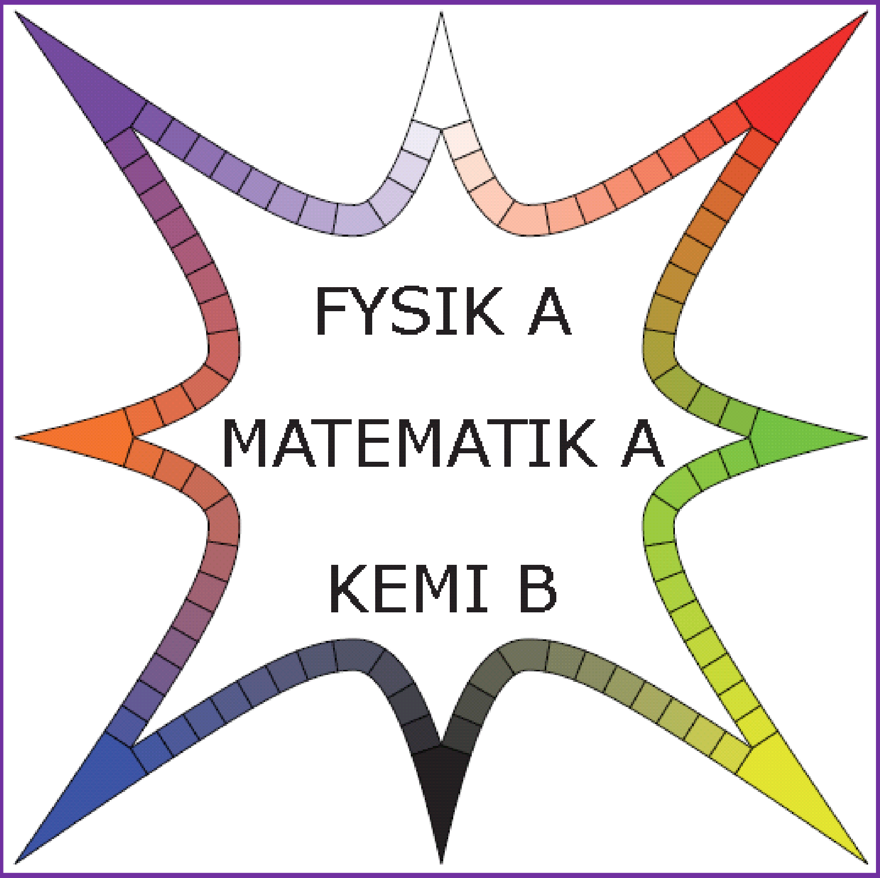
Grundlæggende matematiske begreber del 1

Mængdelære
Talmængder
Tal og regneregler
Potensregneregler
Numerisk værdi
Gennemsnit



x-klasserne

Gammel Hellerup Gymnasium

Januar 2024 ; Michael Szymanski ; mz@ghg.dk

Indholdsfortegnelse

Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.

(Von Herrn *Cantor* in Halle a. S.)

Unter einer reellen algebraischen Zahl wird allgemein eine reelle Zahlgrösse ω verstanden, welche einer nicht identischen Gleichung von der Form genügt:

$$(1.)\quad a_0\,\omega^n + a_1\,\omega^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

wo $n, a_0, a_1, \cdots a_n$ ganze Zahlen sind; wir können uns hierbei die Zahlen n und a_0 positiv, die Coefficienten $a_0, a_1, \cdots a_n$ ohne gemeinschaftlichen Theiler und die Gleichung (1.) irreductibel denken; mit diesen Festsetzungen wird erreicht, dass nach den bekannten Grundsätzen der Arithmetik und

MÆNGDELÆRE

Mængdelære blev grundlagt i 1874 ved publiceringen af en artikel af Georg Cantor (1845–1918) omhandlende *algebraiske* tal og uendeligheder. Det blev senere kendt som den *naive* mængdelære, hvor mængdelæren beskrives i dagligdags sprog. Cantor brugte mængdelære til at få styr på uendelighedsbegrebet, og det er også én af de ting, vi skal bruge mængdelære til.

Omkring århundredeskiftet opdagede man nogle problemer med den naive mængdelære, og man fokuserede så på videreudviklingen af den *aksiomatiske* mængdelære, der fungerer som fundamentet for al anden matematik. Den er meget abstrakt og formuleret i matematisk sprog, og det ville være alt, alt for svært at begynde med den i gymnasiet (se evt. bagsiden af dette hæfte). Vi skal dog lidt senere i dette hæfte beskæftige os med selve det *aksiomatiske*, når vi ser på *tallegemer*.

Vi skal nu se på de væsentlige begreber, symboler og tankegange inden for mængdelære, fordi disse optræder mange steder inden for de forskellige emner, vi senere gennemgår.

Definition 1: En *mængde* er en samling af objekter, der betragtes som en helhed.
Objekterne i en mængde kaldes mængdens *elementer*.

Eksempel 1: ”Objekter” skal forstås meget bredt, så mængder kunne være:

$$A = \{3, 8, 12, 23\}$$
$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$
$$C = \{Q, 7, \pi, \mathit{blå}, \square\}$$
$$D = \{(2,7), (-3,9), (7,0)\}$$
$$E = \{A, B, C, D\} = \{\{3,8,12,23\}, \{1,2,3,4,5,\ldots\}, \{Q,7,\pi,\mathit{blå},\square\}, \{(2,7),(-3,9),(7,0)\}\}$$

Den krøllede parentes $\{\ \}$ kaldes en *tuborgklamme*, en *tuborgparentes*, en *akkolade* eller på engelsk *curly bracket*, og den bruges til at afgrænse de elementer, som mængden består af.

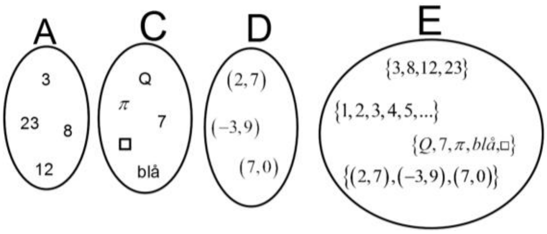
Notationen { } og Definition 1 blev indført af Georg Cantor i 1895.

Lighedstegnet = angiver, at størrelserne på hver side af tegnet er ens, dvs. at A er det samme som $\{3, 8, 12, 23\}$, hvilket er vist i mængden E.

Lighedstegnet blev opfundet af Robert Recorde (ca. 1512-1558) i 1557 og har siden gået sin sejrsgang verden over.

Man læser $A = \{3, 8, 12, 23\}$ som ”A er mængden bestående af elementerne 3, 8, 12 og 23”.

De endelige mængder kan man også angive på følgende måde:



A er en endelig mængde med 4 elementer, der alle er tal.
B er en uendelig mængde, da de tre prikker … angiver, at systemet fortsætter, således at der er uendeligt mange elementer i mængden. Notationen $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 68\}$ angiver en endelig mængde indeholdende de 68 hele tal fra 1 til 68.
C er en endelig mængde med 5 elementer af forskellig karakter (bogstav, tal, tal, ord og figur).
D er en endelig mængde med 3 elementer, der alle er punkter i planen.
E er en endelig mængde med 4 elementer, der alle er mængder.

Læs ovenstående beskrivelse af mængderne grundigt og sammenlign med udtrykkene i Eksempel 1.

Med ”tilhører”-symbolet $\in$ angiver man, at et element ligger i en mængde.
Symbolet $\notin$ angiver, at et element ikke ligger i en mængde.

Eksempel 2: I eksempel 1 har man bl.a.: $3 \in A$; $3 \in B$; $3 \notin C$; $3 \notin D$; $3 \notin E$
$blå \in C$; $blå \notin D$; $(2,7) \in D$; $(2,0) \notin D$

Tilhørersymbolet $\in$ blev indført af Abraham Fraenkel (1891-1965) vistnok i 1919. Guiseppe Peano (1858-1932) havde i 1889 brugt ε.
$\notin$ blev indført i 1939 af ”Nicolas Bourbaki”, der dækker over en gruppe franske matematikere.

Det er også vigtigt at bemærke, at rækkefølgen af elementer ikke har nogen betydning. Det følger af denne definition:

Definition 2: To mængder er ens, hvis de indeholder de samme elementer. Dvs. hvis det om ethvert element i den ene mængde gælder, at det også er element i den anden mængde og omvendt.
At mængderne A og B er ens skrives $A = B$.
At mængderne A og B ikke er ens skrives $A \neq B$.

Eksempel 3: Mængderne {6,9,3} og {3,6,9}er ens, dvs. $\{6,9,3\} = \{3,6,9\}$.
Mængderne $\{a,b,c,d\}$ og $\{c,d,b,a\}$ er ens, dvs. $\{a,b,c,d\} = \{c,d,b,a\}$.
Mængderne {1,2,3} og {2,3,4}er IKKE ens, da 1 er element i den første mængde, men ikke i den anden (og omvendt gælder om 4), dvs. $\{1,2,3\} \neq \{2,3,4\}$.
Mængderne $\{a,b,c\}$ og $\{a,b\}$er IKKE ens, da c kun er element i den første mængde.

En mængde kan – som vi så i Eksempel 1 - godt indeholde andre mængder, og der er ikke noget i vores formulering, der forhindrer, at en mængde indeholder sig selv.
Men det er ikke uproblematisk.
Prøv at se på følgende to beskrivelser af det, der er kendt som Russells paradoks (efter Bertrand Russell, der levede 1872-1970):

Russells paradoks:
Mængdeversionen: *Se på mængden M bestående af alle de mængder, der ikke indeholder sig selv. Indeholder mængden M sig selv?*

Den sproglige version: *Den mandlige barber i byen barberer netop dem, der ikke barberer sig selv. Barberer barberen sig selv?*

Det var bl.a. dette paradoks, der førte til, at man gik væk fra den *naive* mængdelære og i stedet udarbejdede den *aksiomatiske* mængdelære. Vi kommer til at beskæftige os med aksiomer i forbindelse med tal, geometri og vektorer.

Definition 3: *Den tomme mængde* er mængden $\{\ \}$, der ikke indeholder nogen elementer.
Den tomme mængde angives også med symbolet $\emptyset$.

Symbolet $\emptyset$ for den tomme mængde blev indført af Bourbaki i 1939.

Det giver ikke rigtig nogen mening at komme med et eksempel, da det jo hedder ***<u>Den</u>*** *tomme mængde*, dvs. det **er** $\{\ \}$, der er den tomme mængde. Men det kan nævnes, at hvis man vil danne tallene på baggrund af mængdelæren, så er det tallet 0, der svarer til den tomme mængde.

Opgaverne 100*

Definition 4: Lad A være en given mængde.

Man siger, at *mængden B er en delmængde af A*, hvis der ikke findes noget element i B, der ikke også er element i A.

Man skriver i så fald: $B \subseteq A$.

Dvs. symbolet $\subseteq$ er delmængde-symbolet.

Definition 5: Lad A være en given mængde.

Mængden B er en ***ægte*** *delmængde af A*, hvis B er en delmængde af A **og** $B \neq A$.

Man skriver i så fald: $B \subset A$.

Dvs. symbolet $\subset$ er "ægte delmængde"-symbolet.

Delmængdesymbolet blev indført af Bourbaki (vistnok i 1939)

Bemærk, hvordan man i Definition 5 ved at skrive $B \neq A$ henviser tilbage til Definition 2. Det gælder helt generelt, at man gerne må henvise til **tidligere** definitioner.

Eksempel 4: Lad $A = \{a,c,h,b,k\}$

Så gælder:

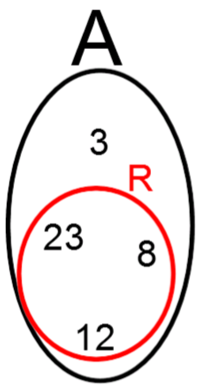
$\{a,c,b,k\} \subseteq A$ og $\{a,c,b,k\} \subset A$

$\{a,c,h,b,k\} \subseteq A$ men $\{a,c,h,b,k\}$ er ikke en ægte delmængde af A.

Mængden $\{a,c,d,e\}$ er hverken en delmængde eller en ægte delmængde af A.

Bemærk, at "ægte delmængde" er et skrappere krav end "delmængde", så hvis en mængde B er en ægte delmængde af A, er den også 'bare' en delmængde af A.

Med den grafiske måde at angive mængder, vil en delmængde være helt omsluttet af den oprindelige mængde:



Her er R en ægte delmængde af A.

Bemærk, at det af Definition 4 følger, at enhver mængde er en delmængde af sig selv, samt at den tomme mængde er en delmængde af alle mængder. Dvs. der gælder generelt:

Sætning 1: For enhver mængde A gælder: $A \subseteq A$ og $\varnothing \subseteq A$.

Vi skal senere under emnet *Kombinatorik* lære at tælle antallet af delmængder af en mængde.

Opgaverne 101*

Vi skal nu se på en række begreber, der kommer i spil, når der optræder mere end én mængde.

Definition 6: Lad A og B være to mængder. Vi kan så indføre følgende begreber:

a) *Fællesmængden* for A og B er den mængde, der består af alle de elementer, der **både** tilhører A **og** B. Fællesmængden for A og B skrives $A \cap B$.

b) A og B siges at være *disjunkte*, hvis ingen elementer tilhører både A og B, dvs. hvis $A \cap B = \varnothing$.

c) *Foreningsmængden* for A og B er den mængde, der består af alle de elementer, der tilhører mindst én af mængderne A eller B. Foreningsmængden – der også kaldes *unionsmængden* – for A og B skrives $A \cup B$.

d) *Differensmængden* mellem A og B er den mængde, der består af alle de elementer, som tilhører A, men ikke tilhører B. Den angives $A \setminus B$.

Symbolerne $\cap$ og $\cup$ blev indført af Giuseppe Peano (1858-1932) i 1888. Symbolet for differensmængde er fra Bourbaki.

Eksempel 5: Lad $A = \{-4, 9, 12, 18, 27\}$ og $B = \{0, 9, 12, 15\}$. Man har så:

$$A \cap B = \{9, 12\}$$
$$A \cup B = \{-4, 0, 9, 12, 15, 18, 27\}$$
$$A \setminus B = \{-4, 18, 27\}$$
$$B \setminus A = \{0, 15\}$$

Eksempel 6: Lad $A = \{k, n, r\}$ og $B = \{c, p\}$. Man har så:

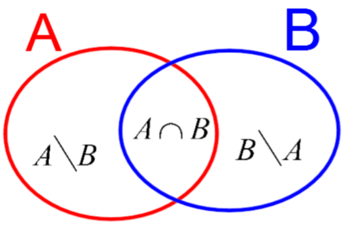
$A \cap B = \varnothing$ Dvs. A og B er disjunkte.

$A \cup B = \{c, k, n, p, r\}$

$A \setminus B = \{k, n, r\}$, dvs. $A \setminus B = A$

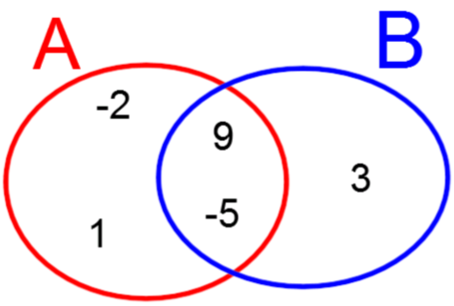
$B \setminus A = \{c, p\}$, dvs. $B \setminus A = B$

På figuren til højre er fællesmængde og de to differensmængder angivet.



Ovenstående *Venn-diagram* blev indført af John Venn i 1880'erne.

Eksempel 7: For nedenstående mængder gælder:



$$A = \{-5, -2, 1, 9\}$$
$$B = \{-5, 3, 9\}$$
$$A \cap B = \{-5, 9\}$$
$$A \cup B = \{-5, -2, 1, 3, 9\}$$
$$A \setminus B = \{-2, 1\}$$
$$B \setminus A = \{3\}$$

Huskeregler: Man kan bemærke, at fællesmængden for to mængder som udgangspunkt er mindre end hver af de to mængder, mens foreningsmængden er større end disse. Hvis man forestiller sig lidt lim på indersiden af buen, kan følgende billede derfor muligvis fungere som huskeregel:

Ellers kan *unionsmængden/foreningsmængden* huskes på, at symbolet ligner et u (som i union ~ fagforening), mens *fællesmængdens* symbol kan omformes til et "A" for "And ~ og".

Opgaverne 102*

Vi har nu indført nogle symboler, der anvendes i forbindelse med flere mængder. Der gælder en række sætninger, hvoraf vi ser på nogle nedenfor i Sætning 2. Det er vigtigt, at du tænker over dem og indser, at de er rigtige (benyt figuren som hjælp):

Sætning 2: For mængderne *A*, *B* og *C* gælder:

a) $A \cap B$ og $A \cup B$ er begge mængder (*Stabilitet*)

b) $A \cap B = B \cap A$ (*Kommutativitet*)

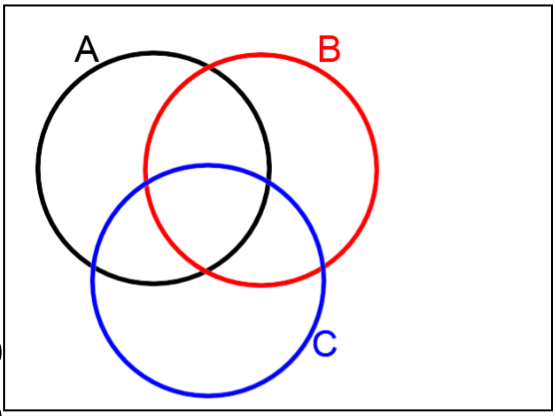
c) $A \cup B = B \cup A$ (*Kommutativitet*)

d) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (*Associativitet*)

e) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (*Associativitet*)

f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (*Distributivitet*)

g) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (*Distributivitet*)



De associative love kræver lidt ekstra forklaring. Det er væsentligt at bemærke, at vi kun har indført $\cap$ og $\cup$ som symboler, der virker mellem **to** mængder og resulterer i **en** mængde. Med parentesen angiver man altså, at man inde i parentesen har anvendt tegnet mellem de to mængder og derfor nu kun har **én** mængde i parentesen, hvorefter man kan anvende tegnet igen.

Pointen med associative love er, at man ikke behøver at skrive parenteserne. Du kender det fra tallene, hvor du kan tillade dig at skrive $3 \cdot 7 \cdot 4$, netop fordi der gælder $(3 \cdot 7) \cdot 4 = 3 \cdot (7 \cdot 4)$.

Grundmængde:

I nogle situationer – f.eks. når vi skal løse ligninger – arbejder man med en *grundmængde*, der fortæller os, hvilke objekter vi kan arbejde med, når vi skal danne mængder. Valget af grundmængde afhænger af situationen, og det vender vi tilbage til. Nu ser vi på begrebet *komplementærmængde*, der kun giver mening, når man tager udgangspunkt i en grundmængde.

Definition 7: Lad *G* være grundmængden, og lad *A* være en delmængde af *G*. *Komplementærmængden til A* består af alle de elementer i grundmængden, der IKKE tilhører *A*. Komplementærmængden skrives:

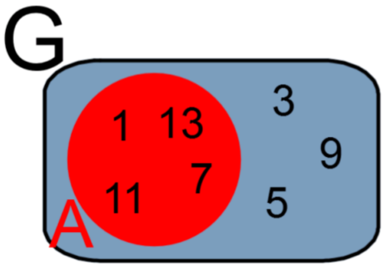
$\complement A$ eller A^C

Og der gælder altså:

$\complement A = G \setminus A$

Eksempel 8: Lad $G=\{1,3,5,7,9,11,13\}$ og lad $A=\{1,7,11,13\}$. Så er:

$$\complement A = \{3, 5, 9\}$$



$$A^C = \{3,5,9\}$$

Eksempel 9: Lad $G=\{1,2,3,4,5,...\}$ og lad $A=\{2,4,6,8,10,...\}$.

Så er $A^C=\{1,3,5,7,9,...\}$

Det sidste mængde-begreb, vi får brug for, er det *kartesiske produkt*, som er væsentligt, når vi skal indføre koordinatsystemer og angive punkter i koordinatsystemer.

Definition 8: *Det kartesiske produkt* $A\times B$ af mængderne *A* og *B* er mængden bestående af alle de ordnede par (a,b), hvor $a\in A$ og $b\in B$.

Dette skrives: $A\times B=\{(a,b)|a\in A\wedge b\in B\}$

Det kartesiske produkt blev opfundet af René Descartes (1596-1650), der dog ikke anvendte dette navn eller denne notation.

