GEOMETRI
og
TRIGONOMETRI

x-klasserne
Gammel Hellerup Gymnasium

Marts 2023 ; Michael Szymanski ; mz@ghg.dk

Indholdsfortegnelse

INTRODUKTION

Efter mængder, tal og regneregler skal vi nu se på et af de helt store matematiske emner, nemlig geometri (og herunder trigonometri). Først under trigonometrien får du brug for en computer, for i begyndelsen er det kun ”rigtig” matematik, hvor man skal bruge hovedet (og papir, blyant, passer, lineal og sand).

I matematik beskæftiger vi os med tal, figurer, strukturer og abstrakte begreber. Matematik opstod og udviklede sig mange steder i verden, og det har forskellige steder været anvendt til forskellige ting (opmåling af landområder, behandling af astronomiske observationer, købmandsregning, …).

Det bliver ofte nævnt, at babylonierne kunne løse andengradsligninger (og det er rigtigt), men de beviste ikke de metoder, de anvendte. Og det er en helt central og uundværlig del af moderne matematik. Vi baserer vores matematik på definitioner, aksiomer, sætninger og beviser. Vi vil gerne bevise, at vores sætninger er rigtige. Men for at kunne bevise noget, må vi have et sprog og nogle begreber til rådighed. Begreberne giver vores *definitioner* os. Sproget har vi fra … tjaa, det er der bare. Og så viser det sig faktisk også at være nødvendigt med nogle regler for ræsonnementer. Regler som vi ikke kan bevise, men som virker så indlysende, at vi alle skal kunne godtage dem. De fleste af disse regler kalder vi *aksiomer*. Tre andre kaldes ”De tre traditionelle love for tænkning”:

1) Identitetsloven: *Enhver ting er det samme som sig selv og forskellig fra andre ting.*
2) Ikke-modsigelsesloven: *Intet kan både være og ikke være*. Eller i sin matematiske version: *Intet udsagn kan både være sandt og falsk.*
3) Det udelukkede tredjes princip: *Enhver ting enten er eller er ikke*. Eller matematisk udtrykt: *Ethvert udsagn er enten sandt eller falsk.*

Vi kan som sagt ikke bevise de traditionelle love for tænkning og aksiomerne (hvoraf du allerede er stødt på nogle i forbindelse med regneregler for tal), men vi kan bruge dem, når vi skal bevise matematiske sætninger.

Matematiske beviser opstod i Grækenland (ligesom filosofien, demokratiet, dramaet, logikken, zoologien, botanikken, …). Den første filosof, Thales (ca. 624 – 546 fvt.), har fået en geometrisk sætning opkaldt efter sig, som han måske beviste. Og efter ham kom en hel række af grækere, som, man ved, beviste sætninger.

Vi skal beskæftige os med den første af de helt store: Euklid.

Euklid var en græsk matematiker. Man ved ikke, hvornår han blev født eller døde, og man ved ikke, hvordan han så ud. Man ved, at han i hvert fald i en periode arbejdede i Alexandria i det nuværende Ægypten (en by grundlagt af Alexander den Store og på det tidspunkt en græsk by), og man mener, at han muligvis har studeret på Akademiet (grundlagt af Platon omkring 387 fvt.).

Euklid kendes kun pga. af sine værker, specielt *Elementer*, der blev skrevet omkring 300 fvt. *Elementer* består af 13 bøger (1 bog svarer til 1skriftrulle) med ren matematik. Der er ingen udenomssnak (som i disse noter). Første bog indeholder 23 definitioner, 5 aksiomer, 5 postulater og 48 sætninger.

De resterende bøger indeholder enten kun sætninger eller også definitioner og sætninger.

Euklids *Elementer* var en grundlæggende bog i mere end 2000 år, og den har været anvendt som undervisningsbog i masser af lande. Det skal vi dog ikke bruge den til. Vi skal kun se på begyndelsen af værket samt anvende en række sætninger. Formålet med at inddrage værket er hovedsageligt at vise den tankegang, som det er opbygget efter, og som vi senere skal arbejde videre med.

EUKLIDS ELEMENTER

Som nævnt indeholder første bog i *Elementer* 23 definitioner. Og det er her Euklid begynder (dvs. ingen introduktion).

Mange gamle værker kendes kun fra fragmenter. Det gælder ikke for *Elementer*, som man kender i sit fulde omfang. Men i første omgang forestiller vi os, at vi er kommet i besiddelse af et fragment, hvor man pudsigt nok mangler lige netop de begreber, der skal defineres. Så nu skal du prøve at finde ud af, hvad der skal stå på de manglende pladser.

Definitioner

1. _____________ er det, der ikke kan deles.

2. _____________ er en længde uden bredde.

3. En linjes begrænsninger er ______________.

4. En ____________ er en linje, som ligger *lige* mellem punkterne på den.

5. ______________ er det, der kun har en længde og en bredde.

6. En flades begrænsninger er ____________.

7. En _____________ er en flade, som ligger *lige* mellem de rette linjer i den.

8. En plan ______________ er hældningen mellem to linjer, der ligger i samme plan, har et punkt fælles og ikke ligger på en ret linje.

9. Når de linjer, der indeslutter vinkler, er rette, kaldes vinklen retlinet.

10. Når en ret linje er oprejst på en anden, så at de ved siden af hinanden liggende

vinkler bliver lige store, er enhver af de lige store vinkler _________________;

og denne rette linje, der er oprejst på den anden, kaldes _______________ på denne.

11. En ________________ er en vinkel, som er større end en ret.

12. En _______________ er en vinkel, som er mindre end en ret.

13. En ______________ er begrænsningen af noget.

14. En ________________ er det, der indesluttes af en eller flere omkredse.

15. En _______________ er en plan figur, indesluttet af en sådan linje, at alle de rette linjer, der kan trækkes ud til den fra et inden for figuren liggende punkt, er indbyrdes lige store.

16. Dette punkt kaldes ______________ i cirklen.

17. En ______________ i cirklen er en ________ linje, trukket gennem centrum og begrænset til begge sider af cirkelperiferien [og den halverer også cirklen].

18. En ____________ er en figur, som indesluttes af en diameter og den af diameteren

afskårne periferi. ____________s centrum er det samme som cirklens.

19. Retlinede figurer er sådanne, som indesluttes af rette linjer: tresidede, som indesluttes af tre, firesidede af fire, flersidede af flere end fire rette linjer.

20. Af tresidede figurer kaldes den, der har alle tre sider lige store,

en _________________, den som kun har to sider lige store, en ________________,

og den, som har alle tre sider ulige store, en _______________.

21. Af tresidede figurer kaldes endvidere den, der har en ret vinkel,

en _____________________, den, der har en stump vinkel, en ___________________,

den, der har alle tre vinkler spidse, en ___________________.

22. Af firesidede figurer kaldes den, der både er ligesidet og retvinklet, ___________,

den, der er retvinklet, men ikke ligesidet, _____________, den, der er ligesidet, men

ikke retvinklet, en ______________, den, der både har modstående sider og vinkler lige store, men hverken er ligesidet eller retvinklet, en romboide, de øvrige firesider kunne kaldes trapezer.

23. _____________ linjer er rette linjer, der ligger i samme plan, og som, når de forlænges ubegrænset til begge sider, ikke mødes til nogen af siderne.

Muligvis opdagede du undervejs, at hvis du ikke lige kunne finde ud af, hvad det var for et ord, der blev fisket efter, kunne du kigge ned i næste definition og finde dette ord, da der her blev defineret et nyt begreb i forlængelse af det foregående.

Dette er en meget vigtig pointe ved definitioner. Når man først har defineret et begreb, kan man bruge det i senere definitioner. Men man må ikke anvende et matematisk begreb i en sætning eller i en definition (med mindre det netop er dette begreb, der defineres), uden at det allerede er defineret.

I vores første definition (den om *et punkt*) har man altså ingen matematiske begreber til rådighed, og man må nøjes med sproget. Vi er altså nødt til at forudsætte, at man har helt styr på, hvad det vil sige at kunne dele noget.

Øvelse 1:

a) Se på definition 17.
Hvorfor har man efterfølgende tilføjet ordene i den firkantede parentes til definitionen?
Er der et ord i definitionen, der anvendes uden at være blevet defineret tidligere? Er det en fejl?

b) Se på definition 22.
Hvordan ser en romboide ud?
Hvad er forskellen på Euklids "trapezer" og vores anvendelse af begrebet "trapez"?
Hvad kalder vi under et alle de figurer, der ifølge definition 22 ikke er trapezer?

Inden vi fortsætter med *Elementer*, skal vi have indført nogle navne på vinkler, som Euklid ikke kommer ind på, og vi skal have kategoriseret firkanter.

Bemærk først, at Euklid ikke på noget tidspunkt sætter tal på vinklerne. Euklid arbejder med rette vinkler, vinkler der er mindre end rette vinkler (spidse vinkler), vinkler der er større end rette vinkler (stumpe vinkler) og lige store vinkler. Han har derfor ikke brug for tal.

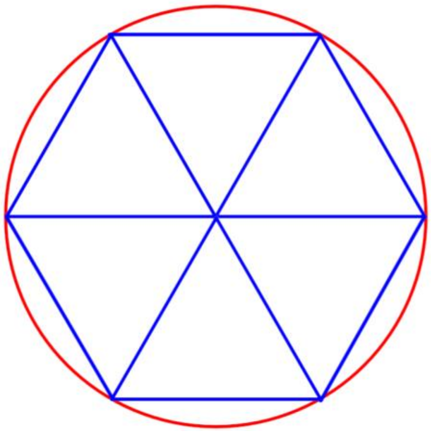
Vi anvender 360° til at beskrive hele rotationen af en radius rundt i en cirkel. Men dette tal er i bund og grund fuldstændig vilkårligt. Man kunne have anvendt et hvilket som helst tal (f.eks. 13 eller 48872). Vi skal snart se, at man også kan angive vinkler i enheden *radianer*, hvor man så at sige definerer sig ud af vilkårligheden. Så faktisk kan vilkårligheden undgås.

Det er dog også vigtigt at bemærke, at selvom man i princippet kunne have valgt et hvilket som helst andet tal end 360, så er der nogle tal, der er mere hensigtsmæssige at vælge end andre. F.eks. ville det ikke være smart at lade 13° svare til hele vejen rundt i en cirkel, da en ret vinkel så ville blive 3,25°, der ikke er så nemt at regne med, og endnu sværere ville det blive med vinklerne i en ligesidet trekant.

Og dette skal du lægge mærke til. Der er masser af situationer i matematik og naturvidenskaberne, hvor man frit kan vælge mellem i princippet uendeligt mange muligheder, men der vil som udgangspunkt være nogle muligheder, der er smartere at vælge end andre. Og det er så din opgave at vælge en at de hensigtsmæssige muligheder (hvis ikke en anden allerede har gjort det for dig).

Man ved ikke, hvorfor det endte med at blive 360°, der svarer til hele vejen rundt på en cirkel. To mulige forklaringer er:

1) Nogle folkeslag har anvendt 360 dage som årets længde (muligvis bare som et cirkatal, der er nemt at regne med). Og ved at anvende 360°, vil sigtelinjen til Solen bevæge sig én grad om dagen i forhold til stjernehimlen.
2) Babylonierne havde et 60-talssystem, og de kan derfor have anvendt tallet 60 til at angive de vinkler, der findes i en ligesidet trekant. Så bliver det meget nemt at dele vinklen. Hvis den deles i 2, bliver disse vinkler 30°, delt i 3 er det 20°, delt i 4 er det 15°, delt i 5 er det 12° og delt i 6 er det 10°. Man kan placere 6 ligesidede trekanter i en cirkel som vist nedenfor, og så kommer man frem til 360° rundt i en cirkel.

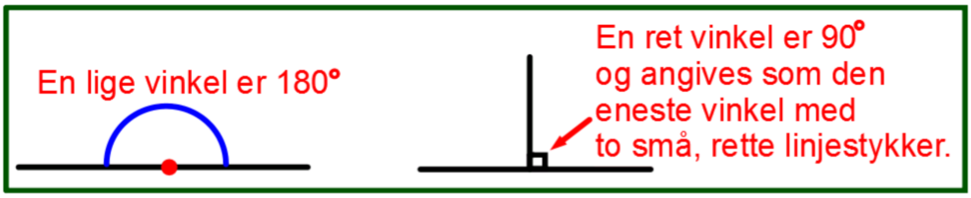


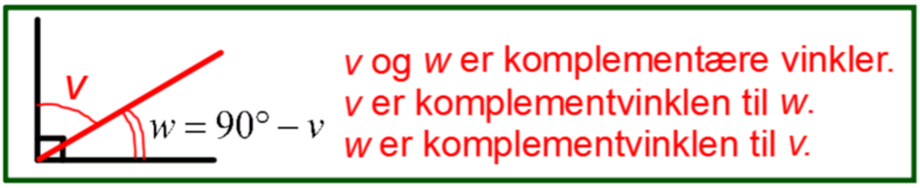
6 ligesidede trekanter placeret i en cirkel. Alle vinklerne i en ligesidet trekant er lige store. Babylonerne anvendte et 60-talssystem og fastsatte så disse vinkler til 60°

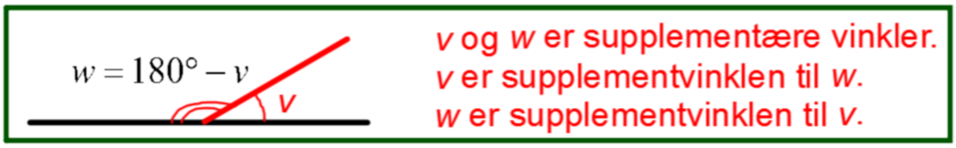
Vi kan nu sætte tal på vores vinkler, og det bruges i de følgende definitioner, der inkluderer nogle af Euklids definitioner:

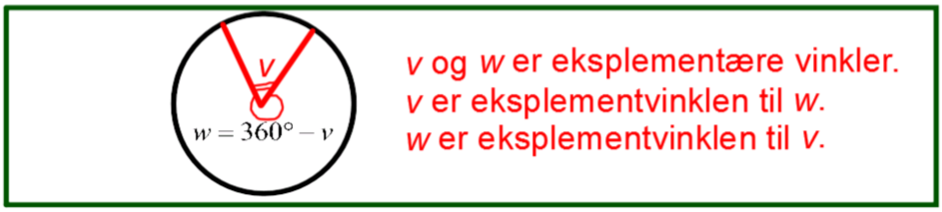
Definition 1: Vi anvender følgende navne på vinkler:

- En *lige* vinkel er en vinkel, der dannes af linjerne, der støder op til et punkt, som afsættes på et ret linjestykke. En lige vinkel er 180°.
- En *ret* vinkel er én af de vinkler, der dannes, når et linjestykke deler en lige vinkel i to lige store vinkler. En ret vinkel er 90°.
- En *spids* vinkel er en vinkel, der er mindre end en ret vinkel og derfor er mindre end 90°.
- En *stump* vinkel er en vinkel, der er større end en ret vinkel og derfor er større end 90°.
- To vinkler, der tilsammen danner en ret vinkel, kaldes *komplementære* vinkler. Hvis v er en (spids) vinkel, er $w = 90° - v$ dens *komplementvinkel*.
- To vinkler, der tilsammen danner er lige vinkel, kaldes *supplementære* vinkler. Hvis v er en vinkel, er $w = 180° - v$ dens *supplementvinkel*.
- To vinkler, der placeret i en cirkels centrum tilsammen netop indeholder cirklen, kaldes *eksplementære* vinkler. Hvis v er en vinkel, er $w = 360° - v$ dens *eksplementvinkel*.









Vi skal hovedsageligt være opmærksomme på *supplementvinkler*. De kommer til at spille en central rolle, når vi skal se på anvendelsen af de såkaldte sinusrelationer.

Komplementvinkler optræder i retvinklede trekanter. Her er de to spidse vinkler komplementære vinkler.

Opgaverne 200*

Vi vender nu tilbage til Euklid. Da vi forlod ham, var han netop blevet færdig med at opremse 23 definitioner. Derefter går han direkte til at beskrive 5 postulater og 5 aksiomer:

Postulater

1. Lad det være forudsat, at man kan trække en ret linje fra et hvilket som helst punkt til et hvilket som helst punkt.
2. Lad det være forudsat, at man kan forlænge en begrænset ret linje ud i ét.
3. Lad det være forudsat, at man kan tegne en cirkel med et hvilket som helst centrum og en hvilken som helst afstand [radius].
4. Lad det være forudsat, at alle rette vinkler er lige store.
5. Lad det være forudsat, at når en ret linje skærer to rette linjer, og de indvendige vinkler på samme side er mindre end to rette, så mødes de to linjer, når de forlænges ubegrænset, på den side hvor de to vinkler ligger, der er mindre end to rette.

Bemærk, hvor omhyggelig Euklid er. Han får brug for disse ting i sine beviser, og derfor er han nødt til at postulere dem.

Hvis du tænker: ”Jamen det er da indlysende!”, kan man sige, at det netop er pointen med postulater og aksiomer (to ord vi ikke længere skelner imellem). De SKAL være indlysende. Det imponerende ved Euklids arbejde er, at han får øje på og formulerer det, der er indlysende (og det er faktisk ikke nemt).

Aksiomer

1. Størrelser, som er lige store med samme størrelse, er indbyrdes lige store.
2. Når lige store størrelser lægges til lige store størrelser, er summerne lige store.
3. Når lige store størrelser trækkes fra lige store størrelser, er resterne lige store.
4. Størrelser, der kan dække hinanden, er lige store.
5. Det hele er større end en del af det.

Aksiomerne er mere generelle end postulaterne. Husk, som nævnt tidligere, at Euklid ikke anvendte andre end disse aksiomer og postulater, dvs. disse 10 ubeviselige sætninger er sammen med definitionerne grundlaget for hele geometrien, som udfolder sig i resten af værket.

Vi vil også adskillige gange i andre sammenhænge end geometri få brug for nogle af aksiomerne. Euklids 1. aksiom kan også udtrykkes: *Hvis* $A = C$ *og* $B = C$, *så er* $A = B$.

2. aksiom kan udtrykkes: *Hvis* $A = B$, *så er* $A + C = B + C$.

3. aksiom siger: *Hvis* $A = B$, *så er* $A - C = B - C$.

Efter aksiomerne springer Euklid direkte til sin første sætning. Den sorte tekst er Euklids ord (oversat fra græsk), mens den blå tekst hører til Øvelse 2.

Øvelse 2: Gennemfør beviset med passer og lineal, mens du læser det.
Svar på spørgsmålene undervejs.

Sætning 1 (Elementer bog I): *At konstruere en ligesidet trekant på en begrænset ret linje.*

Lad AB være den givne begrænsede rette linje.

Der skal nu konstrueres en ligesidet trekant på AB.

Lad cirklen BCD være tegnet med A som centrum og AB som radius.

a) Hvilket af postulaterne eller aksiomerne anvendes her?

Og ligeledes, lad cirklen ACE være tegnet med B som centrum og BA som radius.

b) Hvilket af postulaterne eller aksiomerne anvendes her?

Og lad de rette linjer CA og CB være trukket fra punktet C, hvor cirklerne skærer hinanden, til punkterne A og B.

c) Hvilket af postulaterne eller aksiomerne anvendes her?

Nu gælder, at da punktet A er centrum i cirklen CDB, er AC lige så stor som AB.

d) Hvilken definition anvendes her?

Og da punktet B er centrum i cirklen CAE, er BC lige så stor som BA.

e) Hvilken af definitionerne, postulaterne eller aksiomerne anvendes her?

Det blev også bevist, at CA er lige så stor som AB. Både CA og CB er altså lige så store som AB.

____

f) Hvilket af postulaterne eller aksiomerne gengiver Euklid på ovenstående linje (for at argumentere for den sidste sorte linje)?

Altså er CA lige så stor som CB. De tre linjer CA, AB og BC er altså lige store. Derfor er trekant ABC ligesidet. Og den er konstrueret på den rette linje AB. Hvilket skulle gøres.

g) Hvilken af definitionerne, postulaterne eller aksiomerne har Euklid anvendt i dette sidste stykke?

Hermed afslutter Euklid beviset for sin første sætning, der nok ikke lyder som det, du normalt ville forstå ved en matematisk sætning. Det gør den anden sætning heller ikke, men det kommer i de følgende sætninger.

Øvelse 3: Gennemfør beviset med passer og lineal, mens du læser det.
Svar på spørgsmålene undervejs.

Sætning 2: *Ud fra et givet punkt at konstruere en ret linje, der er lige så stor som en given ret linje.*

Lad A være det givne punkt og BC den givne rette linje.

Man skal så med punktet A som endepunkt konstruere en ret linje, der er lige så stor som den rette linje BC.

Lad den rette linje AB være trukket fra punktet A til punktet B.

a) Hvilken af definitionerne, postulaterne eller aksiomerne anvendes her?

Og konstruer den ligesidede trekant DAB på den rette linje AB.

b) Hvad anvender Euklid her?

Lad de rette linjer AE og BF være forlænget ud fra DA og DB.

c) Hvilken af definitionerne, postulaterne, aksiomerne eller sætningerne anvendes her?

Lad cirklen CGH være tegnet med B som centrum og afstanden BC som radius.

d) Hvilken af definitionerne, postulaterne, aksiomerne eller sætningerne anvendes her?

Ligeledes, lad cirklen GKL være tegnet med D som centrum og afstanden DG som radius.

e) Hvilken af definitionerne, postulaterne, aksiomerne eller sætningerne anvendes her?

Så gælder, at eftersom punktet B er centrum i cirklen CGH, er BC lige så stor som BG.

f) Hvilken af definitionerne, postulaterne, aksiomerne eller sætningerne anvendes her?

Og ligeledes, eftersom punktet D er centrum i cirklen GKL, er DL lige så stor som DG.

g) Hvilken af definitionerne, postulaterne, aksiomerne eller sætningerne anvendes her?

Og i disse cirkler er DA lige så stor som DB.

h) Hvorfor?

Derfor er resten AL lige så stor som resten BG.

i) Hvilken af definitionerne, postulaterne, aksiomerne eller sætningerne anvendes her?

Men BC var også bevist at være lige så stor som BG.

Derfor er hver af de rette linjer AL og BC lige så store som BG.

____

j) Hvilket postulat eller aksiom gengiver Euklid på linjen ovenfor (for at argumentere for den seneste sorte linje)?

Derfor er AL lige så stor som BC.

Derfor er den rette linje AL, der er lige så stor som den givne rette linje BC, konstrueret med det givne punkt A som endepunkt. Hvilket var krævet.

Bemærk, at Euklid undervejs får brug for sin første sætning. Og det er endnu en vigtig pointe (den sidste vi skal se i forbindelse med Euklid): Når en sætning er vist, kan den benyttes i senere sætninger. Når Euklid derfor f.eks. skal bevise sin sætning 18, må han benytte sine definitioner, postulater, aksiomer samt 17 første sætninger.

Euklid fortsætter med sætning, bevis, sætning, bevis, sætning, bevis, … resten af bog 1. Nogle af disse sætninger skal vi arbejde med i næste afsnit, og andre får vi brug for at kende på et eller andet tidspunkt. Så her kommer en oversigt over nogle af Euklids første 48 sætninger (dem fra bog 1). Sætningerne med blåt er dem, vi selv snart går i gang med at bevise. Sætningerne med sort er sætninger, du kan få brug for i opgaver.

Når du læser sætningerne, så tænk over deres indhold. Du skal ikke bevise dem, men huske på, at Euklid har bevist dem, og vi kan derfor bruge disse sætninger.

Euklids sætninger fra 1. bog

Sætning 4: *Hvis to trekanter har to sider parvis lige store og har de vinkler, der indesluttes af de lige store rette linjer, lige store, så vil trekanternes grundlinjer også være lige store, og trekanterne vil være lige store, og de øvrige vinkler over for de lige store sider vil være parvis lige store.*

Lidt kortere og mindre præcist formuleret: *To trekanter, hvor en vinkel, og de sider, der danner vinklen, er ens, vil have de samme sider og vinkler.*

Ofte er det sådan, at hvis man kender tre stykker i en trekant, kan man udregne de resterende tre. Ovenstående sætning er sådan et tilfælde.

Sætning 5 (i beskåret udgave): *I ligebenede trekanter er vinklerne ved grundlinjen lige store.*

Sætning 6: *Hvis to vinkler i en trekant er lige store, er også de sider, der ligger over for de lige store vinkler, lige store.*

Sætning 8: *Hvis to trekanter har to sider parvis lige store og tillige grundlinjerne lige store, så er de vinkler, der indesluttes af de lige store sider, også lige store.*

Dette er endnu et eksempel, hvor man ud fra tre kendte stykker (her tre sider) kan udregne de resterende.

Sætning 9: *At halvere en retlinet vinkel.*

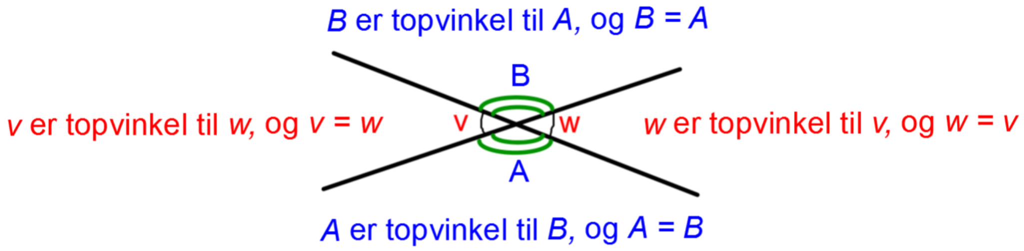
Sætning 10: *At halvere en given begrænset ret linje.*

Sætning 11: *At tegne en ret linje vinkelret på en given ret linje ud fra et givet punkt på denne.*

Sætning 12: *Fra et punkt uden for en given ubegrænset ret linje at nedfælde en ret linje vinkelret på den givne.*

Sætning 15: *Hvis to rette linjer skærer hinanden, bliver de modsatliggende vinkler lige store.*

Man snakker om en vinkel og dens *topvinkel:*



Dette er en af de ældste geometriske sætninger, og den tilskrives i sin oprindelige version Thales. Euklid har ikke fundet på alle sine sætninger selv.

Sætning 18: *I enhver trekant ligger der over for en større side en større vinkel.*

Sætning 19: *I enhver trekant ligger der over for en større vinkel en større side.*

Disse to sætninger er meget vigtige, og du vil få stor glæde af at huske dem. I en trekant ligger den længste side over for den største vinkel, og den korteste side er over for den mindste vinkel.

Sætning 20: *I enhver trekant er to vilkårlige sider tilsammen altid større end den tredje side.*

Denne sætning er også kendt som *Trekant-uligheden*. Hvis siderne i en trekant har længderne *a*, *b* og *c*, gælder det altså, at $a+b>c$.

Sætning 22: *At konstruere en trekant af tre rette linjer, der er lige så store som tre givne rette linjer. Dog er det nødvendigt, at hvilke som helst to linjer tilsammen er større end den tredje.*

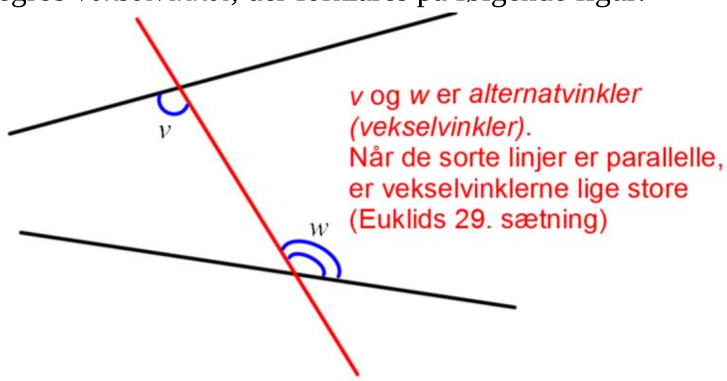
Vi skal som angivet (med den blå farve) konstruere en sådan trekant med passer og lineal, men der er også en interessant detalje ved denne sætning. Det er første gang, at Euklid opstiller en betingelse for en sætning (sidste halvdel af sætningen). Vi vil meget ofte angive betingelser for vores sætninger, så det er kun specielt på den måde, at det er Euklids første betingelse.

Sætning 23: *Ved et givet punkt på en given ret linje at konstruere en retlinet vinkel lig en given retlinet vinkel.*

Sætning 26 (omskrevet til vores pointe): *Hvis man kender to vinkler og en side i en trekant, kan de manglende størrelser bestemmes.*

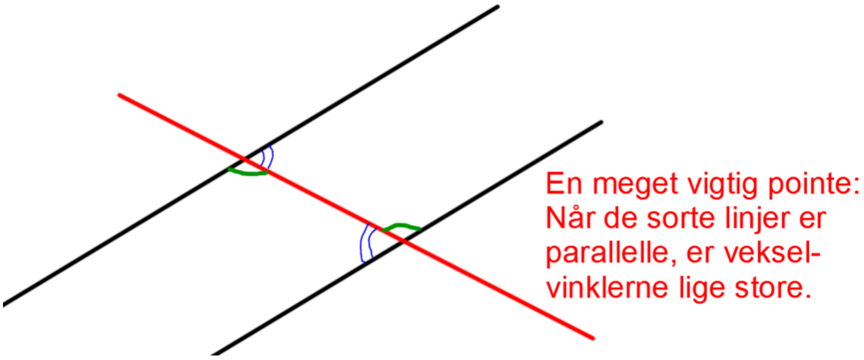
Sætning 27: *Når en ret linje skærer to rette linjer, og vekselvinklerne er lige store, er de to rette linjer parallelle.*

Her møder vi et nyt begreb *vekselvinkel*, der forklares på følgende figur:



Sætning 29: *Når en ret linje skærer parallelle rette linjer, er vekselvinklerne lige store, den udvendige vinkel er lig den modstående indvendige [dvs. topvinkler], og de indvendige vinkler på samme side er tilsammen lig to rette.*

Denne pointe er så vigtig, og vi skal bruge den så mange gange i vores beviser, at vi lige gentager den med en figur (de grønne vinkler er vekselvinkler. Og de blå vinkler er vekselvinkler):



Sætning 30: *Rette linjer, der er parallelle med den samme rette linje, er indbyrdes parallelle.*

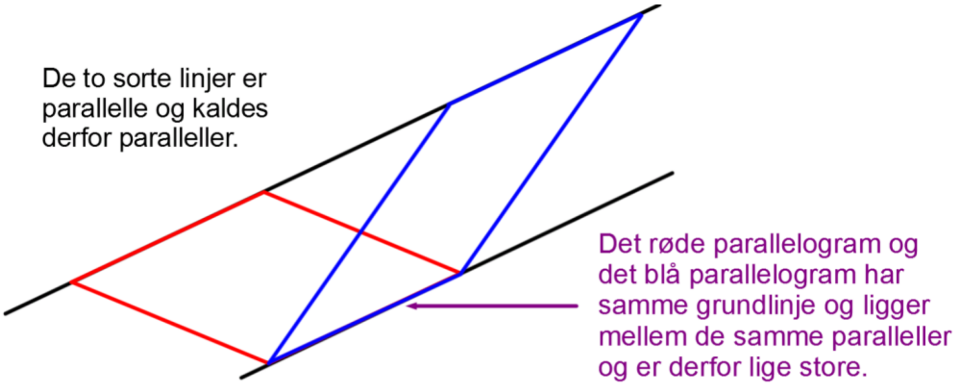
Sætning 31: *Gennem et givet punkt at trække en ret linje parallel med en given ret linje.*

Sætning 32: *I enhver trekant hvor en af siderne er forlænget, er den udvendige vinkel lig de to indvendige og modstående tilsammen, og de tre vinkler inde i trekanten er tilsammen lig to rette.*

Bemærk, at Euklid her beviser, at vinkelsummen i en trekant er 180° (bortset fra at han som nævnt ikke arbejdede med tal på vinklerne, men bare hele tiden sammenlignede med rette vinkler).

Sætning 34: *I et parallelogram er de modstående sider og vinkler lige store, og diagonalen halverer parallelogrammet.*

Sætning 35: *Parallelogrammer med samme grundlinje og mellem de samme paralleller er lige store.*



Sætning 36: *Parallelogrammer på lige store grundlinjer og mellem de samme paralleller er lige store.*

Dvs. på figuren under sætning 35 kan f.eks. det blå parallelogram forskydes langs den sorte linje, og de to parallelogrammer vil stadig være lige store (dvs. have samme areal).

Sætning 37 og 38: De siger det samme som sætningerne 35 og 36, men bare om trekanter.

