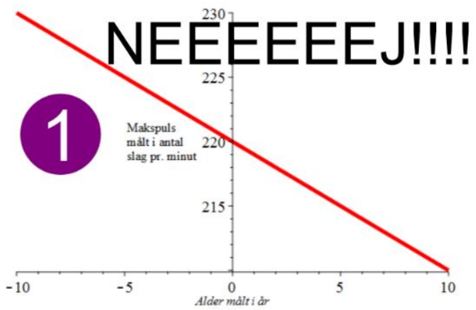
$$MP(t) = 220 - t$$

Der er andre ting end alderen, der har betydning for makspulsen – i særdeles genetikken. Derfor ville man i et studium ikke få måledata, der ligger tæt, men snarere noget i retning af nedenstående:

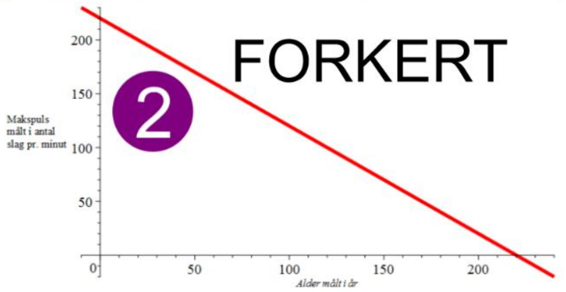


Men da vi skal fokusere alene på gyldighedsområdet i dette tilfælde, ser vi bort fra de individuelle forskelle og benytter den angivne funktion *MP*. Spørgsmålet er nu, hvordan grafen skal tegnes:

$plot(220 - t, thickness = 5, color = red)$



$plot(220 - t, t = -10\,..240, thickness = 5, color = red)$

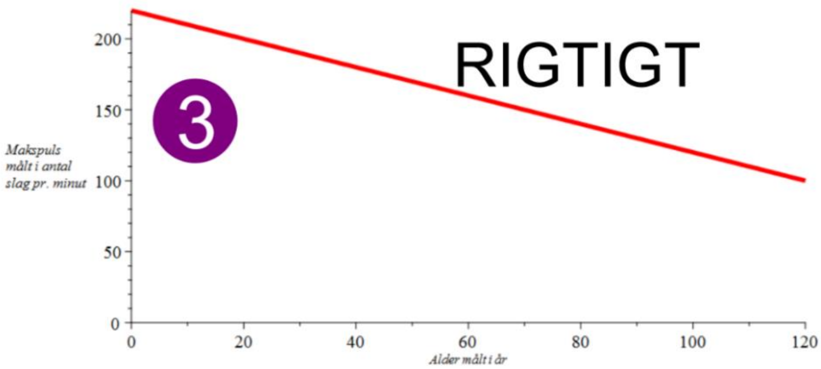


1: Dette er helt galt. Der er blot skrevet *plot* uden at overveje definitionsmængden (gyldighedsområdet). Og i dette tilfælde giver det ingen mening at have negative tal på nogen af akserne, da hverken alder eller makspuls kan være negativ. Desuden går grafen kun til 10 år, hvilket heller ikke giver mening (der mangler noget). Og endelig burde andenaksen begynde med 0.

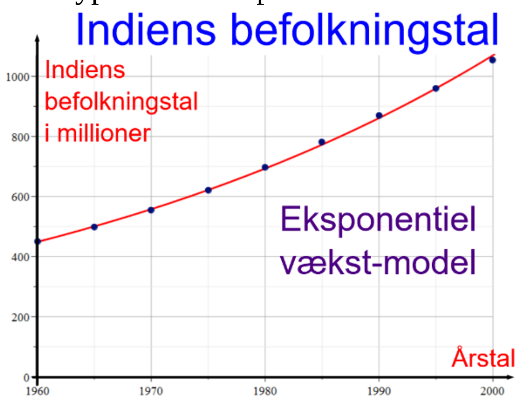
2: Dette er forkert. Man har igen valgt nogle negative aldre, og denne gang er man gået for langt op i alder. Mennesker bliver ikke 200 år, og det er meningsløst at sige, at en person på 230 år har en makspuls på -10.

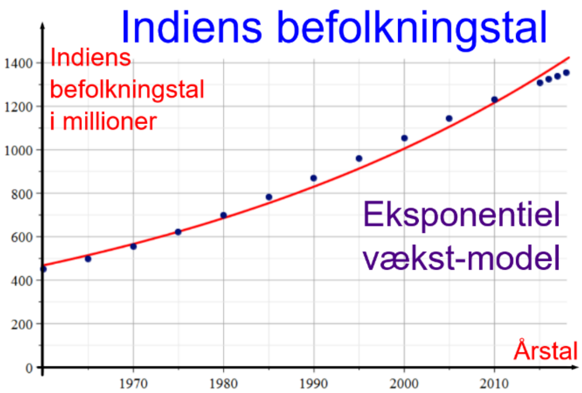
3 (se nedenfor): Dette er rigtigt. Definitionsmængden er sat fra 0 til 120 år. Det er ikke det eneste rigtige. F.eks. kunne man også argumentere for 20 år til 80 år (da man ikke måler på børn og meget gamle mennesker) eller noget derimellem. Pointen er bare, at **denne definitionsmængde giver mening i forhold til den konkrete situation**.

$plot(220 - t, t = 0\,..120, y = 0\,..220, thickness = 5, color = red)$



Næste eksempel omhandler også modellers gyldighedsområde. Denne gang belyst ved valg af selve modeltypen. Der ses på antallet af mennesker i Indien.



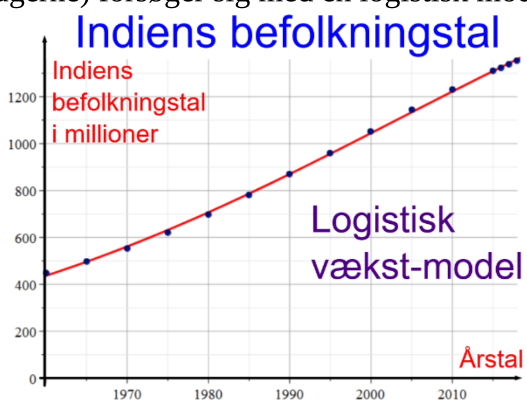


Ovenfor til venstre ses data fra perioden 1960-2000. Man har forsøgt sig med en eksponentiel vækstmodel, og som det ses, er det en rigtig god model (punkterne ligger tæt på linjen).

Så hvis man i år 2000 skulle lave en model, ville den eksponentielle vækstmodel være en glimrende model.

Men på figuren ovenfor til højre ses, at når man tager perioden 2000-2018 med, så sker der noget, og den eksponentielle model er tydeligvis ikke længere særlig god. **Bemærk, at punkterne først ligger under linjen (1960-1970), så over linjen (1980-2010), og så igen under linjen (2015-2018).** Denne systematiske afvigelse viser, at modellen er dårlig. Det havde været noget andet, hvis afvigelserne (ligesom med de hvide næsehorn) havde ligget usystematisk over og under linjen.

Hvis man nu (jf. Twitter-brugerne) forsøger sig med en logistisk model, får man nedenstående:



Denne model passer glimrende på data i perioden 1960-2018.

Den mest oplagte model-anvendelse er i dette tilfælde at forudsige befolkningstallet i Indien i fremtiden. Og her ses en markant forskel på de to modeller:

Eksponentiel model (1960-2000): Forudsiger 3167 millioner indbyggere i Indien i 2050.

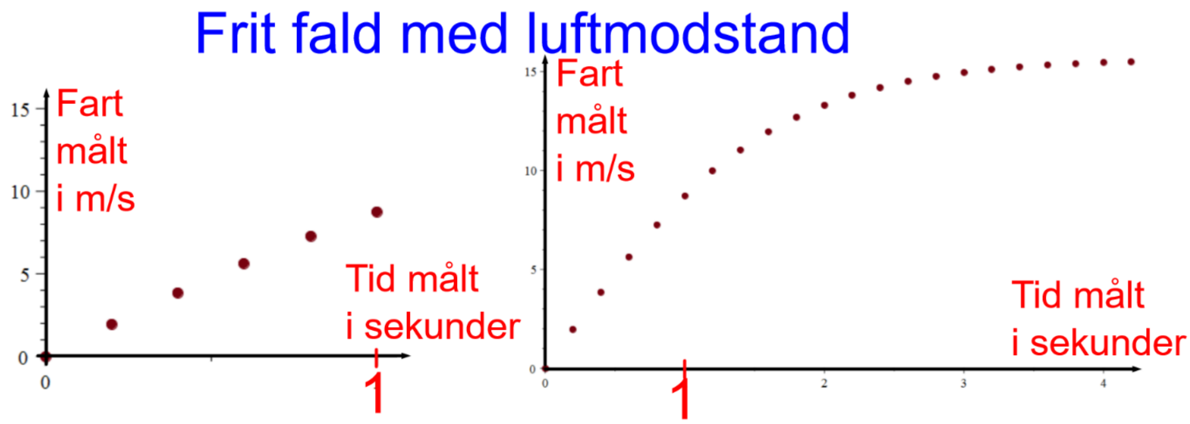
Logistisk model (1960-2018): Forudsiger 1802 millioner indbyggere i Indien i 2050.