Højresiden i udtrykket i nederste linje læses: ”Mængden bestående af alle de par *a* komma *b* for hvilket det gælder, at *a* tilhører store *A* og *b* tilhører store *B*”.
Bemærk ordet ”ordnede” i definitionen, der fortæller, at der er forskel på (3,7) og (7,3).

Eksempel 10: Lad mængderne *A* og *B* være givet ved $A=\{1,3,8\}$ og $B=\{2,7\}$.

Så er $A\times B=\{(1,2),(1,7),(3,2),(3,7),(8,2),(8,7)\}$

Eksempel 11: Lad mængderne *A* og *B* være givet ved $A=\{a,9\}$ og $B=\{\square,q\}$.

Så er $A\times B=\{(a,\square),(a,q),(9,\square),(9,q)\}$

Udvidelse: Når vi senere i rumgeometrien skal arbejde med tredimensionelle koordinatsystemer, udvider vi det kartesiske produkt, så vi får:

$$A\times B\times C=\{(a,b,c)|a\in A\wedge b\in B\wedge c\in C\}$$

I et ”normalt” koordinatsystem, der er et kartesisk koordinatsystem i planen, arbejder vi med punkter på formen (x,y), hvor *x*-aksen *X* består af alle punkterne på den vandrette tallinje, mens *y*-aksen *Y* består af alle punkterne på den lodrette tallinje.
I et tredimensionelt koordinatsystem indføres en ekstra talakse, *z*-aksen, der peger ud af planen, og som giver anledning til en ekstra koordinat på punkterne, der derfor bliver (*x*,*y*,*z*).

Opgaverne 103*

TAL

Tal er en del af sproget og hverdagen, og det er vist de færreste, der kommer i tvivl om, at de har med tal at gøre, når de ser størrelserne 8, -26 og 5,917. Men forståelsen af, hvad et tal er, har ændret sig gennem tiden, og der er aldrig opnået fuld enighed blandt matematikere om, hvornår noget er et tal. F.eks. er det ikke alle, der betragter de komplekse tal som ”rigtige” tal.

Vi skal her se på forskellige indfaldsvinkler til begrebet *tal* og gennemgå de vigtigste talmængder.

De naturlige tal $\mathbb{N}$

Tal opstår af behovet for at kunne tælle. Dvs. den simpleste forståelse af tal er som *det, man tæller med*. Men selv denne simple talforståelse giver anledning til problemer. Tallet 1 indtager f.eks. en særstatus. Matematik er udviklet flere forskellige steder i verden, og inden for den meget alsidige græske matematik (udviklet i en periode på godt 1000 år fordelt nogenlunde ligeligt omkring år 0) opstod på et tidspunkt den tanke, at 1 ikke var et tal, men derimod *enheden*.

Det skal forstås på den måde, at når man skal tælle, angiver man først med *enheden*, hvad det er, man tæller. Dvs. man siger ”En sten”, og derefter ved man, når man begynder at sige 2, 3, 4 osv., at det er sten, man tæller. Eller man andre ord: Man begynder først at tælle, når man siger 2.

Dette kan virke som en uvæsentlig detalje, men det er i hvert fald vigtigt at vide, når man skal forstå sætningerne i f.eks. Euklids *Elementer*, der blev skrevet omkring 300 fvt. og måske er det mest berømte matematiske værk. Ellers vil man undre sig over enkelte formuleringer, hvor det ser ud til, at Euklid har glemt tallet 1. Euklid begynder 7. bog i *Elementer* med definitionerne:

1) *Enheden* er det, i kraft af hvilket enhver ting benævnes én.
2) Og et *tal* en af enheder sammensat mængde.

Vi tager dog 1 med, når vi skal definere den talmængde, der angiver de tal, man tæller med:

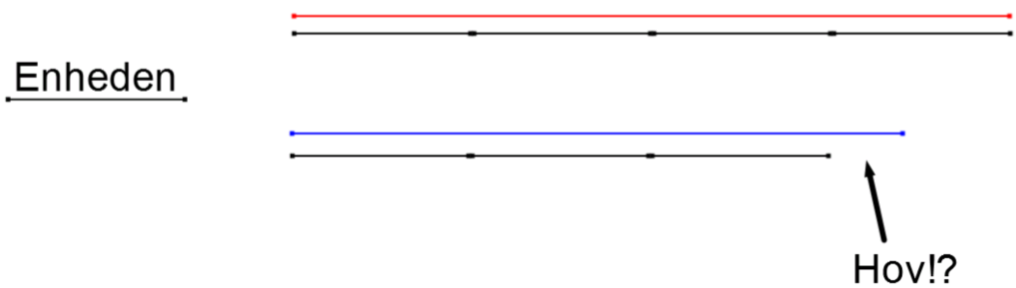
Definition 1: *De naturlige tal* $\mathbb{N}$ er talmængden $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,...\}$.

Bemærk, at *De naturlige tal* er en **uendelig** talmængde. Vi skal senere i forbindelse med emnet *Uendeligheder* beskæftige os mere med denne talmængde og se, at der findes forskellige slags uendeligheder.

Bemærk også selve notationen med et dobbeltstreget N $(\mathbb{N})$. Da de naturlige tal er en helt bestemt talmængde, har den fået sit eget symbol (der også findes i Maple under ”Common Symbols”), og når man skriver $\mathbb{N}$ - i modsætning til bare at skrive N – ved man, at der er tale om de naturlige tal.

Vi har indført de naturlige tal ud fra tankegangen om, at man tæller med dem. En anden mulig – og nært beslægtet – indfaldsvinkel er, at man *måler* med tal.

Tænk altså på et givet linjestykke som *enheden*, som andre linjestykker *måles* med:



Det røde linjestykke er altså 4 (enheder).

Men hvad med det blå linjestykke? Her kommer vi i problemer inden for de naturlige tal og udskyder derfor tankegangen om at måle med tallene.

Regneregler:

Vi går nu ud fra, at vi har indført de naturlige tal med henblik på at tælle.
Vi opdager så, at vi også kan *regne* med tallene.

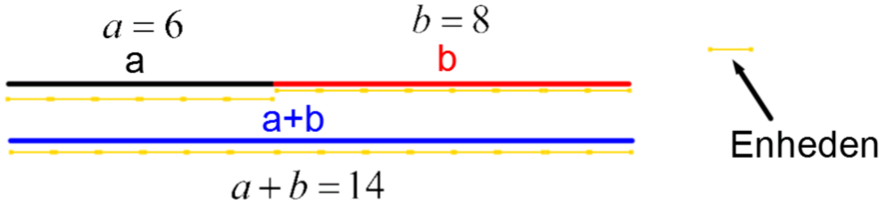
Vi indfører regneoperationen *addition* angivet med tegnet + ved:

Additionstegnet + menes at være af tysk oprindelse (ligesom subtraktionstegnet -) og kendes tilbage fra det 15. århundrede.

Definition 2: Lad *a* og *b* være to tal baseret på den samme enhed. Man *adderer* tallene *a* og *b* ved at tælle det **samlede antal enheder**, der indgår i *a* og *b*.
Additionen skrives $a+b$, og man kalder *a* og *b* for ***addender***, mens $a+b$ kaldes ***summen***.

Bemærk, at *summen* i sig selv er et tal.

Hvis vi et øjeblik glemmer det tilsyneladende problem ved at måle med tallene, kan addition illustreres ved nedenstående figur, hvor de to længder lægges sammen ved at placeres for enden af hinanden (en metode vi senere skal bruge i forbindelse med vektorregning).



En meget væsentlig pointe ved addition er, at de to tal skal være baseret på den samme enhed.
F.eks. kan man ikke lægge 2 æbler og 3 pærer sammen, da tallet 2 er baseret på enheden *æble*, mens tallet 3 er baseret på enheden *pære*. Hvis man indvender, at man da har 5 frugter, er det ikke en passende indvending, for de 5 frugter er fremkommet ved en anden addition, nemlig 2 frugter lagt sammen med 3 frugter.

Inden for fysik og kemi kan man ikke lægge to tal med forskellige enheder sammen.
F.eks. kan man ikke lægge en kraft på 3 N (den fysiske størrelse *kraft* kan angives i enheden newton) sammen med en længde på 5 m.
Og man kan heller ikke lægge en længde på 5 m sammen med en længde på 13 mm, inden man har sørget for at omregne den ene længde, så den har samme enhed som den anden.

Når man arbejder med brøker, kan man heller ikke lægge dem sammen, før de har fælles nævner.

Ovenstående pointe er vigtig, men en mindst lige så vigtig pointe er, at man faktisk altid kan lægge tal sammen, hvis de er baseret på samme enhed. Det fører til følgende additioner, hvor du skal være opmærksom på, at du slet ikke behøver at forstå de udtryk, der står efter tallene, men blot hele tiden bemærke, at det er **ens** udtryk, der står bag begge tal. Du vil få enorm glæde af at indprente dig denne tankegang:

$$4x+7x=11x$$

$$9\log(x)+14\log(x)=23\log(x)$$

$$2abc+6abc=8abc$$

$$4\left(x^2+y^2+z^2\right)+5\left(x^2+y^2+z^2\right)=9\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$11\sin(y)+5\sin(y)=16\sin(y)$$

$$6\cdot\frac{18}{7}+3\cdot\frac{18}{7}=9\cdot\frac{18}{7}$$

Opgaverne 108*

Vi kunne også have defineret addition ved at tage udgangspunkt i mængder:

Alternativ definition: Lad *A* og *B* være disjunkte mængder, og lad *a* være antallet af elementer i *A* og *b* antallet af elementer i *B*. Summen $a+b$ er antallet af elementer i foreningsmængden $A \cup B$.

Mængdelæren giver os også en forholdsvis simpel definition på regneoperationen *multiplikation*:

Definition 3: Lad *A* og *B* være mængder, og lad *a* være antallet af elementer i *A* og *b* antallet af elementer i *B*. Man *multiplicerer a* og *b* ved at tælle antallet af elementer i det kartesiske produkt $A \times B$, og det skrives $a \cdot b$.
I *produktet* $a \cdot b$ kaldes a og *b faktorer*.

Der findes forskellige måder at angive en multiplikation. Vi bruger prikken $a \cdot b$, der blev indført af G. W. Leibniz (1646-1716). I situationer, hvor der ikke er risiko for en forveksling med bogstavet *x*, kan man også bruge krydset $3\text{cm} \times 5\text{cm}$, der blev indført af William Oughtred (1574-1660). I computerprogrammering (og Excel) anvendes asterisken $a * b$.

Man kunne også definere multiplikation ved:

Alternativ definition: Man multiplicerer tallene *a* og *b* ved *b* gange at addere *a* med sig selv:

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + a + ... + a}_{b \text{ addender}}$$

Når additionstegnet + og multiplikationstegnet $\cdot$ er på plads, opdager man nogle regler, der gælder for disse regneoperationer:

***Stabilitet**:* Når man adderer eller multiplicerer to naturlige tal, er summen eller produktet også et naturligt tal.

Kommutativitet:

For addition: $a+b=b+a$

For multiplikation: $a \cdot b = b \cdot a$

Associativitet:

For addition: $(a+b)+c = a+(b+c)$

For multiplikation: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Distributivitet: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

Sammenlign disse regler med Sætning 2 fra mængdelæren. Igen er den distributive lov den lov, der kombinerer de to regneoperationer, mens de associative love fritager os fra at anvende parenteser i visse situationer.
Den kommutative lov for multiplikation kender du måske som: *Faktorernes orden er ligegyldig.*

Cifre:

Der er uendeligt mange naturlige tal: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,…
Men de er bygget op af et begrænset antal *cifre*, nemlig de ti cifre 0,1,2,3,4,5,6,7,8 og 9.
Cifrene anvendes også til at skrive decimaltal (f.eks. 487,3061), og det er antallet af forskellige cifre, der lægger navn til forskellige talsystemer. Totalssystemet (Det binære talsystem) arbejder med de to cifre 0 og 1, vores titalssystem arbejder som nævnt med ti cifre, mens bl.a. babylonierne havde et 60-talssystem, dvs. et system med 60 cifre. Vores tidsregning med minutter og sekunder, samt vores vinkelmålinger kan føres tilbage til et 60-talssystem.

Opgaverne 109*

De hele tal $\mathbb{Z}$

Den næste talmængde, vi skal se på, er *De hele tal*. Hermed dropper vi kronologien (den historiske rækkefølge), hvor *De rationale tal* blev udviklet før *De hele tal*. Til gengæld kan det præsenteres mere overskueligt og sammenhængende.

Vi har set, hvordan de naturlige tal kan opstå ud fra behovet for at kunne tælle, samt hvordan regneoperationerne addition og multiplikation kan anvendes, når man arbejder med naturlige tal. Problemerne med de naturlige tal opstår først, når man vil udvide med regneoperationen subtraktion (minus). Lad os prøve at se på følgende situation:

En bonde har 7 får og spørger sig selv: "Hvor mange får mangler jeg, før jeg har 20?"
Dette giver anledning til følgende ligning (skrevet med nutidig notation):

$$x+7=20$$

For at løse denne ligning indfører vi en regneoperation *subtraktion*, der er det modsatte af addition forstået på den måde, at de kan ophæve hinanden:

$$(x+7)-7=20-7$$

$$x=20-7=13$$

Bemærk tankegangen:

$(20-7)$ *er det tal, der lagt til 7 giver 20.*

Eller generelt:

$(a-b)$ *er det tal, der adderet med b giver a.*

Bemærk altså, at regneoperation *subtraktion* kan formuleres ud fra addition.

Dette har endnu ikke ført til problemer, men hvad sker der, hvis man bytter om på 7 og 20?

$$20+x=7.$$

Dette svarer til en bonde, der har 20 får og spørger sig selv: "Hvor mange får mangler jeg, før jeg har 7?"

Dette er et meningsløst spørgsmål. I dette tilfælde skulle bonden snarere have stillet spørgsmålet: "Hvor mange får skal jeg miste eller give væk, før jeg har 7?".

Dvs. i den meget simple situation, hvor man tæller, kan addition svare til "at få" får, mens subtraktion svarer til "at miste" får.

Og herfra er der ikke langt til at tænke på gæld, for hvis man mister mere, end man har, kommer man til at skylde, og så opstår *de negative tal*.

I den simple talforståelse har vi altså:

Oversigt: Regneoperationen *addition* svarer til "at få".
Regneoperationen *subtraktion* svarer til "at miste".
Negative tal svarer til "gæld".

Bemærk, at der er forskel på negative tal og regneoperationen subtraktion. Vi snakker derfor om et "regneminus" (subtraktion) og et "fortegnsminus" (negativt tal). Vi skal gøre mere ud af dette, når vi ser mere formelt på tallene.

Negative tal opstår altså – hvis vi vel at mærke accepterer deres eksistens – når vi f.eks. løser $20+x=7$. Vi er nu næsten fremme ved de hele tal. Vi mangler kun tallet 0.

Dette tal har sin helt egen historie. I positionstalsystemer (som f.eks. vores 10-talssystem) har 0 i begyndelsen været angivet som et mellemrum. Dvs. hvis man skulle skrive 307, skrev man 3 7.
Senere fik det sit eget symbol, og endelig i 628 evt. udgav den indiske matematiker Brahmagupta værket *Brāhmasphuṭasiddhānta*, hvor ikke blot 0 indgår med symbol og navn, men hvor det også specifikt behandles som et tal, der indgår på lige fod med andre tal i beregninger.

Og med indførelsen af tallet 0 og negative tal har vi nu:

Definition 4: *De hele tal* $\mathbb{Z}$ er talmængden $\mathbb{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$.

Det væsentlige at bemærke er, at når vi arbejder med de hele tal, kan vi uden at bekymre os anvende regneoperationerne *addition*, *multiplikation* og *subtraktion*. Dvs. vi kan være sikre på, at vi, hvis vi tager to hele tal og enten lægger dem sammen, ganger dem med hinanden eller trækker dem fra hinanden, så får vi igen et helt tal. Det er det, vi kalder *stabilitet*.

Bemærk også, at de naturlige tal kun var stabile over for addition og multiplikation, for hvis vi tager to naturlige tal (der jo er positive) og trækker det største fra det mindste, får vi et negativt tal, der IKKE er et naturligt tal. Vi har altså:

Opsamling:	**Stabilitet inden for de naturlige tal:**	$a+b\in\mathbb{N}$
		$a\cdot b\in\mathbb{N}$
	Stabilitet inden for de hele tal:	$a+b\in\mathbb{Z}$
		$a\cdot b\in\mathbb{Z}$
		$a-b\in\mathbb{Z}$

Opgaverne 110*

De rationale tal $\mathbb{Q}$

Vi er nu nået til brøkerne og skal først se på, hvordan de fremkommer. Som nævnt tidligere opstod de før de negative tal og 0, og man har kunnet regne med brøker i flere tusinde år.

Vi så, hvordan de negative tal og regneoperationen subtraktion kunne opstå ud fra addition.
Vi skal nu se, hvordan brøkerne og regneoperationen division kan opstå ud fra multiplikation.

Vi går – af grunde som vil blive tydelige senere – over til at kigge på æbler i stedet for får.
Vi ser på situationen: 4 personer spiser hver 5 æbler. Hvor mange æbler spises i alt?
Dvs. at der 4 gange spises 5 æbler, og man får udregningen $4\cdot 5 = 20$, dvs. der spises 20 æbler.

Regneoperationen *division* opstår, når man ændrer problemstillingen lidt:
Vi har 20 æbler, og 4 personer vil gerne spise disse æbler (ligelig fordeling). Hvor mange får de hver?
Dette giver anledning til ligningen:

$$4\cdot x = 20$$

Vi løser denne ligning ved at indføre regneoperationen *division*, der er det modsatte af regneoperationen *multiplikation* forstået på den måde, at de ophæver hinanden:

$$\begin{aligned} &4\cdot x = 20 \\ &\frac{(4\cdot x)}{4} = \frac{20}{4} \\ &x = 5 \end{aligned}$$

Bemærk det væsentlige: Vi har multipliceret x med 4 og efterfølgende divideret resultatet med 4, og disse to operationer har ophævet hinanden, så vi kun har x tilbage.

Vi har dermed fået indført regneoperationen *division*, men mangler stadig brøkerne. For selvom vi godt ved – og kan se det i vores udregning – at tallet 5 kan skrives som brøken $\frac{20}{4}$, så er det ikke nødvendigt med brøker endnu.

Brøkerne opstår først, hvis de 4 personer f.eks. kun har 19 æbler. Så får vi:

$$x = \frac{19}{4}$$

Og den væsentlige pointe er: $\frac{19}{4}$ kan ikke skrives som et helt tal. Vi har altså fået en ny slags tal, som vi kalder brøker, og som kan fremkomme, når vi indfører regneoperationen *division*.

Det skal dog lige tilføjes, at man faktisk godt kan undgå brøker, selvom man indfører regneoperationen division, men det kræver, at man regner med *rester* (hvilket man gør i *Talteori*).

Definition 5: Ved en *division* af tallet a med tallet b fås det tal, der multipliceret med b giver a. Divisionen skrives $\frac{a}{b}$, hvor a kaldes *dividenden* eller *tælleren*, b kaldes *divisoren* eller *nævneren* og $\frac{a}{b}$ kaldes *kvotienten* eller *brøken*.

Brøkstregen blev indført af Abu Bakr al-Hassar i det 12. århundrede

Vi indfører så endnu en talmængde:

Definition 6: *De rationale tal* $\mathbb{Q}$ er talmængden bestående af alle de tal, der kan skrives som en brøk med hele tal i tæller og nævner.

Bemærk den meget vigtige detalje, at alle hele tal også **kan** skrives som en brøk med hele tal i tæller og nævner. F.eks. har man: $7 = \frac{7}{1}$; $7 = \frac{14}{2}$; $0 = \frac{0}{2}$; $0 = \frac{0}{1}$; $-5 = \frac{-15}{3}$.

Derfor vil alle hele tal også være rationale tal (men ikke omvendt, hvilket vi så med $\frac{19}{4}$).

For at forstå mængden af rationale tal bedre skal vi altså nu besvare spørgsmålet:

Hvilke tal kan skrives som brøker med hele tal i tæller og nævner?

Vi ved allerede, at alle hele tal kan skrives som brøker med hele tal i tæller og nævner.
Lad os nu se på decimaltallene (dvs. tal som vi skriver med et komma efterfulgt af decimaler).