Sætning 41: *Når et parallelogram har samme grundlinje som en trekant og ligger mellem de samme paralleller, er parallelogrammet dobbelt så stort som trekanten.*

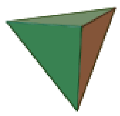
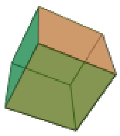
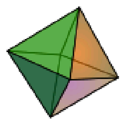
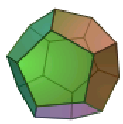
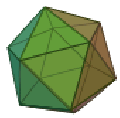
Sætning 46: *At tegne et kvadrat på en given ret linje.*

Sætning 47: *I retvinklede trekanter er kvadratet på den side, der ligger over for den rette vinkel, lige så stort som kvadraterne på de sider, der danner den rette vinkel.*

Sætning 48: *Hvis i en trekant kvadratet på en af siderne er lige så stort som kvadraterne på de resterende to sider, er vinklen dannet af de resterende to sider ret.*

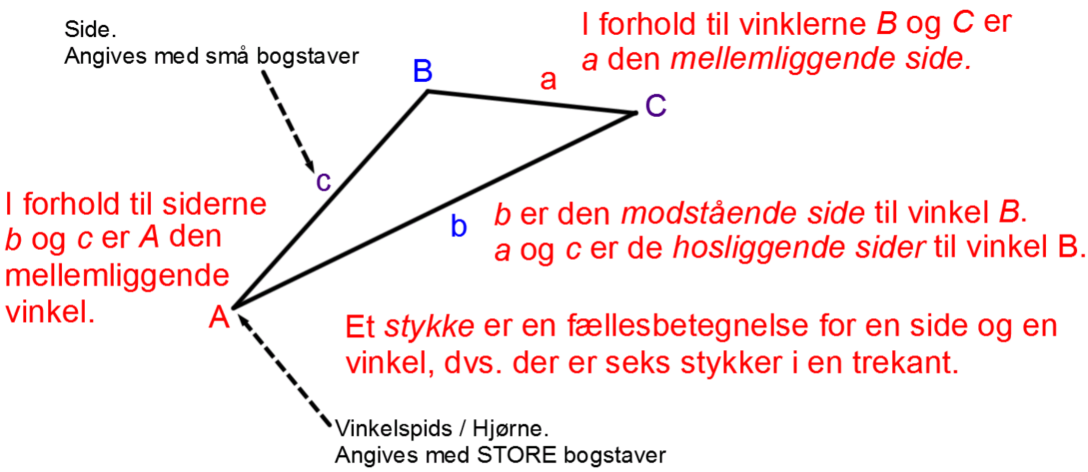
Øvelse 4: Hvad er forskellen på sætningerne 47 og 48, og hvad kalder vi dem normalt?

Ud fra dette udvalg af sætninger skulle du gerne have fået en idé om, hvad Euklids *Elementer* er for et værk. I de resterende 12 bøger kommer Euklid ind på egenskaber ved cirkler (vi skal se på et par stykker af dem), rektangler, polygoner, tal, rumlige figurer og endelig i 13. bog de 5 platoniske legemer (se figuren nedenfor):

Tetrahedron (four faces)	Cube or (hexahedron) (six faces)	Octahedron (eight faces)	Dodecahedron (twelve faces)	Icosahedron (twenty faces)
 (Animation)	 (Animation)	 (Animation)	 (Animation)	 (Animation)

TREKANTER: Egenskaber og notation

Vi skal nu se på notationen, der anvendes i forbindelse med trekanter (og andre retlinede figurer), samt samle op på nogle af de egenskaber ved trekanter, du oftest får brug for.



Bemærk, at mange af betegnelserne tager udgangspunkt i et eller flere stykker. Man kan f.eks. ikke sige, at *a* er den modstående side, med mindre man først har gjort opmærksom på, at man tager udgangspunkt i vinkel *A*.

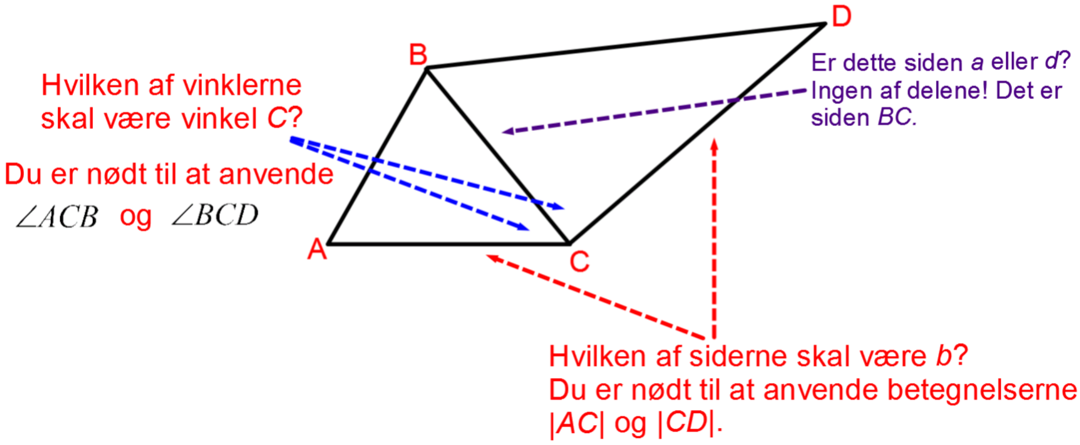
En vinkelspids (et hjørne) er et punkt, hvilket jo ikke er det samme som en vinkel. Ligeledes er der egentlig forskel på en side, der er en linje, og en sidelængde, der er et positivt tal. Det er ikke altid, at man i sin notation skelner klart mellem disse. F.eks. har jeg i ovenstående figur brugt *A* som betegnelse for en vinkel, selvom det egentlig er betegnelsen for en vinkelspids (dvs. et punkt).

Notationer:

- Sider angives med små bogstaver (f.eks. *a*) eller med to store bogstaver, der angiver de hjørner, som siden ligger mellem (f.eks. *BC*). Skriv bogstaverne i alfabetisk rækkefølge, dvs. skriv *BC* i stedet for *CB*.
- Længden af sider angives med små bogstaver (f.eks. a , dvs. med denne notation skelnes ikke mellem siden og længden af siden), eller med lodrette streger omkring to store bogstaver (f.eks. $|BC|$). Dvs. *AB* er en side, og $|AB|$ er længden af siden *AB*.
- Vinkelspidser (hjørner) angives med store bogstaver (f.eks. *A*), da de er punkter.
- Vinkler angives med vinkeltegn som enten $\angle A$ eller $\angle BAC$. Man kan dog godt, når der ikke er noget at tage fejl af, angive vinklen som *A*, da udtrykket bliver pænere at se på, hvilket vi f.eks. vil gøre i sinusrelationerne, når vi kommer til dem.
- Oftest angives arealer med *A* eller *O* (hvis det er et overfladeareal). Men trekanters arealer angives ofte med et *T*, dvs. T_{ADF} er arealet af trekant *ADF*.

Notationen $\angle BAC$ kræver lidt ekstra forklaring. Det er den vinkel, der dannes, når du tegner en ret linje fra punkt *B* til punkt *A* og derfra til punkt *C*. Dvs. du skal tage bogstaverne i den rækkefølge, de står. Kig nøje på nedenstående figur og tjek, at du forstår notationen:

Det kan virke som en overflødigt kompliceret notation at anvende $\angle BAC$ og $|AB|$ i stedet for bare $\angle A$ og *c*. Og nogle gange ER det overflødigt. Men i andre situationer er det nødvendigt, nemlig hvis den simplere notation ikke er entydig, hvilket forekommer, når flere trekanter sættes sammen:

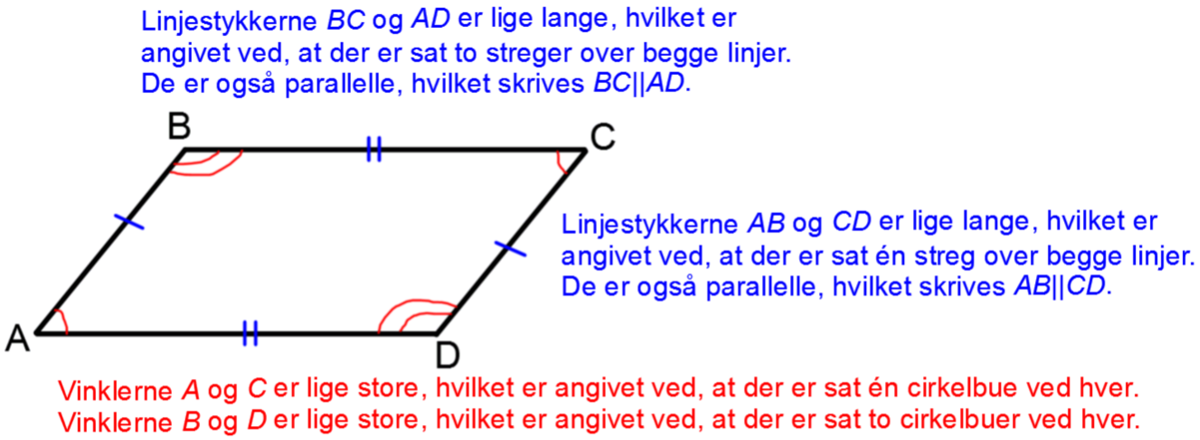


Vigtige egenskaber ved trekanter:

- Vinkelsummen i en trekant er 180°, dvs. i $\triangle ABC$ gælder $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.
- Den længste side er den modstående side til den største vinkel, og den korteste side er den modstående side til den mindste vinkel.
- **Trekantuligheden**: Summen af to af sidelængderne i en trekant er altid større end den tredje sidelængde, dvs. i $\triangle ABC$ gælder $a + b > c$.

Andre notationer (for linjestykker og vinkler generelt):

- Parallelle linjer angives med symbolet $||$, f.eks. $AB || CD$.
- Hvis linjestykkerne AB og CD står vinkelret på hinanden, angives det ved $AB \perp CD$.
- Ens vinkler angives ved ens antal cirkelbuer, og lige lange linjestykker angives ved ens antal streger på linjerne.

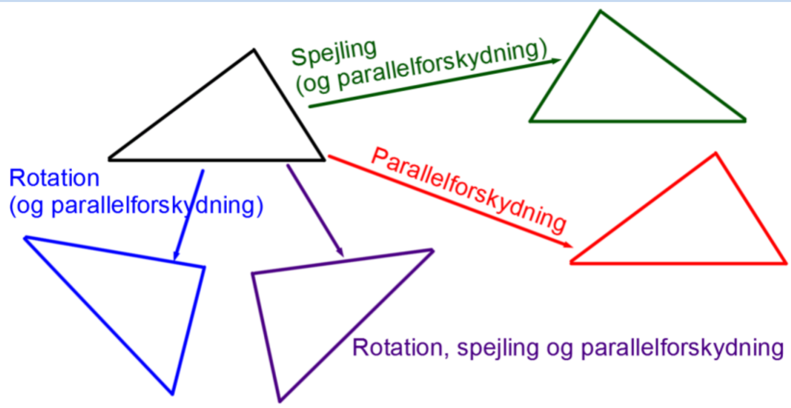


Opgaverne 201*

LIGEDANNEDE FIGURER
– ensvinklede trekanter

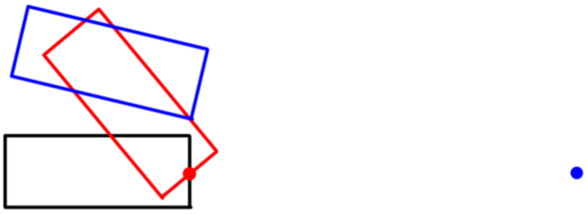
”En *isometri* er en afstandsbevarende afbildning mellem metriske rum”.
Ovenstående sætning lyder højst sandsynligt som volapyk, så glæd dig over, at du ikke behøver at forstå sætningens ordlyd for at forstå dens indhold i grove træk. Vi skal nu til at beskæftige os med såkaldt ligedannede figurer, og for at forstå dette begreb begynder vi et lidt andet sted, nemlig med *isometrierne*, som vi kan forstå ud fra en tegning.

Vi kan forstå *isometrier* i planen som en blanding af en eller flere af flytningerne *parallelforskydning*, *spejling* og *rotation*, der er de tre eneste afstandsbevarende flytninger.
At være *afstandsbevarende* vil sige, at afstanden mellem to vilkårligt valgte punkter på figuren (og der er uendeligt mange punkter på en trekant) vil være den samme før og efter flytningen:



Den sorte trekant er vores udgangspunkt. Når den parallelforskydes, flyttes den uden at ændre orientering. Hvis du har et glas fyldt med vand, der skal flyttes gennem rummet, vil du parallelforskyde det, for hvis du roterer det, så det ændrer orientering, vil du spilde vandet. Bemærk, at parallelforskydning er afstandsbevarende. Hvis du smadrer glasset, er det også en flytning, men en sådan flytning er netop ikke afstandsbevarende, fordi de enkelte splinter i glasset nu har en anden indbyrdes afstand, end de havde, inden glasset blev smadret.

Når du roterer en figur, gør du det omkring et punkt:



Den sorte aflang er vores udgangspunkt. Den røde aflang viser en rotation omkring det røde punkt, mens den blå aflang viser en rotation omkring det blå punkt.

Du kan også selv prøve det. Tag din blyant og hold på midten med pege- og tommelfinger. Så kan du rotere den omkring et punkt midt på blyanten. Hold den derefter ud i strakt arm foran dig og bevæg armen i en bue op over dit hoved. Så bliver blyanten roteret omkring et punkt inde i din skulder.

Det er to forskellige rotationer, men hvis du kombinerer dem med parallelforskydninger, så kan du opnå præcis de samme placeringer og orienteringer, uanset hvilket punkt du roterer omkring.

Bemærk også – en meget vigtig pointe – at en rotation er en afstandsbevarende flytning.

Den sidste afstandsbevarende flytning er en spejling. Den grønne trekant er en spejling i en lodret akse. Men lige som før er det faktisk ligegyldigt, hvilken akse du spejler figuren i, hvis du kombinerer spejlingerne med rotationer og parallelforskydninger. Du kan opnå samme resultat.

Øvelse 5:

a) Tjek, at du ikke kan komme frem til hverken den grønne eller den violette trekant, hvis du udelukkende må anvende rotation og parallelforskydning.
b) Tjek, at du kan komme frem til den grønne trekant ved at lave en spejling i en vandret linje og efterfølgende rotere og parallelforskyde.

Vi kan nu give en lidt simplere definition på en isometri.

Definition 2: En *isometri* er en parallelforskydning, rotation eller spejling af en figur, eller en kombination af disse.

Vi kan nu bruge dette begreb til at definere et nyt begreb:

Definition 3: To figurer i planen siges at være *kongruente*, hvis de ved en isometri hver især kan bringes til at dække hinanden.
At to figurer er kongruente angives med symbolet $\cong$, dvs. hvis trekant ABC er kongruent med trekant DEF, skriver man: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Man kan ofte møde betegnelsen *ens* i stedet for *kongruente*. Men bemærk altså, at det dækker over, at de to figurer gerne må være hinandens spejlbilleder. I planen er spejlbilleder kongruente.

Det gælder ikke i rummet (dvs. i 3 dimensioner):

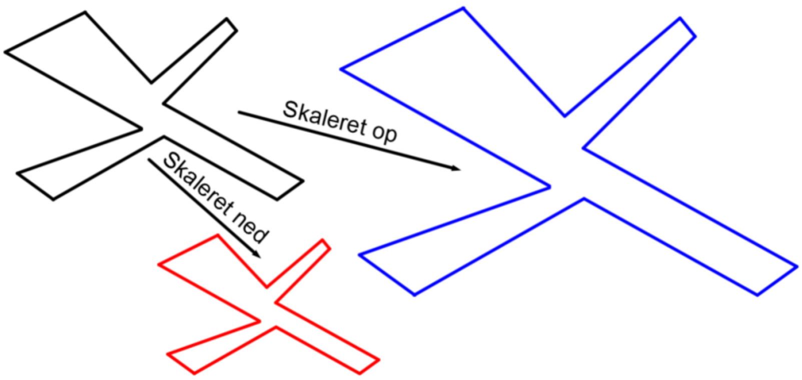
Tredimensionelle figurer er ikke kongruente, hvis der kræves en spejling for at få de to figurer til at dække hinanden. Så kaldes de *spejlvendt kongruente* eller *symmetriske*. Det kan virke underligt, at begrebet *kongruent* på den måde tilsyneladende har forskellig betydning i planen og rummet. Men det har det egentlig heller ikke. Pointen er nemlig, at hvis du tager en figur i planen, så kan du opnå det samme som en spejling, hvis du tillader dig at rotere figuren i rummet. Prøv på figuren med trekanterne at få dannet den grønne trekant ved (i hovedet) at rotere den sorte trekant i rummet (dvs. bring den ”ud af papiret” og tilbage igen).

Måske lyder alt dette som noget meget verdensfjern matematik. Men faktisk har det enorm betydning i vores verden – der jo er tredimensionel – da plane molekyler ikke kan være spejlbilleder af hinanden, fordi de kan rotere i rummet, mens man kan finde masser af rumlige molekyler, der er hinandens spejlbilleder. Og netop fordi disse spejlbilleder ikke kan bringes til at ”dække hinanden”, da man i virkelighedens verden IKKE kan spejle tingene (du kan godt flytte og rotere dit skrivebord, men du kan ikke spejle det), er de ikke ens, og endnu vigtigere: De opfører sig ikke ens rent kemisk. Der er utallige eksempler på dette, og et af de mere berømte og skræmmende er stoffet Thalidomid, der i 1960’erne førte til mange misdannede babyer, fordi den ene form af Thalidomid har en kvalmedæmpende effekt, hvorfor stoffet blev anvendt af gravide kvinder, mens spejlbilledformen fører til fostermisdannelser.

Inden for kemien taler man om *spejlbilledisomeri*.

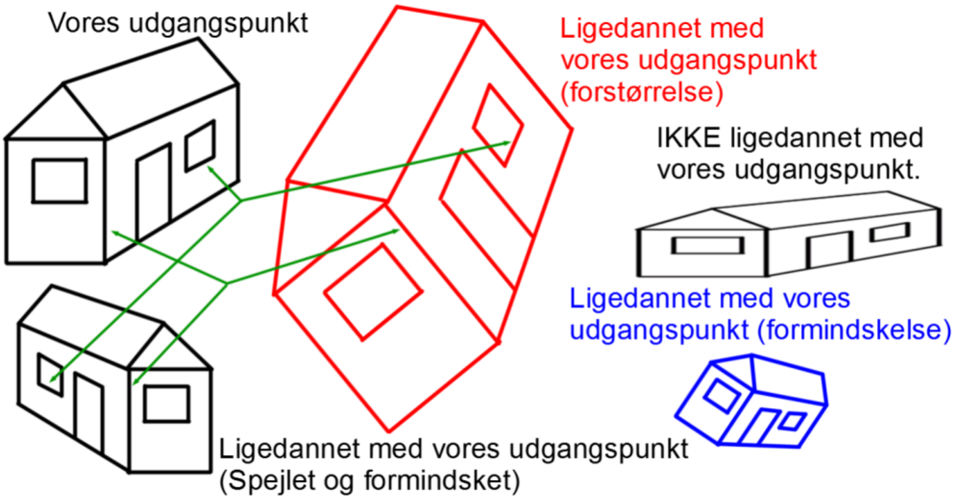
Vi er nu nået frem til begrebet *ligedannethed*. Det er på sin vis et meget simpelt begreb, og computeren har gjort det endnu nemmere at illustrere. To figurer er kort – og ikke helt præcist formuleret - ligedannede, hvis den ene figur er en forstørrelse af den anden. Dvs. hvis du tager en figur på din computer og markerer den, kan du i de fleste programmer forstørre den ved at trække i det nederste højre hjørne. Så får du en forstørrelse eller formindskelse af din oprindelige figur, og din oprindelige figur vil så være ligedannet med din nye figur. Du må også gerne spejlvende lodret eller vandret. Det er stadig ligedannede figurer.

Man siger, at man *skalerer op* eller *skalerer ned*.



Her er den sorte figur udgangspunktet, og den er ligedannet med både den røde og den blå figur. Og den røde figur er også ligedannet med den blå figur.

Det væsentlige er, at **formen** er den samme, hvilket bl.a. inkluderer, at vinklerne mellem alle de *korresponderende* linjestykker er de samme. Med de grønne pile på nedenstående figur er vist to eksempler på korresponderende linjestykker.



Mere præcist gælder:

Definition 4: To figurer er *ligedannede*, hvis den ene ved en forstørrelse kan blive kongruent med den anden. At figur *A* er ligedannet med figur *B*, angives ved $A \sim B$.

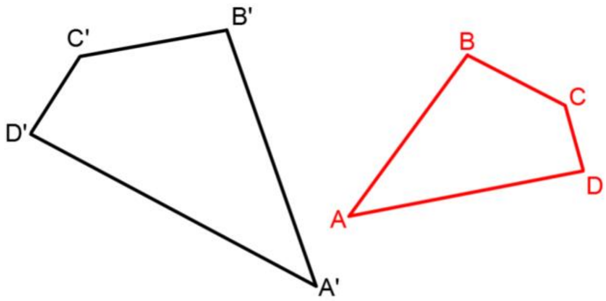
Opgaverne 202*

Dette er et eksempel på en definition (ligedannethed), der henviser tilbage til en anden definition (Definition 3), der igen henviser tilbage til en tredje definition (Definition 2). Selvfølgelig kan det i starten være svært at holde styr på alle definitionerne, men læs dem langsomt og tænk over dem.

Sætning 1 og Definition 5: Forholdene mellem alle par af korresponderende linjestykker i to ligedannede figurer giver samme talværdi, og denne værdi kaldes *skalafaktoren* eller *ligedannethedsforholdet*. Den betegnes ofte med bogstavet *k*.

Vi samler op på disse definitioner med et eksempel:

Eksempel 1: Vi ser på to ligedannede firkanter *ABCD* og *A'B'C'D'*, dvs. $\square ABCD \sim \square A'B'C'D'$.



Vi tager udgangspunkt i den røde firkant *ABCD*. Den sorte firkant er fremkommet ved en forstørrelse, spejling, rotation og parallelforskydning af den røde firkant.
Siderne *AB* og *A'B'* er korresponderende linjestykker.
Siderne *BC* og *B'C'* er korresponderende linjestykker.
Siderne *CD* og *C'D'* er korresponderende linjestykker.
Siderne *AD* og *A'D'* er korresponderende linjestykker.
Der gælder så:

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|C'D'|}{|CD|} = \frac{|A'D'|}{|AD|} = k$$

Læs godt på ovenstående udsagn. Det fortæller, hvad sætningen sagde, nemlig at forholdet mellem alle par af korresponderende linjestykker er det samme, og at dette forhold er skalafaktoren. Når du forstår det, har du godt styr på ligedannede figurer.

Hvis du tager en lineal og måler på figurerne, kan du regne dig frem til, at $k = 1{,}6$.

Det væsentlige, når du arbejder med ligedannede figurer, er, at du holder styr på hvilken figur, der er dit udgangspunkt, og alle sidelængder på denne figur skal stå i **nævnerne** på brøkerne.
Du kan frit vælge, hvilken figur du vil tage udgangspunkt i, men når du har truffet dit valg, er det meget vigtigt, at du holder fast i det hele vejen.

Der gælder følgende sætning, som du skal tænke over og indse rigtigheden af:

Sætning 2: Ved en forstørrelse er $k > 1$, og ved en formindskelse er $k < 1$.

Bemærk, at skalafaktoren angiver et forhold mellem linjestykker. Hvis du har en figur, der har et areal eller et rumfang, vil forstørrelsen eller formindskelsen gælde i alle dimensioner, og derfor gælder:

Sætning 3: Lad $A \sim B$, og lad figur *A* være udgangspunktet og skalafaktoren være *k*. Så gælder:

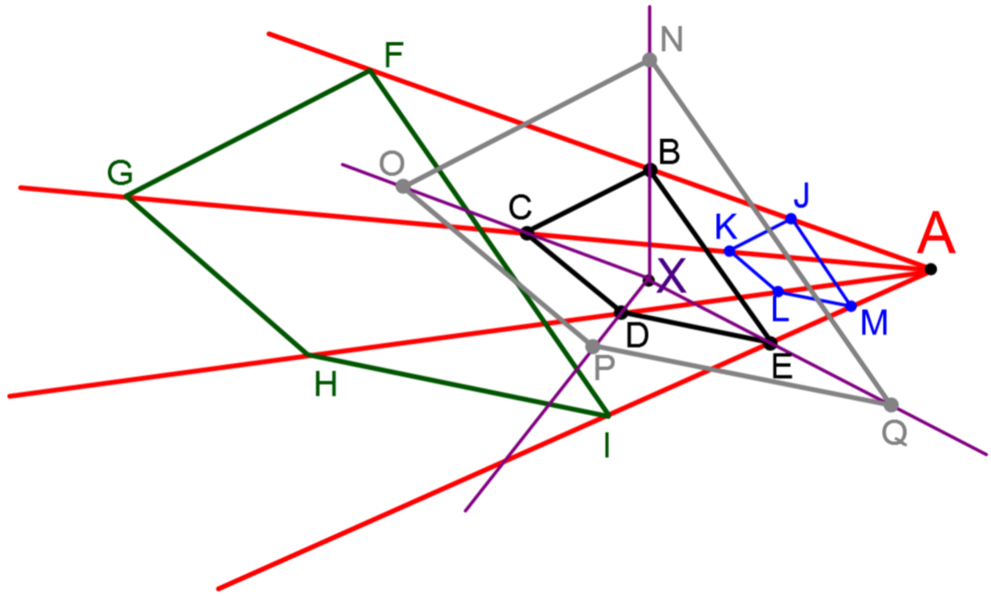
a) 1 dimension: For korresponderende linjestykker l_A og l_B i henholdsvis *A* og *B* gælder $l_B = k \cdot l_A$

b) 2 dimensioner: Hvis *A* og *B* har arealer A_A og A_B, er $A_B = k^2 \cdot A_A$

c) 3 dimensioner: Hvis *A* og *B* har rumfang V_A og V_B, er $V_B = k^3 \cdot V_A$

Vi mangler stadig at se på begrebet *forstørrelse*. For hvordan forstørrer man noget, så det beholder formen?

Dette er illustreret på nedenstående figur, der i første omgang kan virke uoverskuelig, men det er nok ikke så slemt, når den gennemgås skridt for skridt.



Det er den sorte firkant *BCDE*, der er vores udgangspunkt, og som vi gerne vil forstørre eller formindske.

Til dette formål har vi brug for **et** punkt, og dette punkt kan vi placere hvor som helst. På ovenstående figur er der som eksempel valgt henholdsvis ét punkt *A* og ét punkt *X*, hvoraf sidstnævnte er placeret inde i figuren, blot for at vise, at der ikke er nogen forskel på, om punktet ligger inden for eller uden for figuren.

Med punktet A som udgangspunkt: Først vil vi forstørre den sorte firkant med en faktor 2 (dvs. $k = 2$). Vi trækker så de røde linjer som vist på figuren, og på disse røde linjer afsætter vi de grønne punkter *F, G, H* og *I* dobbelt så langt ude som *B, C, D* og *E*. Dvs.

$$|AF| = 2 \cdot |AB| \ , \ |AG| = 2 \cdot |AC| , \ |AH| = 2 \cdot |AD| \ \text{og} \ |AI| = 2 \cdot |AE| .$$

Og der gælder også – hvilket er selve pointen:

$$|FG| = 2 \cdot |BC| \ , \ |GH| = 2 \cdot |CD| , \ |HI| = 2 \cdot |DE| \ \text{og} \ |FI| = 2 \cdot |BE| .$$

Ethvert linjestykke i den grønne firkant er altså 2 gange så langt som det korresponderende stykke i den sorte firkant.

Og **arealet** af den grønne firkant er $k^2 = 2^2 = 4$ gange så stort som arealet af den sorte firkant.

Den grå firkant er frembragt på præcis samme måde, bare ud fra punktet X i stedet for punktet A. Bemærk at den grønne firkant er kongruent med den grå firkant.

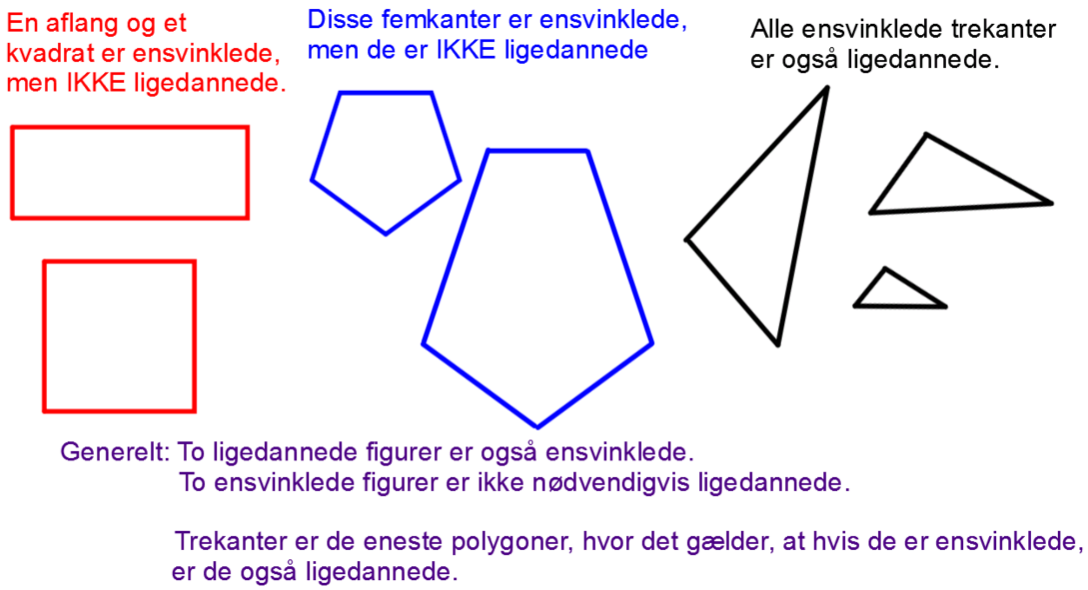
Den blå firkant er konstrueret ved at sætte punkter halvvejs ude på linjestykkerne AB, AC, AD og AE. Dermed bliver ethvert linjestykke i den blå firkant halvt så langt som det korresponderende linjestykke i den sorte firkant.

Og **arealet** af den blå firkant er $k^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ af arealet af den sorte firkant.

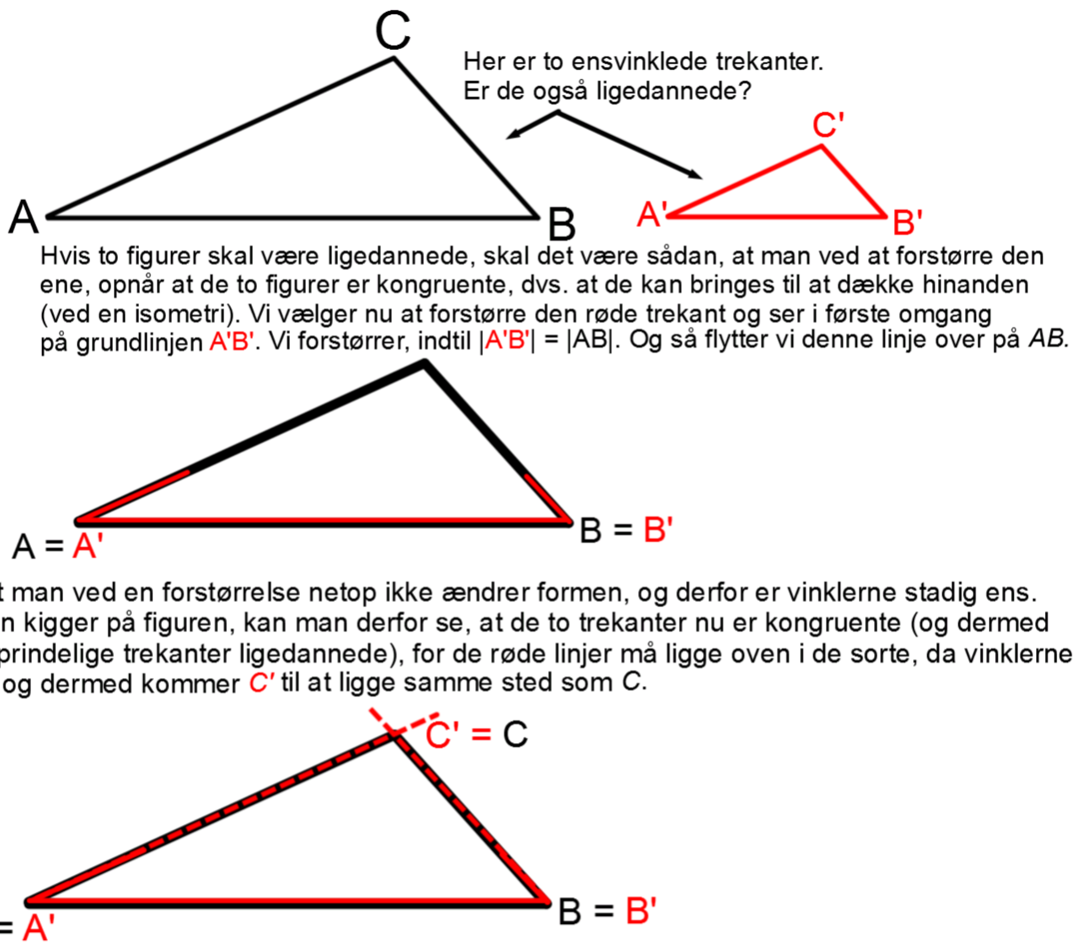
Ensvinklede trekanter

Ensvinklede trekanter er et specialtilfælde af ligedannede figurer, dvs. der gælder præcis de samme sætninger som for ligedannede figurer.