Den logistiske model vil højst sandsynligt ende med at give en bedre forudsigelse end den eksponentielle, da den tager højde for de seneste 20-30 års tydelige ændringer i Indiens befolkningsvækst. Rækkevidden (eller gyldighedsområdet) for den eksponentielle model går altså slet ikke til år 2050, og egentlig heller ikke til f.eks. 2010.

Men hvad med den logistiske model? Den passer jo fint på de kendte data, men i modsætning til situationen med Twitter-brugere, er der ikke noget teoretisk belæg for, at den logistiske model skulle være god. Så det er også yderst tvivlsomt, om den logistiske model giver pålidelige forudsigelser helt frem til 2050. For at kunne vurdere dette, skal man inddrage viden om det indiske samfund og have noget generel samfundsviden, som jeg ikke tør kaste mig ud i.

Rigtig mange økonomiske og samfundsvidenskabelige modeller er meget dårlige til forudsigelser, fordi der er for mange – både kontrolable og ukontrolable - faktorer, der påvirker systemet, man forsøger at beskrive.

Lad os nu se på nogle modeller, der er helt anderledes, nemlig modeller inden for fysik.
Fysiske modeller er ofte meget gode til både forudsigelser, udfyldning af huller, at sætte ord og tal på systemets karakteristika samt forståelsen af systemet (hvilket egentlig blot skyldes, at forståelsen er baseret på de eksperimenter, der er baggrunden for modellerne).
Vi ser på en situation, hvor man taber et objekt fra stor højde, således at det på et tidspunkt opnår så høj fart, at luftmodstanden får betydning. Vi ser på farten som funktion af tiden.
I diagrammet til venstre nedenfor ses det første sekund.
I diagrammet til højre ses de første godt 4 sekunder.



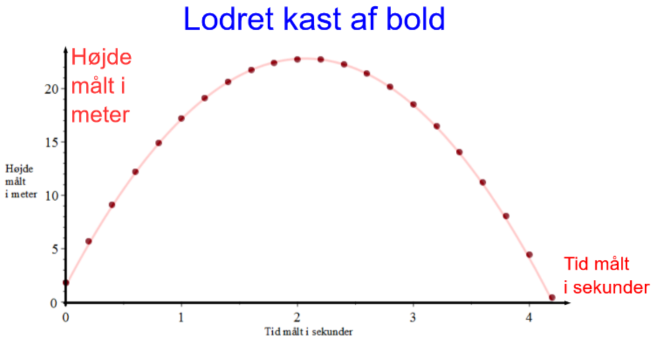
- **Første sekund:**
  1. En proportionalitet er tydeligvis en god model, da punkterne ligger på en ret linje, der går gennem origo.
  2. Modellen er meget god til at udfylde huller, dvs. man kan f.eks. meget præcist bestemme, hvad farten var efter 0,5 sekunder.
  3. Gyldighedsområdet: Her skal vi kigge noget skarpere, end vi gjorde i punkt 1, hvor det hurtigt blev konkluderet, at en proportionalitet var en god model. For hvis man kigger nøjere efter, ses der en tendens til krumning. Vores ”tydelige” proportionalitet er derfor nok ikke så god til forudsigelser ud over 1 sekund.
- **Første 4 sekunder**
  1. Krumningen ses tydeligt her. Vi kan altså se, at proportionalitetens gyldighedsområde kun er området 0 – 1 s (knap og nap).
  2. Man kan godt finde en model, der passer med punkterne, og denne model er meget god til at forudsige farten, indtil objektet rammer jordoverfladen.

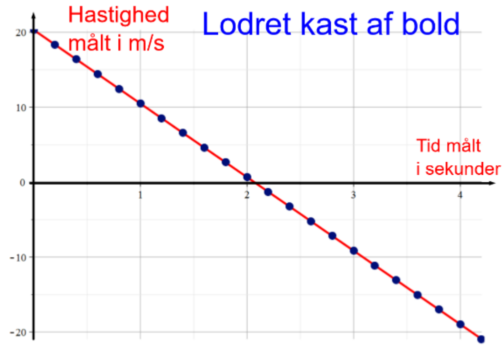
Vi ser nu bort fra luftmodstand og ser på et lodret kast af en bold.

Vi tegner to grafer.

Den første viser højden over jordoverfladen som funktion af tiden. Den anden viser hastigheden som funktion af tiden.

I den første er grafen en parabel, mens grafen er en ret linje i den anden.

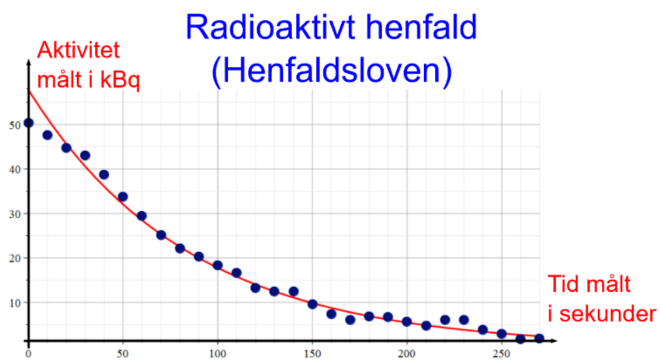




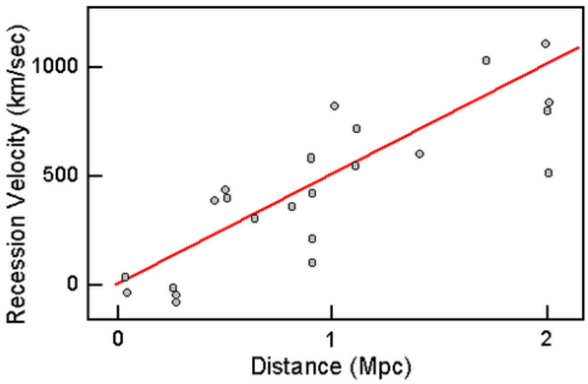
Pointen er her, at **det er samme system, der beskrives, men det er forskellige parametre, der benyttes til beskrivelserne.**

Man skal altid overveje, hvilke parametre man vil beskrive systemet med. I dette tilfælde er begge diagrammer meningsfulde. De kan hver især bruges til forskellige ting.

Lad os som sidste eksempler se på fysiske systemer, hvor måledata ikke ligger så pænt som eksemplerne med frit fald:



HUBBLES DATA FRA 1929



- **Radioaktivt henfald:** Radioaktivt henfald er en *stokastisk* proces, dvs. den er styret af sandsynligheder/tilfældigheder. Dette skaber en grundlæggende usikkerhed på måledata, dvs. **forbedring af måleudstyr vil ikke få disse vilkårlige spring op og ned fra kurven til at forsvinde**. Dette sætter en naturlig begrænsning for både interpolation og ekstrapolation, men det er også vigtigt at bemærke, at modellen stadig har stor sandsynlighed for at ramme tæt på virkeligheden både ved interpolation og ekstrapolation.
- **Hubbles data fra 1929:** Edwin Hubble målte afstand og hastighed af galakser. Måledata ligger tydeligvis meget spredt. I dette tilfælde skyldes afvigelserne fra den rette linje både nogle rigtige/virkelige afvigelser og nogle usikkerheder på målingerne. **Forbedring af måleudstyret reducerede punkternes spredning markant**.

Opsamling på og tilføjelse af pointer:

- Modeller bruges til interpolation og ekstrapolation, men man skal altid overveje ved at kigge på punkterne og tænke på systemet (**brug øjnene, og brug fornuften**), hvor god overensstemmelse, man kan forvente, at der er mellem model og virkelighed.
- Modellen har et gyldighedsområde (en rækkevidde), der sommetider kan fastsættes eksakt, sommetider kan være næsten umuligt at vurdere, men oftest ligger et sted imellem disse. Uanset hvad, skal du dog tænke over dette.
- Når modellen er valgt, er det modellens data, der benyttes. Hvis du f.eks. skal svare på, hvor mange hvide næsehorn, bestanden øges med om året, er det hældningen for den rette linje, der giver svaret, og ikke et antal beregnet ud fra to målepunkter.
- Modellen er en sammenhæng mellem forskellige parametre, som man udvælger, så de belyser systemet. Nogle gange ser man bevidst eller ubevidst bort fra nogle parametre. Hvis man gør det bevidst, skal det være, fordi man har vurderet, at de ikke har væsentlig betydning.