Der findes tre typer af decimaltal (også kaldet *decimalbrøker)*:

1) Decimaltal med et endeligt antal decimaler.
2) Decimaltal med et uendeligt antal decimaler, hvor der opstår en sekvens i decimalerne, der gentager sig i det uendelige (såkaldt *periodiske* uendelige decimaltal).
3) Decimaltal med et uendeligt antal decimaler, hvor der ikke opstår et system i decimalerne.

Endelige decimalbrøker:

Endelige decimalbrøker er tal af typen 45,498732
-7,09345
0,00004352
12394564,9

Lad os se på, hvordan vi kan skrive disse tal som brøker med hele tal i tæller og nævner.

Vi kalder tallet for *a* og multiplicerer det så med et tal blandt 10, 100, 1000, 10000, 10^5, 10^6, … der er tilstrækkelig stort til, at man får et helt tal. I tilfældet 45,498732 er 10^6 tilstrækkelig stort:

$$a = 45,498732$$
$$1000000 \cdot a = 45498732$$
$$a = \frac{45498732}{1000000}$$

Vi har altså fået skrevet tallet 45,498732 som en brøk med hele tal i tæller og nævner. Det er ikke en uforkortelig brøk, men det er heller ikke nødvendigt i denne sammenhæng.

Med tallet 0,00004352 er det 10^8, man multiplicerer med:

$$a = 0,00004352$$
$$10^8 \cdot a = 4352$$
$$a = \frac{4352}{100000000}$$

Igen er tallet blevet skrevet som en brøk med hele tal i tæller og nævner.

Med tallet 12394564,9 er det 10 man multiplicerer med:

$$a = 12394564,9$$
$$10 \cdot a = 123945649$$
$$a = \frac{123945649}{10}$$

Tallet er nu blevet skrevet som en brøk med hele tal i tæller og nævner.

Bemærk, at denne fremgangsmåde kan benyttes på alle endelige decimalbrøker. Det er bare et spørgsmål om at vælge et passende stort tal at multiplicere med.

Det er nu vist, at samtlige endelige decimalbrøker kan skrives som brøker med hele tal i tæller og nævner, dvs. at de tilhører de rationale tal.

Opgaverne 111*

Periodiske uendelige decimalbrøker:

Periodiske uendelige decimalbrøker er tal af formen:

$$5,333333... = 5,\overline{3}$$
$$12,9999999... = 12,\overline{9}$$
$$27,925925925925925925... = 27,\overline{925}$$
$$-89,2418328967289672896728967... = -89,2418\overline{328967}$$
$$0,00000314987266240314987266240314987266240314987266 24... = 0,00000\overline{3149872662 4}$$

Bemærk, at der i hvert af tallene er en sekvens på mellem 1 og 12 tal, der gentager sig i det uendelige, samt hvordan man med stregen over denne sekvens kan angive tallet kortere.

Bemærk også, at sekvensen ikke nødvendigvis begynder lige efter kommaet.

Vi skal nu – igen gennem en række eksempler – se på, hvordan vi omskriver disse tal til brøker med hele tal i tæller og nævner. Vi begynder på samme måde med at multiplicere med et passende af tallene 10, 100, 1000, 10000, 10^5, 10^6, …, men derefter bliver det lidt anderledes, da vi trækker venstresiderne fra hinanden og højresiderne fra hinanden:

$$\left.\begin{array}{l} a = 5{,}33333... \\ 10\cdot a = 53{,}33333... \end{array}\right\} \Rightarrow 10\cdot a - a = 53{,}33333... - 5{,}33333... \Leftrightarrow\ 9\cdot a = 48 \Leftrightarrow a = \frac{48}{9}$$

Det lykkedes os altså at få skrevet tallet $5{,}\overline{3}$ som en brøk med hele tal i tæller og nævner.

Der er dog lige den helt centrale pointe i hele udregningen, som du skal være opmærksom på. ”Halerne” på de to tal $53{,}\overline{3}$ og $5{,}\overline{3}$ er ens, netop fordi den oprindelige decimalbrøk er uendelig **og** den samme sekvens (i dette tilfælde tallet 3) gentages i det uendelige. Derfor forsvinder halen, når de to tal trækkes fra hinanden.

Vi ser nu på tallet $12{,}\overline{9}$. Igen multiplicerer vi med 10:

$$\left.\begin{array}{l} a = 12{,}\overline{9} \\ 10\cdot a = 129{,}\overline{9} \end{array}\right\} \Rightarrow\ 10\cdot a - a = 129{,}\overline{9} - 12{,}\overline{9} \Leftrightarrow\ 9\cdot a = 117 \Leftrightarrow\ a = \frac{117}{9}$$

Igen har vi fået skrevet tallet som en brøk med hele tal i tæller og nævner. Men i dette tilfælde er der lige en ekstra meget vigtig detalje. Bemærk, at $\frac{117}{9} = 13$, dvs. vi har faktisk vist, at $12{,}\overline{9} = 13$.

Og det skal forstås præcis som lighedstegnet viser: $12{,}\overline{9}$ og 13 er **det samme tal!**

En anden indfaldsvinkel til at forstå dette – muligvis overraskende – resultat er, at der ikke er nogen forskel (forstået som en afstand på tallinjen) på de to tal, og derfor er de to tal ens.

Vi ser nu på tallet $27{,}\overline{925}$. I dette tilfælde multiplicerer vi med 1000.

Tjek, at du kan se pointen med, at det netop er tallet 1000, vi benytter:

$$\left.\begin{array}{l} a = 27{,}925925925925925... \\ 1000\cdot a = 27925{,}925925925... \end{array}\right\} \Rightarrow\ 1000\cdot a - a = 27925{,}\color{red}{925925925...} - 27{,}\color{red}{925925925...}$$

$$999\cdot a = 27898 \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{27898}{999}$$

Igen lykkedes det at få skrevet tallet som en brøk med hele tal i tæller og nævner.

Som sidste eksempel ser vi på tallet $-89{,}2418\overline{328967}$. Her foretager vi to multiplikationer.

Tjek igen, at du kan se pointen med begge multiplikationer:

$$\left.\begin{array}{l} 10^5\cdot a = -8924183{,}\overline{28967} \\ 10^{10}\cdot a = -892418328967{,}\overline{28967} \end{array}\right\} \Rightarrow\ 10^{10}\cdot a - 10^5\cdot a = -892418328967{,}\overline{28967} - \left(-8924183{,}\overline{28967}\right) \Leftrightarrow$$

$$9999900000\cdot a = -892409404784 \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{-892409404784}{9999900000}$$

Også her lykkedes det os at skrive tallet som en brøk med hele tal i tæller og nævner.

Og det skulle nu være klart, at den anvendte metode kan bruges i alle situationer med periodiske uendelige decimalbrøker, dvs. vi har nu set, at alle disse kan skrives som brøker.

Opgaverne 112*

Ikke-periodiske uendelige decimalbrøker:

Man kunne måske nu få den tanke, at alle tal kan skrives som brøker med hele tal i tæller og nævner, men de ikke-periodiske uendelige decimalbrøker (dvs. decimalbrøker hvor der aldrig fremkommer et system i decimalerne) kan ikke.

For at argumentere for denne påstand tages nu **udgangspunkt** i brøker. Vi har tidligere taget udgangspunkt i hele tal, endelige decimalbrøker og uendelige periodiske decimalbrøker og vist, at de alle kunne skrives som brøker, men vi skal nu vise, at alle brøker enten svarer til hele tal, endelige decimalbrøker eller uendelige periodiske decimalbrøker.

Vi ser på brøken $\frac{43}{7}$, som vi nu vil omskrive til decimalbrøk.

- 7 går op i 43 6 gange med resten 1 (se figuren til højre).
- Vi sætter komma og trækker et 0 ned, så tallet bliver 10.
- 7 går op i 10 1 gang med resten 3.
- Et 0 trækkes ned, og 7 går op i 30 4 gange med resten 2.
- Et 0 trækkes ned, og 7 går op i 20 2 gange med resten 6.
- Og således fortsættes…
- …indtil vi pludselig opdager, at resten 1 dukker op igen, og nu ved vi så, at de næste rester vil blive 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, …

Og da resten 1 giver decimalen 1, resten 3 giver decimalen 4, resten 2 giver decimalen 2, resten 6 giver decimalen 8, resten 4 giver decimalen 5 og resten 5 giver decimalen 7, så vil decimalerne optræde i rækkefølgen 1, 4, 2, 8, 5, 7, 1, 4, 2, 8, 5, 7, 1, 4, …

Dvs. vi får en uendelig periodisk decimalbrøk: $\frac{43}{7} = 6,\overline{142857}$

Øvelse 1: Omregn følgende brøker til decimalbrøker og tjek at …

a) $\frac{53}{8}$ giver resterne 5, 2, 4 og 0 (Udregningen stopper, da divisionen gik op), og $\frac{53}{8} = 6,625$.

b) $\frac{58}{17}$ giver resterne 7, 2, 3, 13, 11, 8, 12, 1, 10, 15, 14, 4, 6, 9, 5, 16, 7, … og

$\frac{58}{17} = 3,\overline{4117647058823529}$

Når man skal omskrive en brøk til en decimalbrøk, kan vi af det foregående se følgende pointer:

1) Hvis resten på et tidspunkt bliver 0, får man en endelig decimalbrøk (eller et helt tal, hvis divisionen går op fra start).

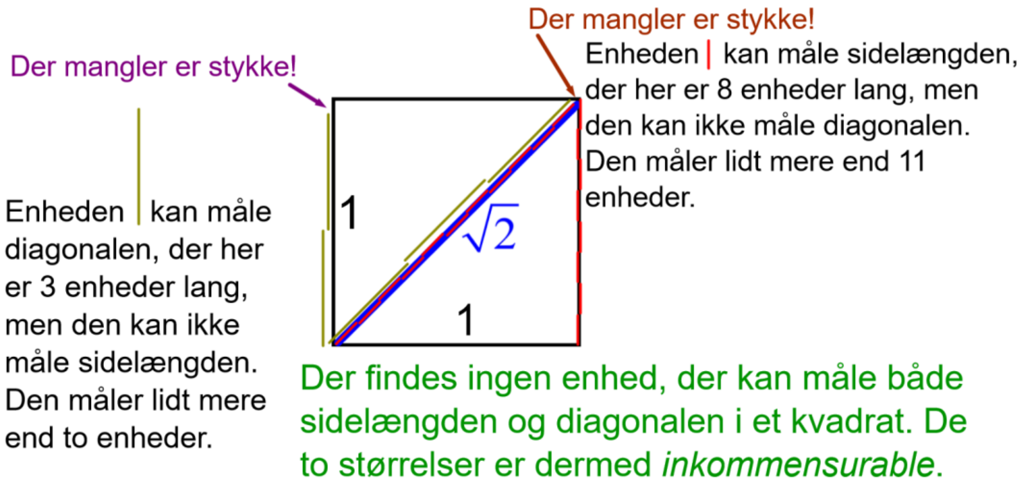
2) Når man dividerer med et helt tal a, kan man højst få a forskellige rester (nemlig rester fra mængden $\{0,1,2,3,...,a-1\}$). F.eks. vil man ved udregning af $\frac{64752}{453847231}$ højst kunne få 453847231 forskellige rester. Så hvis man ikke får resten 0 og dermed stopper udregningen, vil en af de mulige rester optræde for anden gang, og dermed opstår en uendelig periodisk decimalbrøk med en periode på højst længden $a-1$.

En brøk med hele tal i tæller og nævner kan altså altid omskrives til et helt tal, en endelig decimalbrøk eller en periodisk uendelig decimalbrøk, **og deraf følger**, at en ikke-periodisk uendelig decimalbrøk IKKE kan skrives som en brøk med hele tal i tæller og nævner.

Opsamling: De rationale tal $\mathbb{Q}$ består af de hele tal, de endelige decimalbrøker samt de periodiske uendelige decimalbrøker. $\mathbb{Q}$ indeholder IKKE de ikke-periodiske uendelige decimalbrøker.

Nu er spørgsmålet så, om der overhovedet findes sådanne ikke-periodiske uendelige decimalbrøker? Vi har lige set, hvordan brøker med hele tal i tæller og nævner altid vil blive periodiske, hvis det bliver uendelige decimalbrøker. Så man kunne godt forestille sig, at det med vores regneoperationer ikke er muligt at komme frem til ikke-periodiske uendelige decimalbrøker.

Det troede pythagoræerne (sekten dannet af Pythagoras fra Samos, ca. 570 – ca. 495 fvt.), der baserede en stor del af deres idéer på, at alle linjestykker er *kommensurable*, dvs. at de kan måles med samme enhed. De troede altså, at hvis man har to linjestykker, så vil der altid kunne findes en enhed, der måler begge. Men historien fortæller så – og det er nok kun en historie, for man ved nærmest intet med sikkerhed om pythagoræerne, der holdt deres viden hemmelighed og ikke skrev noget ned – at en af deres egne (måske Hippasus, ca. 530 – ca. 450 fvt.) opdagede, at diagonalen i et kvadrat **ikke** er kommensurabel med sidelængden. Han havde med andre ord opdaget, at der findes *inkommensurable* linjestykker. Som "belønning" for sin store opdagelse blev Hippasus smidt i en brønd og druknede. Hans opdagelse var ødelæggende for pythagoræernes lære.



Begreberne *kommensurable* og *inkommensurable* linjestykker er geometriske begreber.

Hvis man ser på det algebraisk, svarer *kommensurable* linjestykker til følgende:

Man har to linjestykker med længderne a og b. Der findes en enhed e, der måler begge linjestykker, dvs. at der findes **naturlige** tal k_1 og k_2, således at:

$$\begin{aligned} a &= k_1 \cdot e \\ b &= k_2 \cdot e \end{aligned} \quad \text{og dermed} \quad \frac{a}{b} = \frac{k_1 \cdot e}{k_2 \cdot e} = \frac{k_1}{k_2}$$

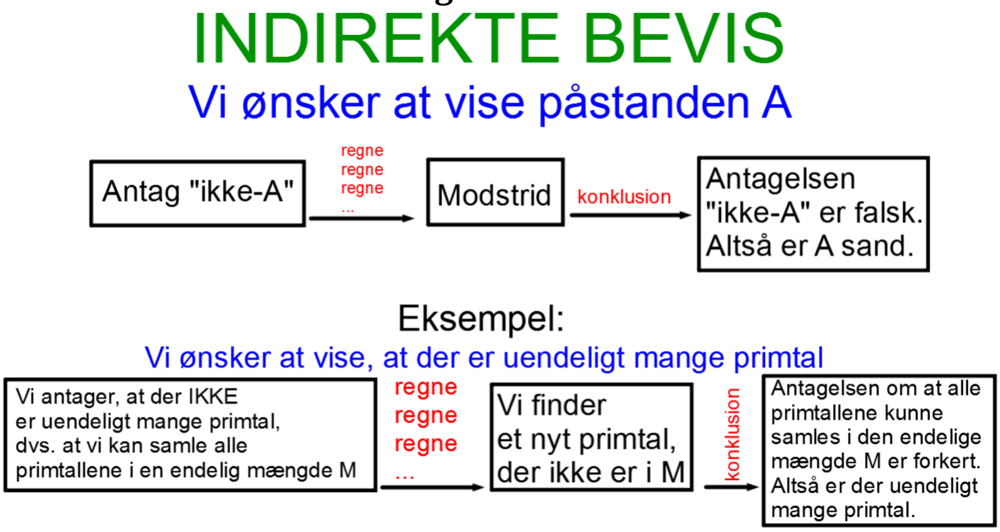
Dvs. forholdet mellem a og b kan skrives som en brøk med hele tal i tæller og nævner, dvs. et rationalt tal.

Men når linjestykker med længderne $\sqrt{2}$ og 1 er *inkommensurable*, betyder det, at der **ikke** findes nogle naturlige tal k_1 og k_2, hvor forholdet $\frac{k_1}{k_2}$ svarer til $\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$.

$\sqrt{2}$ er altså ikke et rationalt tal. Det kan ikke skrives som en brøk med hele tal i tæller om nævner.

Hippasus – hvis det da var ham – må have anvendt geometri til at vise eksistensen af inkommensurable linjestykker. Vi vil nu med et algebraisk bevis vise, at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal. Beviset er et såkaldt *modstridsbevis*, som går ud på, at man **antager**, at det man gerne vil vise **ikke** gælder, og så regner man løs, indtil man ender med en modstrid, der viser, at den oprindelige antagelse må være forkert, dvs. at det, man gerne vil vise, rent faktisk gælder:

En skematisk oversigt over et indirekte bevis er:



Bevis: Vi ønsker at vise, at $\sqrt{2}$ ikke er rationalt.

Det **antages**, at $\sqrt{2}$ **er** rationalt, dvs. at der findes to naturlige tal *p* og *q*, så:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

(hvor brøken er uforkortelig, dvs. ingen naturlige tal bortset fra 1 går op i både *p* og *q*).

Dermed er:

$$\sqrt{2} \cdot q = p$$

Hvis to tal er lige store, er deres kvadrater også lige store:

$$\left(\sqrt{2} \cdot q\right)^2 = p^2$$

$$2 \cdot q^2 = p^2$$

Venstresiden indeholder et 2-tal og er dermed et lige tal. Da venstresiden er lig højresiden, må højresiden altså også være et lige tal. Dvs. p^2 er et lige tal, og altså må *p* være et lige tal (kvadratet på ulige tal er ulige, og kvadratet på lige tal er lige). Dvs. der må findes et tal *r*, således at $p = 2 \cdot r$.

Dette indsættes, og man får:

$$2 \cdot q^2 = \left(2 \cdot r\right)^2$$

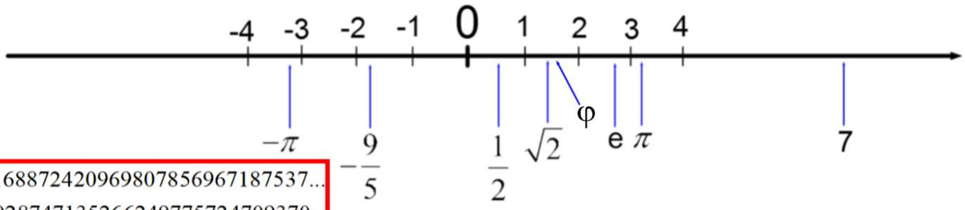
$$2 \cdot q^2 = 4 \cdot r^2$$

$$q^2 = 2 \cdot r^2$$

Nu er det højresiden, der indeholder et 2-tal og dermed er et lige tal. Dermed må q^2 og altså også *q* være et lige tal. Men da både *p* og *q* er lige, kan brøken $\frac{p}{q}$ forkortes med 2, dvs. brøken er ikke uforkortelig, og vores antagelse om, at $\sqrt{2}$ er rationalt, er altså forkert.

De reelle tal $\mathbb{R}$

Der er som nævnt tal (f.eks. $\sqrt{2}$ og π), der ikke kan skrives som brøker med hele tal i tæller og nævner. Disse tal kaldes *irrationale tal*. Når man inddrager de irrationale tal blandt tallene, kan man begynde at betragte tal som punkter på en *tallinje*, dvs. en ret linje, hvor man har angivet to punkter svarende til tallene 0 og 1 (nedenfor er desuden angivet flere hele tal):



$\sqrt{2} = 1,41421356237309504880168872420969807856967187537...$

$e = 2,71828182845904523536028747135266249775724709370...$

$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937...$

$\varphi = 1,61803398874989484820458683436563811772030917980...$

Tallinjer er sammenhængende, hvilket skal forstås på den måde, at tallinjen – der er en uendelig mængde af punkter (geometri) eller tal (algebra) – ikke har nogen huller. Dvs. du kan ikke slå ned noget sted mellem to tal på tallinjen uden at ramme et nyt tal. Hvis man ikke havde de irrationale tal med, ville der være huller ved f.eks. $\pi, \sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$ og $-\sqrt{7}$. På ovenstående figur er de irrationale tal repræsenteret ved $-\pi, \pi, \varphi, \sqrt{2}$ og **e**. Eulers tal **e** støder vi på masser af gange fremover. Det udgør sammen med 0, 1 og π de vigtigste tal inden for matematik. I Maple finder du det under 'Common Symbols'.

Tilføj det til dine favoritter med det samme. **Tastaturets *e* fungerer IKKE**.

Også de rationale og hele tal ligger som vist på tallinjen (repræsenteret ved $-\frac{9}{5}, \frac{1}{2}$ og 7).