Vi skal først se på, hvorfor det lige netop for trekanter gælder, at *ensvinklet* dækker over præcis det samme som *ligedannet*. Det gælder nemlig ikke for andre polygoner (mangekanter):

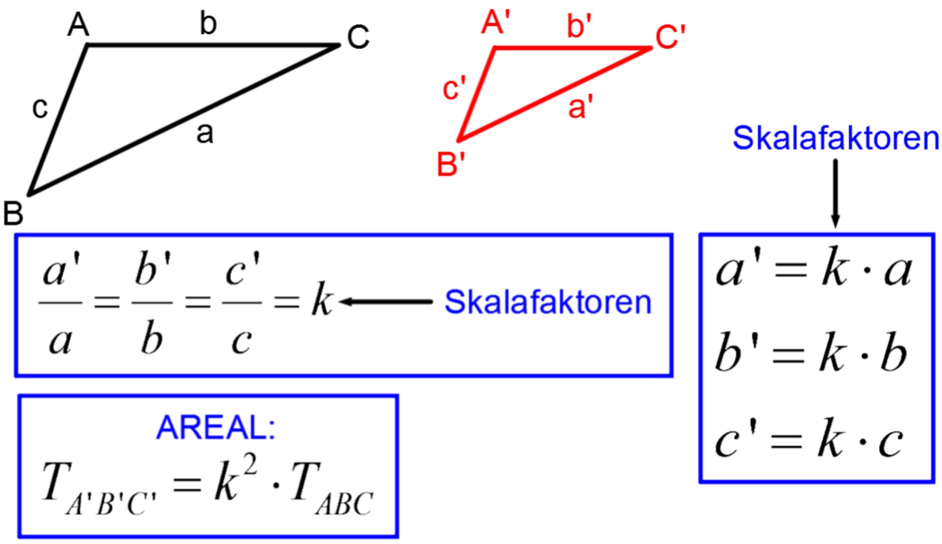


Da det altid gælder, at hvis to figurer er ligedannede, er de også ensvinklede (fordi det jo ligger i ligedannethed, at formen forbliver den samme), så skal vi bare have argumenteret for, at når det gælder trekanter, så vil de ensvinklede også være ligedannede.



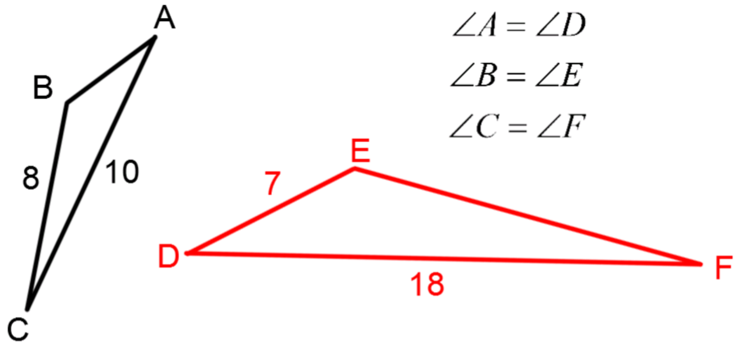
Ensvinklede trekanter er altså ligedannede, og dermed gælder følgende:

Sætning 4: Lad $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ med $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ og $\angle C = \angle C'$. Der gælder så:



Her følger en række eksempler på opgaver eller problemstillinger, der involverer ligedannede figurer – herunder ensvinklede trekanter.

Eksempel 2: Det oplyses, at $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Nogle af sidelængderne er angivet på figuren, og vi vil nu bestemme de resterende. Det er oplyst hvilke vinkler, der er lige store.



$$\angle A = \angle D$$
$$\angle B = \angle E$$
$$\angle C = \angle F$$

Først skal man identificere de korresponderende linjestykker. Det er dem, der ligger over for de lige store vinkler. Dvs. man har, at *AC* er korresponderende med *DF*, og *BC* er korresponderende med *EF*, og endelig er *AB* korresponderende med *DE*. Der gælder derfor:

$\frac{|DF|}{|AC|} = \frac{|EF|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|AB|} = k$ eller med kendte værdier indsat $\frac{18}{10} = \frac{|EF|}{8} = \frac{7}{|AB|} = k$

Vi kan nu ud fra dette udregne flere forskellige ting:

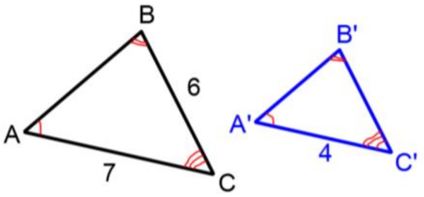
$\frac{18}{10} = \frac{|EF|}{8} \Leftrightarrow |EF| = 8 \cdot \frac{18}{10} = 8 \cdot \frac{9}{5} = \underline{\underline{\frac{72}{5}}}$ Dette var den manglende sidelængde i den røde trekant.

$\frac{18}{10} = \frac{7}{|AB|} \Leftrightarrow \frac{10}{18} = \frac{|AB|}{7} \Leftrightarrow |AB| = 7 \cdot \frac{10}{18} = 7 \cdot \frac{5}{9} = \underline{\underline{\frac{35}{9}}}$ Den manglende sidelængde i trekant *ABC*.

$k = \frac{18}{10} = \underline{\underline{\frac{9}{5}}}$ Dette er skalafaktoren, og dermed er $T_{DEF} = k^2 \cdot T_{ABC}$,dvs. $T_{DEF} = \left(\frac{9}{5}\right)^2 \cdot T_{ABC} = \frac{81}{25} \cdot T_{ABC}$

Eksempel 3: I denne opgave har vi i to ensvinklede trekanter fået nedenstående oplysninger – heriblandt arealet af trekant *ABC*.

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$
$$T_{ABC} = 17$$



Vi ønsker nu at bestemme længden af siden *B'C'* samt at bestemme arealet af trekant *A'B'C'*.

Vi søger det korresponderende sidepar, hvor vi kender begge længder, og som vi derfor kan bruge til at bestemme skalafaktoren. Det er siderne *AC* og *A'C'*. Med udgangspunkt i den sorte trekant *ABC*, får man:

$$k = \frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{4}{7}$$

Når vi kender skalafaktoren, kan vi beregne den søgte sidelængde og det søgte areal:

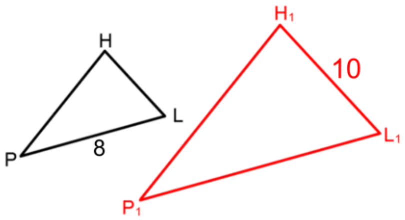
$$|B'C'| = \frac{4}{7} \cdot |BC| = \frac{4}{7} \cdot 6 = \underline{\underline{\frac{24}{7}}}$$

$$T_{A'B'C'} = k^2 \cdot T_{ABC} = \left(\frac{4}{7}\right)^2 \cdot 17 = \frac{16}{49} \cdot 17 = \underline{\underline{\frac{272}{49}}}$$

Eksempel 4: I nedenstående ensvinklede trekanter, hvor de ens vinkler er angivet med ens bogstaver, har vi fået oplyst to sidelængder og to arealer.

$T_{H_1L_1P_1} = 60$

$T_{HLP} = 15$



Vi ønsker at bestemme længderne af siderne *HL* og *L₁P₁* samt højden fra *H₁* i trekant *H₁L₁P₁*.

Vi søger igen korresponderende linjestykker, hvor vi kender længderne af begge, men ak, her bliver vi hurtigt skuffede. Vi har ikke sådan et korresponderende par, som vi ellers ville have benyttet til at finde skalafaktoren.

Heldigvis opdager vi, at vi kender arealerne af begge trekanter, og derfor kan disse benyttes til at finde skalafaktoren. Med udgangspunkt i den sorte trekant får man:

$$T_{H_1L_1P_1} = k^2 \cdot T_{HLP} \quad \text{dvs. } 60 = k^2 \cdot 15 \Leftrightarrow k^2 = \frac{60}{15} = 4 \Leftrightarrow k = \pm 2$$

Da skalafaktoren ikke kan være negativ, forkastes den negative løsning, og vi ved dermed, at $k = 2$.

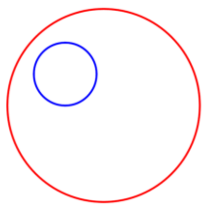
Så er: $|H_1L_1| = k \cdot |HL| \Leftrightarrow |HL| = \frac{|H_1L_1|}{k} = \frac{10}{2} = \underline{\underline{5}}$

Desuden er: $|L_1P_1| = k \cdot |LP| = 2 \cdot 8 = \underline{\underline{16}}$

Da L_1P_1 er den grundlinje, der hører samme med højden fra H_1 i arealformlen $T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$, har vi:

$$T_{H_1L_1P_1} = \frac{1}{2} \cdot h_{H_1} \cdot |L_1P_1| \Leftrightarrow h_{H_1} = \frac{2 \cdot T_{H_1L_1P_1}}{|L_1P_1|} \quad \text{dvs. } h_{H_1} = \frac{2 \cdot 60}{16} = \underline{\underline{\frac{15}{2}}}$$

Eksempel 5: Alle cirkler er ligedannede. Arealet af nedenstående røde cirkel er 63, mens arealet af den blå cirkel er 7.



Hvor mange gange længere er radius i den røde cirkel end radius i den blå cirkel?
Hvor mange gange længere er omkredsen af den røde cirkel end af den blå cirkel?

Først kan man bemærke, at svaret på de to spørgsmål er ens, og at det er skalafaktorens værdi, der er svaret. For både radius og omkreds er linjer, og skalafaktoren fortæller netop hvor mange gange, linjerne er forstørret. Da cirklerne er ligedannede, kan vi bruge deres arealer til at finde skalafaktoren med udgangspunkt i den blå cirkel:

$$A_{rød} = k^2 \cdot A_{blå} \Leftrightarrow k^2 = \frac{A_{rød}}{A_{blå}}$$ Da k er positiv, gælder:

$$k = \sqrt{\frac{A_{rød}}{A_{blå}}} = \sqrt{\frac{63}{7}} = \sqrt{9} = 3$$

Dvs. at både radius og omkreds i den røde cirkel er 3 gange større end de tilsvarende størrelser i den blå cirkel.

Eksempel 6: Kuglerne *A* og *B* har radierne henholdsvis $r_A = 4$ og $r_B = 2$.

Hvor store er kuglernes rumfang i forhold til hinanden?

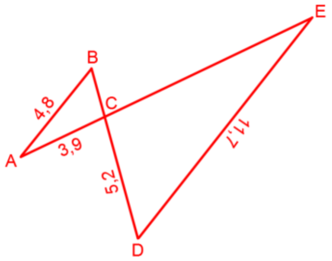
Det bemærkes først, at alle kugler er ligedannede.

Med udgangspunkt i kugle *A* er skalafaktoren $k = \frac{r_B}{r_A} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Dermed er sammenhængen mellem rumfangene:

$$V_B = k^3 \cdot V_A \qquad \text{dvs.} \qquad V_B = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot V_A \Leftrightarrow \underline{\underline{V_B = \frac{1}{8} \cdot V_A}}$$

Eksempel 7: Det oplyses, at $AB \,||\, DE$, $|AB| = 4,8$, $|AC| = 3,9$, $|CD| = 5,2$ og $|DE| = 11,7$.



Der skal argumenteres for, at trekanterne *ABC* og *CDE* er ensvinklede, og de manglende sidelængder skal bestemmes. Desuden ønskes det angivet, hvordan de to arealer forholder sig til hinanden.

Det helt centrale i denne opgave er, at linjestykker *AB* og *DE* er parallelle. Hvis de ikke var det, ville der ikke være tale om ensvinklede trekanter.

Vi skal have argumentet for, at de to trekanter har de samme vinkler.

Vinklerne *A* og *E*: Det bemærkes, at vinklerne *A* og *E* er vekselvinkler (alternatvinkler), da linjestykket *AE* - hvis alle linjestykkerne forlænges – skærer linjestykkerne *AB* og *DE*. Og da $AB \,||\, DE$, er vekselvinklerne lige store. Dermed har man altså $\angle A = \angle E$.

Vinklerne *B* og *D*: Disse to vinkler er også vekselvinkler og lige store, da linjestykket *BD* skærer de parallelle linjestykker *AB* og *DE*. Dvs. $\angle B = \angle D$.

Vinklerne $\angle ACB$ og $\angle DCE$ er topvinkler og derfor lige store.

Vi har hermed argumenteret for, at trekanterne er ensvinklede.

Vi er desuden kommet frem til:

AC og *CE* er korresponderende linjestykker.
BC og *CD* er korresponderende linjestykker.
AB og *DE* er korresponderende linjestykker.

Vi har altså: $\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|CE|}{|AC|} = \frac{|CD|}{|BC|} = k$ eller med tal $k = \frac{11,7}{4,8} = \frac{|CE|}{3,9} = \frac{5,2}{|BC|}$

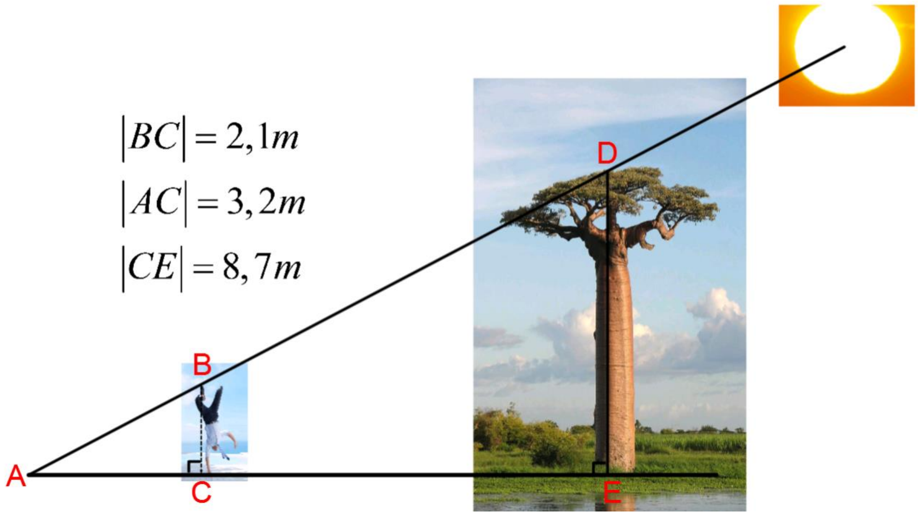
Dette benyttes til at finde de søgte svar:

$$\frac{11,7}{4,8} = \frac{|CE|}{3,9} \Leftrightarrow |CE| = \frac{11,7}{4,8} \cdot 3,9 = \underline{\underline{9,5}}$$

$$\frac{11,7}{4,8} = \frac{5,2}{|BC|} \Leftrightarrow \frac{4,8}{11,7} = \frac{|BC|}{5,2} \Leftrightarrow |BC| = \frac{4,8}{11,7} \cdot 5,2 = \underline{\underline{2,1}}$$

$$k^2 = \left(\frac{11,7}{4,8}\right)^2 = 5,9 \qquad \text{dvs.} \quad \underline{\underline{T_{CDE} = 5,9 \cdot T_{ABC}}}$$

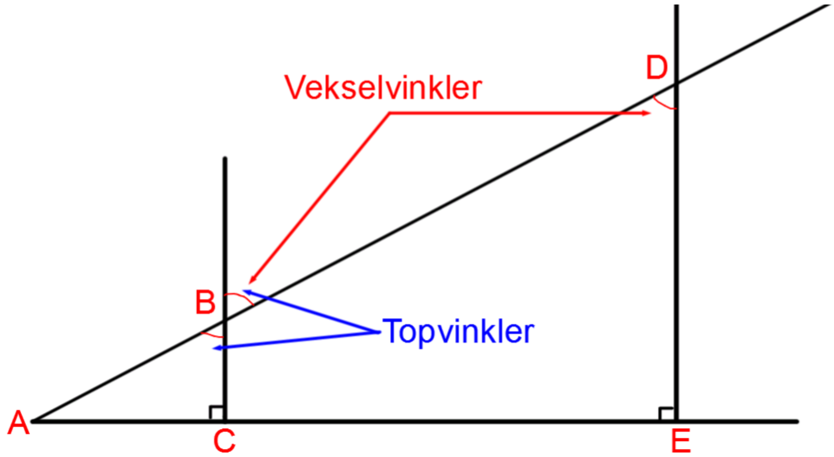
Eksempel 8: En glad mand vil bestemme højden af et baobabtræ. En skitse af situationen med målte størrelser ses her:



Pointen med metoden er, at manden og træet kaster skygger, der ender samme sted (i punktet *A*), og med et målebånd er man i stand til at bestemme de angivne størrelser.

Vi ser, at de to trekanter er ensvinklede, for de er begge retvinklede, og de deler vinkel *A*. Da de altså har to ens vinkler, må de også have tre ens vinkler (da alle trekanter har samme vinkelsum – nemlig 180°). Man kan sige, at der er to *frihedsgrader*, når man skal vælge størrelser på vinkler i en trekant. For godt nok er der tre vinkler, men du kan kun vælge to af dem frit, da den sidste følger entydigt af valget af de to første. Begrebet *frihedsgrader* spiller bl.a. en rolle inden for statistik.

Man kan også argumentere for, at $\angle ABC = \angle BDE$ (se nedenstående figur):



Da linjerne *BC* og *DE* står vinkelret på den samme linje *AE*, er de parallelle, og derfor er de angivne vekselvinkler lige store. Og da de angivne topvinkler også er lige store, er $\angle ABC = \angle BDE$.

Vi er nu klar til at bestemme højden af træet, og vi vil benytte de to ensvinklede trekanter *ABC* og *ADE*, hvor *AC* er korresponderende med *AE*, og hvor *BC* er korresponderende med *DE*.

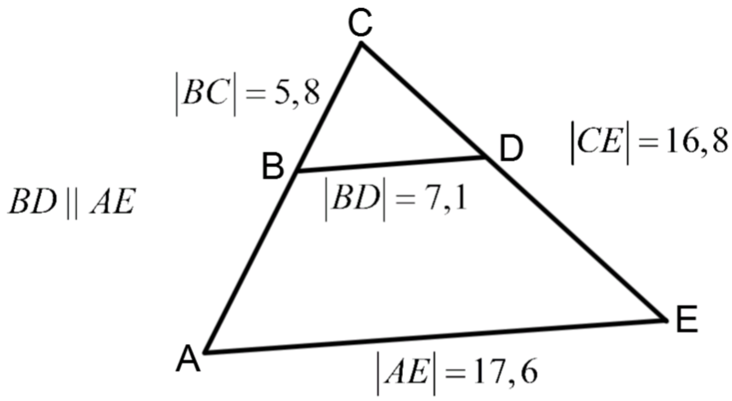
Det er vigtigt at bemærke, at det er længden af *CE*, vi har fået oplyst, og altså ikke længden af *AE*, som ellers er den, vi skal bruge. Men da $|AE| = |AC| + |CE|$, kan vi beregne denne sidelængde:

$$\frac{|DE|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|AC|} \quad \text{dvs.} \quad \frac{|DE|}{|BC|} = \frac{|AC|+|CE|}{|AC|} \Leftrightarrow |DE| = \frac{|AC|+|CE|}{|AC|} \cdot |BC|$$

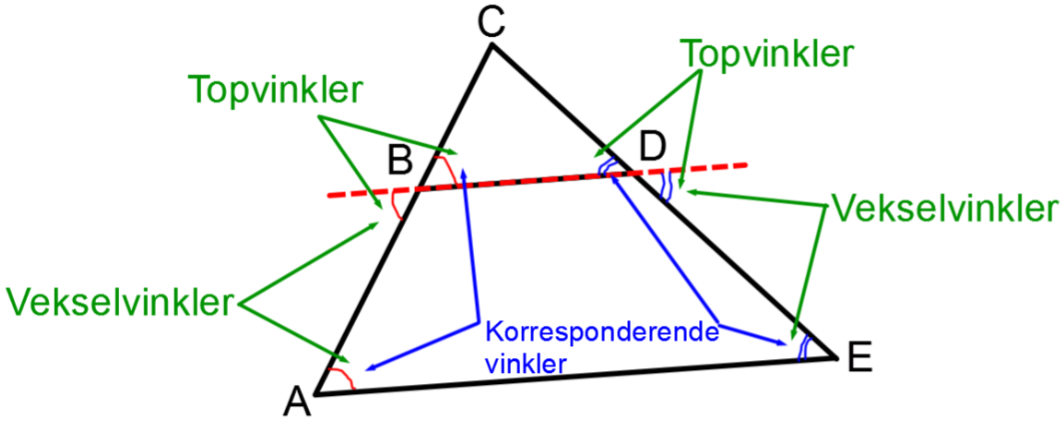
$$|DE| = \frac{3,2m + 8,7m}{3,2m} \cdot 2,1m = \underline{\underline{7,8m}}$$

Eksempel 9: På nedenstående figur er angivet en del informationer.

Vi ønsker at bestemme længden af *AB*, længden af *CD* og forholdet mellem trekanternes arealer.



Det er oplyst, at linjestykkerne *AE* og *BD* er parallelle. Derfor er $\angle CBD = \angle BAE$ og $\angle CDB = \angle DEA$ (se figuren):



Desuden deler de to trekanter vinklen *C*, og de er derfor ensvinklede.
Da *BD* og *AE* er korresponderende linjestykker, kan de bruges til at finde skalafaktoren:

$$k = \frac{|AE|}{|BD|} = \frac{17,6}{7,1} = 2,478873239$$

Dvs. forholdet mellem trekanterne areal er $k^2 = 2,478873239^2 = \underline{\underline{6,144812535}}$

CD og *CE* er korresponderende sider, så:

$$k = \frac{|CE|}{|CD|} \Leftrightarrow |CD| = \frac{|CE|}{k} \quad \text{dvs.} \quad |CD| = \frac{16,8}{2,478873239} = 6,777272728 \approx \underline{\underline{6,8}}$$

Det skal bemærkes, at man søger længden af linjestykket *AB*, der ikke er en side i nogen af trekanterne. Men hvis man finder længden af *AC*, der er en del af den store trekant, kan man efterfølgende beregne længden af *AB*.

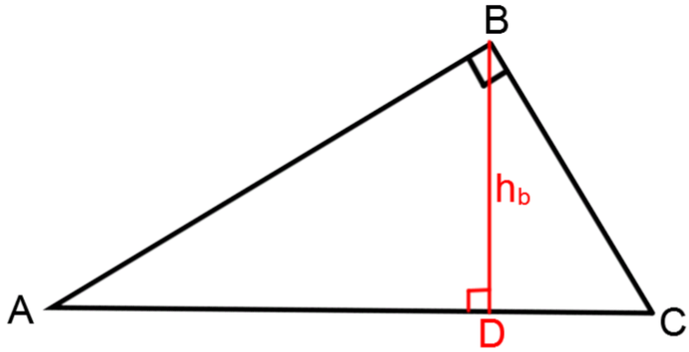
$$k = \frac{|AC|}{|BC|} \Leftrightarrow |AC| = k \cdot |BC| \quad \text{dvs.} \quad |AC| = k \cdot |BC| = 2,478873239 \cdot 5,8 = 14,37746479$$

Så er: $|AB| = |AC| - |BC| = 14,37746479 - 5,8 = 8,57746479 \approx \underline{\underline{8,6}}$

Opgaverne 203*

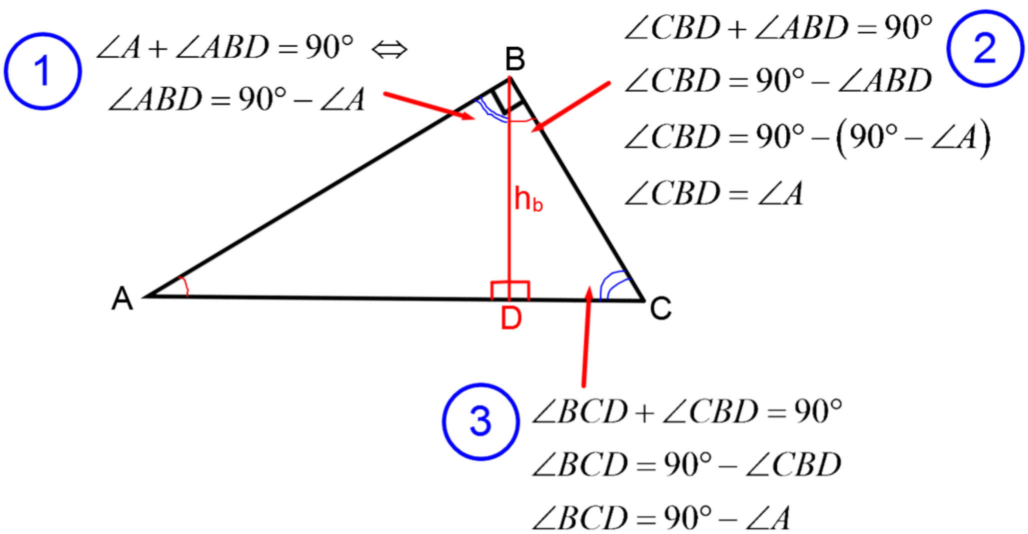
Det følgende eksempel er vigtigt af mindst to grunde. Vi skal bruge det til at bevise Pythagoras' Læresætning, og det indeholder nogle argumenter angående vinkler, som du kan få brug for i mange forskellige problemstillinger inden for matematik og fysik.

Eksempel 10: Trekant *ABC* er retvinklet med den rette vinkel ved *B*:



Vi nedfælder højden fra den rette vinkel *B* og deler dermed den retvinklede trekant *ABC* i trekanterne *ABD* og *BCD*, der også er retvinklede, da højden pr. definition står vinkelret på siden *AC*.

Der ønskes nu en argumentation for, at de tre retvinklede trekanter også er ensvinklede.



Vi ser først på $\angle ABD$. Da vinkelsummen i en trekant er 180°, og da der allerede er brugt 90° til den rette vinkel, er der 90° tilbage til $\angle ABD$ og $\angle A$, og de er derfor komplementære vinkler. Dvs. $\angle ABD = 90° - \angle A$.

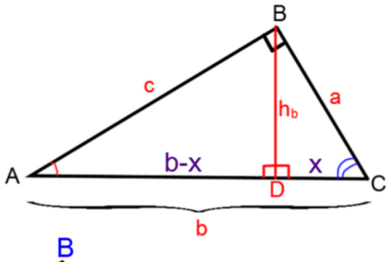
Derefter ses på $\angle CBD$. Da $\angle ABD + \angle CBD = \angle ABC$, og da $\angle ABC = 90°$, bliver: $\angle CBD = 90° - \angle ABD = 90° - (90° - \angle A) = \angle A$

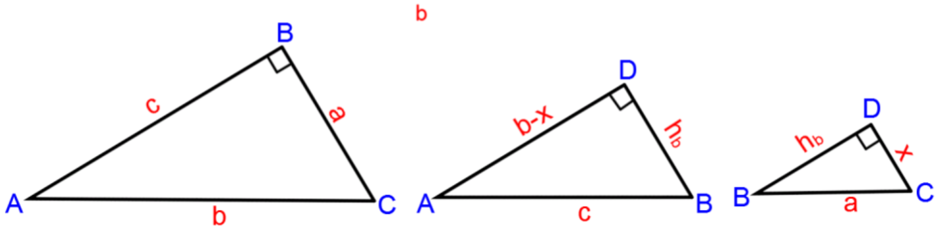
Til sidst ses det, at $\angle BCD = 90° - \angle A$, da man igen har to vinkler, der tilsammen skal give 90°.

Vi har altså tre trekanter, der alle er retvinklede og desuden har en vinkel af samme størrelse som $\angle A$ samt en vinkel på $90° - \angle A$.

I næste eksempel arbejdes videre med disse tre trekanter, som vi vil bruge til at bevise Pythagoras' Læresætning:

Eksempel 11: Vi splitter vores oprindelige trekant op i de tre ensvinklede trekanter og placerer dem, så man nemt kan aflæse de korresponderende sider. Desuden noteres alle de sidelængder, der fremgår af den oprindelige trekant, og den ukendte længde $|CD|$ kaldes x. Dermed får linjestykket AD længden $b-x$.





Vi kan naturligvis danne et hav af forskellige forhold mellem korresponderende linjestykker, men til vores formål har vi ikke brug for så mange. Vi ser først på trekanterne ABC og ABD, hvor vi får:

$$\frac{b-x}{c}=\frac{c}{b} \quad \Leftrightarrow \quad b\cdot(b-x)=c\cdot c \Leftrightarrow b^2-b\cdot x=c^2$$

Trekanterne ABC og BCD giver os:

$$\frac{b}{a}=\frac{a}{x} \quad \Leftrightarrow \quad b\cdot x=a\cdot a \Leftrightarrow b\cdot x=a^2$$

Det sidste udsagn fortæller os, hvad $b\cdot x$ er, og det indsættes ovenfor, så man får:

$$b^2-a^2=c^2 \Leftrightarrow \boxed{a^2+c^2=b^2}$$

Da B var vores rette vinkel, har vi hermed vist, at hvis trekanten er retvinklet, vil summen af kvadraterne på de to korteste sider (kaldet kateter) være lig kvadratet på den længste side (kaldet *hypotenusen*).

Eksempel 12: Vi har i eksempel 11 vist, at hvis en trekant er retvinklet med den rette vinkel C, så gælder $a^2+b^2=c^2$ (forskellen på de to udsagn skyldes, at den rette vinkel nu er betegnet med et andet bogstav).

Vi har ikke vist, at hvis vi har en trekant med sidelængderne a, b og c, der opfylder $a^2+b^2=c^2$, så er den også retvinklet.

Tænk grundigt over forskellen på de to ting.

Men som Euklid viste i sætning 22 i bog 1, og som vi snart skal vise, så kan man entydigt konstruere en trekant, hvis man kender de tre sidelængder (dvs. alle de trekanter, man kan konstruere ud fra tre sidelængder, vil være kongruente).

Dette kan vi bruge til at argumentere for det ønskede:

Antag, at vi har en trekant med sidelængderne a, b og c, der opfylder $a^2+b^2=c^2$.
Se så på den retvinklede trekant, du kan konstruere ved at lade a og b danne den rette vinkel.

Da denne trekant er retvinklet, vil dens sidste sidelængde d opfylde $a^2+b^2=d^2$.
Men heraf følger, at $c=d$, og dermed har de to trekanter samme sidelængder, og altså er de kongruente og dermed begge retvinklede.

KONSTRUKTIONER MED PASSER OG LINEAL

I dette afsnit skal vi beskæftige os med trekanter, særlige linjer og cirkler. Vi skal både analysere os frem til en masse karakteristiske egenskaber ved disse og konstruere dem med passer og lineal.

Det er derfor vigtigt med det samme at få præciseret, hvad en *passer* og en *lineal* kan. For du skal være opmærksom på, at det, man normalt kalder for en lineal, og som anvendes til at sætte rette linjer og måle længden af linjestykker, faktisk er en blanding af en lineal og en målestok. En lineal kan nemlig kun én ting.

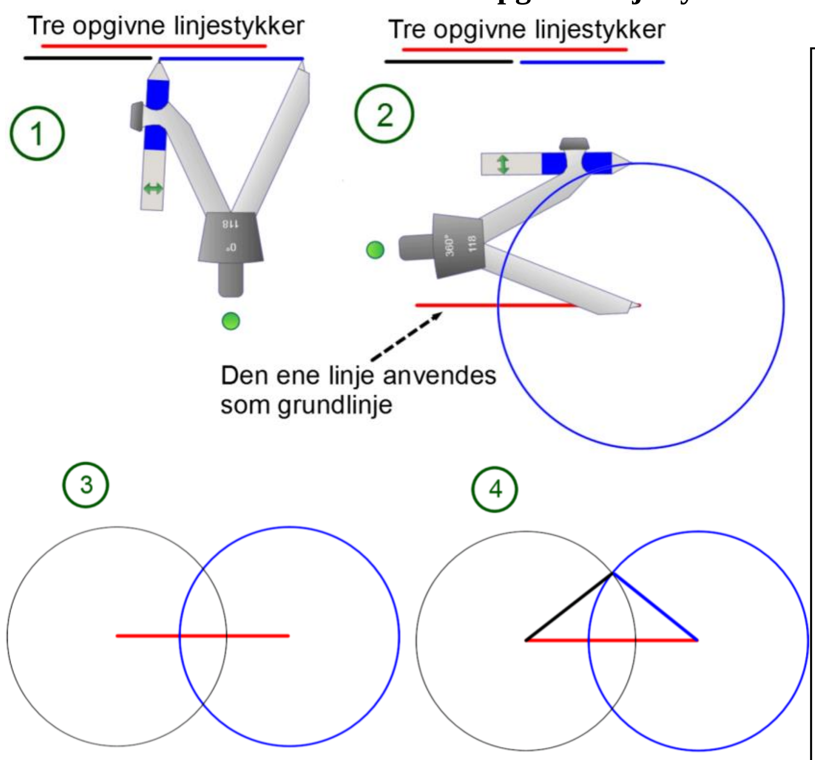
Passer og lineal:

- En passer kan afsætte punkter med en bestemt afstand fra et givet punkt.
- En lineal kan forbinde to punkter med en ret linje og forlænge en ret linje.