Vi skal nu nærmere på *den bedste rette linje* og *mindste kvadraters metode*, der blev omtalt i forbindelse med de hvide næsehorn.

Disse begreber hænger sammen med begrebet *regression*. Dette ord kommer af det latinske 'regressio', der betyder 'at gå tilbage' eller 'tilbageskridt', og med denne betydning anvendes det inden for psykologi, medicin og geologi.

I den matematiske (statistiske) betydning af ordet er en del af ordets oprindelige mening forsvundet. Forklaringen på dette er vist noget i retning af følgende:

I 1886 publicerede Francis Galton (1822-1911) en artikel, hvor han beskrev og navngav et fænomen kaldet *regression mod gennemsnittet* (vi skal høre mere om dette under elevforedrag under statistikemnet). Han havde empirisk opdaget, at frø af store frø havde tendens til at blive mindre end de oprindelige frø, og at børn af høje forældre havde tendens til at ende med en lavere højde end deres forældre. Det modsatte kan siges om små frø og lave forældre. Der er altså en tendens til, at man *bevæger sig tilbage* mod gennemsnittet (gennemsnitsstørrelse af frø og gennemsnitshøjde af mennesker). Galton satte begreber og tal på dette.

Senere blev metoden udvidet, så den også dækkede helt andre situationer, men man beholdt ordet *regression*, der så ikke længere kun dækkede over at *bevæge sig tilbage*, men også at *kunne føres tilbage til*.

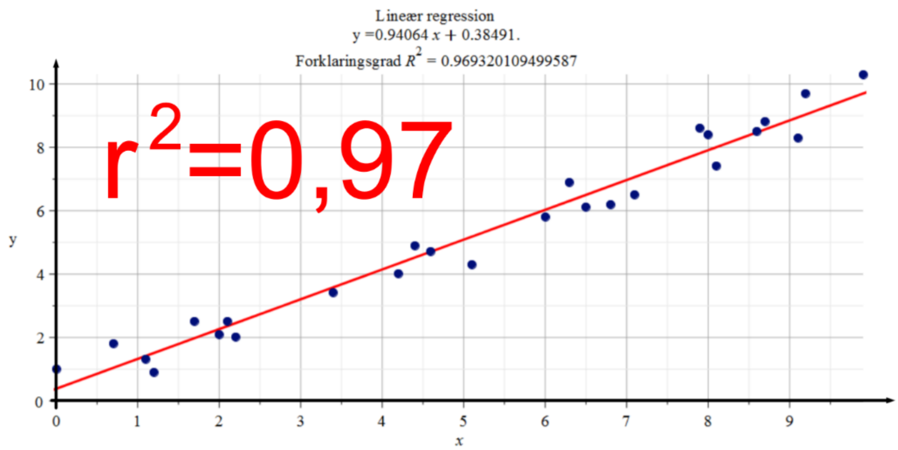
Regression

Definition 7,5: En *regressionsanalyse* er en estimering af sammenhængen mellem en eller flere uafhængige variable $x_1, x_2, ..., x_n$ og en afhængig variabel *y*.
Funktionen, der angiver sammenhængen, kaldes *regressionsfunktionen*.

Andre navne for variablerne er:
y : Responsvariabel, endogen variabel.
$x_1, x_2, ..., x_n$: Forklarende variabler, kovariater, baggrundsvariabler, eksogene variable.

Ordet '*estimering*' er anvendt i stedet for '*bestemme*' for at fremhæve, at der er tale om en vurdering med en vis – større eller mindre – usikkerhed.
Heri ligger altså også, at regressionsfunktionens værdier kun kan forventes med en vis sandsynlighed at stemme med de virkelige værdier inden for en vis – større eller mindre – usikkerhed.
Denne usikkerhed udtrykkes ved en såkaldt *korrelationskoefficient* (betegnet *r*) eller en *forklaringsgrad* (r^2) – også meget sigende kaldet *r-kvadratet*.
Man kan sige, at man søger at finde ud af, i hvor høj grad en værdi af den afhængige variabel kan føres tilbage til værdierne af de uafhængige variable (heraf ordet '*regressionsanalyse*') eller med andre ord: Hvor stor en del af den afhængige variabels værdi kan forklares af de uafhængige variable?
Endogen betyder 'indeni' eller 'indefra', mens *eksogen* betyder 'udenfor' eller 'udefra'. Dvs. kort sagt: Hvor meget af det indre kan forklares af det ydre?

Vi skal kun se på situationer med én uafhængig variabel *x* (jf. alle vores tidligere eksempler på modeller). Vi indleder med et eksempel:



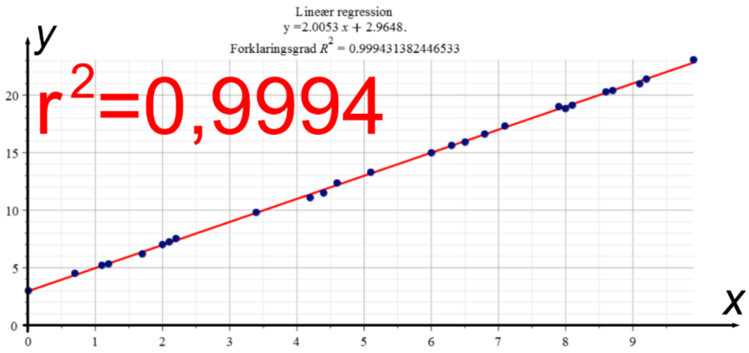
1) Vi har været ude at måle sammenhørende værdier af en uafhængig variabel *x* og en afhængig variabel *y*.
2) Vi har vurderet, at punkterne med god tilnærmelse danner en ret linje, og har derfor valg en lineær model.
3) Vi har så med mindste kvadraters metode fundet den bedste rette linje (egentlig har Maple fundet den, men vi skal senere se, hvordan det kan gøres i hånden). Funktionen bag den røde rette linje er vores *regressionsfunktion*, og Maple har angivet dens forskrift (dog angivet som en ligning og ikke som en funktion).
4) Maple har beregnet en korrelationskoefficient (vises ikke) og derudfra *forklaringsgraden* på 0,97, dvs. at 97% af *y*-værdien kan forklares – eller "føres tilbage" – til *x*-værdien.

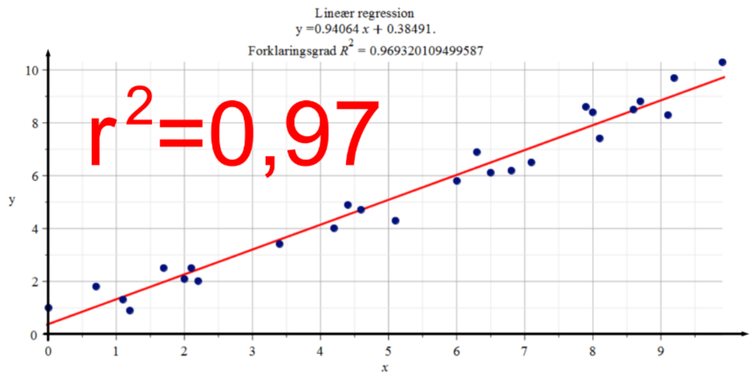
Lidt overordnet om korrelationskoefficienter og forklaringsgrader

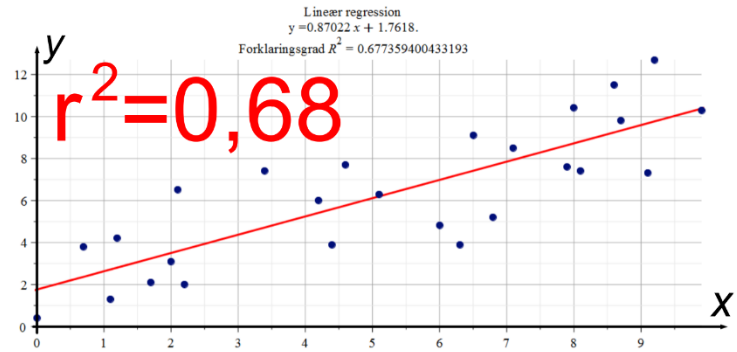
Det kan i begyndelsen være svært at forholde sig til korrelationskoefficienter og forklaringsgrader. Der findes formler til at udregne disse, men selve værdierne er ikke så nemme at gennemskue, som f.eks. hældningstallet for en ret linje. Det er dog i høj grad en vanesag, dvs. du vil få en fornemmelse for forklaringsgrader, når du har arbejdet med en masse datasæt. Indtil videre skal du vide følgende:

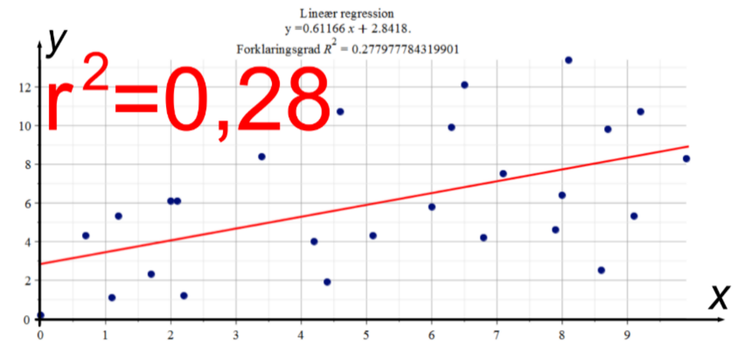
- Korrelationskoefficienten r afhænger af valget af model. Dvs. det samme datasæt giver forskellige korrelationskoefficienter for forskellige modeller (lineær, eksponentiel, potens, polynomiel, logistisk, …). Egentlig tager beregningen af r udgangspunkt i, at der er en lineær sammenhæng, men hvis man anvender en anden model, løser man dette problem ved – som vi har set med eksponentielle udviklinger og potensvækst - indledningsvis at omregne data, så de skulle danne en ret linje.
- Korrelationskoefficienten r er et tal i intervallet $\left[-1,1\right]$.
- Hvis der ikke er nogen sammenhæng mellem x og y, dvs. hvis x og y er uafhængige, giver korrelationskoefficienten 0.
- Hvis der er en sammenhæng, hvor større x-værdier fører til mindre y-værdier, ligger r i intervallet $\left[-1,0\right[$, og man siger, at x og y er negativt korrelerede.
- Hvis der en sammenhæng, hvor større x-værdier fører til større y-værdier, ligger r i intervallet $\left]0,1\right]$, og man siger, at x og y er positivt korrelerede.
- Jo bedre sammenhængen er mellem x og y, desto tættere kommer den numeriske værdi af r på 1. En perfekt ret linje (dvs. alle punkter ligger uden afvigelser på én ret linje) svarer til korrelationskoefficienten -1 (negativ hældning) eller 1 (positiv hældning).
- Forklaringsgraden (r-kvadratet) er simpelthen r-værdien kvadreret. Så hvis korrelationskoefficenten er -0,8, så er forklaringsgraden 0,64, og hvis korrelationskoefficienten er 0,7, er forklaringsgraden 0,49. Dvs. forklaringsgraden ligger i intervallet $\left[0,1\right]$, hvor ingen sammenhæng svarer til værdien 0, mens både perfekt negativ og positiv korrelation giver forklaringsgraden 1. Forklaringsgraden skelner altså ikke mellem negativ og positiv korrelation.
- Forklaringsgraden angiver nogle gange, hvor stor en del af y-værdien, der kan forklares af x-værdien (hvorfor det kun er nogle gange, uddybes om lidt).
- Man kan nogle steder læse, at hvis forklaringsgraden er over 0,99, er der en god sammenhæng. Andre steder angives tallet 0,95. **Men en vigtig pointe er, at der findes ikke noget passende tal.** Forskellige fag anvender forskellige tal. Inden for statskundskab og psykologi vil det f.eks. nærmest aldrig give mening at anvende grænser som 0,95 og 0,99, da der næsten altid også vil være andre eksogene variable end de målte, der påvirker den endogene variabel. Og inden for fysik har vi set et eksempel med radioaktive henfald, der helt naturligt pga. tilfældigheder giver afvigelser, der gør det meningsløst at arbejde med en grænse på 0,99.

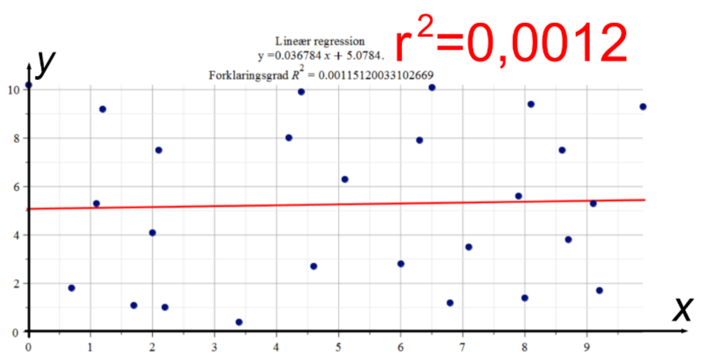
På næste side er en række grafer med angivne forklaringsgrader. Se på punkternes spredning for at få en fornemmelse for værdierne af forklaringsgraden.
(På www.guessthecorrelation.com kan du øve dig i at gætte r-værdier, men bemærk altså, at værdierne på næste side er r^2-værdier).









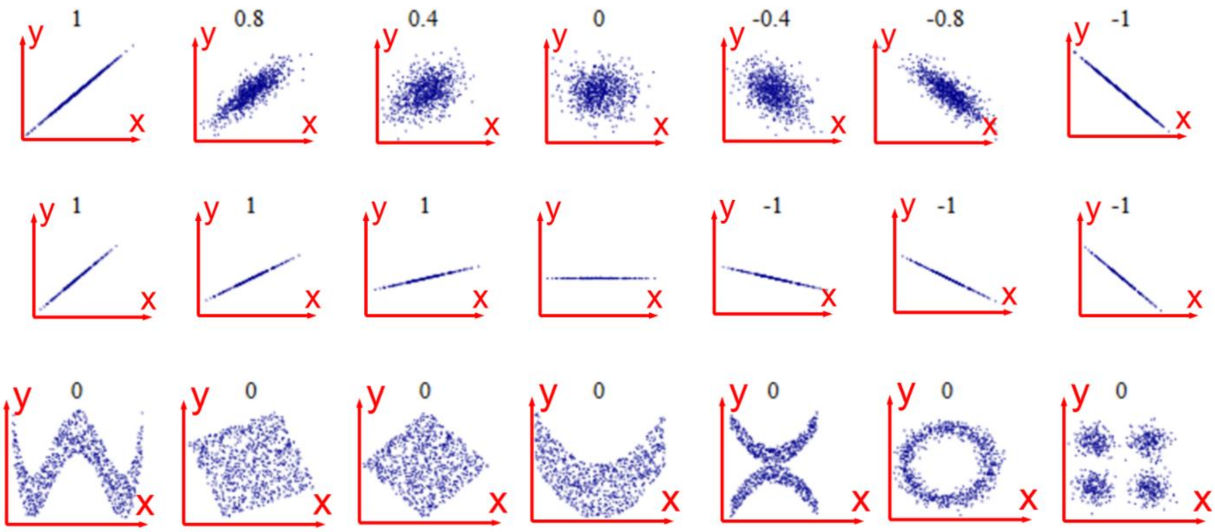


Opgaverne 656*

Uddybning - samt problemer og fælder i forbindelse med korrelationskoefficienter og forklaringsgrader

Du skulle nu have fået en fornemmelse for størrelsen af forklaringsgraden. Vi skal nu se på, hvorfor man ikke bare kan anvende disse tal uden at forholde sig til graferne.

Nedenstående figur er en bearbejdning af et billede hentet fra wikipedia. Tallene er korrelationskoefficienter baseret på lineære modeller (dvs. nu ses på *r* og ikke r^2).



Øverste linje: Her illustreres, hvordan en spredning af punkter giver en numerisk lavere *r*-værdi, samt hvordan hældningen er knyttet til positiv og negativ korrelation.

Midterste linje: Her ses forskellige eksempler på fuldstændig korrelation – både positiv og negativ – men bemærk også den midterste figur. Her er ikke angivet nogen korrelationskoefficient (hvilket IKKE er det samme som en værdi på 0), og det skyldes, at spredningen på *y*-værdierne er 0, hvilket gør, at man ikke kan udregne en korrelationskoefficient. Det samme gør sig gældende for en perfekt lodret linje, hvor det er spredningen på *x*-værdierne, der er 0.

Nederste linje: Her ses en masse datasæt, hvor korrelationskoefficienten er 0. Men – og dette er meget væsentligt – bemærk også, hvordan disse datasæt er fundamentalt forskellige fra datasættet i midten af den øverste linje, hvor korrelationskoefficienten også er 0. For i sidstnævnte skyldes værdien 0, at der tydeligvis ikke er en sammenhæng mellem *x* og *y*, men dette gør sig jo ikke gældende for eksemplerne på nederste linje. Der er tydeligvis noget systematik, men der er bare på ingen måde nogen lineær sammenhæng mellem *x* og *y*.

Og dette fører os frem til følgende vigtige pointe:

Hvis der er ikke er nogen sammenhæng mellem *x* og *y*, er korrelationskoefficienten 0.

Men man kan IKKE slutte modsat, at hvis korrelationskoefficienten er 0, så er der ikke nogen sammenhæng mellem *x* og *y* (kun at den ikke er lineær).

HVIS man skal slutte, at der ikke er nogen sammenhæng mellem *x* og *y*, skal man inddrage grafer og KIGGE på disse (underforstået: Med fornuften knyttet til blikket).