Symbolet π for forholdet mellem en cirkels omkreds og dens diameter blev indført af William Jones (1675-1749). Bogstavet **e** som symbol for Eulers tal er valgt til ære for Leonhard Euler (1707-1783). Kvadratrodstegnet $\sqrt{a}$ blev indført i 1525 af Christoph Rudolff (1499-1545).

Symbolet φ for det gyldne snit blev indført i 1910 af Mark Barr (1871-1950).

Det var Leonhard Euler, der er 1737 som den første beviste, at **e** er irrationalt.

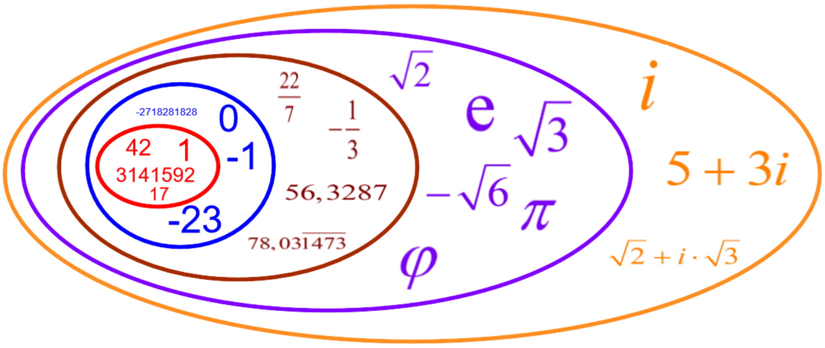
Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777) viste i 1761, at π er irrationalt.

Definition 7: *De reelle tal* $\mathbb{R}$ er talmængden bestående af alle tal på tallinjen.

Mængden af reelle tal består altså af alle hele tal, alle endelige decimalbrøker og alle uendelige decimalbrøker – både de periodiske og de ikke-periodiske.

Med denne definition skulle man tro, at vi havde fået inkluderet alle tal, men som vi senere skal se, findes der også komplekse tal (talmængden $\mathbb{C}$), der godt kan ligge uden for tallinjen.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$



De reelle tal og tallinjen er nøje forbundet med den ene af de to betydninger af ordet *kontinuert*, der anvendes inden for matematik.

En *funktion* kan være *kontinuert* (i modsætning til *diskontinuert*). Det ser vi på i forbindelse med emnet Infinitesimalregning, men IKKE i forbindelse med emnet Funktioner. Det vil løst sagt være et spørgsmål om, hvorvidt grafen for funktionen er sammenhængende eller springer.

Den anden anvendelse af ordet er, at en *variabel* kan være *kontinuert* (denne gang i modsætning til *diskret*). Variabler indgår i rigtig meget matematik – f.eks. også i forbindelse med funktioner – så vi kommer til at støde på *kontinuert vs. diskret* mange gange, og første gang er nu, hvor vi skal se på *intervaller*. Igen har ’kontinuert’ noget med ’sammenhængende’ at gøre.

Intervaller:

Definition 8: Et *interval* er en mængde af reelle tal, der indeholder samtlige reelle tal mellem to vilkårligt valgte tal i intervallet.

Definition 8 kan lyde lidt kryptisk, og oftest kan man da også blot sige, at et *interval* er en **sammenhængende** talmængde, dvs. et område på talaksen **uden huller**, der altså indeholder uendeligt mange reelle tal.

Og en *kontinuert variabel* er så en variabel, der kan antage værdier i et eller flere intervaller, mens en *diskret variabel* er en variabel, der kun kan antage et *tælleligt* antal værdier (vi skal senere under emnet Uendeligheder se, at *tælleligt* svarer til den type uendelighed, som $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ og $\mathbb{Q}$ har).

Men Definition 8 giver også et par særlige intervaller, der ikke kan betegnes som ’områder’, og som ikke består af uendeligt mange tal, men blot ét eller slet ingen (se nedenfor).

Intervaller angives med *kantede parenteser* (kan også kaldes *firkantede parenteser)*, der kan vende ind mod eller væk fra intervallet:

$\left[a,b\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a \le x \le b\right\}$ Begge parenteser vender **ind mod** intervallet

$\left]a,b\right[= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a < x < b\right\}$ Begge parenteser vender **væk fra** intervallet

$\left]a,b\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a < x \le b\right\}$ Første parentes væk fra intervallet og anden ind mod

$\left[a,b\right[= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a \le x < b\right\}$ Første parentes ind mod intervallet og anden væk fra

I ovenstående situationer kaldes *a* og *b* for *endepunkter*, og $a < b$.
Hvis parentesen vender **ind mod** intervallet, er det pågældende endepunkt **med** i intervallet.
Hvis parentesen vender **væk fra** intervallet, er det pågældende endepunkt **ikke med** i intervallet.
Hvis $a = b$, har man et *degenereret interval* $\left[a,a\right] = \left\{a\right\}$, der består af ét tal.

Den tomme mængde er også et interval, der kan skrives på flere måder (med $a < b$):

$$\varnothing = \{\ \} = \left[a,a\right[= \left]a,a\right] = \left]a,a\right[= \left[b,a\right] = \left]b,a\right] = \left[b,a\right[= \left]b,a\right[\quad \text{(f.eks. } \left[5,5\right[\text{ eller } \left[8,3\right]\text{)}$$

De degenererede intervaller og den tomme mængde er som sagt særlige tilfælde, og alle andre intervaller indeholder uendeligt mange tal.

Der er også mulighed for, at et eller begge endepunkter erstattes af uendelighedssymbolet:

$\left[a,\infty\right[= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a \le x\right\}$ Her er der kun ét endepunkt, nemlig *a*.

$\left]-\infty,b\right[= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x < b\right\}$ Her er også kun ét endepunkt, *b*.

$\left]-\infty,\infty\right[= \mathbb{R}$ Her er ingen endepunkter.

Notationen med kantede parenteser blev indført af Bourbaki (sikkert i 1939)

Vær opmærksom på, at engelsktalende lande – og dermed også Maple – anvender bløde parenteser i stedet for de udadvendte kantede parenteser (se nedenfor):

Maple / Engelsk / traditionel notation	Dansk / Ikke-engelsk / Moderne notation
$solve(3 < x \leq 7, x) = (3, 7]$	$]3,7]$
$solve(3 \leq x < 7, x) = [3, 7)$	$[3,7[$
$solve(3 < x < 7, x) = (3, 7)$	$]3,7[$
$solve(3 \leq x \leq 7, x) = [3, 7]$	$[3,7]$
$solve(3 < x, x) = (3, \infty)$	$]3,\infty[$
$solve(3 \geq x, x) = (-\infty, 3]$	$]-\infty,3]$

Et interval siges at være *venstrebegrænset*, hvis der findes et reelt tal, der er mindre end samtlige værdier i intervallet. Tilsvarende siges et interval at være *højrebegrænset,* hvis der findes et reelt tal, der er større end samtlige værdier i intervallet.

Et interval siges at være *begrænset*, hvis det både er venstrebegrænset og højrebegrænset.

Hvis et interval hverken er højrebegrænset eller venstrebegrænset, er det *ubegrænset*.

Et interval siges at være *venstreåbent*, hvis der ikke findes et tal **i intervallet**, der er mindre end samtlige andre tal i intervallet. Og tilsvarende siges et interval at være *højreåbent,* hvis der ikke findes et tal **i intervallet**, der er større end samtlige andre tal i intervallet.

Et interval siges at være *åbent*, hvis det både er venstreåbent og højreåbent.

Et interval siges at være *halvåbent*, hvis der er to endepunkter, men kun det ene er med i intervallet.

Et interval siges at være *lukket*, hvis det indeholder alle sine endepunkter.

Det sidste punkt har den pudsige konsekvens, at intervallet $]-\infty,\infty[$ både er åbent og lukket (det har jo ingen endepunkter), mens $[a,\infty[$ er et lukket interval (det har ét endepunkt, *a*, og det ligger i intervallet). Man kan godt bruge betegnelsen 'åben parentes' om en kantet parentes, der vender væk fra intervallet, men egentlig er det selve intervallet, som ordet 'åben' henviser til.

Man angiver, at et interval er lukket i det ene endepunkt, på følgende forskellige måder:

En udfyldt cirkel

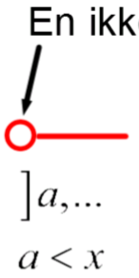
$[a,\ldots$

$a \leq x$

Dvs. at tallet *a* ligger i intervallet.

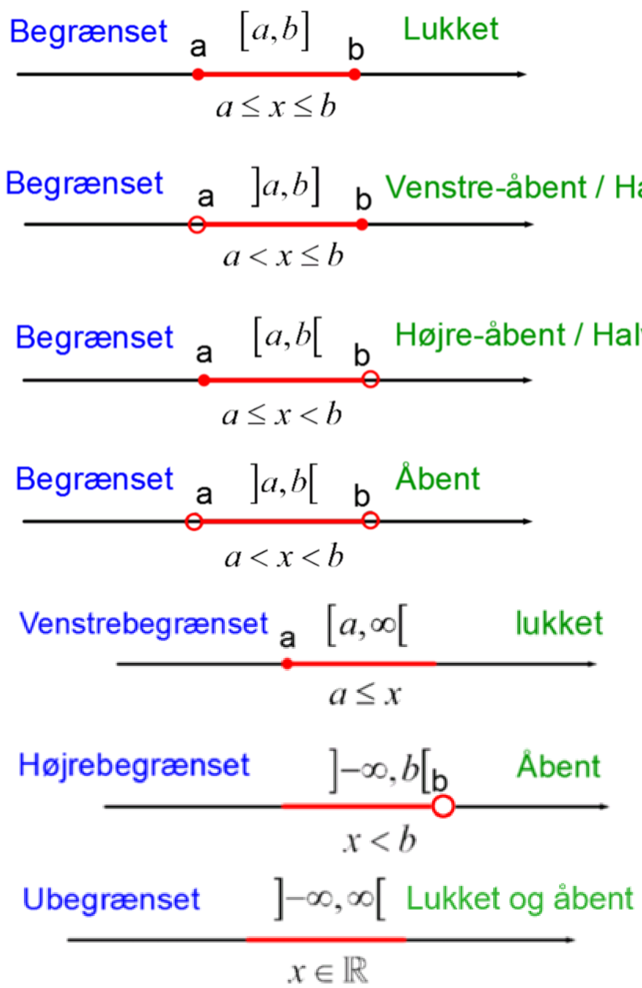
Og tallet *a* er netop det tal i intervallet, der er mindre end samtlige andre tal i intervallet, og som dermed betyder, at intervallet ikke er venstreåbent.

Man angiver, at et interval er åbent i det ene endepunkt, på følgende måder:



Dvs. at tallet *a* IKKE ligger i intervallet.
Og der er ikke noget tal i intervallet, der er mindre end samtlige andre. For at indse dette, så antag for nemheds skyld, at *a* er 0. Du prøver nu at finde et positivt tal (for du må ikke vælge 0, da 0 IKKE ligger i intervallet), der er mindre end samtlige andre tal i intervallet.
Du prøver nu med 0,000001. Men ak, det dur ikke, for 0,0000001 er mindre. Og hvis vi så prøver med dette tal, dur det heller ikke, for 0,00000001 er mindre.
Og bemærk pointen: Du kan blive ved med at prøve. Du kan ikke finde et tal, der er mindre end samtlige andre tal.

Et ikke fuldstændigt udvalg over muligheder:



Bemærk den meget vigtige pointe, at man altid vender parentesen væk fra intervallet i forbindelse med uendelighedstegnet.

Det eneste ubegrænsede interval er $]-\infty,\infty[$ (der også kan angives $\mathbb{R}$).

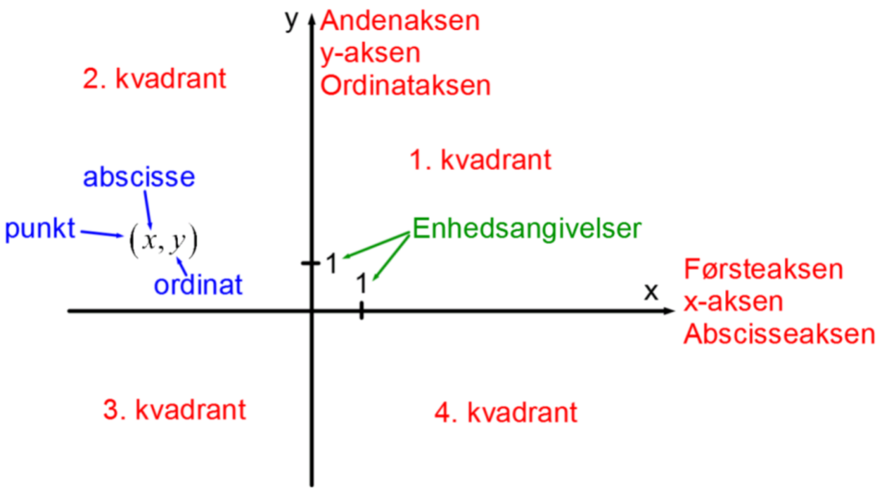
De positive, reelle tal, dvs. intervallet $]0,\infty[$, skrives $\mathbb{R}_+$.

De negative, reelle tal, dvs. intervallet $]-\infty,0[$, skrives $\mathbb{R}_-$

Opgaverne 114*

Vores koordinatsystem – der også kaldes *Det Kartesiske Koordinatsystem* – opstår, når vi tager det kartesiske produkt $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Dvs. vi får mængden af punkter (x, y), hvor både *førstekoordinaten x* og *andenkoordinaten y* er reelle tal.

Nogle væsentlige begreber i forbindelse med koordinatsystemer er angivet på figuren nedenfor.



Opsamling: Vi har indført tal ud fra tanken om at tælle eller måle størrelser, og vi fandt så ud af, hvordan man skulle regne med tallene.
Vi skal snart angribe tallene fra en anden, mere nutidig og mere formel måde:
Vi skal se på tal som størrelser, man regner med.

Dvs. pointen i det kommende er, at vi tager udgangspunkt i regnereglerne, og vi siger så, at størrelser, der opfylder disse, er tal. Bemærk altså, at vi så at sige vender hele situationen på hovedet. Først førte tallene os til regnereglerne. Nu skal regnereglerne føre os til tallene.

Den store fordel ved den sidste måde skulle gerne være klar efter gennemgangen.

TAL OG REGNEREGLER

Vi ser nu på tal som *noget, man regner med*, dvs. vi skal tage udgangspunkt i regnereglerne, og tallene opstår derefter, som de størrelser, der overholder regnereglerne.

Vi skal derfor se på begrebet *legeme*, der er et begreb, man støder på inden for algebra.

Et legeme er en struktur, hvor man fastsætter to regnearter og nogle regler (aksiomer), der gælder for disse regnearter. Aksiomerne bruges derefter til at bevise nye sætninger, der fortæller mere om, hvordan man kan regne med tal.

Sådanne strukturer udgør en stor del af moderne algebra. Udover legemer findes der *ringe*, *grupper*, *gitre* og *vektorrum* (vi skal kun beskæftige os med legemer og vektorrum).

Det smarte er, at hvis man kan vise, at et begreb (f.eks. *de reelle tal*) opfylder reglerne/aksiomerne for et legeme, så ved man også, at alle de beviste sætninger gælder for de reelle tal.

Vi får brug for følgende tegn:

$\forall$: Alkvantor "For alle"	$\in$: "Tilhører"
$\exists$: Eksistenskvantor "Der findes/eksisterer"	$\backslash\{\ \}$: "Fraregnet mængden bestående af ..."
$\vee$: "Eller" (logisk *eller*)	$\wedge$: "Og" (logisk *og*)
$\Rightarrow$: Implikation "Hvis ... så"	$\Leftarrow$: Implikation "kun hvis"
$\Leftrightarrow$: Biimplikation "netop hvis" eller "hvis og kun hvis"	

Alkvantoren $\forall$ blev indført i 1935 af Gerhard Gentzen (1909-1945) efter eksistenskvantoren var indført af Giuseppe Peano (1858-1932) i 1897.
$\vee$ blev indført af Bertrand Russell i 1902 , og $\wedge$ blev indført af Arend Heyting i 1930.
Implikations- og biimplikationspile (Bourbaki, 1954) skrives også nogle gange med enkeltpile $\rightarrow, \leftarrow$ og $\leftrightarrow$ (Hilbert, 1922 og Becker,1933).

Legeme *M*

Definition:

Et legeme er en struktur $(M,+,\bullet)$ bestående af en mængde *M* og to regneoperationer + og $\bullet$, der virker på to elementer i *M* og danner et nyt element (man kalder sådanne regneoperationer for *binære operatorer*, fordi de virker på to elementer), og som opfylder følgende aksiomer:

Aksiomer:

Stabilitet:
1) $\forall x,y \in M : x+y \in M$
2) $\forall x,y \in M : x \cdot y \in M$

Det vil sige, at når man lægger to elementer fra *M* sammen, vil resultatet også være et element i *M*. Og ligeledes: Et produkt af to elementer fra *M* vil også ligge i *M*.
Bemærk, at dette gælder for de reelle tal. Både summen og produktet af to reelle tal er reelle tal.

Kommutativitet:
3) $\forall x,y \in M : \ x+y = y+x$
4) $\forall x,y \in M : \ x \cdot y = y \cdot x$

Det vil sige, at både ved addition og multiplikation er det ligegyldigt hvilket element, der skrives først. Bemærk, at begge disse aksiomer er opfyldt for de reelle tal.

Når vi arbejder med tal, omtaler vi normalt aksiom 4 som: "Faktorernes orden er ligegyldig"

Associativitet:
5) $\forall x,y,z \in M : \ (x+y)+z = x+(y+z)$
6) $\forall x,y,z \in M : \ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

Bemærk, at addition og multiplikation som udgangspunkt kun er defineret for to elementer ad gangen, og derfor kan man - som udgangspunkt - ikke skrive f.eks. $x \cdot y \cdot z$, da der er tre elementer.

MEN pointen med disse aksiomer er, at man alligevel godt kan skrive $x \cdot y \cdot z$ eller $a+b+c+d$, da aksiomerne siger, at man kan addere/multiplicere elementerne to og to, og at den rækkefølge, man gør dette i, ikke har betydning for resultatet. Dette gælder for de reelle tal (tænk selv over dette).

Distributivitet: 7) $\forall x, y, z \in M: \ x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

Bemærk, at denne sætning kombinerer de to regneregler, og bemærk, at dette gælder for de reelle tal. Parenteserne på højresiden er nødvendige i aksiomet, da man skal sikre sig, at multiplikationerne foretages før additionen. Når vi arbejder med de reelle tal - eller andre slags tal - har vi dog indført den regel, at multiplikation altid skal foretages før addition, og så bliver parenteserne på højresiden overflødige. F.eks. $3 \cdot (5+4) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4$.

Dette gør vi mere ud af, når vi indfører *regneartернes hierarki*.

Neutrale elementer:
8) $\exists 0 \in M : \forall x \in M: \ x + 0 = x$
9) $\exists 1 \in M : \forall x \in M: \ x \cdot 1 = x$

$0 \neq 1$

Det vil sige, at der findes et element i *M*, der har den egenskab, at uanset hvilket element *x* i *M*, det lægges til, giver det elementet *x* selv. Og et lignende element findes for multiplikation. Disse to elementer må ikke være identiske, og vi beviser senere, at de er hver især entydige, dvs. der er ikke to forskellige elementer, der kan have egenskaben fra 8), og heller ikke fra 9).

Når vi arbejder med reelle tal, er *det neutrale element ved addition* tallet 0, mens *det neutrale element ved multiplikation* er tallet 1.

Modsatte element ved addition: 10) $\forall x \in M \ \exists (-x) \in M: \ x + (-x) = 0$

Dvs. at alle elementer har et *modsat element* (også kaldet elementets *inverse element ved addition*). Når vi arbejder med de reelle tal, hvor det neutrale element ved addition er 0, fører dette aksiom til indførelsen af regneoperationen minus.

Hvis vi f.eks. tager udgangspunkt i tallet 5,3. Så er det modsatte element tallet -5,3, da der gælder: $5{,}3 + (-5{,}3) = 0$. Vi skal senere bevise, at dette svarer til $5{,}3 - 5{,}3 = 0$, hvor minustegnet altså skifter fra et fortegn til en regneoperation. Det modsatte element til tallet -8 er tallet 8.

Reciprokke element ved multiplikation: 11) $\forall x \in M \setminus \{0\} \exists \frac{1}{x} \in M: \ x \cdot \frac{1}{x} = 1$

Et reciprokt element kaldes også et *inverst element ved multiplikation*.