En passer bruges til at overføre bestemte afstande samt at tegne cirkler eller cirkelbuer.
Bemærk, at du med en lineal IKKE kan måle afstande. Du kan KUN tegne rette linjer.

Lad os som den første konstruktion tage konstruktionen af en trekant ud fra tre opgivne linjestykker (Euklids sætning 22).

Konstruktion af trekant ud fra tre opgivne linjestykker:



1: Vi har fået givet tre linjestykker, hvor ingen af linjestykkerne er længere end de to andre tilsammen. Passeren justeres efter den ene sidelængde.

2: En anden sidelængde anvendes som grundlinje, og vi bruger nu passeren til at overføre vores ene sidelængde til en cirkel, der tegnes med centrum i grundlinjens ene endepunkt.

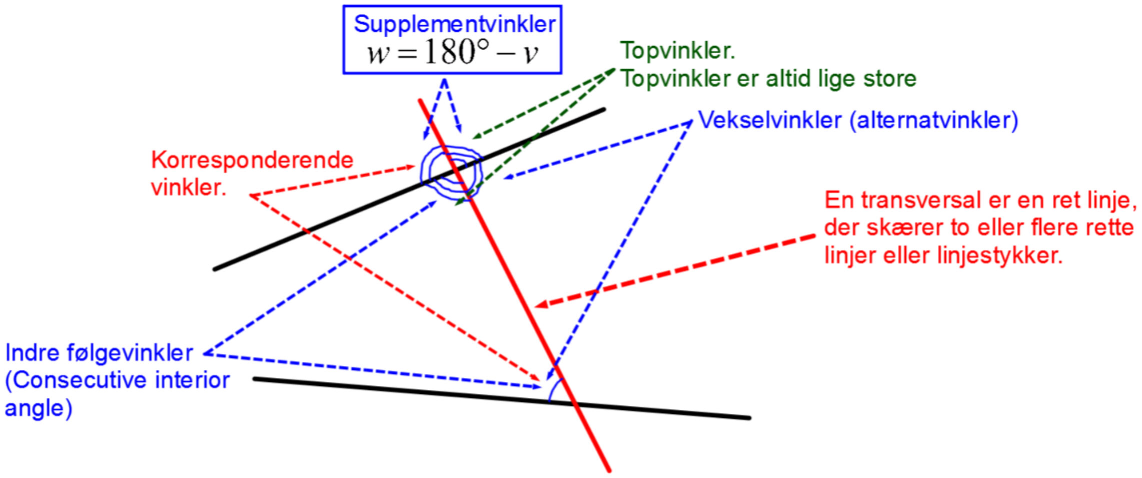
3: Fra grundlinjens andet endepunkt tegnes en cirkel med radius svarende til længden af det sidste linjestykke.

4: Trekanten tegnes nu ved at forbinde grundlinjens endepunkter med det ene af cirklernes skæringspunkter.

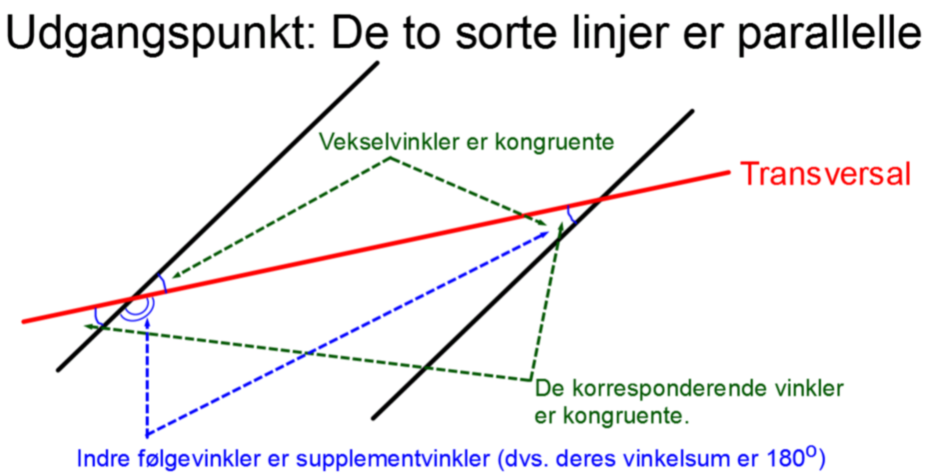
Bemærk entydigheden i konstruktionen. Man kan godt nok til sidst anvende det andet af cirklernes skæringspunkter, men denne anden mulige trekant er blot et spejlbillede af den første, dvs. de to muligheder er kongruente.

Linjer og linjer i forbindelse med vinkler og trekanter

Vi indleder med en oversigt over nogle navne, der delvis er en repetition:

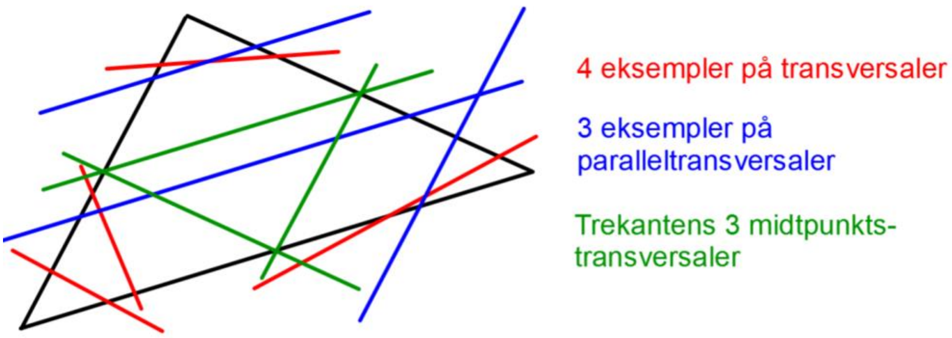


Flere af ovenstående vinkler bliver specielt interessante, når man tager udgangspunkt i 2 parallelle linjer. Hvis vi samler op på Euklids beviste sætninger og vores argumentation i nogle af de gennemgåede eksempler, har vi (lige store vinkler siges at være *kongruente*):



Transversaler i trekanter:

Man kan tegne uendeligt mange transversaler i trekanter. De mest interessante er paralleltransversaler – som der også er uendeligt mange af – og midtpunktstransversaler, som der er tre af, og som vi snart skal vise hører til blandt paralleltransversalerne.

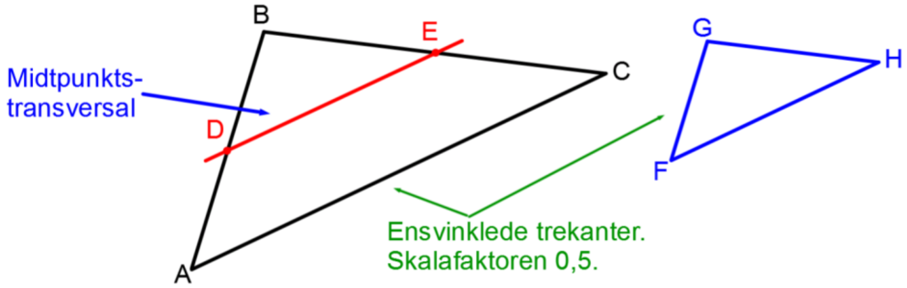


Definition 6: En *paralleltransversal* i en trekant er en transversal, der er parallel med en af siderne.
En *midtpunktstransversal* i en trekant er en transversal, der går gennem midtpunkterne på to af trekantens sider.

Som vi så i Eksempel 9, danner paralleltransversalerne ensvinklede trekanter, når de indtegnes i en trekant, og vi har allerede behandlet et sådant tilfælde.
Vi skal nu se på midtpunktstransversalerne:

Sætning 5 (om midtpunktstransversaler): Midtpunktstransversalerne i en trekant er paralleltransversaler, og de danner trekanter, der er ensvinklede med den oprindelige trekant, og hvor skalafaktoren er $\frac{1}{2}$ (med udgangspunkt i den oprindelige trekant).

Bevis 5: Vi vil bruge Euklids 4. sætning fra bog 1 i vores bevis (den som siger, at hvis to trekanter har to sider og den mellemliggende vinkel ens, så er de kongruente).

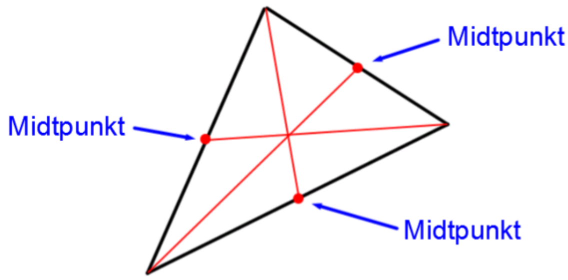


Lad $\triangle ABC$ være vores trekant. I denne trekant konstrueres den midtpunktstransversal, der går gennem midtpunkterne D og E på siderne AB og BC. På den måde dannes $\triangle BDE$.
Vi danner desuden $\triangle FGH$ ved at skalere $\triangle ABC$ ned ved at anvende skalafaktoren 0,5.
Vi vil nu sammenligne de to små, dannede trekanter $\triangle BDE$ og $\triangle FGH$:
Da D og E er midtpunkter på siderne AB og BC, og da $\triangle FGH$ netop er ligedannet med vores oprindelige trekant og skalafaktoren er 0,5, er $|BD| = |FG|$ og $|BE| = |GH|$. Desuden er $\angle B = \angle G$ (da $\triangle ABC \sim \triangle FGH$). Dvs. ifølge Euklids sætning 4 er trekanterne altså kongruente ($\triangle BDE \cong \triangle FGH$).
Dermed er $\triangle BDE$ og $\triangle ABC$ ensvinklede, og dermed er $DE \parallel AC$, dvs. linjen gennem DE er en paralleltransversal.

Medianer i trekanter:

Definition 7: En *median* i en trekant er et linjestykke, der forbinder en vinkelspids med midtpunktet på den modstående side.

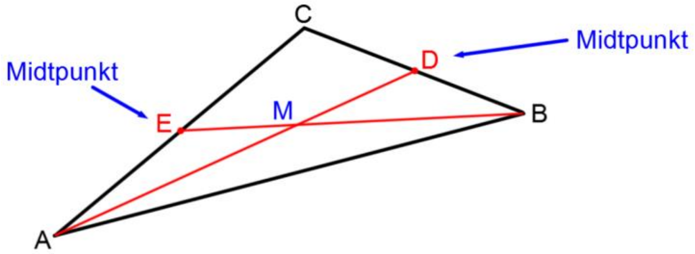
Der er altså tre medianer i en trekant. Udover at lægge mærke til, hvad en median er, er det også meget væsentligt at bemærke, hvad der IKKE gælder i forbindelse med medianer.
Som udgangspunkt vil en median IKKE halvere den vinkel, hvis vinkelspids den udgår fra.
Og som udgangspunkt står en median IKKE vinkelret på den modstående side.

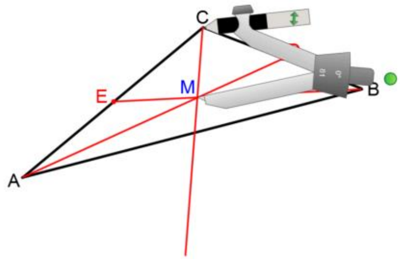


Sætning 6: Medianerne i en trekant skærer hverandre i ét punkt, der deler medianerne i forholdet 2:1 målt fra vinkelspidsen.
Hver af medianerne deler trekanten i to trekanter med samme areal, og de tre medianer deler tilsammen trekanten i seks trekanter med samme areal.
Medianernes skæringspunkt er for trekanter med homogen massefordeling massemidtpunktet for trekanten og kaldes *Det Geometriske Centrum*.

Kig på figuren ovenfor (på forrige side) og forstå betydningen af sætningen. I første omgang viser vi kun første del af sætningen. Resten af beviset udskydes, til vi har gennemgået, hvad en *højde* er.

Bevis 6: Vi finder midtpunkterne *D* og *E* af siderne *BC* og *AC*, og vi tegner derefter medianerne fra *A* og *B*. Disse to linjer skærer i et punkt, som vi kalder *M*.
Vi benytter nu vores lineal og tegner fra punktet *C* en ret linje gennem *M*. Derefter afmåler vi længden af linjestykket *CM* med vores passer.

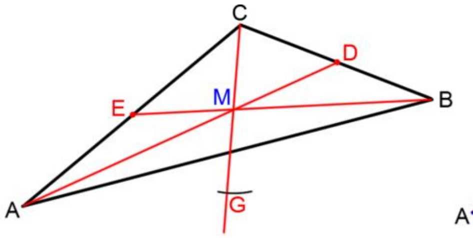


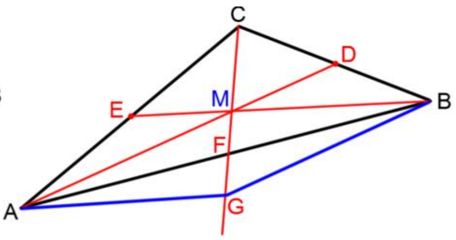


Bemærk, at vi endnu IKKE ved noget om, hvorvidt linjen gennem *C* og *M* er en median. Det er indtil videre bare en linje, vi har tegnet fra en vinkelspids og gennem de 2 medianers skæringspunkt. Vi skal i vores bevis argumentere for, at linjen gennem *C* og *M* også er en median.

Med passeren afsættes nu et punkt *G*, så $|CM| = |GM|$.

Så forbindes punkterne *A* og *B* med *G*, og vi kalder linjen fra *C*'s skæringspunkt med *AB* for *F*.





I første omgang vil vi argumentere for, at $\square AMBG$ er et parallelogram.
For at gøre dette ses på $\triangle BCG$. Punktet *D* er midtpunktet af siden *BC*, og vores konstruktion med passeren gjorde, at *M* endte med at være midtpunktet af siden *CG*. Hermed er linjestykket *DM* en del af en midtpunktstransversal, der ifølge vores forrige sætning også er en paralleltransversal, hvor $MD \parallel BG$. Da linjestykket *DM* er en del af den samme linje som linjestykket *AM*, gælder dermed også $AM \parallel BG$. Vi har altså nu vist, at to af siderne i $\square AMBG$ er parallelle.

Præcis samme argumentationsrække kan gennemføres på $\triangle ACG$ (prøv selv!), og det fører frem til, at $AG \parallel BM$.

Vi har dermed vist, at $\square AMBG$ er et parallelogram.

Spørgsmålet er så, hvor hurtigt vi skal afslutte beviset herfra. Det gælder, at diagonalerne i et parallelogram deler hinanden på midten, og dermed er *F* midtpunktet på siden *AB*, hvormed vi har vist, at linjestykket *CF* er en median, og at de tre medianer altså skærer i ét punkt (her kaldet *M*).

Da *F* også er midtpunktet af *GM*, og da $|CM| = |GM|$, har vi som nævnt i sætningen, at

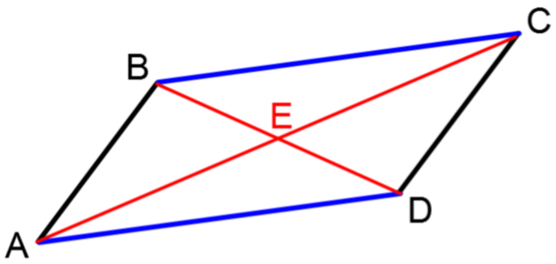
$|CM| = 2 \cdot |FM|$. Dette er den hurtige måde at afslutte beviset.

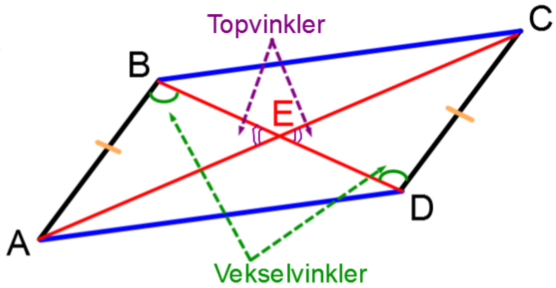
Som sagt var ovenstående en hurtig måde at afslutte beviset. Men man skal passe lidt på med at henvise til sætninger, som man ikke kender baggrunden for. For forestil dig, at man skulle bruge sætningen om medianerne til at bevise, at diagonalerne i et parallelogram delte hinanden på midten, hvorefter vi har brugt denne sætning om diagonalerne til at bevise sætningen om medianerne. Så har vi lavet en cirkelslutning og faktisk ikke bevist noget som helst.
Det er den slags, Euklid er meget omhyggelig med at undgå, og i praksis SKAL man undgå den slags, da det er en ubrugelig argumentation.

Så lad os da lige bevise sætningen om diagonalerne i et parallelogram uden at anvende den netop viste sætning:

Sætning 7: I et parallelogram deler diagonalerne hinanden på midten.

Bevis 7: Lad $\square ABCD$ være et parallelogram, hvor $AB \parallel CD$ og $BC \parallel AD$.
Med vores lineal tegner vi diagonalerne, og deres skæringspunkt kaldes E.





Se på $\triangle ABE$ og $\triangle CDE$. Da $AB \parallel CD$, gælder om vekselvinklerne: $\angle ABD = \angle BDC$.
Og vi har – som vist på figuren – to vinkler i de to trekanter, der er topvinkler. Da trekanterne har to par ens vinkler, er de sidste vinkler i trekanterne også lige store (da de har samme vinkelsum). Trekanterne er dermed ensvinklede, og da de to korresponderende linjestykker AB og CD i trekanterne er lige lange (Euklids sætning 34), er skalafaktoren 1, dvs. $\triangle ABE \cong \triangle CDE$.
Da BE og DE samt AE og CE er korresponderende linjestykker og dermed parvis lige store (da $k = 1$), er E midtpunktet af begge linjestykkerne BD og AC.

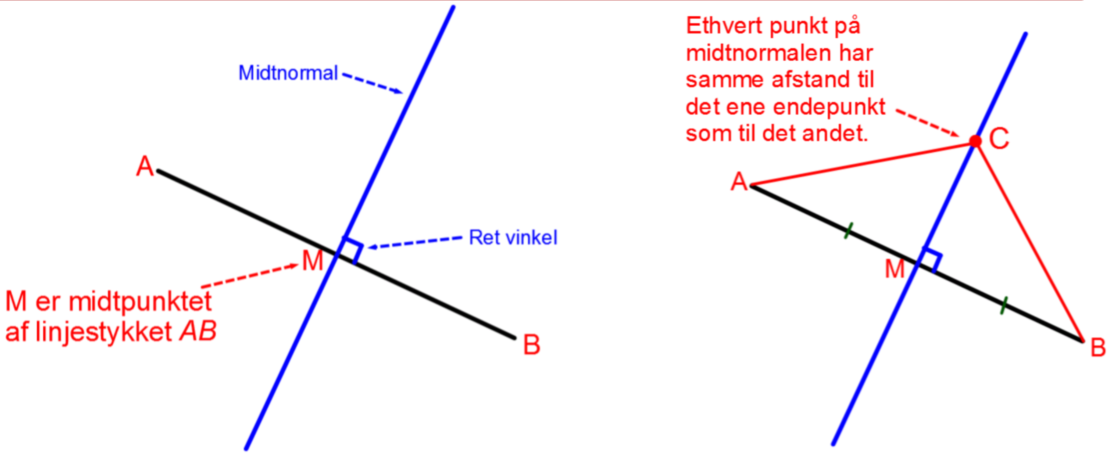
I beviserne for både medianer og midtpunktstransversaler har vi fundet midtpunkter på linjestykker. Men vi har faktisk ikke vist, hvordan det kan gøres med passer og lineal, og en meget vigtig pointe ved de geometriske beviser er netop, at man kan konstruere alle de punkter og linjer, der bruges i beviserne.
Derfor skal vi nu se på, hvordan man med passer og lineal kan finde midtpunktet af et linjestykke (Euklids 10. sætning).
Vi gør det dog samtidig med, at vi også viser, hvordan man konstruerer en midtnormal. Så først skal vi lige have defineret, hvad det er for en linje:

Definition 8: Givet et linjestykke, er en *midtnormal* en ret linje, der står vinkelret på det givne linjestykke og går gennem dets midtpunkt.

Bemærk selve navnet. En *normal* er en linje, der står vinkelret på en overflade. I møder det i fysik, hvor *normalkraften* er en kraft med retning vinkelret på underlaget. Og *midt* henviser til linjestykkets midtpunkt.

For punkterne på en midtnormal gælder:

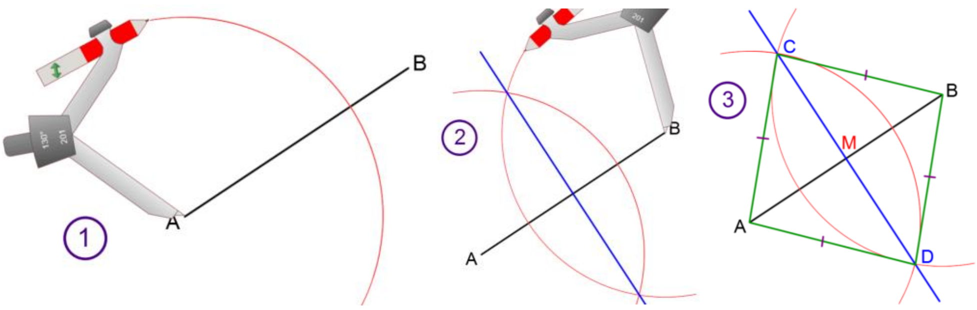
Sætning 8: En midtnormal består af alle punkter, der har ens afstand til hvert af det givne linjestykkes endepunkter.



Bevis 8: Se på figurerne ovenfor. På figuren til højre er trekanterne *ACM* og *BCM* retvinklede, og de deler siden *CM*. Da *M* ligger midt mellem *A* og *B*, gælder desuden $|AM| = |BM|$. De to trekanter har altså to par af lige lange sider og har ens vinkler dannet af disse sider, og dermed er de kongruente (Euklids 4. sætning). Derfor er $|AC| = |BC|$. Og bemærk, at *C* er et vilkårligt punkt på midtnormalen, så denne sammenhæng gælder for alle punkter på midtnormalen. Ethvert punkt uden for midtnormalen vil have kortest afstand til det punkt, der ligger på samme side af midtnormalen.

Lad os nu se på konstruktionen af en midtnormal, der ifølge definitionen på en midtnormal samtidig vil give os konstruktionen af midtpunktet af et linjestykke.

Konstruktion af midtnormal på givet linjestykke:
Lad *AB* være det givne linjestykke.
1: Med en passer tegnes en cirkelbue med centrum i *A* og en radius, der er mere end halvt så lang som linjestykket *AB*.



2: Med centrum i *B* tegnes en cirkelbue med SAMME RADIUS som den første cirkelbue. Med en lineal tegnes en linje gennem cirklernes to skæringspunkter. Dette er vores midtnormal, fordi …
3: Vi forbinder punkterne som vist og får nu $\square ACBD$, hvor alle sider er lige lange. Dvs. det er en rombe og dermed også et parallelogram. Dermed ved vi, at diagonalerne deler hinanden midt over, så *M* ligger midt mellem *A* og *B*. Dermed har trekanterne *ACM* og *BCM* lige lange sider og er dermed kongruente. Derfor er $\angle AMC = \angle BMC$, og da de tilsammen skal udgøre en lige vinkel, må de begge være rette vinkler. Altså er linjen *CD* en midtnormal.

Sætningen om en trekants midtnormaler indeholder begrebet omskreven cirkel, så dette begreb skal lige defineres:

Definition 9: En trekants *omskrevne cirkel* er den cirkel, der går gennem trekantens vinkelspidser.

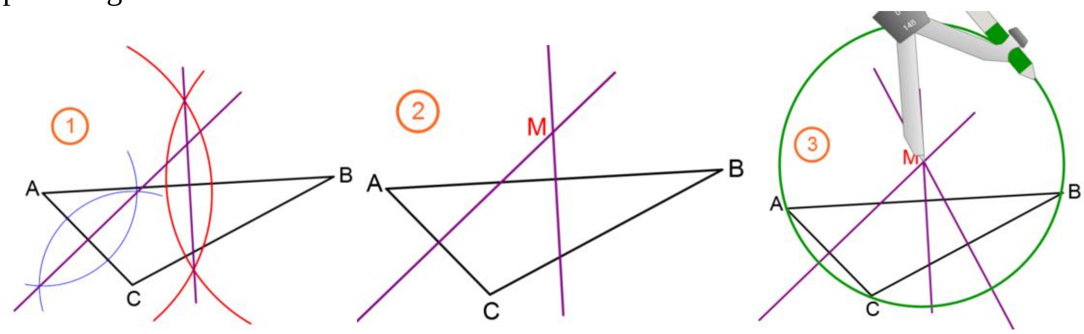
Helt generelt gælder (Euklids 6. definition i 3. bog):

Definition 10: En cirkel siges at omskrives om en figur, når cirkelperiferien berører hver vinkelspids i den figur, hvorom den omskrives.

Vores definition af trekantens omskrevne cirkel kræver et par kommentarer. Det fremgår af ordlyden, at der kun er én omskreven cirkel (men det er jo ikke bevist). Helt generelt gælder det, at hvis man har tre punkter, der ikke ligger på linje, er der netop én cirkel, der indeholder alle tre punkter. Og det vil så selvfølgelig være den omskrevne cirkel til den trekant, der kan tegnes med punkterne som vinkelspidser. Vores næste sætning fortæller os altså ikke kun noget om midtnormaler, men den fortæller faktisk også, hvordan du ud fra tre givne punkter kan konstruere den cirkel, der går gennem disse punkter.

Sætning 9 (om midtnormalerne i en trekant): En trekants midtnormaler skærer hverandre i ét punkt, og dette punkt er centrum for trekantens omskrevne cirkel.

Bevis 9: Igen begynder vi med en konstruktion:
1: Med passer og lineal konstrueres to af trekanten midtnormaler.



2: Deres skæringspunkt kaldes M. Da M ligger på midtnormalen for AC, er $|AM| = |CM|$. Da M desuden ligger på midtnormalen for AB, er $|AM| = |BM|$. Ifølge Euklids 1. aksiom gælder altså $|BM| = |CM|$, og dermed ligger M også på midtnormalen for BC. Dvs. de tre midtnormaler skærer hverandre i ét punkt (M).
3: Punktet M har altså samme afstand til punkterne A , B og C, og dermed kan den omskrevne cirkel tegnes med centrum i M.

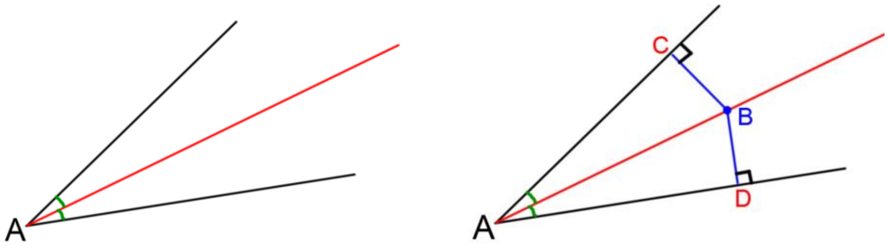
Øvelse 6: Afsæt tre punkter, der ikke ligger på en ret linje. Konstruér ved hjælp af passer og lineal den cirkel, der går gennem alle tre punkter.

Næste særlige type linjer, vi skal se på, er vinkelhalveringslinjer.

Definition 11: Givet en vinkel, er en *vinkelhalveringslinje* en linje, der udgår fra vinkelspidsen, og som deler vinklen i to lige store dele.

Sætning 10: Givet en vinkel, hvis ben antages forlænget uendeligt, består en vinkelhalveringslinje netop af samtlige punkter inden for vinkelbenene, hvis korteste (vinkelrette) afstand til vinkelbenene er den samme til begge vinkelben.

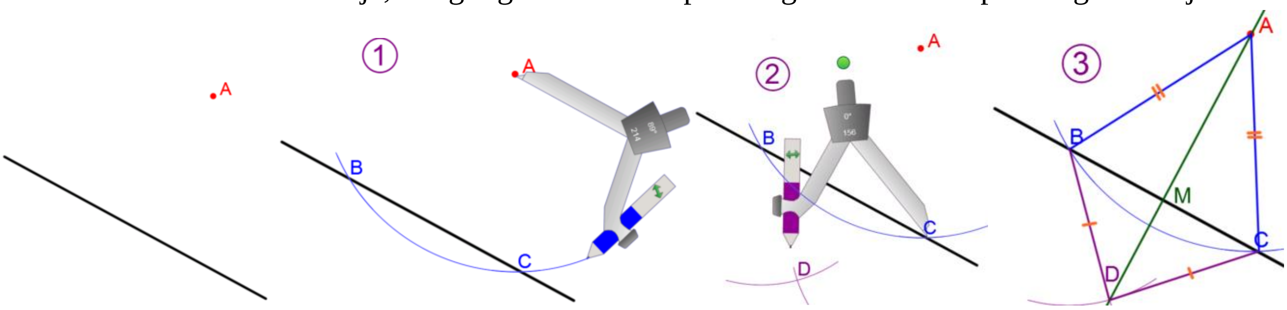
Bevis 10: Vi ser på en vinkel *A*, hvor vi har tegnet vinkelhalveringslinjen (Bemærk, at den røde linje deler vinklen i to lige store vinkler).



Vi vælger et vilkårligt punkt på vinkelhalveringslinjen og kalder det *B*. Fra *B* nedfælder vi de vinkelrette til de to vinkelben og kalder skæringspunkterne for *C* og *D*.
Da trekanterne *ABC* og *ABD* begge er retvinklede trekanter, og da $\angle BAC = \angle BAD$ (hvilket jo er definitionen på en vinkelhalveringslinje), er de to trekanters sidste vinkler også kongruente, og dermed er trekanterne ensvinklede. Da de deler deres korresponderende side *AB*, er skalafaktoren 1, og dermed er trekanterne kongruente ($\triangle ABC \cong \triangle ABD$). Dermed er de korresponderende sider *BC* og *BD* lige lange. Og det er igen oplagt, at et punkt uden for vinkelhalveringslinjen vil ligge tættere på det vinkelben, der ligger på samme side af vinkelhalveringslinjen.

I beviset benyttede vi en konstruktion, vi ikke har set på tidligere, nemlig en nedfældning af den vinkelrette. Dette skal vi også benytte senere, når vi skal konstruere højder, så lad os se på, hvordan man gør det:

Konstruktion: Nedfældning af den vinkelrette (Euklids sætning 12).
Vi har givet et punkt, der ligger uden for en given ubegrænset ret linje. Vores opgave er nu at konstruere en linje, der går gennem vores punkt og står vinkelret på den givne linje.



1: Med passeren tegnes en cirkelbue med tilpas stor radius til, at den skærer linjen to steder.
2: Med de to skæringspunkter (kaldet *B* og *C*) som centrum tegnes to cirkelbuer med den samme radius (det **må** gerne være samme radius som i punkt 1). Deres skæringspunkt kaldes *D*.
3: Vi forbinder punkterne og vil gerne argumentere for, at linjen gennem *A* og *D* står vinkelret på den givne linje (der går gennem *B* og *C*).
Trekanterne *ABD* og *ACD* er kongruente, da de deler en side og har de to andre sidepar lige store. Helt præcist er de spejlinger af hinanden, og dermed er $|BM| = |CM|$. Dermed er $\triangle ABM \cong \triangle ACM$, og da $\angle AMB = \angle AMC$ og $\angle AMB + \angle AMC = 180°$, er $AD \perp BC$.

Ligesom sætningen om midtnormaler udtaler den kommende sætning om vinkelhalveringslinjer sig om en særlig cirkel, som vi derfor først skal have defineret:

Definition 12: Givet en trekant, er *den indskrevne cirkel* den cirkel, der berører hver af trekantens sider.

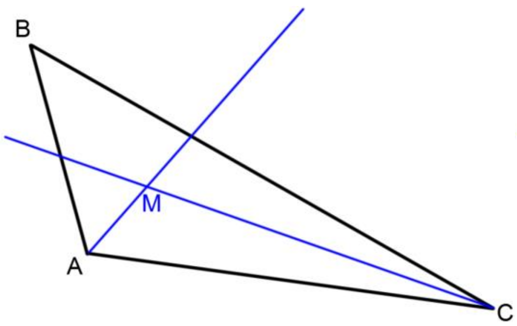
Eller som Euklid siger det i sin generelle definition:

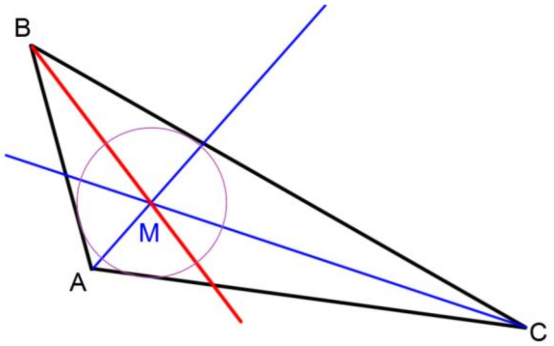
Definition 13: En cirkel siges at indskrives i en figur, når cirkelperiferien berører hver side i den figur, hvori den indskrives.