Netop vigtigheden af at anvende grafer var hovedtemaet i Francis Anscombes artikel *Graphs in Statistical Analysis* fra 1973, hvorfra de fire grafer på næste side stammer:

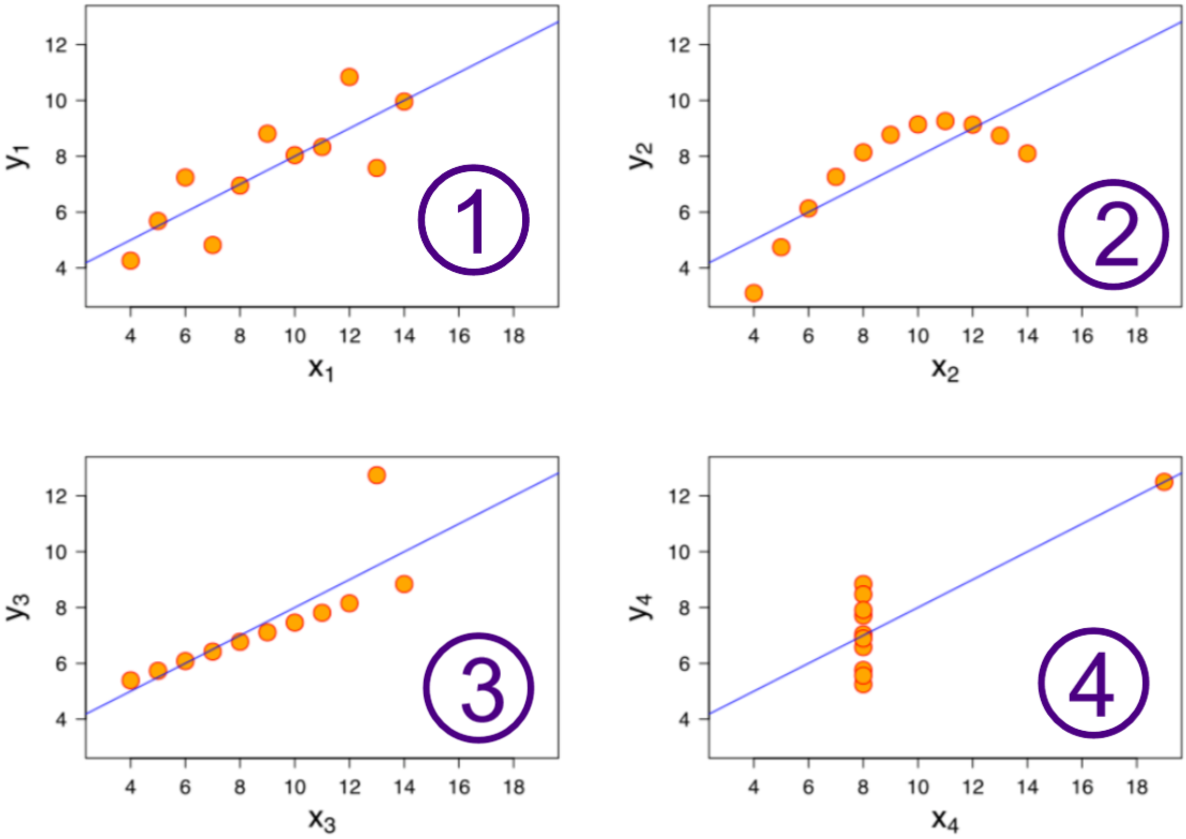
Når man arbejder med et datasæt inden for statistik, er der en masse beskrivende størrelser (deskriptorer), der kan beregnes, f.eks. middelværdi, median, spredning, skævhed og korrelationskoefficient.

Nogle falder så i den fælde kun at kigge på disse tal og udtale sig om datasættet. Anscombes pointe er, at man også altid skal anvende grafer. Han advarer mod kun at kigge på tal og tro, at det er bedre end at kigge på grafer, blot fordi tallene virker eksakte.

Man kan sige, at de eksakte tal udtrykker en ”falsk objektivitet” (dette er ikke Anscombes ord).

Og han illustrerer sin pointe med nedenstående fire konstruerede datasæt.

Anscombes kvartet



Det specielle ved disse sæt er, at de har ens værdier for mange deskriptorer:

- De har samme korrelationskoefficient, $r = 0,816$ (forklaringsgrad 0,67).
- De har alle gennemsnittet 9 på *x*-værdierne og 7,5 på *y*-værdierne.
- De har samme spredning på både *x*-værdierne og *y*-værdierne (*spredning* er et begreb vi lærer om i sandsynlighedsregning og statistik).
- De har samme regressionsfunktion, dvs. ligningen for de blå linjer er ens.

Pointen er nu, at det er en fejl kun at forholde sig til disse tal. De fire grafer fortæller os jo, at der er tale om vidt forskellige situationer.

Øverst til venstre (Anscombe 1): Dette er den eneste af de fire situationer, hvor tallene giver mening. Den lineære model er en god model, og det giver mening at sige, at 67% af *y*-værdien kan føres tilbage til *x*-værdien (uden at tallet dog skal forstås som andet end et estimeret tal).

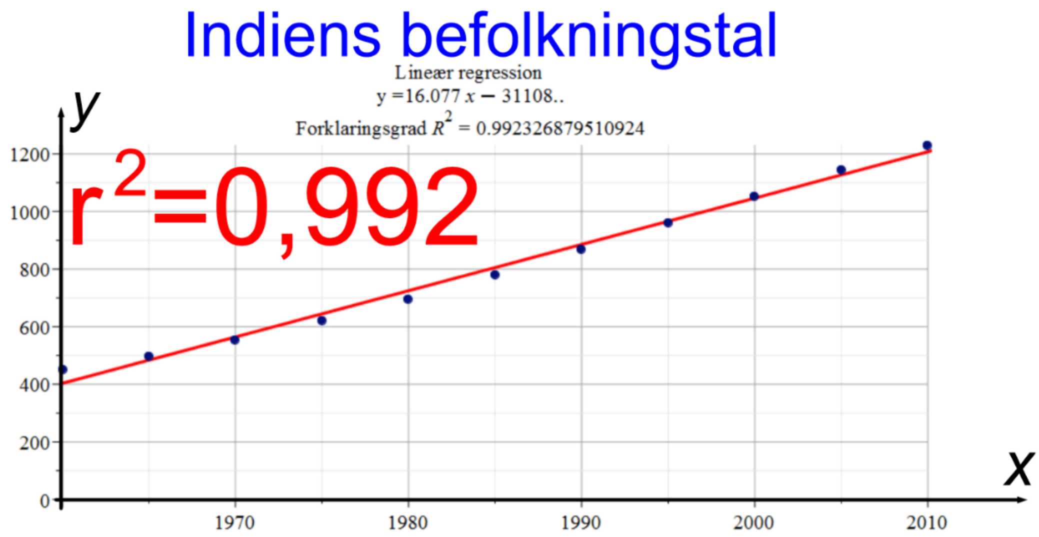
Øverste til højre (Anscombe 2): Den lineære model er tydeligvis forkert. Og dermed er korrelationskoefficienten og forklaringsgraden meningsløse tal.

Nederst til venstre (Anscombe 3): Her er en lineær model sandsynligvis en rigtig god model. Det er bare ikke den angivne blå linje, der svarer til denne gode model. Der er et enkelt punkt, der afviger fra en ellers perfekt linje. Man får en stærk mistanke om, at det er en fejlmåling, og man er i hvert fald nødt til at forholde sig til den. Enten må man ende med at fjerne denne måling (hvis der er belæg for, at det er en fejl), eller også må man afvige fra den lineære model. Hvis man fjerner målingen, får man helt andre værdier for deskriptorerne. Hvis man afviger fra den lineære model, giver deskriptorerne ikke mening.

Nederst til højre (Anscombe 4): Dette er et helt ubrugeligt målesæt, hvis formålet er at finde en sammenhæng mellem *x* og *y*. Det giver ikke mening at måle 10 gange med denne samme *x*-værdi og derefter én gang med en anden. Der er intet belæg for, at sammenhængen skulle være lineær (man kan – jf. Euklid – altid tegne en ret linje gennem to punkter). Hverken regressionsfunktion eller forklaringsgrad kan altså bruges til noget.

Det er altså kun i Anscombe 1, at forklaringsgraden kan bruges til noget. I de andre tilfælde er værdien af r^2 blot et udtryk for, hvor langt punkterne ligger fra den rette linje. Jo tættere på 1, desto kortere afstand.