Inden for de reelle tal har vi, at det *reciprokke element* til 8 er $\frac{1}{8}$, det reciprokke element til $-\frac{3}{7}$ er $-\frac{7}{3}$ og det reciprokke element til π er $\frac{1}{\pi}$. Vi er vant til, at den vandrette streg er en brøkstreg. Men egentlig er den på dette sted blot en notation for det reciprokke element. Vi skal senere indføre *division*, og i den forbindelse bliver den vandrette streg til vores velkendte brøkstreg.

Samlet set har vi altså disse 11 aksiomer:

1) $\forall x, y \in M : x + y \in M$
2) $\forall x, y \in M : x \cdot y \in M$
3) $\forall x, y \in M : \ x + y = y + x$
4) $\forall x, y \in M : \ x \cdot y = y \cdot x$
5) $\forall x, y, z \in M : \ (x + y) + z = x + (y + z)$
6) $\forall x, y, z \in M : \ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
7) $\forall x, y, z \in M : \ x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
8) $\exists\, 0 \in M : \forall x \in M : \ x + 0 = x$
9) $\exists\, 1 \in M : \forall x \in M : \ x \cdot 1 = x$
10) $\forall x \in M \ \exists (-x) \in M : \ x + (-x) = 0$
11) $\forall x \in M \setminus \{0\} \exists \frac{1}{x} \in M : \ x \cdot \frac{1}{x} = 1$

Sætninger udledt fra aksiomerne

Ud fra disse 11 aksiomer kan vi nu begynde at bevise en hel række sætninger, der gælder for legemer. Og bemærk endnu engang: Når vi har vist, at de reelle tal opfylder ovenstående 11 aksiomer, vil de sætninger, vi beviser ved hjælp af aksiomerne, også gælde for de reelle tal.

Der indføres 22 nummererede sætninger samt et par ekstra sætninger om regneregler. Desuden indføres 6 entydighedssætninger. Selve antallet af sætninger, den konkrete nummerering og opdelingen er ikke officiel. Dvs. du kan f.eks. ikke uden for vores undervisningslokale henvise til Sætning 13 og regne med, at andre kender indholdet. Og der kunne også indføres flere sætninger.

Entydighedssætning 1: Hvis det om elementet *a* gælder, at der findes et element *b*, således at $b + a = b$, så er *a* det neutrale element ved addition.

Bemærk forskellen på formuleringerne i ovenstående sætning og Aksiom 8. Denne sætning siger altså, at hvis vi for et element *a* kan finde blot ét andet element, som det kan lægges til uden at ændre det, så er *a* det element, vi kalder 0.

Eller modsat: Hvis vi har et element *a*, som vi ved, IKKE er 0-elementet, så kan vi ikke finde et eneste element, som *a* kan lægges til uden at ændre det. Du vil altså søge forgæves, hvis du for f.eks. tallet 3 søger efter et tal *b*, der ikke er 0, hvor $b + 3 = b$.

Bevis for Entydighedssætning 1: Antag, at vi for elementet *a* har fundet et element *b*, således at $b + a = b$. Der gælder så:

$$a \overset{Aksiom8}{=} a + 0 \overset{Aksiom10}{=} a + (b + (-b)) \overset{Aksiom5}{=} (a + b) + (-b) \overset{Aksiom3}{=} (b + a) + (-b) \overset{Antagelsen}{=} b + (-b) \overset{Aksiom10}{=} 0$$

Entydighedssætning 2: Hvis det om elementet *a* gælder, at der findes et element *b* forskelligt fra 0, således at $b \cdot a = b$, så er *a* det neutrale element ved multiplikation.

Øvelse 3: Bevis Entydighedssætning 2. Tjek, at du undervejs får anvendt aksiomerne 4, 6, 9 og 11.

Entydighedssætning 3: Det modsatte element (Aksiom 10) er entydigt.

Bevis for Entydighedssætning 3: Vi forestiller os, at vi for elementet *a* har fundet to tal a_1 og a_2 med egenskaberne $a + a_1 = 0$ og $a + a_2 = 0$.

Vi vil nu vise, at $a_1 = a_2$ (tjek, at du kan se, at dette viser entydigheden).

$$a_1 \overset{Aksiom\,8}{=} a_1 + 0 \overset{se\,ovenfor}{=} a_1 + (a + a_2) \overset{Aksiom\,5}{=} (a_1 + a) + a_2 \overset{Aksiom\,3}{=} (a + a_1) + a_2 \overset{se\,ovenfor}{=}$$

$$0 + a_2 \overset{Aksiom\,3}{=} a_2 + 0 \overset{Aksiom\,8}{=} a_2$$

Entydighedssætning 4: Det reciprokke element (Aksiom 11) er entydigt.

Øvelse 4: Bevis Entydighedssætning 4

Vi er nu klar til at tage fat på de nummererede sætninger. Vi skal altså til at se på hvilke regneregler, der følger af de legemets 11 aksiomer.

Sætning 1: $a \cdot 0 = 0$

Denne sætning siger altså, at hvis man tager det neutrale element ved addition og multiplicerer det med et element fra legemet, så bliver resultatet det neutrale element ved addition (uanset hvad *a* er for et element).

Bevis 1: Vi ser på udtrykket $a \cdot 0$ og anvender vores aksiomer på dette:

$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0)$ Aksiom 8 anvendes med 0 i stedet for *x* (da aksiomet jo gælder for alle *x*)

$= (a \cdot 0) + (a \cdot 0)$ Aksiom 7. Entydighedssætning 1 fortæller os så, at $a \cdot 0 = 0$, for vi har for $a \cdot 0$ fundet et element $a \cdot 0$, hvor $(a \cdot 0) + (a \cdot 0) = (a \cdot 0)$.

Opsamling: Vi har altså nu vist, at det neutrale element ved addition indført i Aksiom 8 også har den egenskab, at når man multiplicerer det med et tal, så får man det neutrale element.

Eller med andre ord: **Når man ganger med 0, får man 0.**

Som sagt er det vigtigt at bemærke, at tallet 0 blev indført i forbindelse med addition, men viste sig også at have en særlig status ved multiplikation.

En anden vigtig regel (sætning), der følger af Sætning 1, er *Nulreglen*, der ikke får sit eget nummer her under regneregler, da det er en sætning, der adskiller sig fra de andre sætninger, og som vi først tager rigtigt hul på at bruge senere.

NULREGLEN: Et produkt er nul, netop hvis mindst én af faktorerne er nul.

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0 \vee a_2 = 0 \vee a_3 = 0 \vee \ldots \vee a_n = 0$$

Bemærk formuleringen ”netop hvis”. Det betyder, at du kan bruge sætningen begge veje.

1) Hvis du kan identificere en faktor, der er nul, så vil produktet også være nul.
2) Hvis du ved, at produktet er nul, så ved du, at mindst en af faktorerne er nul.

Opgaverne 119*

Bevis for Nulreglen: Vi deler beviset op i de to dele ”$\Leftarrow$” og ”$\Rightarrow$”.

”$\Leftarrow$” følger af Sætning 1. For forudsæt, at du kan udpege en af faktorerne $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, der er 0, f.eks. $a_2 = 0$, så kan man rykke rundt på faktorerne (*kommutative lov*) og samle de andre faktorer under et (*stabilitet* og *associativitet*): $(a_1 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot \ldots \cdot a_n) \cdot a_2 = (a_1 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot \ldots \cdot a_n) \cdot 0 = 0$.

”$\Rightarrow$”: Vi forudsætter, at $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = 0$. Vi vil nu vise, at mindst en af faktorerne er nul, og vi bruger igen et modstridsbevis (indirekte bevis), dvs. vi **antager**, at ingen af faktorerne er nul, og vi skal så ende med en modstrid, der dermed tvinger os til at konkludere, at vores antagelse er forkert. Og hvis vores antagelse om, at ingen af faktorerne er nul, er forkert, kan vi konkludere, at mindst en af faktorerne er nul.

Så vi **antager** nu, at ingen af faktorerne er nul. Dermed har hvert element ifølge aksiom 11 et reciprokt element, og dette kan vi multiplicere med et ad gangen og hele tiden udnytte Sætning 1 på højresiderne af lighedstegnene og aksiomerne 9 og 11 på venstresiderne. Vi får så:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{a_1} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = \frac{1}{a_1} \cdot 0 \Leftrightarrow$$
$$1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = 0 \Leftrightarrow$$
$$a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{a_2} \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = \frac{1}{a_2} \cdot 0 \Leftrightarrow$$
$$1 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{a_3} \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = \frac{1}{a_3} \cdot 0 \Leftrightarrow$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{a_n} \cdot a_n = \frac{1}{a_n} \cdot 0 \Leftrightarrow$$
$$1 = 0$$

Det sidste udsagn er falsk. Vi har altså fået en modstrid og må konstatere, at vores antagelse om, at ingen af faktorerne er nul, må være forkert. Altså må mindst en af faktorerne være nul.

Sætning 2: $a\cdot(-1)=(-a)$

Denne sætning siger, at hvis man har et element *a* og multiplicerer dette med (-1), der er det modsatte element til det neutrale element ved multiplikation, så får man det modsatte element til *a*.

Vi skal altså vise, at $4\cdot(-1)=-4$.

Bevis 2: Vi beviser dette ved at se på udtrykket $(a\cdot(-1))+a$, som vi kan regne på.

$(a\cdot(-1))+a=(a\cdot(-1))+(a\cdot 1)$ Aksiom 9 er anvendt på det andet led.

$=a\cdot((-1)+1)$ Aksiom 7 er anvendt.

$=a\cdot 0$ Aksiom 10 anvendt på elementet 1.

$=0$ Sætning 1.

Da $a\cdot(-1)$ lagt til *a* giver 0, fortæller aksiom 10 os, at $a\cdot(-1)=(-a)$.

Opsamling: Bemærk, at vi i dette bevis også har anvendt Sætning 1. Dette er tilladt, da denne sætning allerede er blevet bevist. Og vi har altså nu to sætninger, som vi må bruge, når vi skal bevise de næste sætninger.

Sætning 3: $a\cdot(-b)=(-(a\cdot b))$

Denne sætning siger, at produktet af elementet *a* og det modsatte element til *b*, vil give det modsatte element til produktet af *a* og *b*.

Eksempel: Et konkret tilfælde med tal: $6\cdot(-9)=-54$.

Dvs. når man ganger et positivt tal med et negativt tal, får man et negativt tal.

Bevis 3: Dette bevis minder om beviset for Sætning 2. Vi begynder med udtrykket $(a\cdot(-b))+(a\cdot b)$.

$(a\cdot(-b))+(a\cdot b)=a\cdot((-b)+b)$ Aksiom 7 er anvendt.

$=a\cdot 0$ Aksiom 10 anvendt på elementet *b*.

$=0$ Sætning 1.

Da $a\cdot(-b)$ lagt til $a\cdot b$ giver 0, fortæller aksiom 10 os, at $a\cdot(-b)=-(a\cdot b)$.

Opsamling: Vi har nu vist, at **negativt ganget positivt giver negativt.**

Sætning 4: $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$

Sætningen siger, at produktet af de modsatte elementer til *a* og *b* giver det samme som produktet af *a* og *b*.

Et konkret taleksempel: $(-2)\cdot(-7)=2\cdot 7=14$.

Bevis 4: Vi ser på udtrykket $(-a)\cdot(-b)+(-(a\cdot b))$.

$(-a)\cdot(-b)+(-(a\cdot b))=(-a)\cdot(-b)+(a\cdot(-b))$ Sætning 3 anvendt på andet led.

$=((-a)+a)\cdot(-b)$ Aksiom 7

$=0\cdot(-b)$ Aksiom 10

$=0$ Sætning 1.

Da $(-a)\cdot(-b)$ lagt til $-(a\cdot b)$ giver 0, fortæller Aksiom 10 og Entydighedssætning 3 os, at $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$.

Opsamling: Vi har nu vist, at **negativt ganget negativt giver positivt.**

Vigtig pointe ved multiplikation: Hvis man har flere størrelser bestående af forskellige fortegn, tal og bogstaver, der skal multipliceres, skal man tage hver del for sig:

Fortegn for sig. Tal for sig. Hvert bogstav for sig.

Eksempel: $-4abc\cdot 5a^2c\cdot(-bd)\cdot(-3b^2c^2)=-60a^3b^4c^2d$

Fortegn for sig: Der er tre (dvs. et **ulige** antal) negative fortegn, så der skal også være et negativt fortegn på resultatet.
Tal for sig: $4\cdot 5\cdot 1\cdot 3=60$
Hvert bogstav for sig: $a\cdot a^2=a^3$; $b\cdot b\cdot b^2=b^4$; $c\cdot c\cdot c^2=c^4$; $d=d$

Opgaverne 120*

Parentesregneregler

Sætning 5: $+(a+b)=a+b$
Dvs. man kan hæve en "plusparentes" uden at ændre noget ved *argumentet* (indholdet i parentesen).

Bevis 5: Det følger direkte af den associative lov for addition (Aksiom 5). Det var selve pointen med dette aksiom. Man sætter bare ikke et ”+” foran parentesen, når der ikke står noget foran den.

Vi har hidtil anvendt notationen $(-b)$ om det modsatte element til *b*, og vi har så f.eks. kunnet skrive $a+(-b)$. Dvs. tegnet $-$ har ikke været anvendt som et regnetegn, men som et fortegn, der betød "det modsatte element af ...".
Nu ønsker vi imidlertid at indføre regneoperation subtraktion ("minus"), dvs. vi ønsker at kunne skrive f.eks. $a-b$. Her er det vigtigt at bemærke, at vi ikke kan anvende aksiomerne til at indføre denne (nye) regneoperation, da den ikke er nævnt et eneste sted. Vi har brug for en *definition*, dvs. vi har brug for at beskrive, hvad regnetegnet $-$ skal betyde.

Indførelse af regneoperationen subtraktion:

Definition 8: $(a-b)+b=a$

Dvs. $(a-b)$ er det element, der lagt til *b*, giver *a*.

Bemærk, at du anvender Definition 8, når du løser visse typer af ligninger. F.eks. denne udregning:

$$3+x=8 \Leftrightarrow$$
$$x=8-3$$

Ofte siger man, at man har trukket tre fra på begge sider, eller man siger, at man flytter 3-tallet over på den anden side og skifter fortegn. Men egentlig følger ovenstående direkte af vores definition, for nederste linje fortæller os, at $x=8-3$, og $(8-3)$ **er netop det tal, der lagt til 3, giver 8** (se den øverste linje).

Med ordet "det" i Definition 8 har man egentlig antaget noget, der først skal bevises, nemlig at der netop er ét element, der lagt til *b*, giver *a*. Dvs. vi skal have bevist følgende sætning:

Entydighedssætning 5: Der er netop ét element, der lagt til *b*, giver *a*, dvs. $(a-b)$ er entydigt.

Bevis for Entydighedssætning 5: Det antages, at vi har fundet to elementer c_1 og c_2, hvor $c_1+b=a$ og $c_2+b=a$. Vi ønsker nu at vise, at $c_1=c_2$.

$$c_1 \overset{Aksiom 8}{=} c_1+0 \overset{Aksiom 10}{=} c_1+(a+(-a)) \overset{Antagelsen}{=} c_1+((c_2+b)+(-a)) \overset{Aksiom 3}{=} c_1+((b+c_2)+(-a)) \overset{Aksiom 5}{=}$$
$$((c_1+b)+c_2)+(-a) \overset{Antagelsen}{=} (a+c_2)+(-a) \overset{Aksiom 3}{=} (c_2+a)+(-a) \overset{Aksiom 5}{=} c_2+(a+(-a)) \overset{Aksiom 10}{=}$$
$$c_2+0 \overset{Aksiom 8}{=} c_2$$

Efter at have indført regneoperationen subtraktion, skal det nu vises, hvordan regneminusset og fortegnsminusset hænger sammen:

Sætning 6: $a+(-b)=a-b$

Dvs. det giver det samme, om du trækker b fra a, eller om du lægger det modsatte element af b til a.

Bevis 6: Ideen i beviset er, at vi tager udtrykket på venstresiden og ser, hvad der sker, når vi lægger det sammen med *b*:

$$\begin{aligned} (a+(-b))+b &= a+((-b)+b) && \text{Aksiom 5} \\ &= a+0 && \text{Aksiom 10} \\ &= a && \text{Aksiom 8} \end{aligned}$$

Bemærk, at $(a+(-b))$ lagt til *b* giver *a*, og dermed fortæller Definition 8 og Entydighedssætning 5 os, at $a+(-b)=a-b$

Vi har altså nu vist, at det er det samme, om du skriver $5+(-7)$ eller $5-7$.

Vi vil derfor i det efterfølgende ikke skelne mellem skrivemåderne $a-b$ og $a+(-b)$.

Videre med parentesregnereglerne:

Sætning 7: $-(a+b)=-a-b$

Man hæver altså en "minusparentes" ved at ændre fortegn på **alle led** i parentesen.

Bevis 7: Sætning 2 giver os, at $-(a+b)=-1\cdot(a+b)$, og Aksiom 7 og Sætning 2 giver derefter:

$$-1\cdot(a+b)=(-1)\cdot a+(-1)\cdot b=-a-b$$

Sætning 8: $a\cdot(b+c-d\cdot e)=a\cdot b+a\cdot c-a\cdot d\cdot e$

Man ganger ind i en parentes ved at gange ind på **<u>hvert led.</u>**

Bevis 8: I det følgende anvendes en hel række aksiomer. Tænk selv over hvilke:

$$a\cdot(b-c+d\cdot e)=a\cdot((b-c)+(d\cdot e))=a\cdot(b-c)+a\cdot(d\cdot e)=a\cdot b-a\cdot c+a\cdot d\cdot e$$

Sætning 9: $(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d$

Man ganger to parenteser sammen ved at gange hvert led i den ene med hvert led i den anden.

Bevis 9: Beviset anvender Aksiom 7 to gange.

$$(a+b)\cdot(c+d)=(a+b)\cdot c+(a+b)\cdot d=(a\cdot c+b\cdot c)+(a\cdot d+b\cdot d)=a\cdot c+b\cdot c+a\cdot d+b\cdot d$$

Aksiom 3 kan så anvendes, når der skal rykkes rundt på leddene.

Opgaverne 121*

Brøkregneregler

Vi er stødt på en brøkstreg en enkelt gang under aksiomerne, nemlig da $\frac{1}{x}$ blev introduceret som det reciprokke element til *x*. Men dette er ikke tilstrækkeligt i forhold til vores anvendelse af brøkstreger, hvor vi også tillader udtryk af formen $\frac{a}{b}$. Dvs. vi skal blive i stand til både at forstå $\frac{1}{x}$ som det reciprokke element til *x* **og** som en division af tallet 1 med tallet *x*.

Vi skal altså have defineret, hvad vi mener med udtrykket $\frac{a}{b}$, og **ved vores definition fastsætter vi også betydningen af brøkstregen som den regneoperation, vi kalder division.**

Definition 9: $\frac{a}{b}\cdot b=a$

Dvs. $\frac{a}{b}$ er det element, der multipliceret med elementet *b*, giver elementet *a*.

Igen fortæller ordvalget ”det”, at der er tale om et entydigt element:

Entydighedssætning 6: Der er netop ét element, der multipliceret med *b*, giver *a*.

Øvelse 5: Bevis Entydighedssætning 6 (kig evt. først på beviset for Entydighedssætning 5).

Sætning 10: $\frac{a}{a}=1$

Bevis 10: Det følger direkte af Definition 9, når *b*'erne udskiftes med *a*'er, da $\frac{a}{a}$ så er det tal, der ganget med *a* giver *a*, hvilket ifølge Aksiom 9 netop er tallet 1 (det neutrale element ved multiplikation).

Bemærk, at da vi også ved, at $\frac{1}{a}\cdot a=1$ (Aksiom 11), har vi direkte følgende sætning:

Sætning 11: $a\cdot\frac{1}{a}=\frac{a}{a}$

Og vi har:

Sætning 12: $a\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b}$

Bevis 12: Vi ser på, hvad der sker, når venstresiden ganges sammen med *b*:

$$\left(a\cdot\frac{1}{b}\right)\cdot b \overset{\text{Aksiom 6}}{=} a\cdot\left(\frac{1}{b}\cdot b\right) \overset{\text{Aksiom 11}}{=} a\cdot 1 \overset{\text{Aksiom 9}}{=} a$$

Da venstresiden ganget sammen med *b* giver *a*, fortæller Definition 9 os, at $a\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b}$

Sætning 13: $a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}$

Dvs. man ganger en brøk med et tal ved at gange i tælleren og beholde nævneren.