Det er ligegyldigt, om man skriver 'cirkel' eller 'cirkelperiferi'. For os ER en cirkel det, der også kaldes cirkelperiferien. Men det er vigtigt at bemærke ordet 'berører'. Cirklen må altså IKKE skære siderne, men kun berøre. Man kan også sige, at cirklen tangeres af siderne.

Sætning 11 (om vinkelhalveringslinjer): Vinkelhalveringslinjerne i en trekant skærer hverandre i ét punkt, der er centrum for trekantens indskrevne cirkel.

Bevis 11: Vi tegner først to vinkelhalveringslinjer, der skærer hinanden i punktet *M*:





Da *M* ligger på vinkelhalveringslinjen fra *A*, er dens korteste (vinkelrette) afstand til siden *AB* den samme som dens korteste afstand til siden *AC*. Vi skriver $dist(M, AB) = dist(M, AC)$, hvor 'dist' er en forkortelse for 'distance' og er den skrivemåde, vi typisk anvender til at betegne afstande fra punkt til linje.

Da *M* også ligger på vinkelhalveringslinjen fra *C*, gælder ligeledes $dist(M, AC) = dist(M, BC)$.

Ifølge Euklids 1. aksiom, gælder altså $dist(M, AB) = dist(M, BC)$, og da vinkelhalveringslinjen fra *B* netop består af alle de punkter, der har samme afstand til *AB* og *BC*, må *M* ligge på vinkelhalveringslinjen fra *B*. Dermed er det vist, at de tre vinkelhalveringslinjer skærer hverandre i ét punkt (*M*). Cirklen med centrum i *M* og radius $r = dist(M, AB) = dist(M, AC) = dist(M, BC)$ vil være den indskrevne cirkel, da den lige netop berører siderne, eftersom radius svarer til den vinkelrette afstand til linjerne.

Vi har nu set på nogle egenskaber ved vinkelhalveringslinjer, men vi har endnu ikke set på, hvordan man konstruerer dem.

Øvelse 7: Find en metode til med passer og lineal at konstruere en vinkelhalveringslinje (Euklids 9. sætning). Du skal også kunne argumentere for, at det er en vinkelhalveringslinje, du får tegnet.

Øvelse 8 Tegn en trekant og konstruér med passer og lineal den indskrevne cirkel.

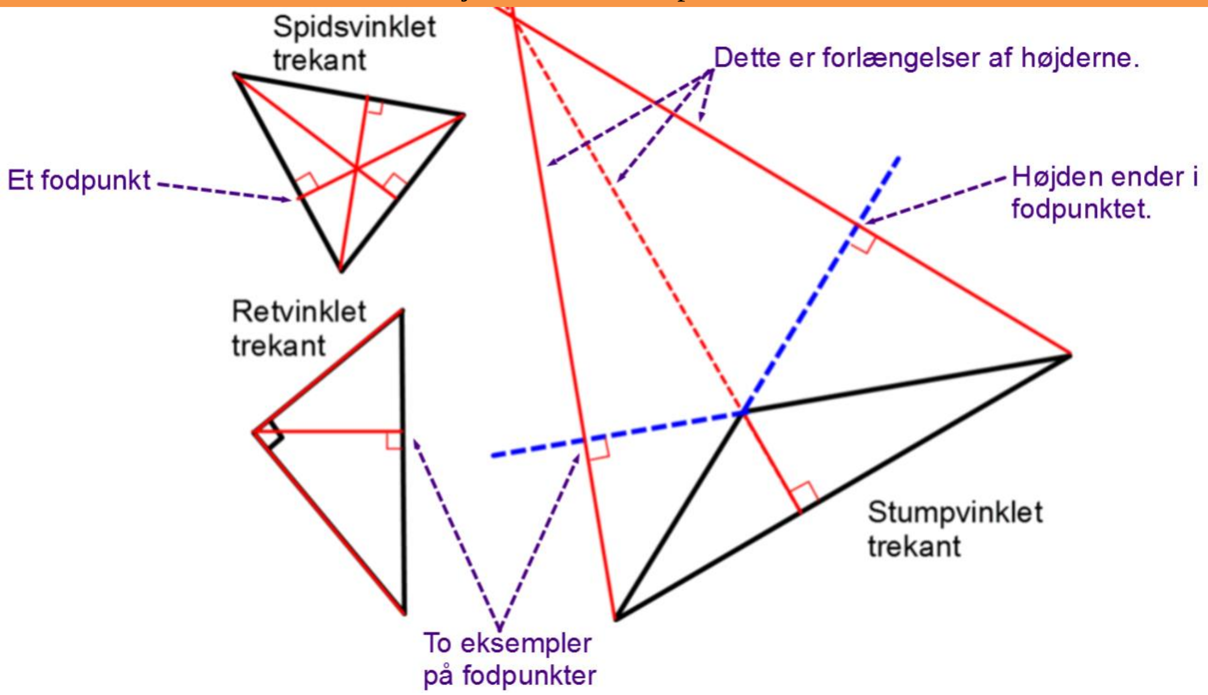
Vi har tidligere set, hvordan man nedfælder den vinkelrette. Det får vi brug for nu, hvor vi skal se på højder.

Definition 14: En *højde* i en trekant er et linjestykke, der udgår fra en vinkelspids, og som står vinkelret på og ender på den modstående side eller en forlængelse af denne side. Det punkt, hvor højden ender, kaldes højdens *fodpunkt*.

Der er netop tre højder i en trekant. Det afgørende for, om alle højderne falder inden for trekanten, er, om trekanten er spidsvinklet, retvinklet eller stumpvinklet.

Højder i trekanttyper:

- En *spidsvinklet trekant* er en trekant, hvor alle vinklerne er spidse. I en spidsvinklet trekant falder alle højderne inden for trekanten.
- En *retvinklet trekant* er en trekant med én ret vinkel. I en retvinklet trekant falder højden fra den rette vinkel inde i trekanten, mens højderne fra de spidse vinkler er sammenfaldende med en side. Højderne mødes i den rette vinkel.
- En *stumpvinklet trekant* er en trekant med én stump vinkel. Højden fra den stumpe vinkel falder inde i trekanten, mens højderne fra de to spidse vinkler falder uden for trekanten.

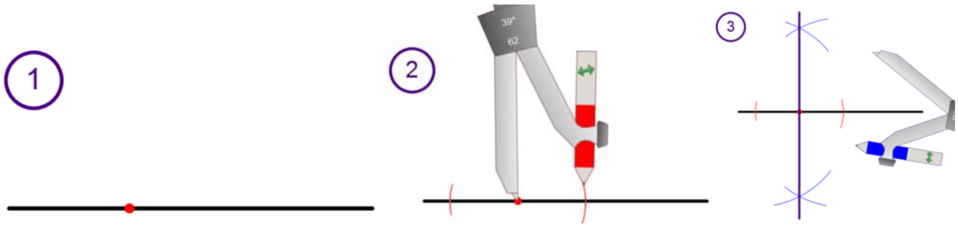


På alle tre figurer angiver de sorte linjer selve trekanten, mens de røde linjer er højderne (eller forlængelser af højderne). De stiplede blå linjer er forlængelser af to af trekantens sider. Læg specielt mærke til, hvordan højderne falder i den stumpvinklede trekant. Her står de ikke vinkelret på selve siden, men på en forlængelse af siden. Forlængelserne af højderne er tegnet i den stumpvinklede trekant, fordi det illustrerer indholdet i en kommende sætning.

Som antydet på ovenstående figurer, gælder det også om højderne eller forlængelserne af højderne, at de skærer hverandre i ét punkt. Dette er en sætning, som vi snart vil bevise. I dette bevis indgår dog en konstruktion, som vi endnu ikke har set på, så her kommer først to konstruktioner:

Konstruktion: Oprejsning af den vinkelrette (Euklids sætning 11).

Konstruktionen går ud på, at man ud fra et givet punkt på en given ret linje (eller et linjestykke) får dannet en ret linje, der går gennem punktet og står vinkelret på linjen.



1: Vi har fået givet et punkt på en linje eller et linjestykke. Bemærk, at dette punkt som udgangspunkt ikke er midtpunktet af linjestykket (men det må gerne være det).
2: Ved hjælp af passeren afsættes to punkter på linjen, der har ens afstand til det givne punkt. Hermed kommer det givne punkt til at være midtpunktet af linjestykket dannet af de to afsatte punkter.
3: Derefter består opgaven i at konstruere en midtnormal på det dannede linjestykke, og den konstruktion har vi allerede gennemgået.

Øvelse 9: Euklids sætning 31 i bog 1 lyder:

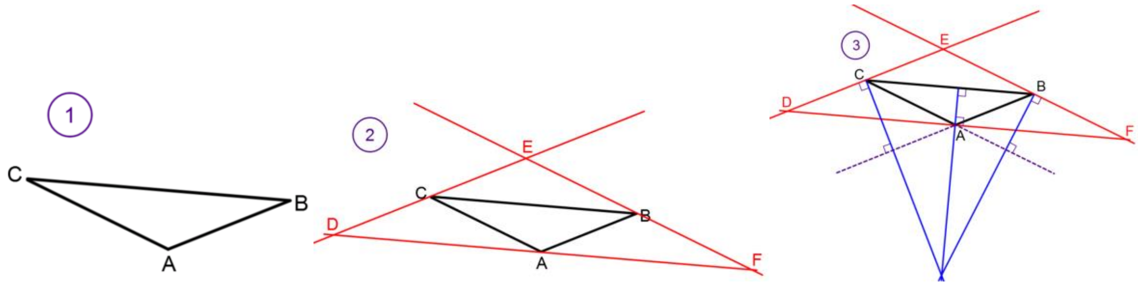
Gennem et givet punkt at trække en ret linje parallel med en given ret linje.

Gennemfør denne konstruktion med passer og lineal.

Konstruktionen fra ovenstående opgave kan anvendes til at tegne en paralleltransversal i en trekant. Den skal også bruges i beviset for følgende sætning:

Sætning 12 (højde): Højderne i en trekant eller forlængelserne af disse skærer hverandre i ét punkt.

Bevis 12: Beviset går ud på, at man med udgangspunkt i den givne trekant konstruerer en ny trekant, hvor højderne i den givne trekant udgør en del af den nye trekants midtnormaler. Og da vi ved, at midtnormalerne i en trekant skærer hverandre i ét punkt, vil vi dermed have vist, at højderne i den givne trekant skærer hverandre i ét punkt.



1: Vores udgangspunkt er trekant *ABC*.
2: Gennem hver af vinkelspidserne konstrueres en linje, der er parallel med den modstående side (de røde linjer ovenfor). Skæringspunkterne mellem disse linjer er hjørner i en ny trekant *DEF*.

Da $AC||BE$ og $CE||AB$, er $\square ABEC$ et parallelogram, og dermed er $|AB|=|CE|$.

Da $AB||CD$ og $AD||BC$, er $\square ABCD$ et parallelogram, og dermed er $|AB|=|CD|$.

Ifølge Euklids 1. aksiom gælder altså $|CE|=|CD|$, og C er altså midtpunktet af siden ED. Samme argumentation kan bruges om A og B.
3: Da $AB||ED$, vil højden fra C i trekant ABC altså være en del af en midtnormal i trekant DEF, nemlig den på siden DE. Tilsvarende gælder om de to andre højder, og hermed er det ønskede vist.

Der findes (selvfølgelig) et hav af andre konstruktioner, som vi ikke har beskæftiget os med her. Nogle af dem kan du arbejde med i nedenstående øvelse.

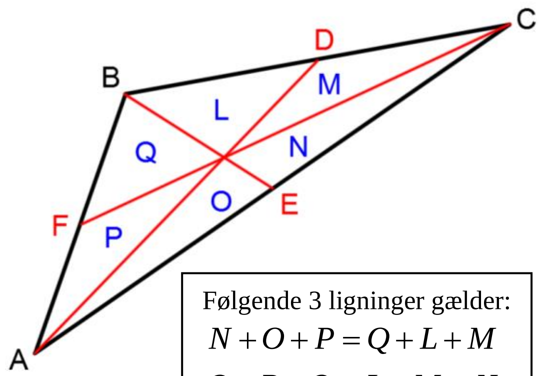
Øvelse 10: Følgende konstruktioner skal foretages med passer og lineal.

a) At tegne et kvadrat på en given ret linje.
b) At konstruere en given vinkel på et givent linjestykke.
c) At halvere en given cirkelbue.
d) At finde centrum i en given cirkel
e) Givet en cirkel at konstruere en indskrevet regulær sekskant.
f) Fra et givet punkt uden for en given cirkel at trække en ret linje, som rører cirkel (dvs. konstruktionen af en tangent).
g) Givet en retlinet vinkel at dele denne i tre kongruente vinkler.

Hvis det lykkedes dig at gennemføre øvelse g), bør du lige tjekke din fremgangsmåde en ekstra gang. I 1837 viste Pierre Wantzel, at denne konstruktion er umulig at lave med passer og lineal.
Han viste også, at det er umuligt (med passer og lineal) givet en kubus at konstruere en kubus med det dobbelte rumfang.
En *kubus* er et af navnene på en almindelig 6-sidet terning. Et andet navn er et *regulært heksaeder*.

Disse to klassiske problemer er blandt de mest berømte problemer, der er blevet bevist at være umulige at løse. Et tredje er *cirklens kvadratur*, hvor man givet en cirkel skal konstruere et kvadrat med samme areal. Dette blev i 1882 bevist at være uløseligt, da det her lykkedes Ferdinand von Lindemann at vise, at π er et såkaldt transcendent tal (det lærer du mere om, når vi skal have om talteori).

Vi mangler endnu at få bevist den sidste del af sætningen om medianerne, nemlig at hver af trekantens medianer deler trekanten i to lige store (men ikke nødvendigvis kongruente!) dele, og at de tre medianer tilsammen deler trekanten i seks lige store dele.



Følgende 3 ligninger gælder:

$$N+O+P=Q+L+M$$
$$O+P+Q=L+M+N$$
$$P+Q+L=M+N+O$$

I trekant *ABC* er de tre medianer tegnet (de røde linjer), dvs. *D*, *E* og *F* er midtpunkter på trekantens sider.
Dermed er trekanten blevet opdelt i seks små trekanter, og **arealerne** af disse betegnes nu med *L*, *M*, *N*, *O*, *P* og *Q*.
Se nu på trekanterne *ACF* og *BCF* med grundlinjerne henholdsvis *AF* og *BF*, der er dannet af medianen fra *C*. Deres højder er sammenfaldende (højden fra *C*), og deres grundlinjer er lige store. Dermed har de samme areal, dvs. der gælder:

$N+O+P=Q+L+M$.

Tilsvarende argumentation kan bruges om de andre trekanter, der dannes af én median, og vi har altså vist, at hver median deler trekanten i to lige store områder.

Tilsvarende argumentation som i boksen ovenfor (eller Euklids sætning 37) kan anvendes på de seks små trekanter parvis. Se f.eks. på de to små trekanter med grundlinjerne henholdsvis *AF* og *BF*. De har sammenfaldende højder, og da deres grundlinjer er lige lange, har de samme areal. Dvs. der gælder $P=Q$, og tilsvarende gælder $L=M$ og $O=N$.

Vi har nu 6 ligninger med 6 ubekendte. Lad os først se på, hvordan den slags indtastes i Maple:

$$[N+O+P=Q+L+M, O+P+Q=L+M+N, P+Q+L=M+N+O, P=Q, L=M, O=N] \xrightarrow{\text{solve (specified)}}$$
$$\{L=Q, M=Q, N=Q, O=Q, P=Q, Q=Q\}$$

Bemærk, at man begynder med en firkantet parentes, og hver ligning adskilles af et komma. Til sidst højreklikkes på udtrykket, og man kan vælge ’solve’ og ’solve’ (eller som angivet i eksemplet ’Solve for Variables’, hvorefter man kan fortælle hvilke variabler, der skal findes).
Da Maple fortæller os, at alle de andre størrelser er det samme som Q (inklusiv Q selv), er alle arealerne lige store, hvilket vi ville vise.

Vi kan også løse ligningerne i hånden. Lad os se på $N+O+P=Q+L+M$ og udnytte, at $P=Q$, $L=M$ og $O=N$. Hermed kommer vores ligning til at se ud på følgende måde:

$$N+N+Q=Q+M+M$$

(Vi har *substitueret* O, P og L med størrelser, der er lige så store som disse).
Dette fører til:

$$2N=2M$$

Hvilket giver os:

$$N=M$$

$O+P+Q=L+M+N$ fører til $N+Q+Q=L+L+N$, der giver os $Q=L$.

$P+Q+L=M+N+O$ fører til $P+P+M=M+O+O$, der giver os $O=P$.

Vi har altså:

$$\boxed{\begin{array}{l} P=Q \\ Q=L \\ L=M \\ N=M \\ O=N \\ O=P \end{array}}$$

$$P=O=N=M=L=Q$$

Altså er det ønskede vist.

Vi er nu færdige med vores konstruktioner og skal til at have sat tal på vores vinkler og sider og regnet på vores trekanter. Vi skal derfor nu have indført begreberne *sinus*, *cosinus* og *tangens*. Ordene *sinus* og *cosinus* stammer fra indisk. Inderne brugte begreberne i forbindelse med trekanter, da de fortæller noget om forholdet mellem bestemte sider i trekanter.
Euklid anvendte ikke disse ord, men det betyder ikke, at han ikke kendte flere af egenskaberne. Vi skal f.eks. snart se på de såkaldte cosinusrelationer, der svarer til Euklids 12. og 13. sætning i bog 2 af *Elementer*. Euklid anvendte ikke begrebet *cosinus*, så hans sætninger lyder anderledes, men indholdet er det samme.
Inderne tog som nævnt udgangspunkt i trekanter, når de skulle forklare begreberne *sinus* og *cosinus*. Vi tager udgangspunkt i en cirkel kaldet *enhedscirklen*, når vi forklarer sinus og cosinus, og deres anvendelser inden for trekantberegning følger så af denne indførelse.
Fordelen ved vores metode er, at det så bliver nemmere efterfølgende at forklare de såkaldt *trigonometriske funktioner*, der er uhyre vigtige inden for matematik. Hvis ikke vi skulle have set på disse funktioner, kunne vi have set bort fra *enhedscirklen* og bare set på trekanter med det samme.
Men som sagt begynder vi med *enhedscirklen* – en cirkel med radius 1 og centrum i (0,0).

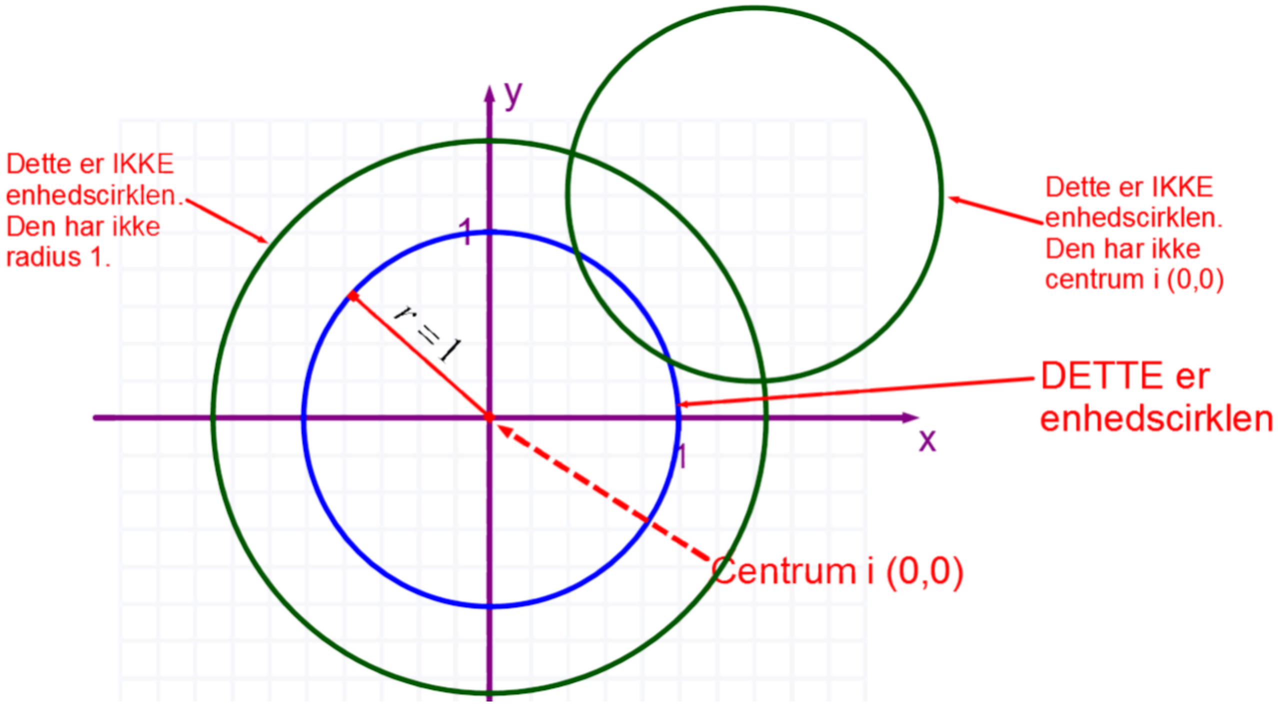
Opgaverne 204*

COS, SIN, TAN og RETVINKLEDE TREKANTER

Du kender allerede én sætning, der gælder specielt for retvinklede trekanter, nemlig Pythagoras' Læresætning. Den giver en sammenhæng mellem de tre sider i en retvinklet trekant.

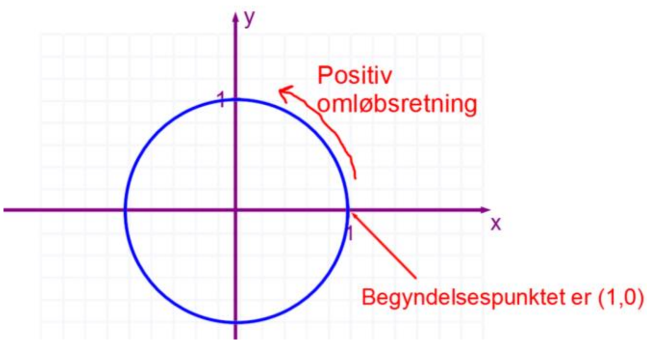
Vi skal nu se på sætninger, der giver sammenhænge mellem en vinkel og to af en retvinklet trekants sider. Til brug for dette indfører vi først *enhedscirklen*.

Definition 15: Lad der være givet et kartesisk koordinatsystem. *Enhedscirklen* er så den cirkel med radius 1, der har centrum i (0,0).



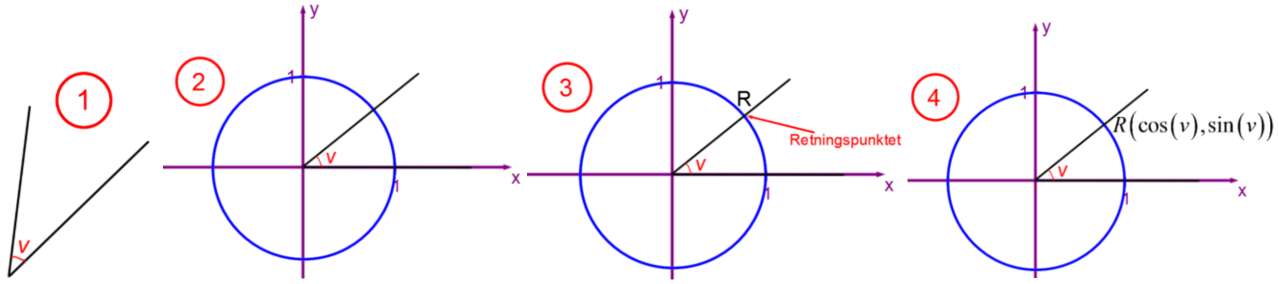
Når vi arbejder med figurer i planen eller rummet, ligger alle vinkler mellem 0° og 360°. Men som nævnt tidligere, skal vi ikke kun kigge på figurer, men også bruge sinus, cosinus og tangens som funktioner, og derfor vil vi gerne udvide vores område for tilladte vinkler, så vi også accepterer negative vinkler og vinkler over 360°. Som sagt giver dette ikke mening, når man kun tænker på figurer, men du vil senere få at se, at det er en nødvendig udvidelse.

Definition 16: Begyndelsespunktet på enhedscirklen er (1,0), og den positive omløbsretning er mod uret.



Lad os nu få vinklerne ind i billedet:

1: Vores udgangspunkt er, at vi har en vinkel *v*.
2: Denne vinkel placerer vi med vinkelspidsen i (0,0) og med det højre vinkelben pegende ud langs den positive del af *x*-aksen (det højre vinkelben finder du ved at forestille dig, at du står i vinkelspidsen og kigger ind i vinklen).



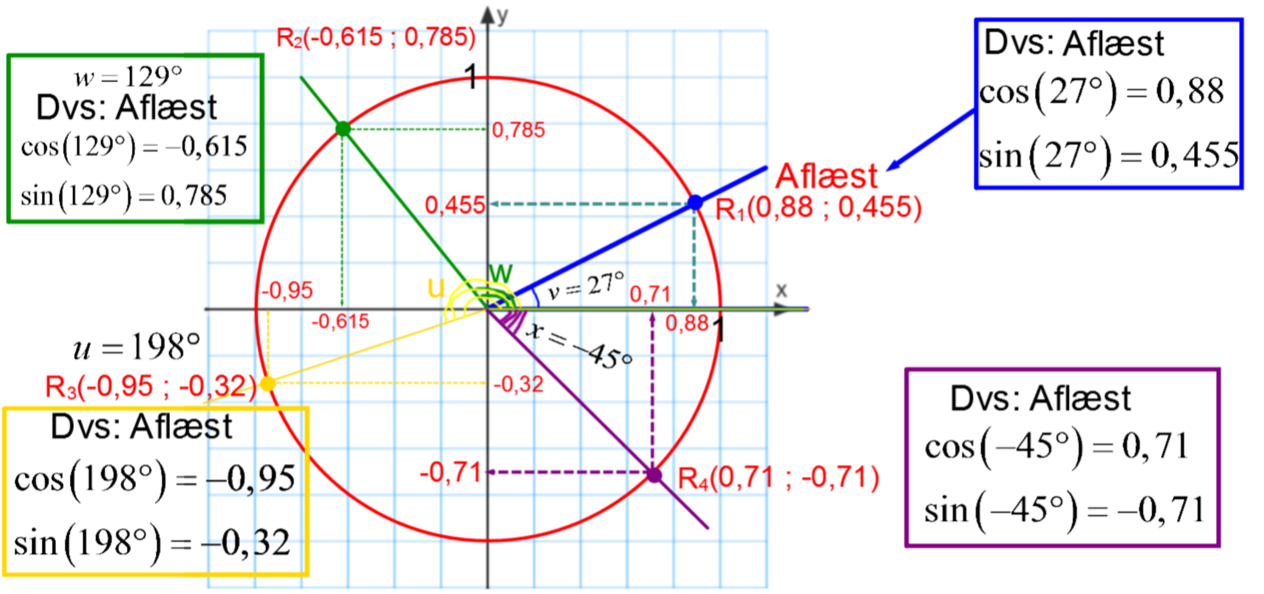
3: Skæringspunktet mellem vinklens venstre ben og enhedscirklen kaldes retningspunktet og betegnes med *R*.
4: Og nu kommer så den længe ventede definition:

Definition 17: Retningspunktets førstekoordinat kalder vi $\cos(v)$, og dets andenkoordinat kalder vi $\sin(v)$. Udtrykkene udtales "cosinus til *v*" og "sinus til *v*".

Forkortelserne *sin* og *cos* er indført af den engelske matematiker William Oughtred (1574-1660)

Bemærk den helt centrale pointe ved vores definition af sinus og cosinus. Den giver KUN mening, når vi tager udgangspunkt i en vinkel. Det giver ikke mening at fortælle, hvad cosinus og sinus er i sig selv. Man kan kun sige, hvad cosinus til en vinkel er, og hvad sinus til en vinkel er.

Lad os derfor tage udgangspunkt i nogle vinkler og få set på hvilke cosinus- og sinusværdier, vi får til disse vinkler:



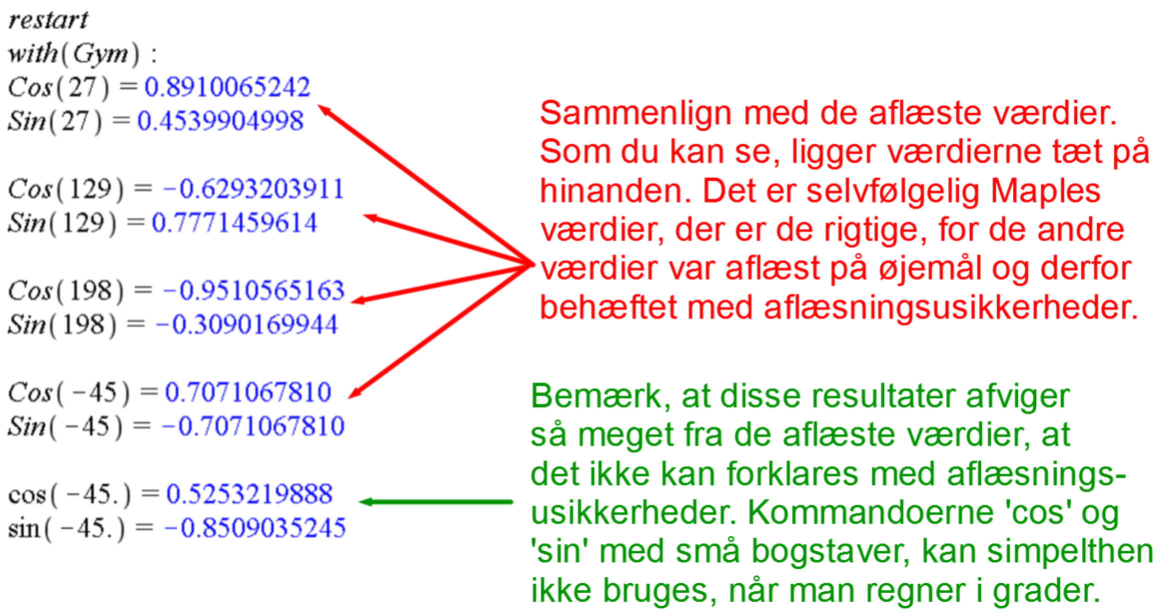
Bemærk, at der er fire forskellige vinkler. En spids vinkel (blå), en stump vinkel (grøn), en vinkel over 180° (gul) og en negativ vinkel (violet). De to sidstnævnte vinkler støder vi ikke på i forbindelse med trekanter, men som sagt er de relevante i andre sammenhænge.

Tjek for hver eneste vinkel, at du har styr på følgende:

- Hvordan retningspunktet fremkommer, og hvordan man aflæser koordinatsættet til retningspunktet. Læg godt mærke til fortegnene.
- Hvordan retningspunktets koordinater fortæller os, hvad cosinus og sinus til den pågældende vinkel er.

Bemærk også den negative vinkel. Den er negativ, fordi man kører med uret i stedet for mod uret.

Gym-pakken i Maple indeholder kommandoerne *Cos* og *Sin*, som du kan bruge til at beregne cosinus- og sinusværdier, når vinklerne er angivet i grader.
Det er meget vigtigt at lægge mærke til, at du skal anvende stort forbogstav, når du regner med vinkler i grader.

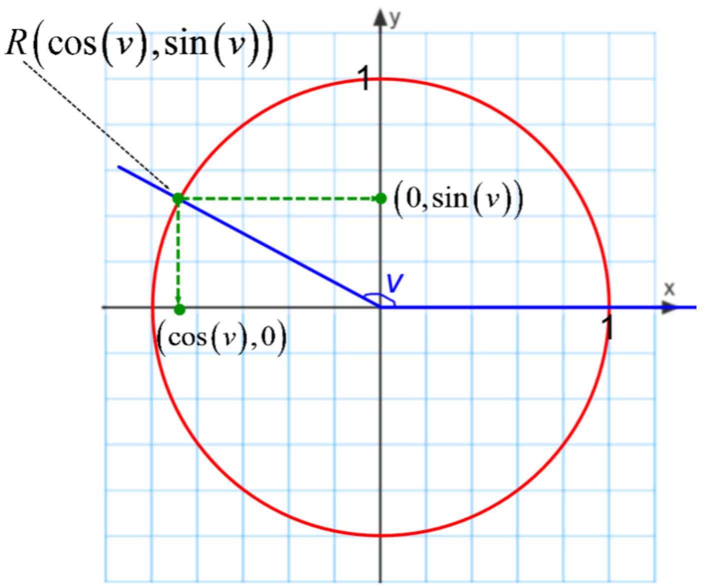


Øvelse 11: Ved at anvende enhedscirklen, hvor du afsætter vinkler og finder retningspunktet og dets koordinater, skal du bestemme følgende værdier, som du **bagefter skal tjekke i Maple** ved at foretage indtastningerne som vist ovenfor.