Anscombes kvartet er konstrueret, men de problemer, som kvartetten illustrerer, er virkelige.
Lad os igen se på Indiens befolkningstal i perioden 1960-2010:

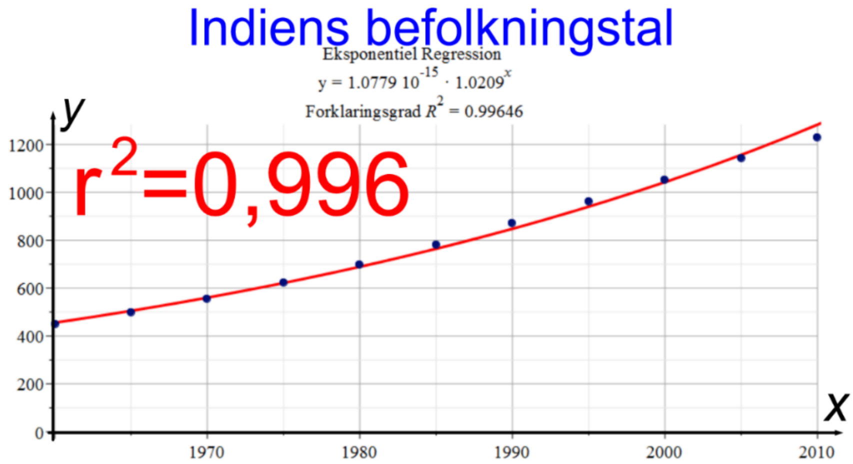


Vi har forsøgt os med en lineær model, og hvis vi med vores lukkede øjne kun kigger på *r*-kvadratet og bruger tommelfingerreglen, at alt over 0,99 viser en god sammenhæng, konkluderer vi ubekymret, at det er en god model.

Men som vi tidligere har været inde på, er det en helt forkert model, og *r*-kvadratet er altså ikke et udtryk for, hvor stor en del af *y*-værdien, der kan føres tilbage til *x*-værdien.

Det er ved at kigge på grafen, at vi kan se, at det er en forkert model. Punkterne ligger først over, så under og til sidst igen over regressionslinjen.

Hvad hvis vi havde forsøgt os med en eksponentiel udvikling (se næste side)?



r-kvadratet er nu endnu tættere på 1, og vi kunne igen have troet, at modellen var god, hvis ikke vi kiggede nøje på grafen og opdagede, at i området omkring 1990 ligger punkterne over kurven, mens de ligger under i perioden op til 2010.

***r*-kvadratet er altså igen kun et udtryk for, at punkterne ligger tæt på kurven. Det er IKKE et udtryk for, at modellen er god, og det kan ikke bruges som forklaringsgrad (det kan det faktisk aldrig for andet end lineære modeller).**

Vi skal snart se på residualer, der sammen med kig på grafen kan bruges til at vurdere, om en model er god. Men nu ser vi først på udførelsen af regression med Maple (Gym-pakken).

Regression med Maple

Med Gym-pakken kan man udføre regression på baggrund af en masse forskellige modeltyper. I næsten alle tilfælde bestemmer Maple en regressionsfunktion (angivet som ligning), og der udregnes et *r*-kvadrat.

Husk, at *r*-kvadratet altid er et udtryk for målepunkternes afstand fra regressionslinjen, men at det kun fungerer som forklaringsgrad, hvis modellen er lineær, **og** at den lineære model er en god model.

- *LinReg*: Lineær regression. I dette tilfælde er det muligt, at r^2 fungerer som forklaringsgrad.
- *ExpReg*: Regressionsfunktionen er en eksponentiel udvikling.
- *PowReg*: Regressionsfunktionen er potensvækst.
- *PolyReg*: Her er funktionsudtrykkene polynomier. Man skal selv vælge, hvilken grad polynomiet skal have (se eksemplerne på næste side).
- *PropReg*: Regressionsfunktionen er en proportionalitet.
- *LogistReg*: Regressionsfunktionen er logistisk vækst.
- *NormReg*: Her anvendes *fordelingsfunktionen* for en *normalfordeling* som regressionsfunktion. Det lærer vi mere om i forbindelse med statistik. Denne form for regression adskiller sig fra de andre ved ikke direkte at angive en regressionsfunktion (men med de opgivne oplysninger kan man selv opskrive den), og der udregnes heller ikke noget *r*-kvadrat.

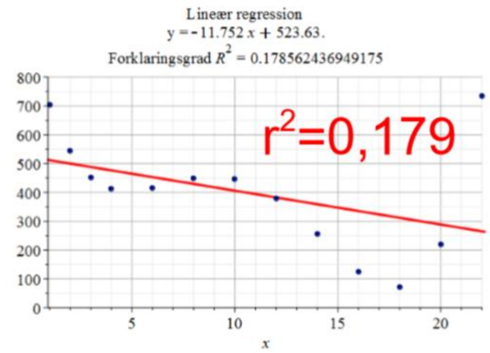
Husk, at man altid kan finde syntaksen ved at skrive et spørgsmålstegn foran kommandoen:

?LinReg

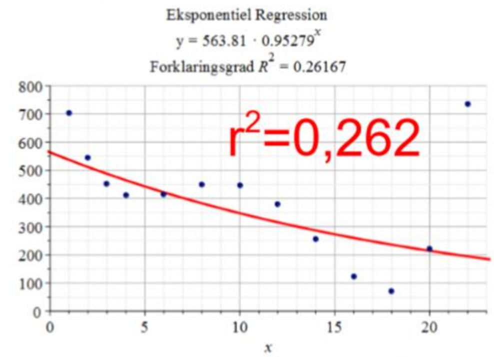
På næste side ses eksempler på regression udført med udgangspunkt i forskellige modeltyper. Det er de samme konstruerede tal (beregnet ud fra et fjerdegradspolynomium), der anvendes i alle tilfælde. Bemærk, at man selvfølgelig aldrig skal afprøve alle modeltyper på sit talmateriale. Her er det kun gjort for at vise indtastninger og se på nogle pointer, bl.a. omkring *r*-kvadratet.

Argument := [1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22] :
Værdier := [704.1, 543.6, 452.5, 411.6, 415.6, 450., 447.6, 379.6, 255.6, 123.6, 70., 219.6, 735.6] :

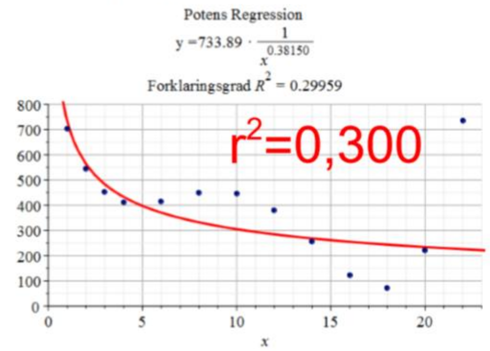
LinReg(*Argument*, *Værdier*)



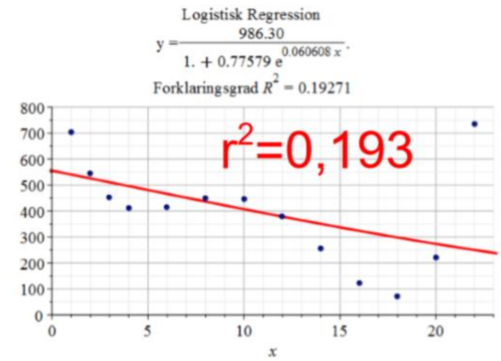
ExpReg(*Argument*, *Værdier*)



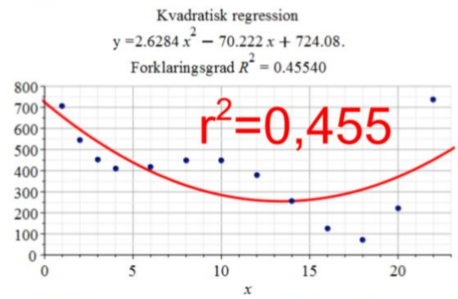
PowReg(*Argument*, *Værdier*)



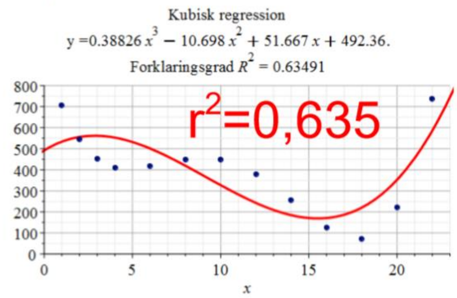
LogistReg(*Argument*, *Værdier*)



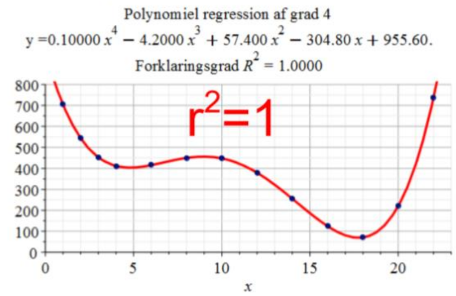
PolyReg(*Argument*, *Værdier*, 2)



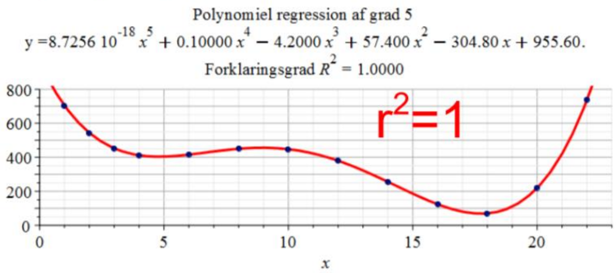
PolyReg(*Argument*, *Værdier*, 3)



PolyReg(*Argument*, *Værdier*, 4)



PolyReg(*Argument*, *Værdier*, 5)



- *r*-kvadraterne afhænger af typen af model, der anvendes til regressionerne. Da den lineære model tydeligvis ikke er en god model, er der ikke i noget tilfælde, at værdierne fungerer som forklaringsgrader. De er kun et udtryk for punkternes afvigelse fra kurven.
- Ved at vælge højere grad på model-polynomiet, kan man få en bedre tilnærmelse.
- I dette tilfælde gælder ovenstående dog kun til og med 4. grad, da dette netop **er** et 4. gradspolynomium. Der er altså ikke noget ekstra at hente ved et 5. gradsled, hvilket også ses af dette leds koefficient, der ville være 0, hvis man kunne regne uden afrundinger.