Specielt gælder altså $\frac{a\cdot b}{a}=a\cdot\frac{b}{a}=b$ (det sidste lighedstegn følger af Definition 9), og dermed gælder f.eks. $\frac{17\cdot 131}{17}=17\cdot\frac{131}{17}=131$ og $\frac{37\cdot 81}{81}=81\cdot\frac{37}{81}=37$.

Bevis 13: Vi ved ifølge vores definition af, hvad en brøkstreg betyder, at $\frac{a \cdot b}{c}$ er det tal, der ganget med *c*, giver $a \cdot b$, eller opskrevet som ligning: $\frac{a \cdot b}{c} \cdot c = a \cdot b$. Bemærk endnu engang, at dette er en definition, dvs. det er betydningen af brøkstregen, der forklares ved ligningen, og der foregår derfor som sådan ikke nogen udregning.

Men vi ser nu på udtrykket $\left(a \cdot \frac{b}{c}\right) \cdot c$ og regner på dette:

$$\left(a \cdot \frac{b}{c}\right) \cdot c = a \cdot \left(\frac{b}{c} \cdot c\right) \quad \text{Aksiom 6}$$
$$= a \cdot b \quad \text{Definition 9}$$

Da $\left(a \cdot \frac{b}{c}\right) \cdot c = a \cdot b$ har vi ifølge den indledende bemærkning vist, at $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$.

Sætning 14: $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$

Dvs. man dividerer en brøk med et tal ved at gange tallet ind i nævneren (og beholde tælleren).

Bevis 14: Ifølge Definition 9 er $\frac{a}{b \cdot c}$ det tal, der ganget med $(b \cdot c)$ giver *a*, dvs. $\frac{a}{b \cdot c} \cdot (b \cdot c) = a$.
Vi vil nu bevise sætningen ved at vise, at når venstresiden ganges med $b \cdot c$, får man *a*:

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} \cdot (b \cdot c) = \left(\frac{\frac{a}{b}}{c} \cdot c\right) \cdot b \quad \text{Aksiomerne 2 og 6}$$
$$= \frac{a}{b} \cdot b \quad \text{Definition 9}$$
$$= a \quad \text{Definition 9}$$

Her er plads til en **bonussætning**:
Da $\frac{a}{1} \cdot 1 = a$ ifølge Definition 9, har man ifølge Aksiom 9, at: $\frac{a}{1} = a$

En anden vigtig ting, som man ofte kan få brug for, er sammenhængen mellem at dividere med et tal og at gange med det reciprokke til tallet. Der gælder nemlig:

Sætning 15: $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c}$

Dvs. det er det samme, om du dividerer med et tal, eller om du ganger med det reciprokke til tallet.

Bevis 15: Det følger direkte af Sætning 12, hvor man erstatter *a* med $\frac{a}{b}$ og *b* med *c*.

Opsamling:

Man ganger en brøk med et tal ved at gange tallet op i tælleren og beholde nævneren.
Man dividerer en brøk med et tal ved at gange tallet ned i nævneren og beholde tælleren.

Opgaverne 122*

Når man arbejder med brøker, vil man ofte få brug for at forkorte eller forlænge en brøk. Præcis som med begreberne subtraktion og division er vi nødt til først at definere, hvad man egentlig mener med at forlænge (eller forkorte) en brøk.

Definition 10: Man *forlænger* en brøk med tallet k - der ikke må være 0 - ved at multiplicere med k i både tæller og nævner, dvs. $\frac{a}{b} \rightarrow \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$

Det væsentlige - og hele pointen med at indføre begrebet - er følgende sætning:

Sætning 16: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$
Dvs. brøken ændrer ikke værdi, når den forlænges.

Bevis 16: En række af allerede viste sætninger anvendes på højresiden:

$$\begin{aligned}
\frac{a \cdot k}{b \cdot k} &= \frac{a}{b \cdot k} \cdot k && \text{Sætning 13} \\
&= \frac{\frac{a}{b}}{k} \cdot k && \text{Sætning 14} \\
&= \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{k}\right) \cdot k && \text{Sætning 15} \\
&= \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{1}{k} \cdot k\right) && \text{Aksiom 6} \\
&= \frac{a}{b} \cdot 1 && \text{Aksiom 11} \\
&= \frac{a}{b} && \text{Aksiom 9}
\end{aligned}$$

Bemærk altså endnu engang pointen: **En brøk ændrer ikke værdi, når den forlænges**.
Du kan altså forlænge brøker lige så meget, du har lyst til, da du ikke ændrer de regnestykker, som brøken indgår i.

Forlænge ligninger: Ligninger kan også forlænges, hvilket foregår ved, at man ganger hvert led på begge sider af lighedstegnet med det tal, der forlænges med (og som igen ikke må være 0).

F.eks. kan ligningen $\frac{1}{3} \cdot x^2 + \frac{1}{2} x = \frac{1}{6} x^3 - 2x^4$ forlænges med 6, hvilket giver $2x^2 + 3x = x^3 - 12x^4$.

En brøk ændrer ikke værdi, når den forlænges.

En ligning ændrer ikke sandhedsværdi (dvs. den har samme løsningsmængde), når den forlænges.

Man kan også *forkorte* brøker:

Definition 11: Man *forkorter* en brøk med tallet k - der ikke må være 0 - ved at dividere med k i både tæller og nævner, dvs. $\frac{a}{b} \to \frac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}}$

Igen er det væsentlige:

Sætning 17: $\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}}$ Dvs. brøken ændrer ikke værdi, når den forkortes.

Øvelse 6: Bevis denne sætning.

Pointe: Egentlig er det at *forlænge* og *forkorte* to sider af samme sag. Som Sætning 15 viser, så opnås f.eks. det samme ved at forlænge med $\frac{1}{7}$, som der opnås ved at forkorte med 7.

Vi er nu klar til de sidste sætninger omhandlende brøkregneregler.
Sætning 13 blev anvendt til at vise, hvad der sker, når man ganger en brøk med et tal. Men sætningen kan - ifølge vores Aksiom 4 om kommutativitet ved multiplikation - også forstås som en forklaring på, hvordan man ganger et tal med en brøk.

Vi ser nu på, hvordan man ganger to brøker sammen:

Sætning 18: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
Dvs. to brøker multipliceres ved at multiplicere tæller med tæller og nævner med nævner, eller lidt mere præcist: Ved i tælleren at placere produktet af de to tællere og i nævneren placere produktet af de to nævnere.

Bevis 18: Vi begynder med venstresiden og regner og kommer ved hjælp af sætningerne 12-15 samt nogle aksiomer frem til højresiden.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \overset{\text{Sætning 12}}{=} \frac{a}{b} \cdot \left(c \cdot \frac{1}{d} \right) \overset{\text{Aksiom 6}}{=} \left(\frac{a}{b} \cdot c \right) \cdot \frac{1}{d} \overset{\text{Sætning 13}}{=} \frac{a \cdot c}{b} \cdot \frac{1}{d} \overset{\text{Sætning 15}}{=} \frac{\frac{a \cdot c}{b}}{d} \overset{\text{Sætning 14}}{=} \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Sætning 19: $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = a \cdot \dfrac{c}{b}$

Dvs. man dividerer et tal med en brøk ved at gange med den omvendte brøk.

Bevis 19: Vi forlænger udtrykket på venstresiden med *c* (hvilket ifølge Sætning 16 ikke ændrer på udtrykket):

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a \cdot c}{\frac{b}{c} \cdot c} = \frac{a \cdot c}{b} = a \cdot \frac{c}{b}$$

I næst sidste skridt anvendes Definition 9, og i sidste skridt er Sætning 13 anvendt.

Sætning 20: $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c}$

Dvs. man dividerer en brøk med en brøk ved at gange med den omvendte brøk.

Bevis 20: Vi forlænger med *d* og $\dfrac{1}{c}$: $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{\frac{a}{b} \cdot d}{\frac{c}{d} \cdot d} = \dfrac{\frac{a}{b} \cdot d}{c} = \dfrac{\frac{a}{b} \cdot d \cdot \frac{1}{c}}{c \cdot \frac{1}{c}} = \dfrac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{1} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c}$

Opgaverne 123*

De to sidste brøkregneregler, vi ser på, omhandler udtryk, hvor der indgår flere led, dvs. i modsætning til alle de tidligere brøkregneregler, ses der nu ikke kun på multiplikation og division, men også på addition og subtraktion.

Sætning 21: $\dfrac{a + b - c \cdot d}{e} = \dfrac{a}{e} + \dfrac{b}{e} - \dfrac{c \cdot d}{e}$

Dvs. man dividerer en flerleddet størrelse med et tal ved at dividere hvert af leddene med tallet.

Bevis 21: Vi kan udnytte Sætning 12 samt Sætning 8 fra parentesregnereglerne:

$$\frac{a + b - c \cdot d}{e} = (a + b - c \cdot d) \cdot \frac{1}{e} = a \cdot \frac{1}{e} + b \cdot \frac{1}{e} - c \cdot d \cdot \frac{1}{e} = \frac{a}{e} + \frac{b}{e} - \frac{c \cdot d}{e}$$

Sætning 22: $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a + b}{c}$

Dvs. man kan addere (og dermed også subtrahere) to brøker med ens nævnere ved at addere (subtrahere) tællerne og beholde nævneren.

Øvelse 7: Find ud af hvilke sætningerne, der benyttes i følgende udregning, der udgør beviset for Sætning 22:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c} = (a + b) \cdot \frac{1}{c} = \frac{a + b}{c}$$

Opgaverne 124*

Sætning 1: $a \cdot 0 = 0$

Sætning 2: $a \cdot (-1) = (-a)$

Sætning 3: $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

Sætning 4: $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

Sætning 5: $+(a+b) = a+b$

Sætning 6: $a + (-b) = a - b$

Sætning 7: $-(a+b) = -a-b$

Sætning 8: $a \cdot (b + c - d \cdot e) = a \cdot b + a \cdot c - a \cdot d \cdot e$

Sætning 9: $(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$

Sætning 10: $\frac{a}{a} = 1$

Sætning 11: $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{a}$

Sætning 12: $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

Sætning 13: $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$

Sætning 14: $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$

Sætning 15: $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c}$

Sætning 16: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$

Sætning 17: $\frac{a}{b} = \dfrac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}}$

Sætning 18: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

Sætning 19: $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = a \cdot \frac{c}{b}$

Sætning 20: $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

Sætning 21: $\frac{a + b - c \cdot d}{e} = \frac{a}{e} + \frac{b}{e} - \frac{c \cdot d}{e}$

Sætning 22: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

Vi har set, at $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$ opfylder de 11 aksiomer, og dermed gælder ovenstående 22 sætninger, nulreglen og de 6 entydighedssætninger også, når man regner med rationale eller reelle tal.

Vi skal på næste side se, at også de komplekse tal (talmængden $\mathbb{C}$) opfylder de 11 aksiomer, og dermed ved vi, at de 22 sætninger, nulreglen og entydighedssætningerne også gælder for komplekse tal.

Man taler i disse tilfælde om *tallegemer*.

Såkaldte *restklasser* opfylder også de 11 aksiomer. Det er altså ikke kun tal, der opfylder betingelserne for at være et legeme.

Komplekse tal

Vi skal nu se på en anvendelse af det store arbejde med at udlede sætningerne ud fra aksiomerne.

Vi vil indføre de komplekse tal og tjekke, at de indførte regneregler opfylder de 11 aksiomer, og når vi har fået bekræftet dette, ved vi, at alle de udledte 22 sætninger også gælder for komplekse tal.

Indførelse af i

Vi indfører nu bogstavet *i* som betegnelse for et tal med følgende egenskab: $i^2 = -1$ eller $i = \sqrt{-1}$.

Vi ser med det samme, at dette tal *i* ikke er et reelt tal, for vi kender ingen tal med den egenskab, at deres kvadrat er et negativt tal. Bogstavet "*i*" står for *imaginært*, og *i* kaldes den *imaginære enhed* (ligesom tallet 1 er enheden, når vi arbejder med de reelle tal).

Bogstavet *i* som anvendelse for den imaginære enhed blev indført af Leonhard Euler (1707-1783).

Et komplekst tal defineres til at være et tal på formen $a + i \cdot b$, hvor *a* og *b* er reelle tal, og hvor *a* kaldes realdelen, og *b* kaldes imaginærdelen.

Regnetegnene + og $\cdot$ er de regnetegn, vi kender fra de reelle tal, og vi regner med *i* som med ethvert andet bogstav, blot med den egenskab at $i^2 = -1$.

Addition af to komplekse tal foregår efter reglen: $(a + i \cdot b) + (c + i \cdot d) = (a + c) + i \cdot (b + d)$

Multiplikation af to komplekse tal: $(a + i \cdot b) \cdot (c + i \cdot d) = (a \cdot c - b \cdot d) + i \cdot (a \cdot d + b \cdot c)$

Opgaverne 126*

Egentlig havde det ikke været nødvendigt for os at indføre *i* ved $i^2 = -1$, for det følger af regnereglen for multiplikation (sæt $a = c = 0$ og $b = d = 1$), så rent matematisk er det en overflødig definition, og den undlades i hæftet Komplekse tal.

Øvelse 8: Vis, at de første 7 aksiomer gælder.

Øvelse 9: Hvad er det neutrale element ved addition og det neutrale element ved multiplikation (aksiomerne 8 og 9)?

Øvelse 10: Hvad er det modsatte element til et komplekst tal (aksiom 10)?

Øvelse 11: Kontrollér, at det reciprokke element til et komplekst tal $a + i \cdot b$ er $\dfrac{a - i \cdot b}{a^2 + b^2}$ (Aksiom 11).

Tælleren i udtrykket i ovennævnte øvelse kaldes den *komplekst konjugerede* til $a + i \cdot b$.

Ligesom med de reelle tal får man desuden brug for at definere subtraktion og division, og fremgangsmåden er den samme:

Subtraktion: $\big((a + i \cdot b) - (c + i \cdot d)\big) + (c + i \cdot d) = a + i \cdot b$,

hvilket fører til $(a + i \cdot b) - (c + i \cdot d) = (a - c) + i \cdot (b - d)$.

Division: $\dfrac{a + i \cdot b}{c + i \cdot d} \cdot (c + i \cdot d) = a + i \cdot b$, hvilket fører til $\dfrac{a + i \cdot b}{c + i \cdot d} = \dfrac{a \cdot c + b \cdot d}{c^2 + d^2} + i \cdot \dfrac{b \cdot c - a \cdot d}{c^2 + d^2}$

Øvelse 12: Vis ovenstående udtryk ved at forlænge venstresiden med $c - i \cdot d$.

POTENSREGNEREGLER

Vi har nu introduceret regnearterne addition, subtraktion, multiplikation og division fra to forskellige synsvinkler (tal til at tælle og tal som opfylder regneregler).

En væsentlig pointe var, at subtraktion indføres som ”det modsatte” af addition, mens division blev indført som ”det modsatte” af multiplikation. Så man kan lidt løst sige, at de parvis er to sider af samme sag.

Vi ser nu på det tredje par af regnearter: Potensopløftning og roduddragning.

Fremgangsmåden er meget lig den, vi anvendte under regnearterne. Vi definerer og behandler potensopløftning, og derefter indføres roduddragning som ”det modsatte” af potensopløftning.

Og igen benyttes metoden med at komme frem til nogle regneregler ud fra en forståelse af potensbegrebet, hvorefter det hele vendes om, så det er regnereglerne, der er udgangspunktet.

Vi ser først endnu engang på den ene af vores definitioner på begrebet multiplikation:

Alternativ definition: Man multiplicerer tallene *a* og *b* ved *b* gange at addere *a* med sig selv:

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + a + ... + a}_{b \text{ addender}}$$

Denne definition blev indført for naturlige tal, hvor vi var sikre på, at man kunne snakke om ”*b addender*” (hvis *b* ikke var et naturligt tal, ville det gå galt, for hvordan skulle man forstå -7 addender eller 0,378 addender?).

Hvis vi skulle have indført multiplikation af positive reelle tal, kunne det være sket ved at introducere arealer og rumfang, men det er ikke blevet behandlet her.

Bemærk nu, hvordan indførelsen af potensopløftning minder om ovenstående indførelse af multiplikation:

Definition 1a (første definition af *potens*): Lad $n \in \mathbb{N}$, og lad $a \in \mathbb{R}$. *Potensen* a^n defineres som:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ faktorer}}$$

a kaldes *roden* eller *grundtallet*.
n kaldes *eksponenten* eller *potenseksponenten*.

Notationen a^n blev indført i 1637 af René Descartes (1596-1650). Ordet *eksponent* blev indført af Michael Stifel (1487-1567).

Eksempel 1: Definitionen giver os:

$$a^1 = a$$
$$x^2 = x \cdot x$$
$$7^1 = 7$$
$$\pi^3 = \pi \cdot \pi \cdot \pi$$
$$(-4)^5 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$$
$$0^8 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0$$
$$\left(\frac{2}{7}\right)^3 = \left(\frac{2}{7}\right) \cdot \left(\frac{2}{7}\right) \cdot \left(\frac{2}{7}\right)$$

Bemærk altså, at det er hele udtrykket a^n, der kaldes en potens, mens tallet *n* kaldes *eksponenten*. Når man også kan vælge at anvende betegnelsen *potenseksponent*, skyldes det, at vi senere skal se på rødder og her møde betegnelsen *rodeksponent*.

Sprogbrugen omkring potenser er:
8^5 udtales som ”otte i femte” eller ”otte i femte potens”.
Roden – i dette tilfælde 8 – udtales som et (almindeligt) *mængdetal* (et, to, tre, fire, fem, …).
Eksponenten – i dette tilfælde 5 – udtales som et *ordenstal* (første, anden, tredje, fjerde, femte, …).

Vi har nu indført potenser, hvor eksponenten er et naturligt tal. Men vi ved endnu ikke, hvordan vi skal forstå f.eks. 3^0, 6^{-3} og $5^{\frac{1}{3}}$. Det skal vi dog snart få indført.

Først skal vi se på, hvordan vi ud fra definitionen kan bevise følgende potensregneregler:

Sætning 1a: De fem potensregneregler som sætning.
Lad *n* og *m* være naturlige tal, og lad *a* og *b* være reelle tal (hvor $a \neq 0$ i 2. og 4.).
Der gælder så:

1. **potensregneregel:** $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. **potensregneregel:** Hvis $m > n$, gælder $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. **potensregneregel:** $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
4. **potensregneregel:** $\dfrac{b^n}{a^n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$
5. **potensregneregel:** $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Eksempel 2: Vi ønsker at udregne udtrykkene på venstresiderne af lighedstegnene og anvender ved lighedstegnene den angivne potensregneregel. Bemærk, at sætningerne gælder begge veje, dvs. det kan godt være højresiden, man ved hjælp af en sætning omskriver til venstresiden.

$7^5 \cdot 7^3 = 7^{5+3} = 7^8$ 1. potensregneregel

$2^{36} = 2^{4 \cdot 9} = (2^4)^9 = 16^9$ 5. potensregneregel

$3^6 \cdot 5^6 = (3 \cdot 5)^6 = 15^6$ 3. potensregneregel

$\dfrac{4^3}{2^3} = \left(\dfrac{4}{2}\right)^3 = 2^3$ 4. potensregneregel

Bemærk, hvordan potensregnereglerne 1 og 2 omhandler potenser med samme rod.
Potensregnereglerne 3 og 4 omhandler potenser med samme eksponent.

Bemærk også, hvordan potensregnereglerne 1 og 2, når de læses fra højre mod venstre, fortæller os, hvordan addition i eksponenten bliver til multiplikation af potenserne, mens subtraktion i eksponenten bliver til division af potenserne. Eller med andre ord: ”Plus bliver til gange og minus bliver til dividere”.

Når vi senere får lært om logaritmefunktioner, der er de omvendte funktioner til eksponentialfunktioner, skal vi se, hvordan disse gør det modsatte, dvs. de ”gør multiplikation til addition og division til subtraktion”.

Men nu skal vi se på beviserne for de fem potensregneregler, der alle anvender definitionen:

Beviser:

1. **potensregneregel:** Vi ser på $a^n \cdot a^m$ og anvender Definition 1a på begge faktorer:

$$a^n \cdot a^m = \overbrace{\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \ faktorer}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\ \ faktorer}}^{n+m\ \ faktorer} = a^{n+m}$$

De to nederste tuborgklammer er fremkommet ved Definition 1a fra dette emne, mens den øverste tuborgklamme kommer fra Definition 2 under emnet tal, der fortæller os, hvordan vi skal tælle det samlede antal af enhederne *a*.