$\cos(90°)$, $\sin(90°)$, $\cos(180°)$, $\sin(180°)$, $\cos(0°)$, $\sin(0°)$, $\cos(270°)$, $\sin(270°)$

$\cos(360°)$, $\sin(360°)$, $\cos(-90°)$, $\sin(-90°)$, $\cos(-180°)$, $\sin(-180°)$, $\cos(540°)$, $\sin(540°)$

Vi skal nu se på, hvilke værdier cosinus og sinus til en vinkel kan antage, dvs. hvilke tal er mulige at få, når man tager cosinus eller sinus til en vinkel?
For at besvare dette spørgsmål ser vi igen på enhedscirklen:



Vi har afsat vinklen *v* og fundet retningspunktet, hvis førstekoordinat er cosinus til vinklen og andenkoordinat er sinus til vinklen.
Kig endnu engang på figuren og tjek, at du har styr på definitionerne.
Bemærk, at retningspunktet kan ligge overalt på cirklen (cirkelperiferien).
Både første- og andenkoordinaten for retningspunktet vil altså ligge mellem -1 og 1 (begge tal inklusive). Dvs. cosinus og sinus til en vinkel kan mindst blive -1 og højst 1.

Der gælder altså:

Sætning 13: For enhver vinkel v gælder $\cos(v) \in [-1,1]$ og $\sin(v) \in [-1,1]$

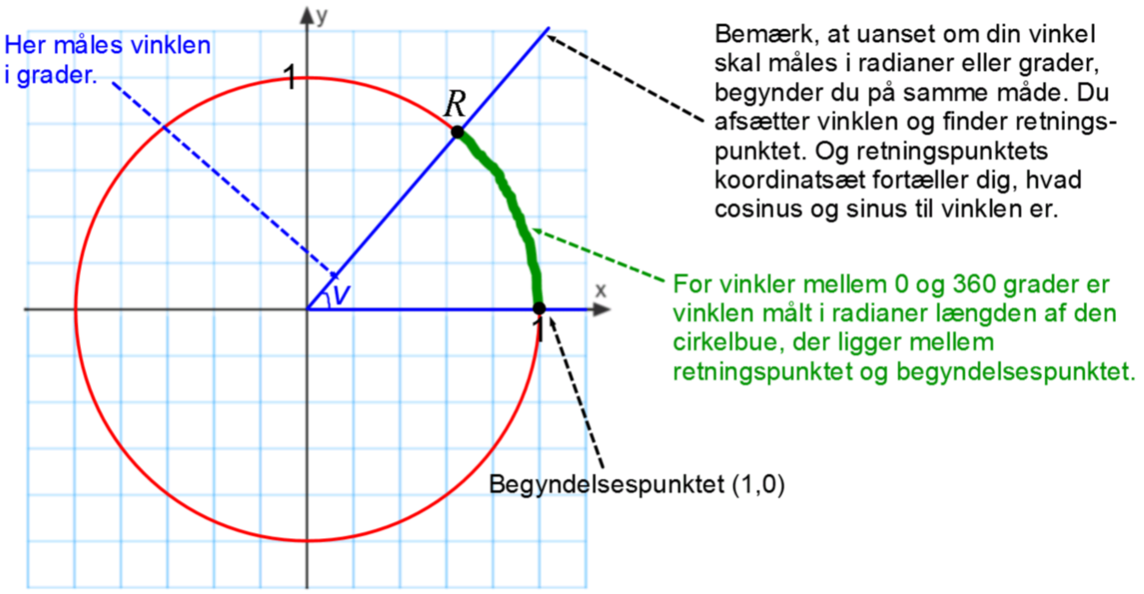
Som tidligere nævnt er gradtallet for en vinkel temmelig vilkårlig valgt, da man oprindeligt kunne have valgt alt muligt andet end 360° rundt i en cirkel. Vi skal nu se på en anden måde at angive en vinkel. Det er vigtigt, at du hele tiden er opmærksom på, at det "bare" er en anden enhed for en vinkel end grader. Ligesom hvis du ville måle en afstand i tommer i stedet for i meter eller energien i kalorier i stedet for i joule.

Vinkler målt i radianer:

Når du skal finde cosinus og sinus (og tangens) til en vinkel, er det rent geometrisk fuldstændig ligegyldigt, om du har tænkt dig at angive vinklen i grader eller radianer. Tænk på vinklen som den geometriske figur, der dannes af de to vinkelben. Du placerer den som sædvanlig i enhedscirklen, finder retningspunktet og kan så aflæse cosinus- og sinusværdien til vinklen som retningspunktets koordinatsæt.

Forskellen ligger udelukkende i vores måde at angive vinklen.

Når vi skal angive vinklen i radianer, skal vi måle længden af den cirkelbue, som vinklen spænder over på enhedscirklen. Dvs. vi skal bevæge os langs cirklen fra begyndelsespunktet til retningspunktet og måle, hvor langt dette stykke er.



Husk, at det er enhedscirklen, dvs. radius er 1.

Omkredsen af enhedscirklen er derfor: $O = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 1 = 2 \cdot \pi$

Dvs. en vinkel på 360° er $2 \cdot \pi$ radianer. Man kan angive enheden radianer med *rad*, dvs. man kan sige, at vinklen er 1,42 rad. Man bruger dog kun denne enhed, hvis der er fare for, at man kunne tage fejl. Og det kommer vi vist ikke ud for. Når vi arbejder med cosinus, sinus og tangens som funktioner, bruger vi enheden radianer for vores vinkler, men vi angiver vinklen som et tal uden enhed. Når vi arbejder med trekanter, bruger vi enheden grader på vores vinkler, og den angiver vi altid. Dvs. en vinkel angivet som 2,572, er en vinkel på 2,572 radianer.

Som udgangspunkt får du ikke "pæne" tal, når du angiver vinkler i radianer. F.eks. er vores vinkel på 60°, som vi møder i en ligesidet trekant, 1,047197551… radianer. Men en hel del af vores standardvinkler kan udtrykkes ved π. Da $360° = 2 \cdot \pi$ rad, har man nemlig:

$360° = 2 \cdot \pi$ rad	$180° = \pi$ rad	$90° = \frac{\pi}{2}$ rad	$60° = \frac{\pi}{3}$ rad	$45° = \frac{\pi}{4}$ rad	$30° = \frac{\pi}{6}$ rad

Generelt gælder:

$$\frac{v_{grader}}{180}\cdot \pi = v_{radianer} \;,$$

hvor v_{grader} er vinklens størrelse målt i grader, og $v_{radianer}$ er størrelsen målt i radianer

Maple er programmeret til at regne i radianer, så man kan godt uden Gym-pakken regne sinus- og cosinusværdier ud, når vinklen er i radianer, og det gøres med *cos* og *sin* (små bogstaver). Excel er ligeledes indstillet til at regne i radianer, dvs. der skal du benytte ovenstående sammenhæng, hvis du har målt vinklerne i grader.

Som vi allerede har set, kan man dog med Gym-pakken regne i grader, hvis man bruger *Cos* og *Sin*.

$restart$

$with(Gym):$

Vi regner i grader med *Cos* og *Sin*.

$Cos(60) = 0.5000000000$

$Sin(60) = 0.8660254040$

Der regnes eksakt med *cos* og *sin*, mens der regnes approximeret med *Cos* og *Sin*.

Vi regner i radianer med *cos* og *sin*.

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 0.8660254040$

Som tidligere nævnt er det en god idé at vænne sig til altid at begynde et Maple-dokument med *restart* og *with(Gym)*, men hvis du glemmer det, kan du opdage det ud fra Maples ”reaktion” på din indtastning:

$restart$

$Cos(45) = Cos(45)$

$with(Gym):$

$Cos(45) = 0.7071067810$

Maple viser ved bare at gentage din kommando, at den ikke har forstået den. Simpelthen fordi *Cos* ikke er en kommando i Maple, men hører til tilføjelsespakken *Gym*.

Man kan også få negative radiantal for vinkler, hvilket svarer til at bevæge sig med uret rundt på enhedscirklen, og man kan køre lige så mange gange rundt på enhedscirklen, som man vil, dvs. en vinkel på $4\cdot\pi$ svarer til, at man er kørt 2 gange rundt på enhedscirklen (og altså endt i begyndelsespunktet), en vinkel på $-6\cdot\pi$ svarer til, at man er kørt tre gange rundt på enhedscirklen i negativ retning (med uret), og en vinkel på $\frac{7\cdot\pi}{2}$ svarer til (da $\frac{\pi}{2}$ svarer til en kvart cirkel), at man er kørt 7 kvarte ture rundt på enhedscirklen.

I sidstnævnte tilfælde opdager man, at denne vinkel giver samme retningspunkt (og dermed også sinus- og cosinusværdier) som en vinkel på $-\frac{\pi}{2}$ (kig på enhedscirklen!).

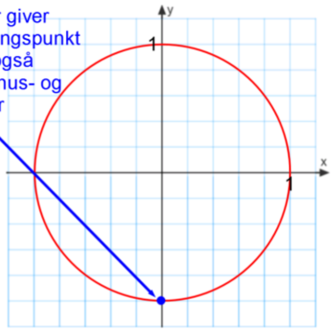
$\cos\left(\frac{7\cdot\pi}{2}\right) = 0$

$\sin\left(\frac{7\cdot\pi}{2}\right) = -1$

$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

De to vinkler giver samme retningspunkt og dermed også samme cosinus- og sinusværdier



Øvelse 12: Benyt enhedscirklen til at bestemme følgende værdier og **tjek efterfølgende med Maple**:

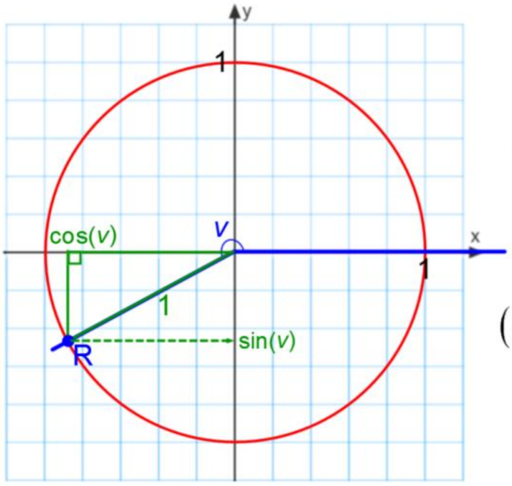
$$\cos(\pi),\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \cos(-\pi), \sin(3\cdot\pi), \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right), \sin(0), \cos(-4\cdot\pi), \sin\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right), \cos\left(-\frac{3\cdot\pi}{2}\right)$$

Måske har du allerede opdaget, at når den ene af sinus- og cosinusværdierne til en vinkel er 0, så er den anden enten -1 eller 1. Og ellers kan du overbevise dig selv om det ved at kigge på enhedscirklen.

Vi skal nu se på sammenhængen mellem cosinusværdien og sinusværdien til en vinkel:

Grundrelationen:

Vi afsætter en vinkel og finder retningspunktet. Hvis vi nedfælder den vinkelrette på abscisseaksen, får vi dannet en retvinklet trekant vist med grønt på figuren nedenfor.



Hvis ikke retningspunktet ligger på en af akserne, dannes der en retvinklet trekant som vist på figuren.

Da radius er 1, og da den udgør hypotenusen, giver Pythagoras' sætning os:

$$(\cos(v))^2 + (\sin(v))^2 = 1^2$$

Vi kunne lige så godt have nedfældet den vinkelrette på ordinataksen (2. aksen). De to dannede trekanter er kongruente og giver derfor samme sammenhæng (tjek dette).

For at undgå den besværlige skrivemåde med to parenteser, har man indført skrivemåden $\cos^2(v)$ og $\sin^2(v)$, der altså betyder det samme som $(\cos(v))^2$ og $(\sin(v))^2$. Det er altså ikke cosinus og sinus i sig selv, der kvadreres, for det giver som nævnt ingen mening. Det er cosinusværdien eller sinusværdien til vinklen, der kvadreres.

Du kan også anvende denne skrivemåde i Maple:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$Sin^2(30) = 0.2500000000$$

Husk, at vores sinusværdier og cosinusværdier ikke afhænger af, om vi måler vinklen i radianer eller grader (det er kun ved indtastninger i Maple, at vi skal være opmærksomme!). Vi har altså følgende sætning.

Sætning 14 (Grundrelationen): For enhver vinkel gælder:

$$\cos^2(v) + \sin^2(v) = 1$$ ← Vi bruger ofte *v*, når vi arbejder med trekanter, og vinklen angives i grader.

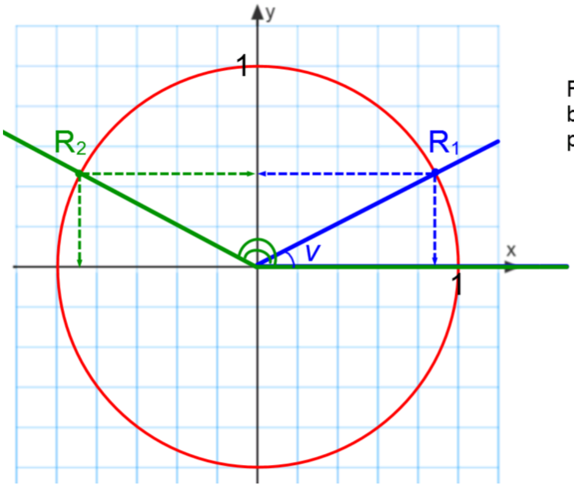
$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$ ← Vi bruger ofte *x*, når vi arbejder med funktioner, og vinklen angives i radianer.

Øvelse 13: Afprøv grundrelationen ved at indsætte vilkårlige vinkler i udtrykket $\cos^2(x) + \sin^2(x)$ og vis med Maple, at udtrykket giver 1.

Overgangsformler:

Som vi har set med Grundrelationen, er der en sammenhæng mellem sinus- og cosinusværdierne til en vinkel. Ved at kigge på enhedscirklen kan man også se, at nogle vinkler giver ens sinusværdier, andre vinkler giver ens cosinusværdier, nogle vinkler har ombyttede sinus- og cosinusværdier osv.

Lad os først se på supplementvinkler (spejlinger i *y*-aksen) bredt forstået, dvs. vinklerne kan antage alle værdier:

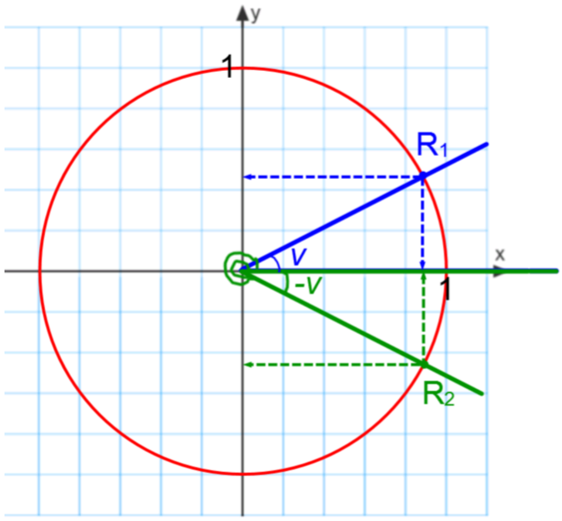


Supplementvinkler

Retningsvinklerne kan hver især bringes over i det andet retningspunkt ved at spejle i *y*-aksen.

$$\sin(180° - v) = \sin(v)$$
$$\cos(180° - v) = -\cos(v)$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

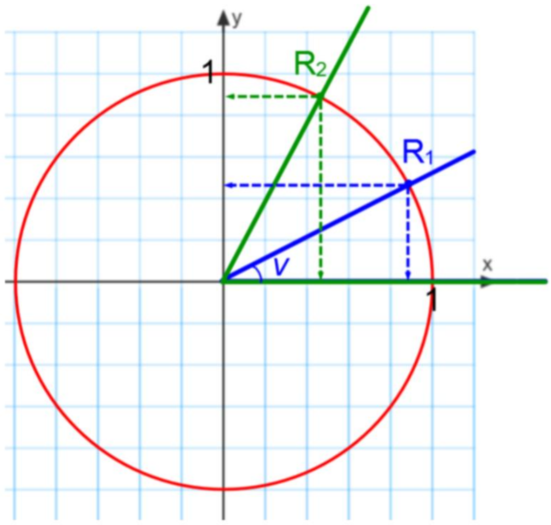


Eksplementvinkler eller fortegnsskift på vinkler.

Retningsvinklerne kan hver især bringes over i det andet retningspunkt ved at spejle i *x*-aksen.

$$\sin(360° - v) = -\sin(v)$$
$$\sin(-v) = -\sin(v)$$
$$\cos(360° - v) = \cos(v)$$
$$\cos(-v) = \cos(v)$$

$$\sin(2 \cdot \pi - x) = -\sin(x)$$
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\cos(2 \cdot \pi - x) = \cos(x)$$
$$\cos(-x) = \cos(x)$$



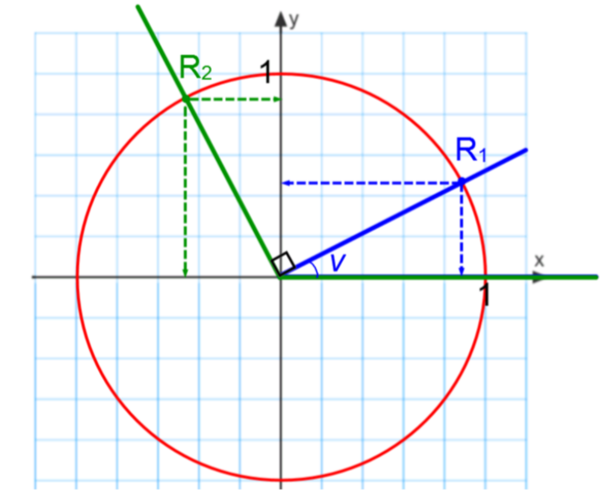
Komplementvinkler

Retningsvinklerne kan hver især bringes over i det andet retningspunkt ved at spejle i linjen *y* = *x*.

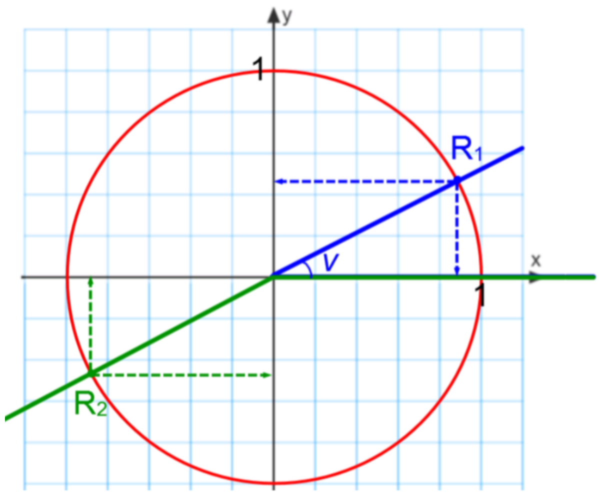
$$\sin(90° - v) = \cos(v)$$
$$\cos(90° - v) = \sin(v)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$



$$\sin(90^\circ + v) = \cos(v)$$
$$\cos(90^\circ + v) = -\sin(v)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$$

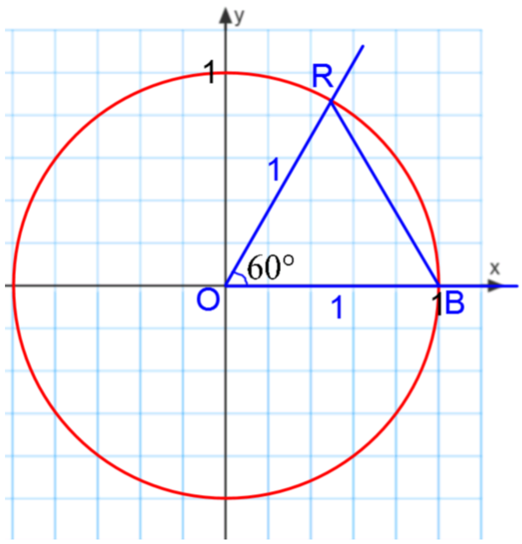


$$\sin(180^\circ + v) = -\sin(v)$$
$$\cos(180^\circ + v) = -\cos(v)$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$

Det er ikke meningen, at du skal kunne huske disse overgangsformler i hovedet. Pointen er, at du altid selv kan skitsere en enhedscirkel på papiret og hurtigt selv udlede dem, hvis du får brug for dem.

Det er dog vigtigt, at du bemærker konklusionen angående supplementvinkler, hvor sinusværdierne er ens og cosinusværdierne ikke er, samt konklusionen angående komplementvinkler, hvor sinus- og cosinusværdierne bytter rundt.

Lad os nu se på nogle af de vinkler, hvor vi kan bestemme cosinus- og sinusværdierne uden brug af Maple:



Vi afsætter vinklen 60 grader og ser på trekant *BOR*, der tegnes mellem begyndelsespunktet, origo og retnings-punktet.
Da *B* og *R* ligger på cirklen, hvor *O* er centrum, er længden af siderne *BO* og *OR* begge 1, og dermed er trekant *BOR* ligebenet. Dermed er vinklerne *B* og *R* lige store, og da de tilsammen er 120 grader, er de hver især 60 grader.
Trekant *BOR* er altså også ligesidet.
Når vi nedfælder den vinkelrette fra *R*, vil vi derfor lande midt mellem *B* og *O*, og vi har dermed:

$$\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$$

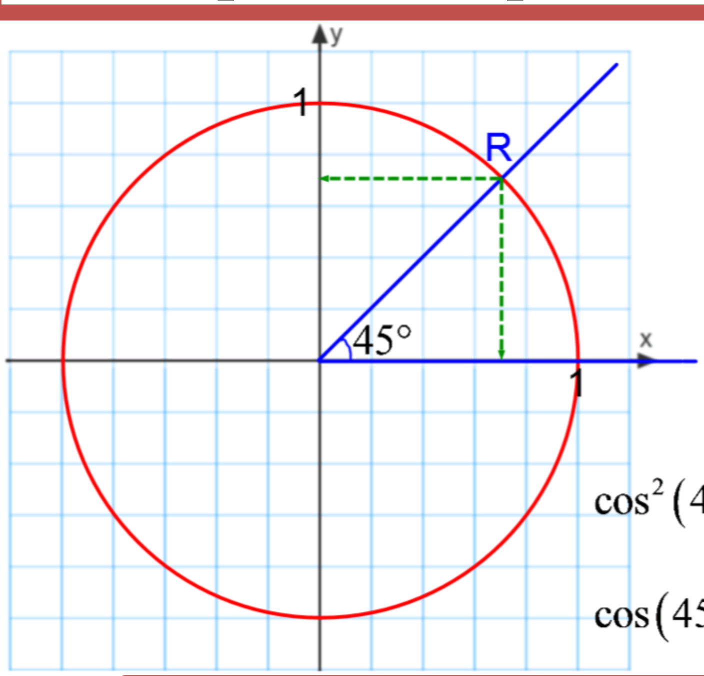
Grundrelationen giver os så:

$$\cos^2(60°)+\sin^2(60°)=1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2+\sin^2(60°)=1 \Leftrightarrow \sin^2(60°)=1-\frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin^2(60°)=\frac{3}{4}$$

Vi kan se på enhedscirklen, at $\sin(60°)$ er positiv, og dermed er: $\sin(60°)=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Da 30° og 60° er komplementvinkler, har vi dermed:

$$\boxed{\cos(60°)=\frac{1}{2} \qquad \sin(60°)=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos(30°)=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin(30°)=\frac{1}{2}}$$



Da 45 grader er sin egen komplementvinkel, er:

$$\sin(45°)=\cos(45°)$$

Grundrelationen giver os:

$$\cos^2(45°)+\sin^2(45°)=1$$

Da begge værdier er positive og ens, har man altså:

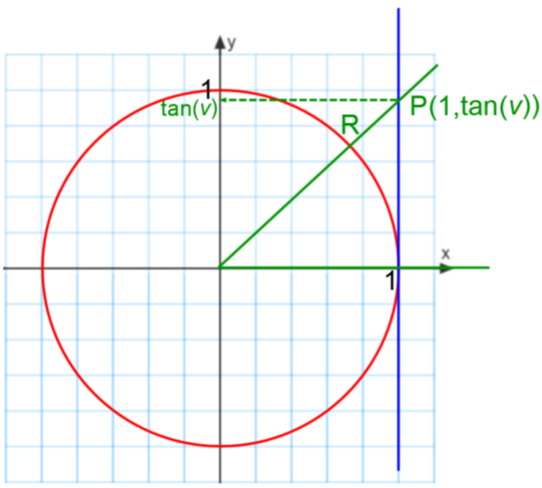
$$\cos^2(45°)=\frac{1}{2} \qquad \sin^2(45°)=\frac{1}{2}$$

$$\cos(45°)=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sin(45°)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\cos(45°)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin(45°)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Husk, at $2=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$, når du skal se, hvorfor de to brøker er ens.

Der findes en masse andre sammenhænge mellem sinus og cosinus til vinkler, herunder de såkaldte *additionsformler* og *logaritmiske formler*. Men dem skal vi ikke se på nu. Vi skal i stedet have defineret det trigonometriske udtryk *tangens*.

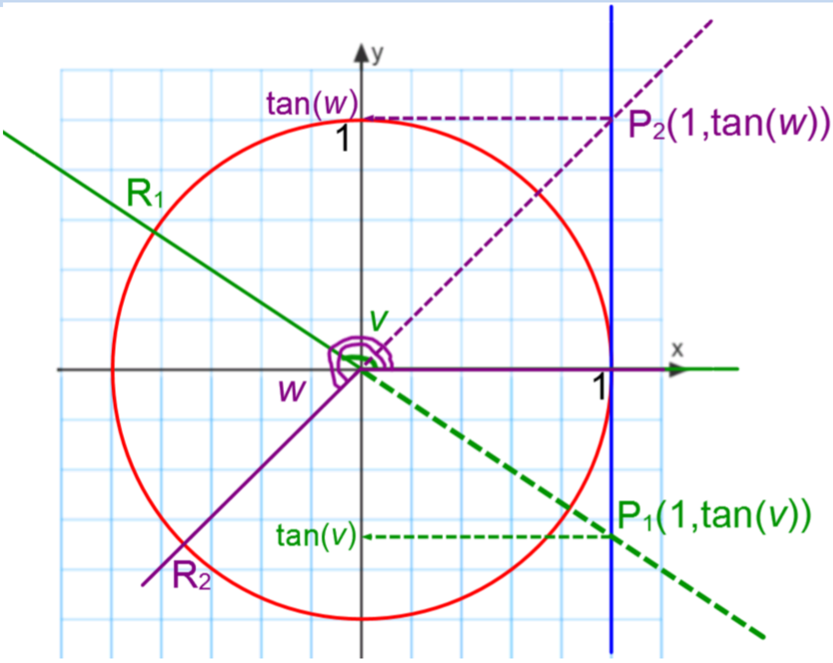


For at definere tangens til en vinkel skal vi først have tegnet den tangent til cirklen, der går gennem begyndelsespunktet (1,0), dvs. den lodrette blå linje på figuren.

Vinklen afsættes som sædvanlig, og vi kan stadig bruge retningspunktet, hvis vi vil angive vinklen i radianer. Men for at finde tangens til vinklen, skal vi se på punktet *P*, der er skæringen mellem den blå linje og det venstre vinkelben.

Dette punkts andenkoordinat er tangens til vinklen.

Hvis det venstre vinkelben kommer til at ligge i 2. eller 3. kvadrant, skal vi for at aflæse tangens forlænge det og finde skæringspunktet mellem forlængelsen og den blå linje. Så bemærk den vigtige pointe: Vi arbejder kun med én tangent til cirklen, nemlig den gennem begyndelsespunktet.



Bemærk, at de stiplede linjer er forlængelser af vinkelbenene. Dvs. du aflæser altid tangens som andenkoordinaten til skæringen med tangenten til cirklen gennem (1,0). Førstekoordinaten til skæringspunktet vil altid være 1.

Bemærk altså, at selvom retningspunktet kommer til at ligge i 2. eller 3. kvadrant, så ligger de punkter, du skal bruge til at aflæse tangens, altid i 1. eller 4. kvadrant.

Vi husker, at vi kan finde cosinus- og sinusværdier til samtlige vinkler, samt at disse værdier altid ligger i intervallet [-1,1].

Tangens opfører sig anderledes. Kig på figuren ovenfor og indse følgende:

Sætning 15: Tangens til en vinkel kan antage alle værdier, dvs. $\tan(v) \in \mathbb{R}$.

Man kan ikke tage tangens til vinklerne i mængden $\{..., -270°, -90°, 90°, 270°, 450°, ...\}$, da vores vinkelben eller en forlængelse af dette aldrig vil skære vores tangent, da det vil være parallelle linjer.

Man kan også skrive dette som: $x \neq \frac{\pi}{2} + p \cdot \pi \quad ; \quad p \in \mathbb{Z}$, dvs. vores vinkel (målt i radianer), må "ikke være lig pi halve plus et multiplum af pi".

Overgangsformler:
$$\tan(180° + v) = \tan(v)$$
$$\tan(180° - v) = -\tan(v)$$

$\tan(0°) = 0$

$\tan(45°) = 1$

Opgaverne 206*

Vi er nu nået til trekanterne. Og vi begynder med de retvinklede trekanter:

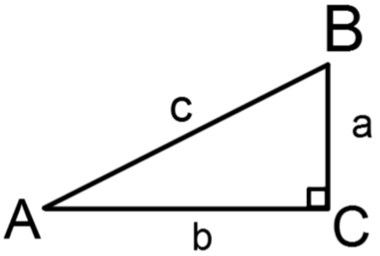
Retvinklede trekanter:

Retvinklede trekanter er trekanter, hvor den ene vinkel er en ret vinkel.
Da der kun er 90° tilbage til de to resterende vinkler, vil begge disse være spidse vinkler.
Som vi husker fra Euklids sætninger 18 og 19 i 1. bog, ligger den længste side over for den største vinkel, og den korteste side over for den mindste vinkel. Dvs. den længste side i en retvinklet trekant er siden over for den rette vinkel, og denne side kaldes *hypotenusen*.
De to korteste sider – dvs. siderne over for de to spidse vinkler – kaldes *kateterne*.

Bemærk, at ordene *katete* og *hypotenuse* KUN anvendes i forbindelse med retvinklede trekanter. Dvs. du må IKKE kalde den længste side i en ikke-retvinklet trekant for hypotenusen.

Hvis man tager udgangspunkt i én af de spidse vinkler, kan man snakke om *den hosliggende katete* (den katete, der sammen med hypotenusen danner den pågældende vinkel) samt *den modstående katete* (den katete, der ligger over for vinklen).

Vi ved altså indtil videre følgende om de retvinklede trekanter:



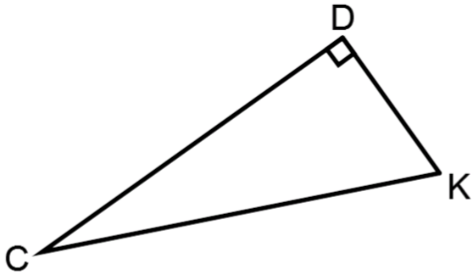
Pythagoras: $kat_1^2 + kat_2^2 = hyp^2$

$a^2 + b^2 = c^2$

I forhold til vinkel *A* er *b* den hosliggende katete og *a* er den modstående katete.
I forhold til vinkel *B* er *a* den hosliggende katete og *b* er den modstående katete.

Areal af en retvinklet trekant: $T = \frac{1}{2} \cdot kat_1 \cdot kat_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$

Det er meget vigtigt at være opmærksom på, at formlerne med bogstaver henviser til lige præcis den konkrete situation, hvor vi har en retvinklet trekant med kateterne *a* og *b*. Dvs. hvis der er anvendt andre bogstaver, må du ikke kalde Pythagoras' sætning for $a^2 + b^2 = c^2$, f.eks:

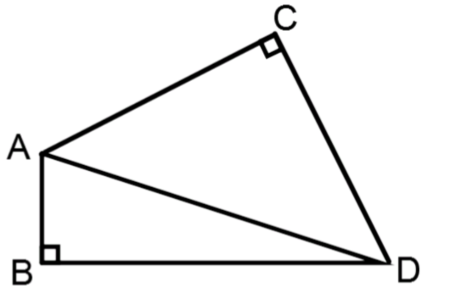


Her hedder Pythagoras' sætning:

$$c^2 + k^2 = d^2$$

Arealformlen lyder:

$$T = \frac{1}{2} \cdot k \cdot c$$



Her giver Pythagoras' sætning:

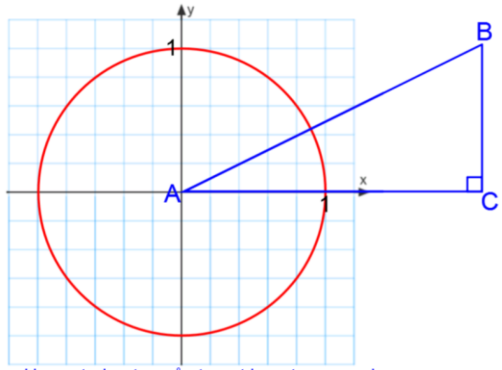
$$|AB|^2 + |BD|^2 = |AD|^2$$

og

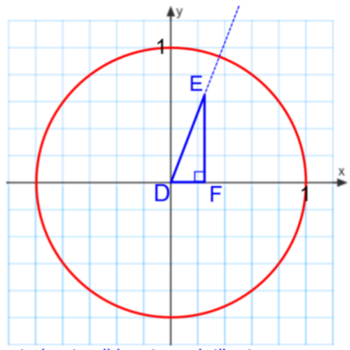
$$|AC|^2 + |CD|^2 = |AD|^2$$

Du skal altid anvende en notation, der passer til opgavens tekst og figurer.