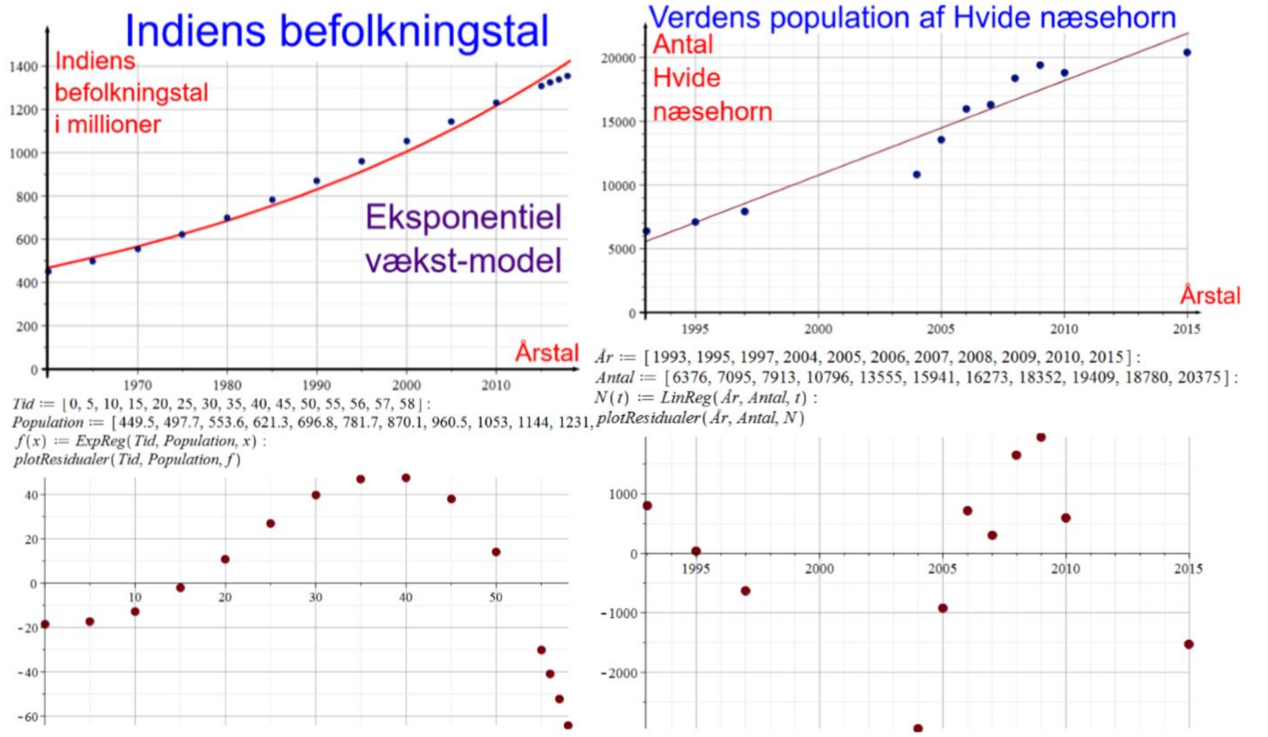
Opgaverne 657*

Residualer

Definition 25: En *residual* er differensen mellem en observeret værdi og den tilsvarende estimerede værdi.

I forbindelse med regressionsanalyse er residualerne altså de lodrette afstande (regnet med fortegn) mellem punkterne og grafen for regressionsfunktionen. Hvis punktet ligger over grafen, er residualen positiv, og hvis punktet ligger under grafen, er residualen negativ.

Med Gym-pakken kan man i Maple lave sådanne residualplot. Vi ser på vores velkendte eksempler med Indiens befolkning og hvide næsehorn (det tilsvarende residualplot er placeret under det almindelige plot, så *x*-akserne passer sammen):



Bemærk, at man først skal have fundet en funktionsforskrift for modellen:

f(x):=ExpReg(Tid,Population,x)

Derefter henviser man til tabelværdierne og funktionen, når man laver residualplot:

plotResidualer(Tid,Population, f)

Egentlig viser disse residualplot ikke noget, vi ikke kunne se i forvejen ved at kigge på grafen, men det er nok tydeligere på et residualplot.

Vi ser igen, at for Indiens befolkning er der systematiske afvigelser, så residualerne er negative i starten, så positive, og så igen negative. Dvs. vi forkaster den eksponentielle udvikling som model.

Med de hvide næsehorn er det anderledes. Her ses residualerne at springe mere eller mindre usystematisk op og ned, dvs. vi vil i dette tilfælde ikke forkaste den lineære model.

Opgaverne 658*

Når vi i statistikforløbet har lært om normalfordelinger, skal vi se på, hvordan residualerne indgår i en grundigere analyse af datamaterialet.

Korrelation vs. kausalitet

Vi har set, at to størrelser kan være negativt eller positivt korreleret, og det er blevet nævnt, at for gode lineære modeller fortæller forklaringsgraden hvor stor en del af y-værdien, der kan føres tilbage til x-værdien.

MEN…

Det er vigtigt at være opmærksom på, at der kun er tale om matematiske sammenhænge og **ikke nødvendigvis** årsagssammenhænge. Dvs. at det ”at føres tilbage til” ikke nødvendigvis skal forståes på den måde, at x til dels er årsag til y.

Dvs. korrelation medfører ikke nødvendigvis kausalitet. Man kunne f.eks. forestille sig:

- At y var årsag til x.
- At der var en tredje størrelse z, der var årsag til både y og x.
- At x og y tilfældigvis fulgte samme system – f.eks. kunne de være periodiske størrelser med nogenlunde samme periode.

Inden for videnskaberne er det derfor sådan, at det ikke er nok at finde korrelationer. Man skal også kunne argumentere for en årsagssammenhæng.

Hvis man har fundet en korrelation og en god model, og hvis man har kunnet gøre rede for en årsagssammenhæng, siger man, at modellen er *valideret*, dvs. at den kan bruges.

Opsamling af vigtige pointer

- Det er aldrig nok kun at kigge på r-kvadrater eller andre deskriptorer. Man skal også altid kigge på grafen. Evt. skal man kigge på et residualplot. Kig efter tendenser, og kig efter enkelte afvigelser, der skal vurderes og kommenteres. **Man slipper ikke for at tænke**.
- Residualerne kan både skyldes, at modellen er forkert eller mangelfuld, og at der er naturlige tilfældigheder involveret.
- Hvis der er naturlige tilfældigheder involveret, kan man gå ud fra, at residualerne er normalfordelt (mere om det under statistikforløbet).
- r-kvadratet er altid et relativt mål for punkternes gennemsnitlige lodrette afvigelse fra regressionslinjen. Men hvis man har en god, lineær model, er r-kvadratet også en forklaringsgrad, der fortæller, hvor stor en del af y-værdien, der kan føres tilbage til x-værdien.
- Modeller har altid et gyldighedsområde. Definitionsmængden – dvs. vinduet i en evt. graf – skal give mening.
- Modeller bruges til interpolation, ekstrapolation, forståelse af systemet samt fastsættelse af værdier for karakteristiske størrelser, der siger noget om systemet.
- Hvis du selv foretager målingerne, så sørg for tilpas mange – omhyggeligt udførte - målinger. Man kan ikke se tendenser på små dataserier.
- I princippet er forklaringsgraden uafhængig af mængden af målepunkter, men selve usikkerheden på tallet bliver mindre, jo flere målinger der foretages.
- r-kvadratet er uafhængigt af hvilken af de to variable, man vælger som afhængig variabel (jf. at korrelation ikke siger noget om kausalitet).