Det sidste lighedstegn fremkommer så ved at anvende vores definition 1 fra dette emne den modsatte vej (fra højre mod venstre).

2. **potensregneregel:** Vi ser på $\frac{a^m}{a^n}$ med $m > n$, og anvender Definition 1a i tæller og nævner:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{m\ \ faktorer}}{\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \ faktorer}}$$

Vi kan nu anvende vores Sætning 17 fra kapitlet ”Tal og regneregler”, der fortæller os, at vores brøk ikke ændrer værdi, hvis vi forkorter den. Vi forkorter derfor brøken *n* gange med *a*, og her er det vigtigt at lægge mærke til, at vi har forudsat, at $m > n$, for dermed er vi sikre på, at der vil være mindst ét *a* tilbage i tælleren, mens samtlige *a*’er i nævneren er blevet til 1-taller:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\ldots\cdot a}^{m\ \ faktorer}}{\underbrace{\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{\ldots}\cdot\cancel{a}}_{n\ \ faktorer}} = \frac{\overbrace{1\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}^{n\ 1-taller}\cdot\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{m-n\ \ faktorer}}{\underbrace{1\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{n\ 1-taller}} = a^{m-n}$$

Eksponenten $m-n$ er fremkommet ud fra vores definition på subtraktion, for når vi tæller antallet af faktorer i tællerne, så er antallet af *a*’er netop det tal, der lagt til *n* giver *m*, dvs. $m-n$.

3. **potensregneregel:** Vi ser på $a^n \cdot b^n$ og anvender definition 1 på begge faktorer:

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \ faktorer}\cdot\underbrace{b\cdot b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n\ \ faktorer} = \underbrace{a\cdot b\cdot a\cdot b\cdot a\cdot b\cdot\ldots\cdot a\cdot b}_{2n\ \ faktorer} = \underbrace{(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot\ldots\cdot(a\cdot b)}_{n\ \ faktorer} = (a\cdot b)^n$$

Ved det andet lighedstegn er det benyttet, at faktorernes orden er ligegyldig.

Ved det tredje lighedstegn sættes der parenteser omkring faktorerne parvis, således at parrene nu optræder som én faktor.

Ved det sidste lighedstegn benyttes Definition 1a.

4. **potensregneregel:** Prøv selv at bevise denne.

5. **potensregneregel:** Vi benytter Definition 1a to gange på $\left(a^n\right)^m$:

$$\left(a^n\right)^m = \overbrace{\left(\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{faktorer}}\right)\cdot\left(\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{faktorer}}\right)\cdot\left(\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{faktorer}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{faktorer}}\right)}^{m\ \text{faktorer}} = a^{n\cdot m}$$

Bemærk, at *m* henviser til antallet af parenteser, der er faktorer i "det store" produkt, mens *n* angiver antallet af faktorer i hver af parenteserne.

Når vi nu skal tælle antallet af *a*'er, tager vi *m* gange *n* faktorer, og dermed får vi ifølge vores "alternative definition" på multiplikation i begyndelsen af dette kapitel netop $n\cdot m$ faktorer.

Opgaverne 130*

I kapitlet om tal begyndte vi med tal, som noget man først kunne tælle med og derefter regne med, hvorefter vi kom frem til nogle regneregler (aksiomer). Disse regneregler blev så brugt som en ny indfaldsvinkel til tal, som noget der fulgte disse regneregler. Og så kunne vi bevise en masse ekstra sætninger, der også gjaldt for tallene.

Vi har med udgangspunkt i Definition 1a fået bevist de fem potensregneregler under betingelserne $n,m\in\mathbb{N}$ og $m>n$. Vi vil nu lige som med tallene vende det hele rundt og tage udgangspunkt i potensregnereglerne og derudfra udvide vores potensbegreb. Det bliver væsentlig mere abstrakt, men samtidig også klart mere anvendeligt.

Vores Definition 1a er meget simpel (man kan direkte se eller forestille sig et tal multipliceret med sig selv et vist antal gange), og den tillader negative rødder og roden 0. Men der ligger en meget stor begrænsning i, at eksponenten skal være et naturligt tal.

Vi vil nu tillade eksponenten at være ethvert reelt tal. Det skaber nogle problemer med roden, der har at gøre med, at man ikke kan uddrage kvadratroden af et negativt tal. I nedenstående definition ses derfor kun i første omgang på positive rødder. Det ændres i de følgende definitioner.

Du skal nu forestille dig, at vi IKKE har Definition 1a til rådighed:

Definition 1b: Potenser defineret ud fra regneregler.

Størrelsen a^p, hvor $a\in\mathbb{R}_+$ og $p\in\mathbb{R}$, kaldes en *potens*, hvis den opfylder nedenstående 5 regneregler, og hvis $a^p=1\Rightarrow a=1\ \vee\ p=0$.

1. **potensregneregel:** $a^p\cdot a^q=a^{p+q}$
2. **potensregneregel:** $\dfrac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$
3. **potensregneregel:** $a^p\cdot b^p=\left(a\cdot b\right)^p$
4. **potensregneregel:** $\dfrac{b^p}{a^p}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^p$
5. **potensregneregel:** $\left(a^p\right)^q=a^{p\cdot q}$

Den ekstra betingelse ($a^p=1\Rightarrow a=1\ \vee\ p=0$) skyldes, at man også ville kunne opfylde alle potensregnereglerne, hvis $a^p=1$ for alle tal *a* og *p* (tjek selv!). Og det ville være ubrugeligt.

Inden vi kan bevise den første sætning, skal vi bevise en hjælpesætning – et såkaldt *lemma* – der skal bruges til at bevise sætningen:

Lemma 1: For potenser gælder, at hvis $a^p = b^p$, og $p \neq 0$, så er $a = b$.

I beviset skal man bemærke, at Lemma 1 siger noget om potenser, og derfor gælder alt fra Definition 1b – herunder at *a* og *b* er positive.

Bevis: Der anvendes et modstridsbevis.

Så det **antages**, at $a^p = b^p$, og $p \neq 0$, og at ***a* og *b* er forskellige.** Vi ønsker så at vise, at dette fører til en modstrid, så vi kan konkludere, at $a = b$.

Hvis *a* og *b* er forskellige, findes der er tal *k*, der ikke er 1, således at $a = k \cdot b$.

Der gælder altså:

$$a^p = (k \cdot b)^p \underset{\text{3.potensregneregel}}{\Leftrightarrow} a^p = k^p \cdot b^p$$

Og da $b^p = a^p$, må altså $a^p = k^p \cdot a^p$.

Og dermed må k^p være 1 (det neutrale element ved multiplikation).

Men da $p \neq 0$ og $k \neq 1$, er det i modstrid med, at vi arbejder med potenser.

Dermed må vores antagelse være forkert, og vi kan dermed konkludere, at $a = b$.

Lemma 1 skal som sagt benyttes i beviset for følgende sætning:

Sætning 1b: Lad a^n være en potens, og lad $n \in \mathbb{N}$. Så gælder:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ faktorer}}$$

Sætningen bevises med et såkaldt *induktionsbevis*. Det kan benyttes, når man vil vise, at noget gælder for alle naturlige tal, evt. også for 0 eller for alle hele tal.

Induktionsbevis

1) Basisskridtet: Man viser, at påstanden er sand for det mindste tal i mængden, dvs. typisk 0, 1 eller 2.

2) Induktionsskridtet: Man viser, at **hvis** påstanden er sand for tallet *n*, så er den også sand for tallet *n+1*.

Bevis: Vi skal altså vise basisskridtet og induktionsskridtet:

1) Basisskridtet (Vi har $n \in \mathbb{N}$, og da 1 er det mindste naturlige tal, skal vi altså vise, at påstanden er sand for $n = 1$): Ifølge 5. potensregneregel gælder:

$$(a^1)^p = a^{1 \cdot p} = a^p$$

Da $(a^1)^p = a^p$, gælder ifølge Lemma 1, at $a^1 = a$, hvilket var det, der skulle vises.

2) Induktionsskridtet: Det antages nu, at $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ faktorer}}$.

Ifølge 1. potensregneregel har man så:

$$a^{n+1} = a^n \cdot a^1 = a^n \cdot a = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ faktorer}} \cdot a = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n+1 \text{ faktorer}}$$

Og hermed er Sætning 1b bevist.

Vi er nu klar til at finde ud af, hvad man skal forstå ved a^0, a^{-7} og $a^{\frac{2}{5}}$. Vi begynder med a^0. Lad os se, hvad 1. potensregneregel fortæller os:

Aksiom 8 fra tal og regneregler

$$a^p \cdot a^0 = a^{p+0} = a^p$$

1. potensregneregel

Aksiomerne 8 og 9 fra ”Tal og regneregler”

8) $\exists 0 \in M : \forall x \in M : x + 0 = x$

9) $\exists 1 \in M : \forall x \in M : x \cdot 1 = x$

Da vi nu har $a^p \cdot a^0 = a^p$ fortæller aksiom 9 fra ”Tal og regneregler” os, at a^0 er det neutrale element ved multiplikation, dvs. $a^0 = 1$.

Fra Definition 1b har vi, at $a^p = 1 \Rightarrow a = 1 \vee p = 0$, og da $1^x = 1$ for alle *x*, har vi med ovenstående altså vist, at der faktisk gælder $a^p = 1 \Leftrightarrow a = 1 \vee p = 0$.

Men vi har kun bevist, at $a^0 = 1$ for $a \in \mathbb{R}_+$. Vi siger så, at dette skal gælde for alle tal (og derfor bliver nedenstående en definition i stedet for en sætning):

Definition 2: For ethvert tal $a \in \mathbb{R}$ gælder $a^0 = 1$

Bemærk, at der altså også specielt gælder, at $0^0 = 1$. Det skal dog lige nævnes, at dette ikke er en uproblematisk definition, der kan anvendes inden for alle former for matematik. Inden for matematisk analyse (infinitesimalregning) er 0^0 en udefineret størrelse (ligesom brøker med 0 i nævneren), så du kan godt finde matematikbøger, der siger, at 0^0 ikke er veldefineret.

Maple anvender vores definition, hvilket ses af nedenstående indtastninger:

$4^0 = 1$
$1^0 = 1$
$(-9)^0 = 1$
$0^0 = 1$
$\mathrm{e}^0 = 1$
$a^0 = 1$

Det næste, vi ønsker at se på, er, hvad vi skal forstå ved udtryk som 4^{-3}, a^{-9} og $(-3)^{-7}$. Bemærk altså, at vi igen vil udvide mængden af tilladte *a*-værdier, så vi også ser på negative tal.

Som nævnt giver det ikke umiddelbart mening ud fra vores Definition 1a. Men med Definition 1b bliver det meningsfuldt. Vi går ud fra vores 2. potensregneregel:

2. potensregneregel

Aksiom 8 fra "Tal og regneregler"

$$\frac{a^0}{a^p} = a^{0-p} = a^{-p}$$

Vores nye definition $a^0 = 1$

$$\frac{1}{a^p} = a^{-p}$$

Dvs. vi kan nu se, at vores definition skal være:

Definition 3: For ethvert reelt tal p gælder $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ (hvor $a \in \mathbb{R}_+$ og nogle negative værdier…)

Som det fremgår af parentesen ovenfor, er der stadig noget uafklaret omkring de tilladte rødder. Dette punkt kommer vi lidt længere med, når vi længere nede på siden skal se på … rødder!
Vi skal se, at de tilladte *a*-værdier afhænger af eksponenten.

Bemærk, at Definition 3 skal forstås begge veje. Hvis p er positiv, er højresiden veldefineret (da vi kender betydningen af a^p for positive heltal), og Definition 3 fortæller så, hvad vi skal forstå ved venstresiden.
Hvis p er negativ, er det venstresiden, der er veldefineret (da $-p$ så er positiv), og Definition 3 fortæller os så, hvordan vi skal forstå højresiden.

Eksempel 3:

$7^{-5} = \frac{1}{7^5}$ (Højresiden kendes ud fra Sætning 1b)

$8^3 = \frac{1}{8^{-3}}$ (Venstresiden kendes ud fra Sætning 1b)

$a^{-9} = \frac{1}{a^9}$ (Højresiden kendes ud fra Sætning 1b)

$6{,}5^{-4{,}32} = \frac{1}{6{,}5^{4{,}32}}$ (Definition 3 gælder for alle reelle eksponenter)

Opgaverne 131*

Inden vi kan gå videre, skal vi have indført rod-begrebet, og vi vil med det samme opdage, at det er uløseligt forbundet med potens-begrebet. Vi indfører det på en måde, der minder om vores indførelse af subtraktion ud fra addition og division ud fra multiplikation, og vi indser derfor, at roduddragning og potensopløftning er to sider af samme sag.

Definition 4: For $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ og $a \in \mathbb{R}$ defineres følgende:

Hvis $a \geq 0$:
Den n'te rod af tallet *a* er det ikke-negative, reelle tal, der opløftet i *n*'te potens, giver *a*.
Den *n*'te rod af *a* skrives $\sqrt[n]{a}$ og man har altså: $\sqrt[n]{a} = r \Leftrightarrow r^n = a \wedge r \in \mathbb{R} \wedge r \geq 0$.

Hvis $a < 0$:
Hvis *n* er lige, eksisterer $\sqrt[n]{a}$ ikke (når vi kun arbejder med reelle tal).
Hvis *n* er ulige, er den n'te rod af tallet *a* det reelle tal, der opløftet i eksponenten *n*, giver *a*.
Dvs. hvis *n* er ulige gælder: $\sqrt[n]{a} = r \Leftrightarrow r^n = a \wedge r \in \mathbb{R}$

$\sqrt[n]{a}$ kaldes *roden*.
n kaldes *rodeksponenten*.
a kaldes *radikanden* (Kommer af det latinske *radix*, og betyder ”det, der gør en rod” eller som vi ville sige det: ”det hvoraf roden uddrages”)

Bemærk, at der er rødder, der ikke eksisterer, når radikanden er negativ. Det er det, der volder problemer, når man skal have fastsat de mulige rødder for potenser.

Det kan virke som en meget kompliceret definition fyldt med små detaljer, så lad os se på, hvorfor det overhovedet er nødvendigt med disse detaljer:

Eksempel 4: Hvorfor kan Definition 4 ikke bruges for $n = 0$?

I så fald skulle vi f.eks. i udtrykket $\sqrt[0]{6}$ søge efter det tal, der opløftet i 0'te potens gav os 6. Men vi husker, hvordan vi blev tvunget til at konkludere, at ethvert tal opløftet i 0'te potens gav 1, og derfor findes et sådant tal ikke. Maple tillader det heller ikke:

$\sqrt[0]{7}$ Error, numeric exception: division by zero

Vi skal snart se, hvorfor Maple identificerer fejlen som en division med nul.

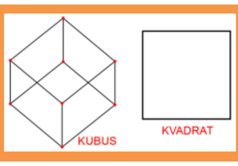
Eksempel 5: Ifølge Definition 4 gælder følgende:

$$\sqrt[3]{125} = 5 \text{ fordi } 5^3 = 125$$
$$\sqrt[4]{16} = 2 \text{ fordi } 2^4 = 16$$
$$\sqrt[2]{81} = 9 \text{ fordi } 9^2 = 81$$
$$\sqrt[1]{17} = 17 \text{ fordi } 17^1 = 17$$
$$\sqrt[1]{45} = 45 \text{ fordi } 45^1 = 45$$
$$\sqrt[1]{a} = a \text{ fordi } a^1 = a$$

Skrivemåden $\sqrt[2]{a}$ anvendes normalt ikke. Man har vedtaget, at man ikke skriver 2-tallet. Dvs. hvis der ikke er angivet en rodeksponent, er rodeksponenten 2.

$\sqrt{} \sim \sqrt[2]{}$ kaldes *kvadratroden*

$\sqrt[3]{}$ kaldes *kubikroden*



x^2 kaldes *kvadratet på/af x* (det er arealet af et kvadrat med sidelængden *x*), og selve det at opløfte i anden potens kaldes at *kvadrere*.

x^3 kaldes *kubus af x* (det er rumfanget af en kubus – dvs. en 6-sidet terning - med sidelængden *x*), og selve det at opløfte i tredje potens kaldes at *kubere*.

Eksempel 6: Hvorfor kræver vi i tilfældet $a \geq 0$, at roden skal være "det ikke-negative tal"?

Vi ser på følgende rod: $\sqrt{9}$

Vi kan se, at $\sqrt{9} = 3$ fordi $3^2 = 9$.

Og Maple giver os også resultatet:

$$\sqrt{9} = 3$$

Men kunne vi ikke lige så godt have sagt $\sqrt{9} = -3$ fordi $(-3)^2 = 9$?

Argumentet er i hvert fald godt nok, for vi har i vores Sætning 4 fra kapitlet "Tal og regneregler" set, at det er rigtigt, at $(-3)^2 = 9$.

Men pointen er, at man har valgt, at roduddragning skal være en **entydig** regneoperation (dvs. der skal kun være ét resultat), og man har derfor været nødt til at tilføje reglen om, at roden i tilfældet $a \geq 0$ skal være positiv.

Eksempel 7: I forlængelse af Eksempel 6 kan vi se på følgende udregninger i Maple:

$$a = \sqrt{9} = 3$$

$$a^2 = 9 \xrightarrow{\text{solve}} \{a = 3\},\ \{a = -3\}$$

Bemærk altså, at de to ligninger ikke har samme løsningsmængde.

Eksemplerne 6 og 7 har vist os, hvorfor vi skal benytte følgende opskrivning ved løsning af ligninger, hvor der optræder potenser med lige eksponenter. Vær meget opmærksom på, hvor og hvornår tegnet $\pm$ indføres (det er en ofte set fejl, at $\pm$ først placeres i tredje linje i stedet for i anden):

$$\begin{aligned} a^2 &= 25 \Leftrightarrow \\ a &= \pm\sqrt{25} \Leftrightarrow \\ a &= \pm 5 \Leftrightarrow \\ &\underline{\underline{a = -5 \vee a = 5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 &= 81 \Leftrightarrow \\ x &= \pm\sqrt[4]{81} \Leftrightarrow \\ x &= \pm 3 \Leftrightarrow \\ &\underline{\underline{x = -3 \vee x = 3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x+1)^2 &= 16 \Leftrightarrow \\ (x+1) &= \pm\sqrt{16} \Leftrightarrow \\ (x+1) &= \pm 4 \Leftrightarrow \\ x+1 = 4 &\vee x+1 = -4 \Leftrightarrow \\ &\underline{\underline{x = 3 \vee x = -5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^3 &= 8 \Leftrightarrow \\ a &= \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow \\ a &= \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

Læg mærke til, at der ikke fremkommer et $\pm$, når eksponenten er ulige.

Dette skyldes, at $(-2)^3 = -8 \neq 8$.

Eksempel 8: Hvorfor kræves det, at roden skal et "reelt tal"?

Dette ser vi, hvis vi lader Maple løse nedenstående ligninger:

"I" fortæller os, at disse løsninger er komplekse tal

$$a^3 = 8 \xrightarrow{\text{solve}} \{a = 2\},\ \{a = -1 - \mathrm{I}\sqrt{3}\},\ \{a = -1 + \mathrm{I}\sqrt{3}\}$$

$$a^4 = 625 \xrightarrow{\text{solve}} \{a = 5\},\ \{a = -5\},\ \{a = 5\,\mathrm{I}\},\ \{a = -5\,\mathrm{I}\}$$

"I" fortæller os, at disse løsninger er komplekse tal

Der er altså også komplekse løsninger til disse ligninger, men vi regner ikke med komplekse tal, og i sådanne tilfælde skal du i en opgavebesvarelse skrive, at du forkaster de komplekse løsninger.