Vi skal have fundet sammenhænge mellem de spidse vinkler og siderne i en retvinklet trekant. Det gør vi ved at tage en retvinklet trekant og placere den sammen med enhedscirklen i et koordinatsystem, så en af de spidse vinkelspidser ligger i origo med den hosliggende katete ud ad abscisseaksen og hypotenusen liggende i 1. kvadrant:

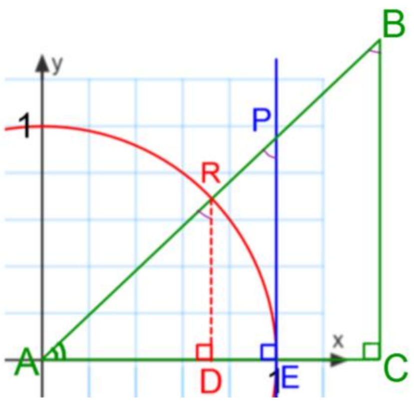


Her er trekanten så stor, at hypotenusen skærer enhedscirklen.



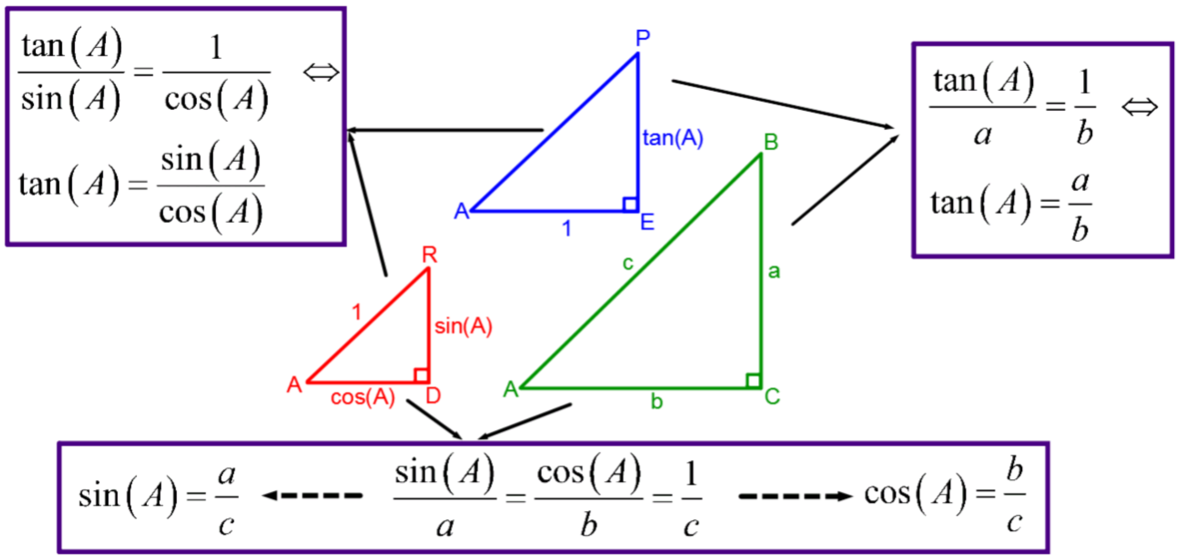
Her er trekanten ikke stor nok til, at hypotenusen skærer enhedscirklen, men man forlænger så vinklens ben, så vi får dannet retningspunktet.

Hvis hypotenusen er mindre end 1, vil der ikke være nogen skæring med enhedscirklen, men man kan altid forlænge vinkelbenet. Vi vil altså ikke overse nogen slags trekant, når vi på vores næste figur antager, at trekanten er tilpas stor til selv at danne skæringer. Tænk selv over dette, når du læser det følgende, dvs. overvej hele tiden: ”Ville dette argument være det samme, hvis det var en lille trekant?”.



Vi placerer vores trekant *ABC* i koordinatsystemet sammen med enhedscirklen.
Retningspunktet kaldes *R* og skæringen med cirklens tangent gennem (1,0) kaldes *P*.
Vi har dermed tre retvinklede trekanter *ABC*, *AEP* og *ADR*.
Da de alle deler vinkel *A*, er de ensvinklede, da deres sidste vinkel således må være den samme. Dette kan også indses ved, at linjestykkerne *DR*, *EP* og *BC* er parallelle, hvorfor de korresponderende vinkler *R*, *P* og *B* er kongruente.
Da trekanterne er ensvinklede, er forholdet mellem korresponderende linjestykker det samme, når man tager trekanterne to og to.

Da *R* er retningspunktet, og *P* er skæringen med vores lodrette tangent, kender vi nedenstående sidelængder på hver trekant (tjek, at du kan se, hvor hver eneste kendte sidelængde kommer fra, og bemærk, at da vi arbejder i 1. kvadrant, er sinus-, cosinus- og tangensværdierne til vinkel *A* alle positive, hvilket passer med, at de skal angive en sidelængde).



$$\frac{\tan(A)}{\sin(A)} = \frac{1}{\cos(A)} \Leftrightarrow \quad \tan(A) = \frac{\sin(A)}{\cos(A)}$$

$$\frac{\tan(A)}{a} = \frac{1}{b} \Leftrightarrow \quad \tan(A) = \frac{a}{b}$$

$$\sin(A) = \frac{a}{c} \longleftarrow \frac{\sin(A)}{a} = \frac{\cos(A)}{b} = \frac{1}{c} \longrightarrow \cos(A) = \frac{b}{c}$$

Vores udledning er baseret på den retvinklede trekant *ABC* med den rette vinkel *C*. Men da vores trekanter ikke altid hedder *ABC*, vil vi gerne udtrykke vores resultat mere generelt. Vi skriver derfor:

Sætning 16: For en spids vinkel *v* i en retvinklet trekant gælder:

$$\cos(v) = \frac{hos}{hyp}$$

$$\sin(v) = \frac{mod}{hyp}$$

$$\tan(v) = \frac{mod}{hos}$$

hos står for *den hosliggende katete*.

mod står for *den modstående katete.*

hyp står for *hypotenusen*

Disse formler skal du kunne huske. Du får brug for dem igen og igen.

Bemærk, at de spidse vinkler i en retvinklet trekant er komplementvinkler, dvs. sinusværdien til den ene vinkel svarer til cosinusværdien for den anden. Dette stemmer med vores formler, hvor den katete, der i forhold til den ene spidse vinkel er den hosliggende katete, i forhold til den anden spidse vinkel er den modstående katete.

Vi fik desuden vist følgende sammenhæng:

Sætning 17: For enhver vinkel x, hvor $x \neq \frac{\pi}{2} + p \cdot \pi \quad ; \quad p \in \mathbb{Z}$, gælder:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Husk, at vi kom frem til, at man ikke kunne tage tangens til vinkler, der gav et retningspunkt på ordinataksen (f.eks. 90°, -90° og 270°), da vi så ikke fik nogen skæring med tangenten. Dette passer fint med vores udsagn, for netop disse vinkler har en cosinusværdi, der er 0, og man må ikke dividere med 0.

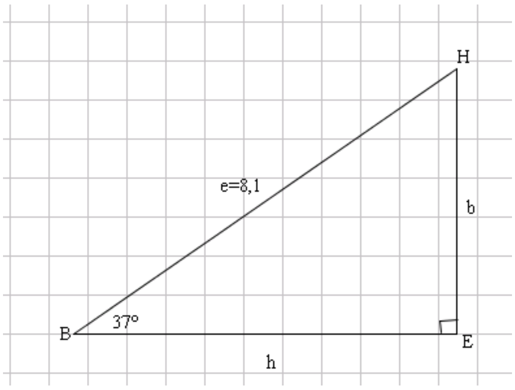
Egentlig er det en temmelig forhastet konklusion at hævde, at vi har vist sætningen for enhver vinkel, for vi har strengt taget kun vist det i 1. kvadrant.

Øvelse 14: Gå tilbage til vores figur, hvor vi behandlede tangens i alle fire kvadranter, og tjek, at vores sætning også gælder der (det er specielt fortegnene, du skal tjekke).

Lad os nu se på en række eksempler, hvor vi gennemgår, hvordan formlerne anvendes, og hvordan man anvender Maple til at løse den slags opgaver.

Eksempel 13: I en retvinklet trekant *BEH*, hvor *E* er den rette vinkel, er det oplyst, at $\angle B = 37°$ og $e = 8{,}1$. **Bestem de resterende sidelængder.**

Hvis der ikke er en skitse af trekanten, skal man altid selv tegne en skitse. Dette gøres i Maple ved 'Insert' → 'Drawing'. Her kan du tegne linjer og indsætte små tekstfelter, hvor du som sædvanlig kan skifte mellem 'Text' og 'Math':



Målene på en skitse behøver ikke at være nøjagtige, men alle væsentlige informationer skal fremgå.
Dvs. du skal i vores tilfælde angive, at *E* er den rette vinkel, samt sætte bogstaver og tal på kendte og ukendte vinkler og sider.
Herefter kan man følge med i din opskrivning.

Gradtegnet til 37° findes under paletten Punctuation og hedder 'deg' (du må ikke forveksle det med 'SmallCircle'). Hvis det ikke allerede er gjort, så tilføj det til dine favoritter.
Vi siger så:
Vi ønsker først at finde sidelængden *h*. Da trekanten er retvinklet, ser vi, **når vi tager udgangspunkt i vinkel B**, at *h* er den hosliggende katete, og *e* er vores hypotenuse. Vi skal derfor bruge den formel, hvor den hosliggende katete og hypotenusen indgår, og det er *cosinus-formlen*:

$$\cos(B) = \frac{h}{e} \Leftrightarrow h = e \cdot \cos(B)$$

$$h = 8{,}1 \cdot \cos(37°) = 6{,}468947630 = \underline{\underline{6{,}5}}$$

Der afrundes til et passende antal decimaler, hvilket i dette tilfælde vil sige det antal, som er anvendt til *e*.

Udregningen foretages i Maple med:
$restart$
$with(Gym)$:
$8.1 \cdot Cos(37) = 6.468947630$

Bemærk, at du ikke skal skrive gradtegnet i Maple (det vil give en fejlmeddelelse).

I Maple kan man ofte i trigonometriopgaver med fordel definere de størrelser, man kender, og så bede Maple om at foretage udregningerne:
$restart$
$with(Gym)$:
$B := 37 : e := 8.1$:
$Cos(B) = \frac{h}{e} \xrightarrow{\text{solve}} \{h = 6.468947631\}$

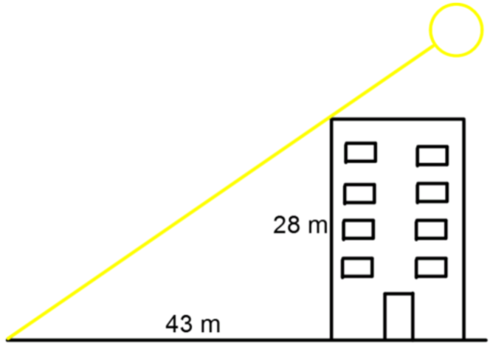
Bemærk forskellen på sidste decimal, der skyldes, at Maple (selvfølgelig) kun regner med et begrænset antal decimaler.

Når man skal finde den sidste side, kan man enten anvende Pythagoras eller sinusformlen. Det skal selvfølgelig give det samme resultat:

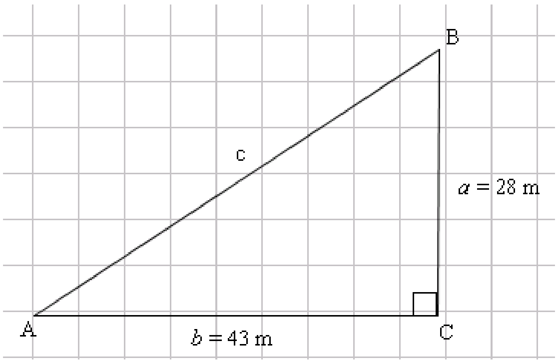
Sinusformlen: $Sin(B) = \frac{b}{e} \xrightarrow{\text{solve}} \{b = 4.874701690\}$

Pythagoras: $h := 6.468947631$:
$b^2 + h^2 = e^2 \xrightarrow{\text{solve for b}} [[b = 4.874701688], [b = -4.874701688]]$
Den negative løsning forkastes, da det er en sidelængde, der bestemmes.

Eksempel 14: Vi har fået nedenstående skitse, hvor det er oplyst, at huset er 28 m højt og kaster en skygge på 43 m. **Vi skal bestemme Solens højde over horisonten** (hvormed der menes vinklen mellem vandret og sigtelinjen mod Solen).



I dette tilfælde skal du selv indføre bogstaver, som du kan bruge i dine udregninger. Dvs. du tegner en skitse og sætter selv bogstaver på:



Ifølge opgaveformuleringen er det altså vinkel A, vi skal finde. Da vi i forhold til vinkel A kender både den hosliggende og den modstående katete, er det tangens, vi skal benytte:

$$\tan(A) = \frac{a}{b}$$

$$\tan^{-1}(\tan(A)) = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$A = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$A = \tan^{-1}\left(\frac{28\ m}{43\ m}\right) = 33{,}07067782° = \underline{\underline{33°}}$$

Bemærk det andet skridt, hvor vi pludselig indfører betegnelsen $\tan^{-1}$. Det angiver den omvendte funktion til tangens. Vi skal senere arbejde en hel del med omvendte funktioner, men på nuværende tidspunkt skal du kun vide, at en omvendt funktion ophæver virkningen af funktionen. Ligesom subtraktion ophæver virkningen af addition, og multiplikation ophæver virkningen af division. Dvs. $\tan^{-1}$ ophæver virkningen af $\tan$, og derfor står der bare et A tilbage.

I Gym-pakken hedder denne kommando *invTan* eller *arcTan*, dvs. indtastningen er:

$restart$

$with(Gym)$:

$$invTan\left(\frac{28}{43}\right) = 33.07067782$$

Vi kan angive følgende udtryk, der kan anvendes, når man ønsker at bestemme en ukendt vinkel:

Sætning 18: For en spids vinkel *v* i en retvinklet trekant gælder:

$$v=\cos^{-1}\left(\frac{hos}{hyp}\right)$$

$$v=\sin^{-1}\left(\frac{mod}{hyp}\right)$$

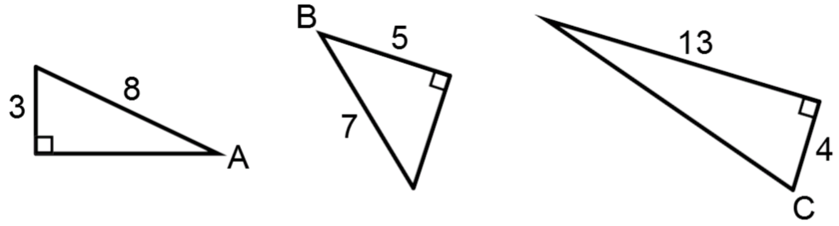
$$v=\tan^{-1}\left(\frac{mod}{hos}\right)$$

hos står for *den hosliggende katete*.

mod står for *den modstående katete.*

hyp står for *hypotenusen*

Eksempel 15: Vi ønsker i nedenstående tre retvinklede trekanter at bestemme den vinkel, der er angivet med et bogstav. Tænk i hvert tilfælde over, hvorfor der anvendes sinus, cosinus eller tangens:



I dette eksempel gør vi ikke noget ud af opskrivningen, men viser blot de indtastninger i Maple, der fører til resultaterne:

Rigtigt

Forkert (Maple bruger ikke denne notation)

$with(Gym):$

$A=invSin\left(\frac{3}{8}\right)=22.02431283$ $\quad arcSin\left(\frac{3}{8}\right)=22.02431283$ $\quad Sin^{-1}\left(\frac{3}{8}\right)=152.7898362$

$B=invCos\left(\frac{5}{7}\right)=44.41530859$ $\quad arcCos\left(\frac{5}{7}\right)=44.41530859$ $\quad Cos^{-1}\left(\frac{5}{7}\right)=1.000077714$

$C=invTan\left(\frac{13}{4}\right)=72.89727100$ $\quad arcTan\left(\frac{13}{4}\right)=72.89727100$ $\quad Tan^{-1}\left(\frac{13}{4}\right)=17.61055882$

Dvs. $\underline{\underline{A=22.0°,\ B=44.4°\ og\ C=72.9°}}$

Hvis du ikke kender en vinkel, kan du imidlertid også anvende kommandoen *intervalsolve*, hvor du efterfølgende skal angive det interval, som din vinkel skal ligge inden for. Du skal snart se, hvorfor det er *intervalsolve* og ikke bare *solve*, der skal anvendes, når du arbejder med vilkårlige trekanter.

$$intervalsolve\left(Sin(A)=\frac{3}{8},A=0..90\right)=[22.02431284]$$

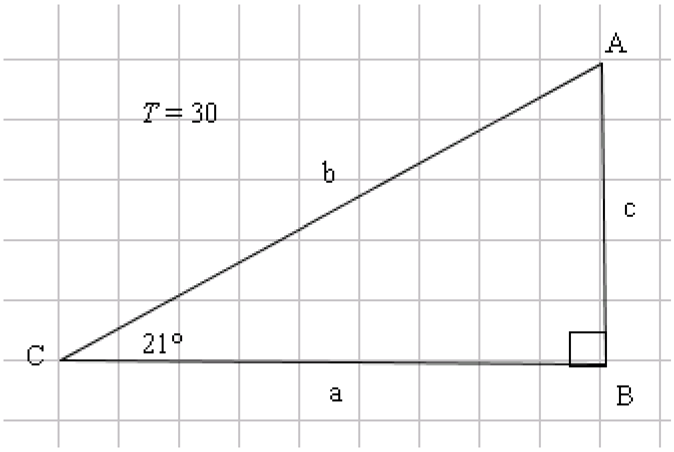
$$intervalsolve\left(Cos(B)=\frac{5}{7},B=0..90\right)=[44.41530860]$$

$$intervalsolve\left(Tan(C)=\frac{13}{4},C=0..90\right)=[72.89727103]$$

Eksempel 16: I trekant *ABC*, hvor *B* er den rette vinkel, er det oplyst, at $C = 21°$ og $T = 30$.

Vi vil gerne bestemme længden af de to kateter.

Det bemærkes altså, at vi kender en vinkel og arealet af trekanten. Vi tegner først en skitse:



I vores arealformel indgår kateternes længder, og disse indgår også i udtrykket for tangens. Derfor kan vi med disse to formler opstille to ligninger med to ubekendte:

$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \qquad \tan(C) = \frac{c}{a}$$

$$30 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \qquad \tan(21°) = \frac{c}{a}$$

Maple kan løse disse to ligninger med to ubekendte:

restart

with(*Gym*) :

$$\left[Tan(21) = \frac{c}{a},\ 30 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \right] \xrightarrow{\text{solve}}$$

$\{a = 12.50221356,\ c = 4.799150145\},\ \{a = -12.50221356,\ c = -4.799150145\}$

To løsningssæt dukker op, men kun det med de positive tal kan bruges i vores tilfælde, hvor vi jo søger sidelængder.

Så vi har: $\underline{\underline{a = 12{,}5}}$ og $\underline{\underline{c = 4{,}8}}$

Vi kan løst definere de omvendte trigonometriske funktioner ved:

Løs definition: $\sin^{-1}(p)$ er den vinkel *v*, hvis sinusværdi er *p*, dvs. $\sin\left(\sin^{-1}(p)\right) = p$.

$\cos^{-1}(p)$ er den vinkel *v*, hvis cosinusværdi er *p*, dvs. $\cos\left(\cos^{-1}(p)\right) = p$.

$\tan^{-1}(p)$ er den vinkel *v*, hvis tangensværdi er *p*, dvs. $\tan\left(\tan^{-1}(p)\right) = p$.

Bemærk, hvordan tankegangen er den samme, som da vi indførte regneoperationerne subtraktion og division ud fra addition og multiplikation samt roduddragning ud fra potensopløftning. Og vi skal også anvende denne tankegang, når vi skal indføre logaritmer ud fra eksponentialfunktioner.

Når definitionen kun er "løs", skyldes det, at vores definition ikke fører til entydige funktioner (jf. problemet med rødder). Vi skal dog senere gøre disse funktioner entydige, når vi skal arbejde generelt med omvendte funktioner.

Opgaverne 208*

VILKÅRLIGE TREKANTER

Lad os se på en vilkårlig trekant, dvs. en trekant hvor vi ikke antager noget om, hvorvidt den er spidsvinklet, retvinklet, stumpvinklet, ligesidet eller ligebenet.

Vi vil til at begynde med udlede tre sætninger om sådanne trekanter: *Arealformler*, *sinusrelationer* og *cosinusrelationer*.

Sætning 19: For en vilkårlig trekant *ABC* gælder:

$$T = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin(A) = \frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin(B) = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin(C)$$ **AREALFORMLERNE**

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$ **SINUSRELATIONERNE**

$$\cos(A) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c} \quad\Leftrightarrow\quad a^2 = b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos(A)$$ **COSINUSRELATION**

$$\cos(B) = \frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c} \quad\Leftrightarrow\quad b^2 = a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos(B)$$ **COSINUSRELATION**

$$\cos(C) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b} \quad\Leftrightarrow\quad c^2 = a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos(C)$$ **COSINUSRELATION**

Eller

$$T = \frac{1}{2}\cdot hos_1\cdot hos_2\cdot\sin(v)$$

$$\frac{\sin(v)}{mod_v} = \frac{\sin(w)}{mod_w} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{mod_v}{\sin(v)} = \frac{mod_w}{\sin(w)}$$

$$\cos(v) = \frac{hos_1^2+hos_2^2-mod^2}{2\cdot hos_1\cdot hos_2}$$

Her står hos_1 og hos_2 for de to hosliggende sider, når man har udvalgt den vinkel *v*, man vil tage udgangspunkt i. Og *mod* står for den modstående side.

Disse formler skal du også kunne huske. Bemærk, at du ikke skal tænke så meget i formlerne udtrykt med bogstaver øverst. Du skal hellere tage udgangspunkt i, hvordan siderne og vinklerne ligger i forhold til hinanden.

I arealformlen skal du bemærke, at når du har en vinkel, skal du bruge de to sider, der danner vinklen.

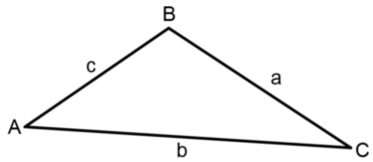
I sinusrelationen skal du bemærke, at brøkerne består af vinkler og modstående sider.

I cosinusrelationen er det de to sider, der danner din vinkel, som skal stå først i tælleren, og som indgår i nævneren.

Arealformlen kan også huskes som "½ appelsin med C-vitamin"-formlen pga. $T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)$.

Cosinusrelationerne kaldes også for "Den Udvidede Pythagoras" eller "Pythagoras minus to abrikoser". Du kan se årsagen til disse navne, når du kigger på $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C)$.

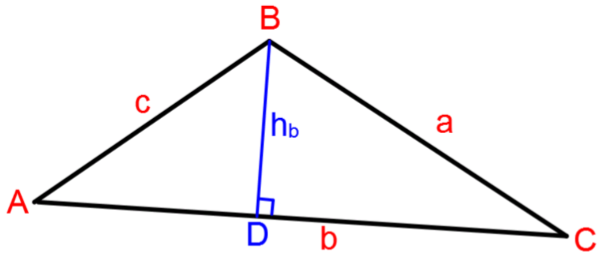
Bevis 19: Vores udgangspunkt er en vilkårlig trekant *ABC* med siderne *a, b* og *c*:



Arealformlerne:

Vi ved, at man generelt finder arealet af en trekant ved $T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$. Dvs. hvis vi vælger *b* som vores grundlinje, skal vi benytte højden fra *B* i vores arealformel, dvs. $T = \frac{1}{2} \cdot h_b \cdot b$.

Men højden fra *B* optræder ikke blandt de 6 stykker (3 sider og 3 vinkler), som vi har taget udgangspunkt i. Og vi skal derfor i formlen have erstattet den med et eller andet udtryk, der kun indeholder nogle af stykkerne *A, B, C, a, b* og *c*. For at gøre dette nedfælder vi nu højden fra *B* og kalder fodpunktet for *D*:



Trekant *ABD* er retvinklet, og hvis vi tager udgangspunkt i vinkel *A*, har vi sat navn på den modstående katete og hypotenusen. Vi vil derfor bruge vores sinusformel for retvinklede trekanter, og den giver os:

$\sin(A) = \frac{h_b}{c} \Leftrightarrow h_b = c \cdot \sin(A)$

Vi har her et udtryk for højden fra *B*, som vi kan indsætte i vores arealformel, der dermed får udseendet:

$$T = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \sin(A) \cdot b = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(A)$$

Vi har hermed vist den første af arealformlerne.

Den sidste af arealformlerne findes ved at tage udgangspunkt i den retvinklede trekant *BCD*, hvor vi har $\sin(C) = \frac{h_b}{a} \Leftrightarrow h_b = a \cdot \sin(C)$, hvilket indsat i vores arealformel giver:

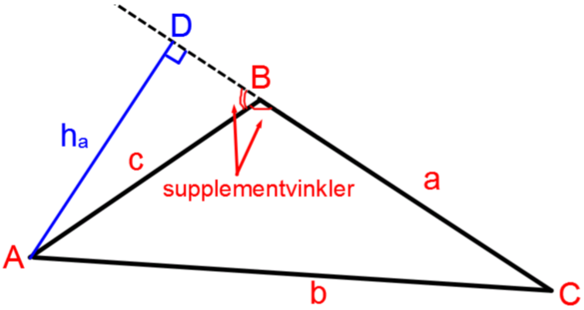
$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C).$$

Egentlig kunne man også bare sige, at når man først har fundet den ene arealformel, så følger de andre ved bogstavombytning, fordi vi netop ikke har forudsat noget specielt om vores trekant, hvorfor vores valg af bogstaver er vilkårligt.

Men!

Her skal man dog være opmærksom på, at vi alligevel undervejs kom til at antage, at højden faldt inde i trekanten, og vi har taget udgangspunkt i en spids vinkel. Så vi skal også se på det andet tilfælde.

Vi ser derfor på en højde, der falder uden for trekanten:



Vi har igen kaldt højdens fodpunkt for *D*.

Vi har så: $T=\frac{1}{2}\cdot h_a\cdot a$.

Hvis vi ser på trekant *ACD* og tager udgangspunkt i vinkel *C*, kan vi få

$h_a=b\cdot\sin(C)$ og dermed $T=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin(C)$.

Dvs. vi har fået samme udtryk som tidligere, og vi har altså vist, at det ikke gør nogen forskel, om højden falder uden for eller inden for trekanten. Men vi mangler endnu at inddrage en evt. stump vinkel:

Kig på trekant *ABD* og udnyt vores overgangsformler for supplementvinkler, der siger, at $\sin(\angle ABD)=\sin(\angle ABC)$.

Det giver os:

$$\begin{gathered}\sin(\angle ABD)=\frac{h_a}{c}\\ h_a=c\cdot\sin(\angle ABD)=c\cdot\sin(\angle ABC)=c\cdot\sin(B)\end{gathered}.$$

I sidste skridt er vi gået tilbage til vores oprindelige notation, dvs. vi kalder $\angle ABC$ for *B*.

Dette giver os $T=\frac{1}{2}\cdot c\cdot\sin(B)\cdot a=\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin(B)$, og hermed er arealformlerne vist.

(Gennemtænk selv det retvinklede tilfælde)

Sinusrelationerne:

Sinusrelationerne fremkommer ud fra arealformlerne. Vi har nemlig tre forskellige formler til udregning af arealet af vores trekant, der hver tager udgangspunkt i forskellige vinkler. Pointen er så, at vores areal jo har en bestemt værdi, dvs. alle formlerne skal give den samme værdi, hvilket vi har udtrykt ved:

$$T=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin(A)=\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin(B)=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin(C).$$

Vi ser nu bort fra *T* og koncentrerer os altså om de tre sidste udtryk. Da de er ens, vil de også give samme værdier, hvis de alle sammen multipliceres med den samme størrelse. Vi multiplicerer derfor med størrelsen $\frac{2}{a\cdot b\cdot c}$, hvilket giver os:

$$\begin{gathered}\frac{2}{a\cdot b\cdot c}\cdot\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin(A)=\frac{2}{a\cdot b\cdot c}\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin(B)=\frac{2}{a\cdot b\cdot c}\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin(C)\\ \frac{\sin(A)}{a}=\frac{\sin(B)}{b}=\frac{\sin(C)}{c}\end{gathered}$$

Hermed er sinusrelationerne vist (versionen med siderne i tælleren følger direkte af, at hvis tre brøker er ens, er deres reciprokke elementer ved multiplikation også ens).

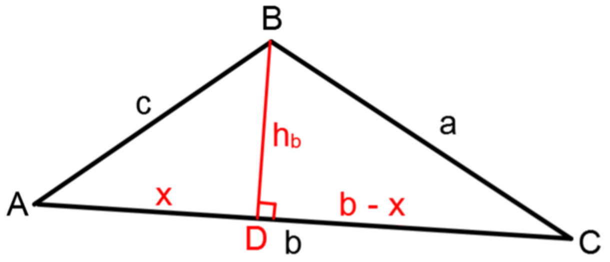
Højdeformlerne (en bonus):

Bemærk, at vi undervejs i beviset også har fået vist, at højderne i en trekant generelt kan beregnes ved:

$h_a=b\cdot\sin(C)=c\cdot\sin(B)\quad h_b=a\cdot\sin(C)=c\cdot\sin(A)\quad h_c=a\cdot\sin(B)=b\cdot\sin(A)$.

Cosinusrelationerne:

Vi begynder igen med at nedfælde højden fra en af vores vinkelspidser. Igen begynder vi med en, hvor højden falder inden i trekanten, og derefter ser vi på en situation, hvor højden falder uden for trekanten:



Vi kalder fodpunktet for *D* og har dermed fået dannet de to retvinklede trekanter *ABD* og *BCD*.

Vi indfører betegnelsen *x* for sidelængden i trekant *ABD*, som vi ikke kender.

Hermed får trekant *BCD* en side med længden $b-x$.

Da trekanterne *ABD* og *BCD* er retvinklede, kan vi benytte Pythagoras og få:

$\triangle ABD: x^2+h_b^2=c^2$

$\triangle BCD: (b-x)^2+h_b^2=a^2 \Leftrightarrow (b-x)\cdot(b-x)+h_b^2=a^2 \Leftrightarrow b^2-b\cdot x-b\cdot x+x^2+h_b^2=a^2$

Kig godt på de to gule udtryk. I det nederste indgår $x^2+h_b^2$, og i det øverste udtryk står der, at dette udtryk er det samme som c^2. Vi har derfor:

$$b^2-2bx+c^2=a^2$$

Her begynder man at kunne ane cosinusrelationerne, og faktisk er det i denne form, de udtrykkes hos Euklid (sætning 13 i 2. bog), da han fortolker $b\cdot x$ som arealet af et bestemt rektangel.

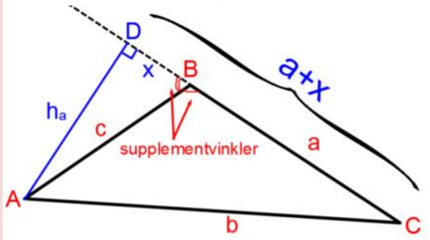
Men vi har vinkler til rådighed, og vi vil gerne have fjernet vores *x* fra udtrykket. Dette gør vi ved at se på vores retvinklede trekant *ABD*, hvor vi har:

$$\cos(A)=\frac{x}{c} \Leftrightarrow x=c\cdot\cos(A)$$

Dette kan vi indsætte, så vi får: $a^2=b^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos(A)+c^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos(A)$

Vi har hermed vist cosinusrelationerne i det tilfælde, hvor højden falder inden for trekanten, da de to andre cosinusrelationer fremkommer ved bogstavombytning.

Vi ser nu på det tilfælde, hvor højden falder uden for trekanten:



Vi får igen dannet to retvinklede trekanter *ABD* og *ACD*. I trekant *ABD* kalder vi den sidste sidelængde for *x*, og dermed bliver sidelængden i trekant *ACD* $a+x$.

Vores overgangsformler for supplementvinkler giver $\cos(\angle ABD)=-\cos(\angle ABC)=-\cos(B)$.

Da trekanterne *ABD* og *ACD* er retvinklede, har vi:

$\triangle ABD: x^2+h_a^2=c^2$

$\triangle ACD: (a+x)^2+h_a^2=b^2 \Leftrightarrow (a+x)\cdot(a+x)+h_a^2=b^2 \Leftrightarrow a^2+a\cdot x+a\cdot x+x^2+h_a^2=b^2$

$x^2+h_a^2$ indgår i det nederste gule udtryk, og i det øverste ses det, at det svarer til c^2:

$a^2+2ax+c^2=b^2$ (svarende til Euklids sætning 12 i bog 2).