OVERSIGT

Funktioner generelt

Rødder / Nulpunkter: Givet en funktion $f: A \mapsto B$ er en *rod* et argument $x \in A$, der afbildes over i 0, dvs. $f(x) = 0$. En rod kaldes også for et *nulpunkt*.

Monotoniegenskaber: Lad *f* være en funktion og *I* et interval, hvori *f* er defineret. Hvis *f* ikke er konstant i et eneste delinterval af *I*, gælder der:

f er voksende i $I \iff \forall x \in I : f'(x) \geq 0$

f er aftagende i $I \iff \forall x \in I : f'(x) \leq 0$

Sammensat funktion: *Den sammensatte funktion* $(f \circ g)$ er bestemt ved $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. I den sammensatte funktion $f \circ g$ kaldes *g* for *den indre funktion*, mens *f* kaldes for *den ydre funktion*.

Identitetsfunktioner: En funktion $f: A \mapsto A$ bestemt ved forskriften $f(x) = x$ kaldes *en identitetsfunktion*, og den betegnes id_A.

Omvendte funktioner: En funktion $f: A \mapsto f(A)$ kaldes *invertibel*, hvis der findes en funktion $f^{-1}: f(A) \mapsto A$, hvorom det gælder, at: $f^{-1} \circ f = id_A$ dvs. $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

Man kalder i så fald f^{-1} for *den omvendte funktion til f* eller *den inverse funktion til f*.

Der gælder $Dm(f^{-1}) = Vm(f)$ og $Vm(f^{-1}) = Dm(f)$.

Lineære funktioner

En *lineær funktion* er en funktion $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ med forskriften $f(x) = a \cdot x + b$, hvor $a, b \in \mathbb{R}$.

- Hvis $a > 0$, er funktionen strengt voksende.
- Hvis $a = 0$, er funktionen konstant.
- Hvis $a < 0$, er funktionen strengt aftagende.
- Grafen for funktionen er en ret linje med hældningen *a* og skæringen *b* med *y*-aksen.
- Hvis grafen går gennem punkterne $(x_1, f(x_1))$ og $(x_2, f(x_2))$, er

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{og} \quad b = -a \cdot x_1 + f(x_1) = -a \cdot x_2 + f(x_2).$$

- Hvis grafen går gennem punktet $(x_0, f(x_0))$ og har hældningen *a*, er funktionsforskriften

$$f(x) = a \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

- **Vækstegenskab:** Hvis man lægger værdien Δx til argumentet, lægges $a \cdot \Delta x$ til funktionsværdien.

Eksponentialfunktioner og eksponentielle udviklinger

Kapitalfremskrivningsformlen: $K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$

n: Antal terminer

K_0 : Startkapital

K_n : Slutkapital (Kapitalen efter *n* terminer)

r: Vækstrate

Relativ afvigelse: Hvis en størrelse ændrer værdi fra *A* til *B*, er den relative tilvækst $r = \dfrac{B-A}{A}$

Gennemsnitlig vækstrate Hvis en størrelse ændrer sig med de varierende vækstrater $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$,

er den gennemsnitlige vækstrate r_g bestemt ved: $r_g = \sqrt[n]{(1+r_1)\cdot(1+r_2)\cdot(1+r_3)\cdot\ldots\cdot(1+r_n)} - 1$

Eksponentialfunktion: En funktion $f:\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ med forskriften $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

a kaldes for *fremskrivningsfaktoren* eller *grundtallet*.

Den naturlige eksponentialfunktion: Eksponentialfunktionen med forskriften $f(x) = \mathbf{e}^x$.

Eksponentiel udvikling: En funktion $f:\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ med forskriften $f(x) = b \cdot a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$

a kaldes for *fremskrivningsfaktoren* eller *grundtallet*.
b kaldes *begyndelsesværdien* eller *startværdien*.

- $a > 1$: Funktionen er voksende. Fordoblingskonstanten er $X_2 = \log_a(2)$ eller $X_2 = \dfrac{\ln(2)}{\ln(a)}$.
- $0 < a < 1$: Funktionen er aftagende. Halveringskonstanten er $X_{\frac{1}{2}} = \log_a\left(\dfrac{1}{2}\right)$ eller $X_{\frac{1}{2}} = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(a)}$.
- Graf gennem punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2): $a = \sqrt[x_2 - x_1]{\dfrac{y_2}{y_1}}$ $\qquad b = \dfrac{y_2}{a^{x_2}}$
- Grafen for en eksponentiel udvikling er en ret linje i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem.
- Den karakteristiske vækstegenskab for en eksponentiel udvikling er, at når man lægger en fast størrelse til argumentet, ændres funktionsværdien med en fast procentdel.
- For en eksponentiel udvikling med fremskrivningsfaktoren *a* gælder, at hvis funktionsværdien skal ændres med vækstraten r_y, skal man lægge $X_{(1+r_y)}$ til argumentet, hvor $X_{(1+r_y)}$ er bestemt ved enhver af disse formler: $X_{(1+r_y)} = \log_a(1+r_y)$ $\qquad X_{(1+r_y)} = \dfrac{\ln(1+r_y)}{\ln(a)}$

For en eksponentiel udvikling *f* med forskriften $f(x) = b \cdot \mathbf{e}^{k \cdot x}$ gælder:

- Hvis $k > 0$, er funktionen voksende, og $X_2 = \dfrac{\ln(2)}{k}$.
- Hvis $k < 0$, er funktionen aftagende, og $X_{\frac{1}{2}} = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{k}$.

Logaritmefunktioner

Lad $a>0 \wedge a\neq 1$. Så er *logaritmefunktionen med grundtallet a* den omvendte funktion til eksponentialfunktionen med grundtallet *a*. Den skrives log_a. Grundtallet *a* kaldes også for *basen*.

- $a^{\log_a(x)}=x$ og $\log_a\left(a^x\right)=x$.
- $10^{\log(x)}=x$ og $\log\left(10^x\right)=x$
- $\mathbf{e}^{\ln(x)}=x$ og $\ln\left(\mathbf{e}^x\right)=x$
- $Dm=\mathbb{R}_+$ og $Vm=\mathbb{R}$
- I Maple står både *log* og *ln* for den naturlige logaritme. Hvis du skal anvende titalslogaritmen, skal du skrive $\log_{10}$.

1) $\ln(a\cdot b)=\ln(a)+\ln(b)$

2) $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$

3) $\ln\left(a^n\right)=n\cdot\ln(a)$

Vækstegenskab: Hvis man i en logaritmefunktion $\log_a$ gør argumentet *p* **gange** større, så **lægges** der $\log_a(p)$ til funktionsværdien.

Potensfunktioner og potensvækst

En *potensfunktion* er en funktion $f:\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}$ med forskriften $f(x)=x^a$, $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ved *potensvækst* forstås funktioner $f:\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}_+$ med forskriften: $f(x)=b\cdot x^a$, $b>0$, $a\neq 0$

- Hvis $a<0$, er funktionen aftagende.
- Hvis $0<a<1$, er funktionen voksende med aftagende hastighed.
- Hvis $a=1$, er funktionen voksende med konstant hastighed.
- Hvis $a>1$, er funktionen voksende med voksende hastighed.
- Graf gennem punkterne (x_1,y_1) og (x_2,y_2) er: $a=\frac{\ln(y_2)-\ln(y_1)}{\ln(x_2)-\ln(x_1)}$ og $b=\frac{y_2}{x_2^a}$

Vækstegenskab: Når argumentet ændres med vækstraten r_x, ændres funktionsværdien med vækstraten r_y, hvor: $(1+r_y)=(1+r_x)^a$

Polynomier

Rødder: I polynomiet $f(x)$ er en *rod* en værdi for variablen *x*, for hvilken der gælder $f(x)=0$.

For andengradspolynomiet $f(x)=ax^2+bx+c$; $a\neq 0$ gælder:

- Grafen er en parabel med toppunkt i $T\left(\frac{-b}{2a},\frac{-d}{4a}\right)$, hvor $d=b^2-4ac$.
- Hvis $d<0$, har polynomiet ingen rødder, og vi kan ikke faktorisere polynomiet til en form som i de to nedenstående tilfælde.
- Hvis $d=0$, har polynomiet én rod $r=\frac{-b}{2a}$, der kaldes en *dobbeltrod*. Vi kan i så fald faktorisere polynomiet til $f(x)=a\cdot(x-r)\cdot(x-r)=a\cdot(x-r)^2$
- Hvis $d>0$, har polynomiet to rødder $r_1=\frac{-b+\sqrt{d}}{2\cdot a}$ og $r_2=\frac{-b-\sqrt{d}}{2\cdot a}$. Vi kan i så fald faktorisere polynomiet til $f(x)=a\cdot(x-r_1)\cdot(x-r_2)$