I trekant *ABD* har vi $\cos(\angle ABD)=\frac{x}{c} \Leftrightarrow x=c\cdot\cos(\angle ABD)$. Og dermed er:

$b^2=a^2+c^2+2a\cdot c\cdot\cos(\angle ABD)=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos(B)$

Vi skal nu se på anvendelsen af formlerne i nogle eksempler.
Du skal her lægge mærke til, hvilke stykker formlerne indeholder.

En sinusrelation indeholder 2 vinkler og 2 sider.
En cosinusrelation indeholder 1 vinkel og 3 sider.

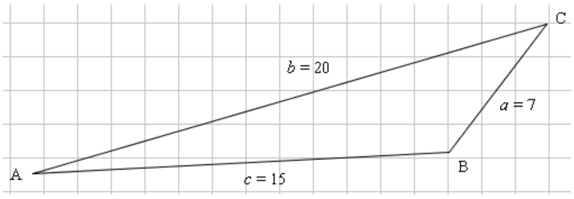
Som vi har været inde på en del gange, skal man i de fleste tilfælde kende tre stykker i en trekant for at kunne beregne de resterende. To stykker er aldrig nok, og sommetider er tre stykker heller ikke nok (disse situationer ser vi på efter de første eksempler).

Vores sinus- og cosinusrelationer indeholder altså 4 stykker, og vi skal kende tre af dem for at kunne beregne det fjerde.

Hvis vi kender 3 sider, er det altså kun cosinusrelationen, der kan anvendes.
Hvis vi kender 2 vinkler og 1 side, er det kun sinusrelationen, der kan anvendes.
Hvis vi kender 1 vinkel og 2 sider, afhænger vores valg af formel af, hvordan de ligger i forhold til hverandre.
For at kunne anvende en sinusrelation skal man kende et par bestående af en vinkel og dens modstående side.

Eksempel 16: Vi har fået givet en trekant med sidelængderne 7, 15 og 20, og vi vil nu gerne bestemme vinklerne i trekanten.

Vi tegner først en skitse og sætter bogstaver på, så vi kan henvise til disse i vores formler:



Da vi kender tre sider, skal vi anvende cosinusrelationer for at finde vinklerne:

$$\cos(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

$$A = \cos^{-1}\left(\frac{20^2 + 15^2 - 7^2}{2 \cdot 20 \cdot 15}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{24}{25}\right) = 16{,}26020471° \approx \underline{\underline{16{,}3°}}$$

Indtastningen i Maple er:

$restart$
$with(Gym):$
$invCos\left(\frac{24}{25}\right) = 16.26020471$

Dette er den pæne måde at gøre det på, hvor man isolerer vinklen ved at anvende den omvendte funktion til cosinus. Men i Maple kan det gøres mere effektivt, hvis man definerer de kendte størrelser og anvender '*solve*' eller '*intervalsolve*':

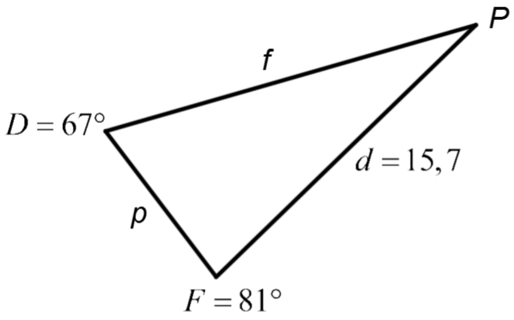
$restart$
$with(Gym):$
$a := 7 : b := 20 : c := 15 :$

$$Cos(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \xrightarrow{\text{solve for A}} [[A = 16.26020471]]$$

$$intervalsolve\left(Cos(B) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}, B = 0..180\right) = [126.8698976]$$

$$Cos(C) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} \xrightarrow{\text{solve for C}} [[C = 36.86989765]]$$

Eksempel 17: Vi har fået givet nedenstående trekant og vil gerne **bestemme længden af siden *f* samt arealet af trekanten**.



Vi har fået 2 vinkler og en side og kan derfor ikke anvende cosinusrelationer. Da vi har en vinkel og den modstående side, kan vi anvende en sinusrelation (hvis det i vores tilfælde havde været siden *p*, vi kendte, skulle vi først finde vinkel *P* ud fra vinkelsummen i trekanten).

$$\frac{f}{\sin(F)}=\frac{d}{\sin(D)} \Leftrightarrow f=\frac{d}{\sin(D)}\cdot\sin(F)$$

$$f=\frac{15,7}{\sin(67°)}\cdot\sin(81°)=16,84587200=\underline{\underline{16,8}}$$

Indtastningen i Maple er:

$restart$

$with(Gym)$:

$\frac{15.7\cdot Sin(81)}{Sin(67)}=16.84587200$

Igen kunne man dog klare det ved at definere størrelserne og anvende '*solve*' (du skal ikke anvende '*intervalsolve'* , med mindre du som med vinklerne har et interval at søge inden for).

Da *D* er en beskyttet variabel i Maple, husker vi, at man skal skrive "*local D"*:

$restart$

$with(Gym)$:

local D :

$d := 15.7 : \mathrm{D} := 67 : F := 81$:

$\frac{f}{Sin(F)}=\frac{d}{Sin(\mathrm{D})}\xrightarrow{\text{solve for f}}[[f=16.84587200]]$

Vi vil nu gerne finde arealet af trekanten, og der ved vi, at vi skal bruge en vinkel og de to hosliggende sider. Men vi kender kun siderne *f* og *d*, og det er vinkel *P*, der har dem som hosliggende sider. Vi finder derfor først vinkel *P* ved vinkelsummen i en trekant, og derefter anvendes arealformlen:

$$\angle P=180°-\angle D-\angle F=180°-67°-81°=32°$$

$$T=\frac{1}{2}\cdot f\cdot d\cdot\sin(P)=\frac{1}{2}\cdot 16,84587200\cdot 15.7\cdot\sin(32°)=70,07657397=\underline{\underline{70,1}}$$

Bemærk, at man skal regne videre med alle decimaler (16,84…), selvom man tidligere har angivet et facit med kun én decimal (16,8).

Regn med alle decimaler. Afrund facit til et passende antal decimaler.

Opgaverne 210*

Tre vinkler:

Lad os se lidt mere på den ene af situationerne, hvor tre oplyste stykker ikke er nok, nemlig hvis de tre oplyste stykker er tre vinkler.

Vi ved fra vores arbejde med ensvinklede trekanter, at der findes uendeligt mange trekanter med tre angivne vinkler, og disse er – som ordet også siger – ensvinklede. Dvs. der findes ikke nogle bestemte sidelængder, der svarer til 3 angivne vinkler (der gælder kun, at der er et bestemt forhold mellem sidelængderne). Hvordan passer det med vores sinus- og cosinusrelationer?

Øvelse: Kig på sinus- og cosinusrelationerne og se, at ingen af dem kan bruges i dette tilfælde.

Man kan sige, at grunden til, at tre vinkler ikke er nok information, er, at tre vinkler sådan set ikke er mere information end to vinkler. For da vinkelsummen i en trekant er 180°, kan man altid finde den sidste vinkel ud fra denne viden. Som omtalt i del 1 af dette emne, siger vi, at der er 2 *frihedsgrader*, når vi ser på vinklerne i en trekant.

Areal ud fra tre sider:

Vi har set, at man ud fra en vinkel og de to hosliggende sider kan bestemme arealet af en trekant. Men faktisk kan det også lade sig gøre uden kendskab til vinklerne, dvs. hvis vi udelukkende kender de tre sider. Herons formel kan anvendes til dette formel, men vi kan også udlede en lidt simplere version af denne formel ud fra de udtryk, vi allerede kender.

Sætning 20: En trekant med sidelængderne *a*, *b* og *c* har arealet $T=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2\cdot b^2-\frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)^2}{4}}$

Bevis 20: Vi tager udgangspunkt i vores arealformel $T=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\left(C\right)$.

Vi ved, at arealet er positivt, så vi har $T=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\left(C\right)\right)^2}$ (jf. vores potensregneregler)

Dermed har vi: $T=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot a^2\cdot b^2\cdot\sin^2\left(C\right)}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2\cdot b^2\cdot\sin^2\left(C\right)}$.

Ifølge Grundrelationen er: $\cos^2\left(C\right)+\sin^2\left(C\right)=1\Leftrightarrow\ \sin^2\left(C\right)=1-\cos^2\left(C\right)$.

Dvs. vi har: $T=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2\cdot b^2\cdot\left(1-\cos^2\left(C\right)\right)}$.

Vores cosinusrelation med udgangspunkt i vinkel *C* giver os så:

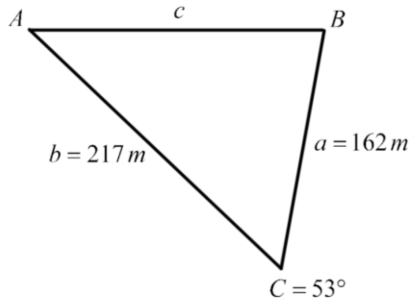
$$T=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2\cdot b^2\cdot\left(1-\frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)^2}{\left(2\cdot a\cdot b\right)^2}\right)}$$

Radikanden reduceres ved at gange ind i parentesen:

$$T=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2\cdot b^2-a^2\cdot b^2\cdot\frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)^2}{4\cdot a^2\cdot b^2}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2\cdot b^2-\frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)^2}{4}}$$

VIGTIGT: Dette er ikke en standardformel som sinus- og cosinusrelationerne. Så hvis du vælger at anvende den i en opgave, skal du skrive: ”Vi har bevist, at arealet af trekant *ABC* kan bestemmes ved formlen …”.

Eksempel 18: En trekantet mark har målene oplyst på figuren. Vi ønsker at indhegne den og så raps, så vi skal kende omkredsen og arealet af marken.



For at bestemme omkredsen skal vi først finde længden af siden *c*. Vi har én vinkel og to sider, så det afgørende for, om vi kan bruge sinusrelationer eller cosinusrelationer (eller begge dele), er, hvordan de ligger i forhold til hinanden.

Da vi ikke har et par bestående af en vinkel og den modstående side, kan vi ikke anvende sinusrelationer, dvs. vi indser at:

Med en vinkel og de to hosliggende sider skal man anvende cosinusrelationer.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos(C)$$

$$c = \sqrt{(162m)^2 + (217m)^2 - 2\cdot 162m\cdot 217m\cdot\cos(53°)} = 176{,}1266287\text{ m } = \underline{\underline{176\,m}}$$

Indtastningen i Maple er (bemærk, at du kan indtaste uden enheder):

$restart$
$with(Gym)$:
$\sqrt{162^2 + 217^2 - 2\cdot162\cdot217\cdot Cos(53)} = 176.1266287$

(Kvadratroden kan du i Maple enten finde under *Expression*, eller du kan skrive ”sqrt” (forkortelse for squareroot) og efterfølgende trykke på ”esc”-knappen).

Vi mangler stadig at finde omkredsen og arealet, og det gøres sammen med en gentagelse af første del af opgaven i Maple, så du kan se, hvordan man kan skrive tingene op:

$restart$
$with(Gym)$:
$a := 162\ m : b := 217\ m : C := 53$:
Længden af siden c bestemmes med en cosinusrelation:
$Cos(C) = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2\cdot a\cdot b} \xrightarrow{\text{solve for c}} [[c = -176.1266287\ m], [c = 176.1266287\ m]]$
Da det er en sidelængde, forkastes den negative løsning, og vi har $c := 176.1266287\ m$:
Omkredsen er så $O = a + b + c = 555.1266287\ m$
Dvs. vores omkreds er $\underline{\underline{555\ m}}$

Arealet kan bestemmes på to måder. Først med appelsin-formlen:
$T = \dfrac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot Sin(C) = 14037.61636\ m^2$
Så med vores arealformel ud fra siderne:
$T = \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2\cdot b^2 - \dfrac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4}} = 14037.61636\sqrt{m^4}$
Dvs. vores areal er $\underline{\underline{14038\ m^2}}$

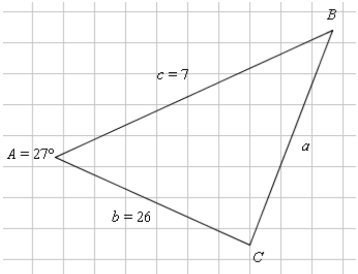
Opgaverne 218*

Vores overgangsformler fortalte os, at sinusværdierne til supplementvinkler er ens. Lad os se på, hvordan dette fører til en af de hyppigst forekommende fejl inden for trigonometri, der dog kan undgås, hvis du vænner dig til altid at anvende *intervalsolve*, når du arbejder med ukendte vinkler og sinusrelationer.

Eksempel 19: Vi har fået oplyst, at i trekant *ABC* er $A=27°$, $c=7$ og $b=26$.

Bestem vinkel *B*.

Vi tegner først en skitse:



Vi kan ikke umiddelbart bestemme vinkel *B*, for cosinusrelationen kan kun give os siden *a*, mens sinusrelationerne slet ikke kan bruges fra start, da vi ikke har en vinkel og dens modstående side. Vi er derfor nødt til først at finde siden *a* og derefter vinkel *B*.

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos(A)$$

$$a=\sqrt{26^2+7^2-2\cdot 26\cdot 7\cdot\cos(27°)}=20{,}01683355$$

Vi kan nu finde vinkel *B* ved en sinusrelation:

$$\frac{\sin(B)}{b}=\frac{\sin(A)}{a}\Leftrightarrow\ \sin(B)=\frac{\sin(A)}{a}\cdot b\Leftrightarrow$$

$$B=\sin^{-1}\left(\frac{\sin(27°)}{20{,}01683355}\cdot 26\right)=36{,}13510636°$$

Vores indtastning i Maple er:

$$invSin\left(\frac{Sin(27)}{20.01683355}\cdot 26\right)=36.13510636$$

Vi kunne også bare have defineret størrelserne og brugt '*solve*':

$$a:=20.01683355:b:=26:A:=27:$$

$$solve\left(\frac{Sin(B)}{b}=\frac{Sin(A)}{a},B\right)=36.13510638$$

Og vi kigger så på vores skitse og ser, at det passer da udmærket, så vi er nu ret sikre på, at vi har regnet rigtigt.

Men hov!

Noget er helt galt. Ifølge vores udregninger må *C* være stump, og det kan ikke passe, for den skulle så ligge over for den længste side, men den ligger over for den korteste side.

Lad os se på vores fejl.

For det første er vores skitse elendig og passer slet ikke med de mål, der er oplyst.

For det andet begår vi i begge vores fremgangsmåder fejl, som vi nu skal se på:

$$\frac{\sin(B)}{b}=\frac{\sin(A)}{a} \Leftrightarrow \sin(B)=\frac{\sin(A)}{a}\cdot b \Leftrightarrow$$

$$B=\sin^{-1}\left(\frac{\sin(27^\circ)}{20{,}01683355}\cdot 26\right)=36{,}13510636^\circ$$

Denne biimplikation gælder ikke.

Når du arbejder med vilkårlige trekanter, gælder følgende biimplikation:

$$\sin(B)=k \;\Leftrightarrow\; B=\sin^{-1}(k) \;\vee\; B=180^\circ-\sin^{-1}(k)$$

For at forstå dette skal du huske på, at sinusværdierne til supplementvinkler er ens. Og på venstresiden af biimplikationen er det sinusværdien, du kender. Du ved derfor ikke, om den søgte vinkel er en spids vinkel eller dens stumpe supplementvinkel.

Og som vi senere skal lære, er funktionsværdier entydigt bestemt ud fra det, der puttes ind i funktionen. $\sin^{-1}$ kan derfor ikke give os to forskellige værdier, men er defineret til kun at give den spidse vinkel.

Du skal derfor selv huske den stumpe vinkel.

Problemet med vores anden fremgangsmåde er, at *solve* kun giver os én løsning ved trigonometriske ligninger (også når der faktisk er flere). Egentlig er det en rigtig løsning til lige præcis den pågældende ligning. Problemet er bare, at det ikke passer ind i helheden.

$$a := 20.01683355 : b := 26 : A := 27 :$$

$$solve\left(\frac{Sin(B)}{b}=\frac{Sin(A)}{a}, B\right)=36.13510638$$

BRUG IKKE SOLVE VED SINUSRELATIONER MED UKENDTE VINKLER.

Der er to veje til at undgå denne fejl:

1) **Brug cosinusrelationer, når det er muligt.** I vores tilfælde får man:

$$a := 20.01683355 : b := 26 : c := 7 :$$

$$solve\left(\mathrm{Cos}(\mathrm{B})=\frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c}\right)=143.8648935$$

2) **Brug *intervalsolve* og udnyt din viden om, at den længste side er over for den største vinkel og den korteste side over for den mindste vinkel:**

$$a := 20.01683355 : b := 26 : A := 27 :$$

$$intervalsolve\left(\frac{Sin(B)}{b}=\frac{Sin(A)}{a}, B=0..180\right)=[36.13510638, 143.8648936]$$

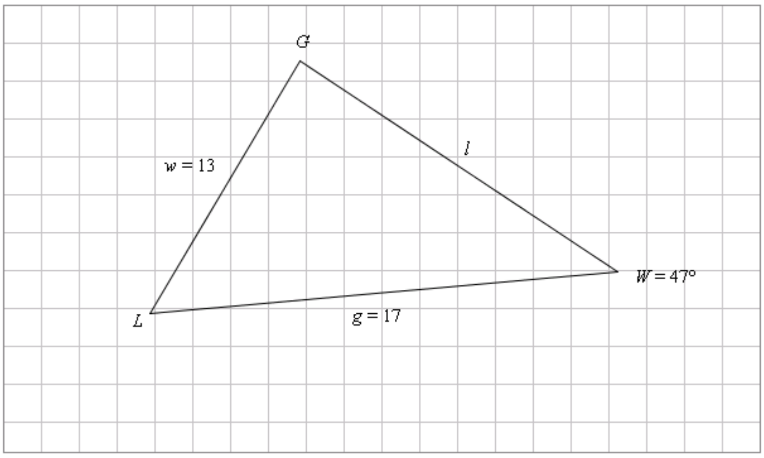
Med *intervalsolve* finder du begge løsninger, og du skal så udvælge den rigtige ved at kigge på sidelængderne og de andre vinkler.

Eksempel 20: I trekant LWG oplyses det, at $W = 47°$, $w = 13$ og $g = 17$. Det oplyses desuden, at G er stump.

Bestem vinkel *G*:

Vi tegner først en skitse:

restart
with(*Gym*) :



Vi definerer først stykkerne og anvender derefter *intervalsolve* :

$w := 13 : g := 17 : W := 47 :$

$$intervalsolve\left(\frac{Sin(G)}{g} = \frac{Sin(W)}{w}, G = 0..180\right) = [73.01585202, 106.9841480]$$

Det er oplyst, at vinkel G er stump, så $\underline{\underline{\angle G = 107.0°}}$

Vi har lige set to eksempler, hvor man skulle vælge mellem en spids og en stump vinkel. Men der er faktisk også den mulighed, at begge vinkler kan være rigtige. Dette kaldes *Det dobbelttydige trekanttilfælde*, eller hvis man opdeler i fem forskellige tilfælde, vil man ofte placere det som *Det femte trekanttilfælde*.

Så lad os afslutningsvis se på denne opdeling og behandle *Det dobbelttydige trekanttilfælde*.

De 5 trekanttilfælde

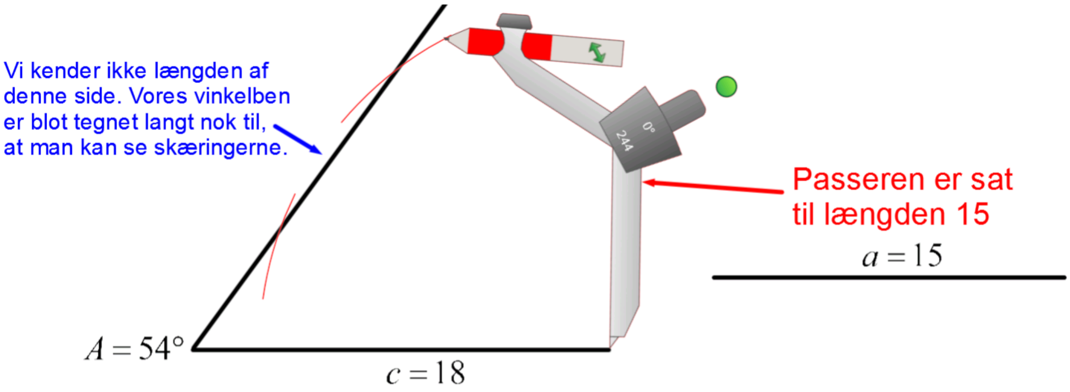
(rækkefølgen bortset fra nr. 5 er vist ret vilkårlig):

Nr.	De 3 kendte stykker	Fremgangsmåde
1	Tre sider	Brug cosinusrelationer til at bestemme vinklerne
2	En vinkel og de to hosliggende sider.	Brug en cosinusrelation til at bestemme den manglende side og brug derefter de andre cosinusrelationer til at bestemme de manglende vinkler.
3	To vinkler og den mellemliggende side.	Find først den sidste vinkel ved vinkelsummen i en trekant. Derefter bestemmes de to manglende sidelængder med sinusrelationer.
4	To vinkler og en ikke-mellemliggende side.	Brug sinusrelationer til at bestemme de manglende sidelængder. Den manglende vinkel kan bestemmes med vinkelsummen i en trekant.
5	En vinkel, en hosliggende side samt den modstående side. **Det dobbelttydige tilfælde.**	Der er muligvis to trekanter, der opfylder betingelserne. Hvis du bruger sinusrelationer, skal du bruge *intervalsolve* og regne videre med begge vinkler. Hvis du bruger cosinusrelationer, får du automatisk de to mulige løsninger, hvis de findes. Regn videre på begge.

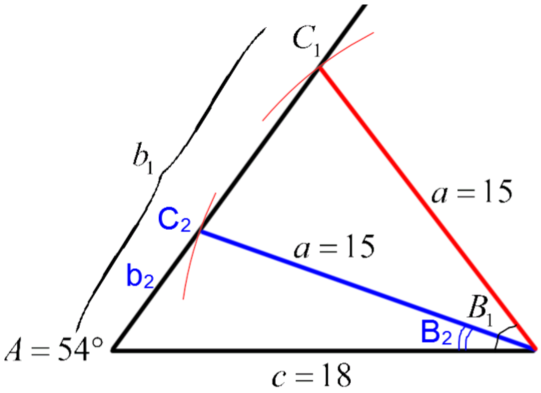
Eksempel 21: Vi ser på trekant ABC med $A = 54°$, $a = 15$ og $c = 18$.

Bestem de resterende sider og vinkler i de to trekanter, der opfylder ovenstående.

Vi ser først på konstruktionen af disse trekanter, da vi her kan få en forståelse for, hvorfor der er to muligheder:



Vi opdager, at passeren skærer vores vinkelben to steder. Det er de to mulige placeringer af vinkelspidsen C.



Vi gennemregner begge muligheder med cosinusrelationerne (det kunne også gøres med sinusrelationerne og *intervalsolve*):

restart

with(*Gym*) :

$A := 54 : a := 15 : c := 18 :$

$$Cos(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \xrightarrow{\text{solve}} \{b = 6.983018073\}, \{b = 14.17725101\}$$

Vi definerer de to muligheder med indeks. $b_1 := 14.17725101 : b_2 := 6.983018073 :$

$$Cos(B_1) = \frac{a^2 + c^2 - {b_1}^2}{2 \cdot a \cdot c} \xrightarrow{\text{solve for B\_\_1}} [[B_1 = 49.87519477]]$$

$$Cos(B_2) = \frac{a^2 + c^2 - {b_2}^2}{2 \cdot a \cdot c} \xrightarrow{\text{solve for B\_\_2}} [[B_2 = 22.12480526]]$$

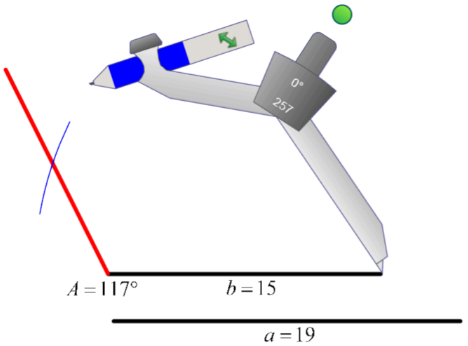
$$Cos(C_1) = \frac{a^2 + {b_1}^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b_1} \xrightarrow{\text{solve for C\_\_1}} [[C_1 = 76.12480524]]$$

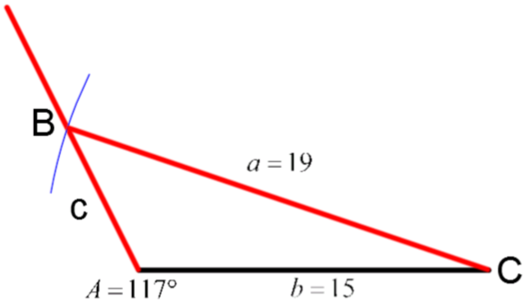
$$Cos(C_2) = \frac{a^2 + {b_2}^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b_2} \xrightarrow{\text{solve for C\_\_2}} [[C_2 = 103.8751947]]$$

Dvs. vores ene trekant har: $\underline{\underline{b_1 = 14.2}}$, $\underline{\underline{B_1 = 49.9°}}$ og $\underline{\underline{C_1 = 76.1°}}$

Vores anden trekant har: $\underline{\underline{b_2 = 7.0}}$, $\underline{\underline{B_2 = 22.1°}}$ og $\underline{\underline{C_2 = 103.9°}}$

Eksempel 22: Vi ser nu på trekant *ABC* med $A=117°$, $a=19$ og $b=15$.





Vi gør som i forrige eksempel og sætter passeren til længden *a*, men denne gang opdager vi, at der kun er én skæring. Vores udregning med cosinusrelationer giver os:

$restart$

$with(Gym):$

$A := 117 : a := 19 : b := 15 :$

$$Cos(A) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c} \xrightarrow{\text{solve}} \{c=-20.31445519\}, \{c=6.694740209\}$$

Der er to løsninger, men den ene er negativ og forkastes derfor, da vi søger en sidelængde. Vi har altså $c := 6.694740209 :$

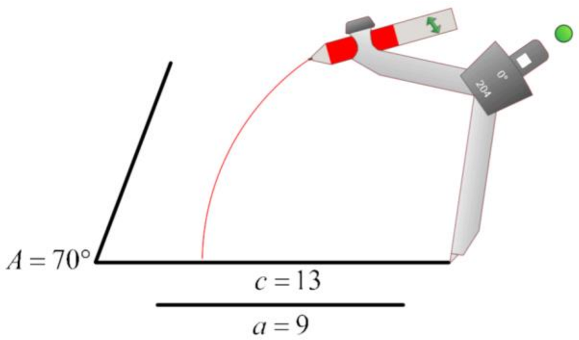
$$Cos(C) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b} \xrightarrow{\text{solve for C}} [[C=18.29746081]]$$

$$Cos(B) = \frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c} \xrightarrow{\text{solve for B}} [[B=44.70253924]]$$

Vi har altså: $\underline{\underline{c=6.7}}$ og $\underline{\underline{\angle C=18.3°}}$ og $\underline{\underline{\angle B=44.7°}}$

Vi ser altså igen, hvordan formlerne passer med konstruktionerne.

Eksempel 23: Vi ser nu på trekant *ABC* med $A=70°$, $a=9$ og $c=13$



Vi gør som tidligere, men opdager, at vores linjestykke *a* ikke er langt nok. Der eksisterer ikke en trekant med disse mål. Lad os se på, hvad formlerne giver:

$restart$

$with(Gym):$

$A := 70 : a := 9 : c := 13 :$

$$Cos(A) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c} \xrightarrow{\text{solve for b}} [[b=4.446261856-8.260191009\,\mathrm{I}], [b=4.446261856+8.260191009\,\mathrm{I}]]$$

Vi får godt nok to løsninger, men vi bemærker, at de begge er komplekse tal og derfor ikke kan bruges som sidelængder, hvilket passer med, at der ikke findes en trekant med de pågældende stykker.

Opgaverne 219*

Tangensrelationerne:

Der findes også tangensrelationer. De minder en del om sinusrelationerne, men vi får ikke brug for dem, og udledningen af dem kræver de tidligere nævnte *additionsformler*, som vi ikke har udledt, så dem springer vi over.

Særlige linjer i trekantopgaver:

I mange trekantopgaver optræder højder, midtnormaler, medianer og vinkelhalveringslinjer. I disse tilfælde er det vigtigt at udnytte de egenskaber, som disse linjer har. **Og samtidig IKKE benytte egenskaber, som de pågældende linjer IKKE har!**

Dvs. hvis der optræder en median, skal man udnytte, at man ved, at den deler den side midt over, som den ender på (men den står som udgangspunkt IKKE vinkelret på denne). Hvis det er en højde, vil den stå vinkelret på den linje, den lander på (men den deler IKKE linjen på midten), og hvis det er en vinkelhalveringslinje, vil den halvere den pågældende vinkel (men den halverer som udgangspunkt IKKE den modstående side).

OVERSIGT OVER FORMLER OG BEGREBER

Linjer i trekanter:

Paralleltransversal: *En linje, der går gennem to af en trekants sider og er parallel med den tredje.*

Midtpunktstransversal: *En linje gennem midtpunkterne på to af trekantens sider.*
En midtpunktstransversal er en paralleltransversal og danner en trekant ensvinklet med den oprindelige trekant og med halvt så lange sider.

Median: *Et linjestykke, der forbinder en vinkelspids med midtpunktet på den modstående side.*
Medianerne skærer hverandre i ét punkt, der deler medianerne i forholdet 2:1 målt fra vinkelspidsen.
Hver af medianerne deler trekanten i to trekanter med samme areal, og de tre medianer deler tilsammen trekanten i seks trekanter med samme areal.

Midtnormal: *En linje, der står vinkelret på en side og går gennem dennes midtpunkt.*
Alle punkter på en midtnormal har ens afstande til hver af sidens endepunkter, og en trekants midtnormaler skærer hverandre i ét punkt, der er centrum for trekantens omskrevne cirkel.

Vinkelhalveringslinje: *En linje, der udgår fra en vinkelspids og deler vinklen i to ens vinkler.*
Alle punkter på en vinkelhalveringslinje har ens vinkelrette afstande til vinklens ben, og vinkelhalveringslinjerne skærer hverandre i ét punkt, der er centrum for trekantens indskrevne cirkel.

Højde: *Et linjestykke, der udgår fra en vinkelspids og står vinkelret på og ender på den modstående side eller en forlængelse af denne.*

For ALLE trekanter ABC gælder:

- $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$
- $a + b > c$
- Den længste side er over for den største vinkel, og den korteste side er over for den mindste vinkel.
- $h_a = b \cdot \sin(C) = c \cdot \sin(B)$
- $T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g \qquad T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C) \qquad T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 \cdot b^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4}}$
- $\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$
- $\cos(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$

HUSK AT VÆRE OPMÆRKSOM PÅ SUPPLEMENTVINKLER, NÅR DU ARBEJDER MED EN UKENDT VINKEL I SINUSRELATIONERNE.

For retvinklede trekanter ABC med den rette vinkel C gælder specielt:

- $T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$
- $a^2 + b^2 = c^2$
- $\cos(v) = \frac{hos}{hyp} \qquad \sin(v) = \frac{mod}{hyp} \qquad \tan(v) = \frac{mod}{hos}$, hvor v er en af de spidse vinkler.

For ensvinklede trekanter ABC og A'B'C' gælder:

Lad de korresponderende sidestykker være *a* og *a'* , *b* og *b'* samt *c* og *c'*. Så gælder:

- $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$, hvor *k* er skalafaktoren med udgangspunkt i trekant *ABC*.
- $T_{A'B'C'} = k^2 \cdot T_{ABC}$

Additionsformlerne (ikke bevist):

$$\cos(v+u) = \cos(v) \cdot \cos(u) - \sin(v) \cdot \sin(u)$$
$$\sin(v+u) = \sin(v) \cdot \cos(u) + \cos(v) \cdot \sin(u)$$
$$\cos(v-u) = \cos(v) \cdot \cos(u) + \sin(v) \cdot \sin(u)$$
$$\sin(v-u) = \sin(v) \cdot \cos(u) - \cos(v) \cdot \sin(u)$$

De logaritmiske formler (produktformlerne) (ikke bevist):

$$\cos(v) + \cos(u) = 2 \cdot \cos\left(\frac{v+u}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{v-u}{2}\right)$$
$$\sin(v) + \sin(u) = 2 \cdot \sin\left(\frac{v+u}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{v-u}{2}\right)$$
$$\cos(v) - \cos(u) = -2 \cdot \sin\left(\frac{v+u}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{v-u}{2}\right)$$
$$\sin(v) - \sin(u) = 2 \cdot \cos\left(\frac{v+u}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{v-u}{2}\right)$$