Man kan bede Maple om kun at regne med reelle tal på flere forskellige måde. En af dem er at anvende pakken *RealDomain*, der ligesom *Gym*-pakken indeholder nogle kommandoer, der kan anvendes:

Uden *RealDomain* kan Maple ikke finde den reelle løsning, selvom der gøres mange forsøg

$$\sqrt[5]{-32} = (-32)^{1/5} \overset{\text{simplify}}{=} 2\,(-1)^{1/5} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 1.6180 + 1.1756\,\mathrm{I}$$

with(*RealDomain*)

[ℑ, ℜ, \`^\`, arccos, arccosh, arccot, arccoth, arccsc, arccsch, arcsec, arcsech, arcsin, arcsinh, arctan, arctanh, cos, cosh, cot, coth, csc, csch, *eval*, exp, *expand*, *limit*, ln, log, sec, sech, signum, *simplify*, sin, sinh, *solve*, sqrt, surd, tan, tanh]

$$\sqrt[5]{-32} = -2$$

Pakken *RealDomain* indeholder flere "almindelige" Maple-kommandoer. Når du har hentet pakken, vil du kun få reelle løsninger, hvis du anvender 'solve'.

Når *RealDomain* anvendes, kan Maple godt finde den reelle løsning.

Du bør dog undlade at indlæse *RealDomain* fra start, for den skaber sommetider nogle andre problemer. Man kan derfor målrettet anvende pakken én gang til en udregning ved:

restart

use *RealDomain* **in** $\sqrt[5]{-32}$ **end** $= -2$

$\sqrt[5]{-32} = (-32)^{1/5}$

Som det ses, anvendes *RealDomain* kun i en enkelt udregning.

Eksempel 9: Hvorfor eksisterer udtrykket $\sqrt[n]{a}$ ikke, når n er lige, og a er negativ?

Man søger i så fald tal, der opløftet i en lige potens giver noget negativt, men disse tal findes ikke blandt de reelle tal. Det betyder dog ikke, at sådanne tal ikke findes, for som Maple viser, er der komplekse løsninger til følgende ligninger:

$$a^2 = -9 \xrightarrow{\text{solve}} \{a = 3\,\mathrm{I}\}, \{a = -3\,\mathrm{I}\}$$

$$x^4 = -16 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = \sqrt{2} + \mathrm{I}\sqrt{2}\}, \{x = -\sqrt{2} + \mathrm{I}\sqrt{2}\}, \{x = -\sqrt{2} - \mathrm{I}\sqrt{2}\}, \{x = \sqrt{2} - \mathrm{I}\sqrt{2}\}$$

Eksempel 10: Hvorfor kræves der ikke noget om det reelle tals fortegn, hvis $a < 0$ og n er ulige?

I dette tilfælde er der kun én reel løsning til følgende ligninger, og den er negativ (der er også komplekse løsninger, men dem bruger vi ikke her):

$$a^3 = -8 \xrightarrow{\text{solve}} \{a = -2\}, \{a = 1 - \mathrm{I}\sqrt{3}\}, \{a = 1 + \mathrm{I}\sqrt{3}\}$$

$$x^5 = -243 \xrightarrow{\text{solve}}$$

$$\{x = -3\}, \left\{x = \frac{3}{4}\sqrt{5} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\mathrm{I}\sqrt{2}\sqrt{5 - \sqrt{5}}\right\}, \left\{x = -\frac{3}{4}\sqrt{5} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\mathrm{I}\sqrt{2}\sqrt{5 + \sqrt{5}}\right\},$$
$$\left\{x = -\frac{3}{4}\sqrt{5} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\mathrm{I}\sqrt{2}\sqrt{5 + \sqrt{5}}\right\}, \left\{x = \frac{3}{4}\sqrt{5} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\mathrm{I}\sqrt{2}\sqrt{5 - \sqrt{5}}\right\}$$

Bemærk, at kun den første løsning er et reelt tal, og man har altså:

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \quad \text{og} \quad \sqrt[5]{-243} = -3$$

Bemærk, at Definition 4 også tillader os at anvende negative rodeksponenter, og bemærk, at dette skyldes Definition 3, hvor vi har fastsat betydningen af potenser med negativ potenseksponent.

Vi ser på nogle eksempler:

Eksempel 11: Følgende rødder med negative rodeksponenter bestemmes:

$$\sqrt[-2]{\frac{1}{4}} = 2 \quad \text{fordi} \quad 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

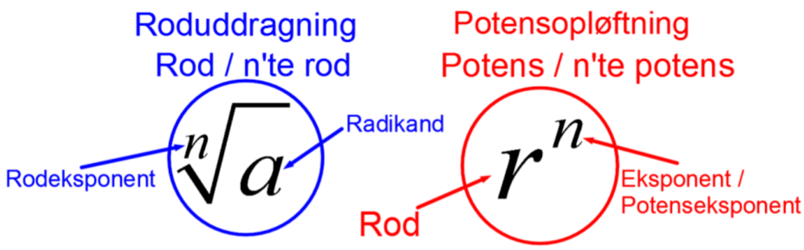
$$\sqrt[-3]{\frac{1}{27}} = 3 \quad \text{fordi} \quad 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

$$\sqrt[-4]{16} = \frac{1}{2} \quad \text{fordi} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16$$

$$\sqrt[-5]{3.87356} = 0.7627424940 \quad \text{fordi} \quad 0.7627424940^{-5} = 3.873560000$$

Opgaverne 132*

Ikke blot viser Definition 4, hvordan roduddragning og potensopløftning er to sider af samme sag. Vi kan nu også forstå sprogbrugen i forbindelse med potensopløftning og roduddragning:



$$\boxed{\underbrace{\sqrt[n]{a}=r}_{\text{Rod}} \quad \Leftrightarrow \quad r^n = a}$$

Vi kan her se, hvorfor ordet "rod" anvendes om både det samlede symbol $\sqrt[n]{a}$ og om det r, der indgår i ovenstående potens. For som lighedstegnet til venstre ovenfor viser, er de to størrelser ens.

Vi siger, at vi "uddrager" roden, når vi omskriver symbolet $\sqrt[n]{a}$ til r, og vores "radikand" er så den størrelse, hvoraf vores rod uddrages.

Bemærk desuden, at vores n er det samme tal, uanset om det optræder som rodeksponent eller potenseksponent i den grønne aflang.

Da $\sqrt[n]{a}$ er roden i potensen r^n, gælder altså følgende vigtige udtryk:

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a}$$

Faktisk gælder dette også i det tilfælde, hvor udtrykket $\sqrt[n]{a}$ ikke giver mening for reelle tal.

Disse sammenhænge mellem rødder og potenser skal vi udnytte i det følgende, hvor vi skal se på rationale og irrationale rod- og potens-eksponenter.

Vi kræver nu, at vores 5. potensregneregel $\left(a^p\right)^q = a^{p\cdot q}$ skal gælde. Og det skal så føre os til betydningen af størrelsen $a^{\frac{1}{n}}$.

Vi ser på følgende udregning:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n \overset{\text{5. potensregneregel}}{=} a^{\frac{1}{n}\cdot n} \overset{\text{Aksiom 11 fra "Tal og regneregler"}}{=} a^1 = a$$

$a^{\frac{1}{n}}$ er altså ifølge denne udregning det tal, der opløftet i n'te potens giver a. Men som vi netop har set, gælder det også for $\sqrt[n]{a}$.

Ifølge Lemma 1 gælder derfor for $a \in \mathbb{R}_+$, at $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. Vi **vælger** så at sige, at det skal gælde for alle a-værdier, hvor roden er veldefineret:

Definition 5: For alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, hvor n er ulige **eller** $a \geq 0$, gælder:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Man kan ikke både have et lige n og et negativt a, for så ved vi ifølge Definition 4, at $\sqrt[n]{a}$ ikke er veldefineret (når vi arbejder med reelle tal).

Eksempel 12: Følgende udsagn er sande:

$$\sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}}$$

$$10^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{10}$$

$$\sqrt[-6]{13} = 13^{-\frac{1}{6}}$$

$$11^{\frac{1}{2}} = \sqrt{11}$$

Bemærk specielt den sidste pointe, som du får brug for et hav af gange i din gymnasietid:

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

Opgaverne 133*

Vi er nu klar til at finde ud af, hvad vi skal forstå ved $a^{\frac{p}{q}}$, dvs. en potens med en rational eksponent.

Vi tager udgangspunkt i Definition 5 og den 5. potensregneregel og foretager så følgende omskrivninger:

Sætning 12 fra "Tal og regneregler"   5. potensregneregel   Definition 5

$$a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{1}{q} \cdot p} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \sqrt[q]{a}^{\,p}$$

$$a^{\frac{p}{q}} = a^{p \cdot \frac{1}{q}} = \left(a^p\right)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

5. potensregneregel   Sætning 12 fra "Tal og regneregler"   Definition 5

Dette viser os, at det er ligegyldigt, om man først opløfter potensen og derefter uddrager roden, eller om man gør det i den omvendte rækkefølge. Præcis lige som det er ligegyldigt, om man først udfører en addition og derefter en subtraktion eller omvendt. Og lige som det er ligegyldigt, om man først udfører en multiplikation og derefter en division eller omvendt.

Vi definerer altså:

Definition 6: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{a}^{\,p}$ **, hvor roden skal være veldefineret**.

Læg godt mærke til systemet. En rodeksponent havner som nævner i potenseksponenten – og omvendt. Præcis lige som man dividerer en brøk med et tal ved at multiplicere med det i nævneren.

Eksempel 13: Følgende udsagn er sande:

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8}^{\,2} = 2^2 = 4$$

$$13^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{13^4}$$

$$7^{-\frac{3}{8}} = \sqrt[-8]{7^3} = \sqrt[8]{7^{-3}} = \left(\sqrt[-8]{7}\right)^3 = \left(\sqrt[8]{7}\right)^{-3}$$

Bemærk, hvordan du frit kan vælge, om det negative fortegn i det sidste eksempel skal placeres på rodeksponenten eller potenseksponenten.

Hvis man skal udregne denne type størrelser, vil det som udgangspunkt være hensigtsmæssigt først at foretage roduddragningen og derefter potensopløftningen, da man ved roduddragningen oftest gør tallet mindre.

Eksempel 14: Vi vil udregne nogle størrelser:

God idé

$$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16}^{\,3} = 2^3 = 8$$

$$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \ldots ehhh$$

Dårlig idé

$$27^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{27^5} = \ldots ehhh$$

$$27^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{27}^{\,5} = 3^5 = 243$$

God idé

Opgaverne 134*

Vi kan nu ud fra sammenhængene mellem potenser og rødder samt vores potensregneregler vise nogle rodregneregler (der jo egentlig er præcis det samme som potensregnereglerne):

Sætning 2: Hvis de pågældende rødder eksisterer (jævnfør Definition 4), gælder reglerne:

$$1.\text{regel: } \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{a} = \sqrt[n\cdot m]{a^{m+n}}$$

$$2.\text{regel: } \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a^{m-n}}$$

$$3.\text{regel: } \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b}$$

$$4.\text{regel: } \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$5.\text{regel: } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$$

Øvelse 13: Bevis Sætning 2 ved at omskrive til potenser og anvende potensregneregler.

Det er 3. og 4. regel, du får brug for i praksis. Nedenstående specialtilfælde af 3. regel er særlig vigtig at kunne:

$$\sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$$

Eksempel 15: Sommetider kan nogle kvadratrødder udtrykkes simplere:

$$\sqrt{52} = \sqrt{4\cdot 13} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{13} = 2\cdot\sqrt{13}$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{4\cdot 2} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{2} = 2\cdot\sqrt{2}$$

$$\sqrt{99} = \sqrt{9\cdot 11} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{11} = 3\cdot\sqrt{11}$$

Det er vigtigt at være opmærksom på dette af flere grunde. En af dem er, at du er nødt til at kende til disse omskrivninger, hvis du vil forstå de resultater, Maple angiver i den slags situationer, for som vist nedenfor, omskriver Maple til simplest mulige form:

$$\sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{99} = 3\sqrt{11}$$

Opgaverne 135*

Vi har ikke fået set på rødder med rationale rodeksponenter, men det følger af det allerede gennemgåede, at der gælder (tjek selv med definitionerne, at det passer):

$$\sqrt[\frac{p}{q}]{a} = a^{\frac{q}{p}}$$

$$\sqrt[-\frac{p}{q}]{a} = \frac{1}{\sqrt[\frac{p}{q}]{a}} = \frac{1}{a^{\frac{q}{p}}} = a^{-\frac{q}{p}}$$

Dvs. rodeksponenten og potenseksponenten er hinandens reciprokke elementer.
Og ved skift mellem tæller og nævner er eksponenterne hinandens modsatte elementer.

Opgaverne 136*

Vi mangler nu kun at se på potenser med irrationale eksponenter.
Dette gøres ud fra et eksempel. Lad os se på 2^{π}:
Vi ved, at π er et irrationalt tal, dvs. det kan skrives som en uendelig ikke-periodisk decimalbrøk:
$\pi = 3{,}1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164...$

For at tildele 2^{π} en værdi, danner vi en følge af rationale tal, der kommer tættere og tættere på π:

Uendelig følge af rationale tal, der kommer tættere og tættere på π			Denne uendelige følge af potenser med rationale eksponenter kommer tættere og tættere på ét bestemt tal.
	$a_1 = 3$	2^3	
	$a_2 = 3{,}1$	$2^{3{,}1}$	
	$a_3 = 3{,}14$	$2^{3{,}14}$	
	$a_4 = 3{,}141$	$2^{3{,}141}$	
	$a_5 = 3{,}1415$	$2^{3{,}1415}$	
	.	.	
	.	.	Dette tal kalder vi 2^{π}

Den løse formulering "tættere og tættere" betyder mere præcist, at vi kan komme vilkårlig tæt på det pågældende tal (π eller 2^{π}) ved at gå tilpas langt ned i følgen.

Ovenstående er ikke et bevis, for vi har f.eks. ikke argumenteret for, at der findes netop ét tal, som følgen kommer tættere og tættere på, men dette er vores første møde med en tankegang, som vi skal bygge videre på under "Uendeligheder og verdensbilleder" og anvende i infinitesimalregning.

Eksponentiel notation:

Inden for naturvidenskaberne kommer man ofte til at regne med meget store eller små tal, og man arbejder med en vis nøjagtighed, der skal fremgå af den måde, hvorpå man angiver sine resultater.

Her kommer potenser med roden 10 ind i billedet. For man udnytter, at:

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = 0{,}\overbrace{000...01}^{\text{n cifre}}$$

$$...$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

$$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$10^0 = 1$$

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 100$$

$$10^3 = 1000$$

$$...$$

$$10^n = 1\underbrace{000...000}_{\text{n nuller}}$$

Små tal kan man skrive på følgende måde:

$0{,}000000000000000000253 = 2{,}53 \cdot 10^{-19}$ (3 betydende cifre)

$0{,}0078 = 7{,}8 \cdot 10^{-3}$ (2 betydende cifre)

$0{,}00000000009135 = 9{,}135 \cdot 10^{-11}$ (4 betydende cifre)

Fremgangsmåden er, at man tæller antallet af pladser, som man rykker kommaet til højre, og dette tal tilføjet negativt fortegn anvendes som eksponent. Dvs. i det øverste tilfælde flyttes kommaet 19 pladser til højre, i midterste tilfælde 3 pladser til højre og i nederste tilfælde 11 pladser til højre.

Store tal kan man skrive på følgende måde:

$149597870700 = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ (4 betydende cifre)

$5972193857483929012846234 = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ (3 betydende cifre)

$602214129276512987326514 = 6{,}0 \cdot 10^{23}$ (2 betydende cifre)

Fremgangsmåden er, at man tæller antallet af pladser, som man rykker kommaet til venstre, og dette tal anvendes som eksponent. Dvs. i det øverste tilfælde flyttes kommaet 11 pladser til højre, i midterste tilfælde 24 pladser til højre og i nederste tilfælde 23 pladser til højre.

Det skal bemærkes, at Maple ikke anvender korrekt matematisk notation i forbindelse med eksponentiel notation. Maple skriver ikke det gangetegn, der skal stå før potensen:

$$6.626 \cdot 10^{-34} \cdot 299792458 = 1.986424827\ 10^{-25}$$

Her har jeg korrekt skrevet gangetegnene med den sorte skrift, mens Maple angiver resultatet med blå skrift, hvor du skal bemærke det manglende gangetegn foran potensen.

Du skal så selv efterfølgende benytte korrekt notation, hvis du skal angive resultatet som et facit.

Det er muligt selv at anvende skrivemåden med det manglende gangetegn i Maple:

$$5\ 10^{25} = 50000000000000000000000000$$

Men det kan ikke anbefales at vænne sig til en forkert notation.

NUMERISK VÆRDI / ABSOLUT VÆRDI

Når man arbejder med (reelle) tal, betyder "numerisk værdi" og "absolut værdi" det samme. Det er altså fuldstændig ligegyldigt, om du skriver det ene eller det andet.

Skrivemåde: Den numeriske værdi af et tal x skrives $|x|$ eller *abs(x)*.

Bemærk, at den *numeriske værdi* af et tal $|x|$ skrives på samme måde som en *determinant* $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, som *længden* af et linjestykke $|AB|$, som *normen* af et komplekst tal $|a+i\cdot b|$, som *kardinaltallet* af en mængde $|A|$ og som *længden* af en vektor $|\vec{a}|$. Man skal altså kigge på indholdet, inden man sætter ord på symbolet $|\ |$.

Den numeriske værdi kan defineres på flere forskellige - men ækvivalente - måder:

Definition

For et reelt tal x er den numeriske værdi af x defineret som:

Version 1: Afstanden mellem x og 0 på en tallinje.

Version 2: Den (positive) talværdi af x, når der ses bort fra et evt. negativt fortegn.

Version 3: $|x| = \begin{cases} x & for\ \ x \geq 0 \\ -x & for\ \ x < 0 \end{cases}$

Øvelse 14: Nærlæs de tre definitioner og tænk over, hvorfor de dækker over det samme.

MAPLE: I Maple kan du finde symbolet for numerisk værdi under "Expression". Du kan også vælge at skrive "*abs(...)*":

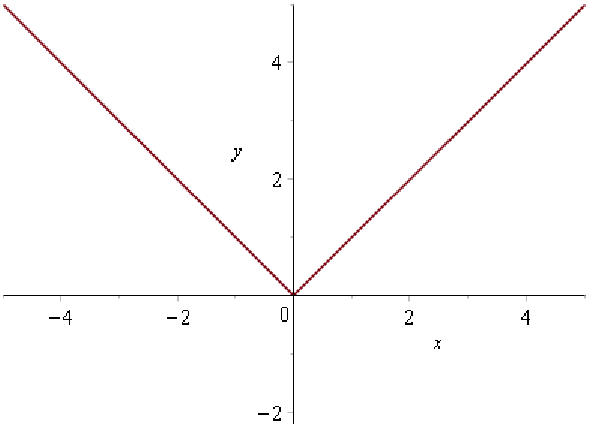
$$\text{abs}(51) = 51$$
$$\text{abs}(-9) = 9$$
$$\text{abs}(17.324) = 17.324$$
$$|-9.235| = 9.235$$
$$|0| = 0$$
$$|24| = 24$$
$$\text{abs}(\pi) = \pi$$

Øvelse 15: Tjek, at din forståelse af definitionerne stemmer med, hvad Maple giver.

Øvelse 16. Numerisk værdi som funktion: Prøv at tegne grafen for funktionen $f(x) = |x|$. Begynd evt. med nogle konkrete *x*-værdier og tænk over, hvilke funktionsværdier du får.

Som kontrol kan man lade Maple tegne grafen:

$$plot(\text{abs}(x), x = -5..5, y = -5..5)$$



Opgaverne 190*

Anvendelser af numerisk værdi

Når to negative tal multipliceres, bliver resultatet et positivt tal. Det betyder bl.a., at man får:

$$3 \cdot 3 = 9 \text{ eller } 3^2 = 9$$

$$(-3) \cdot (-3) = 9 \text{ eller } (-3)^2 = 9$$

Hvis man skal løse ligningen $x^2 = 9$, får man derfor:

$$x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3 \lor x = 3$$

Det bemærkes, at den numeriske værdi af både -3 og 3 giver 3. Og der gælder så:

$$x^2 = 9 \Leftrightarrow |x| = 3$$

Hvis man tager det med symboler, har man for **ikke-negative** tal *a*:

$$x^2 = a \Leftrightarrow |x| = \sqrt{a} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$$

Opgaverne 191*

GENNEMSNIT

Når man møder ordet 'gennemsnit', menes der næsten altid *det aritmetiske gennemsnit* (også kaldet *det aritmetiske middeltal*), der oftest er det samme som Middelværdien.
Men der findes andre slags "gennemsnit", og nogle af dem er vigtige at kende i gymnasiet.

For et datasæt af størrelsen *n* , $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$ **, defineres følgende størrelser:**

Aritmetisk gennemsnit / Aritmetisk middeltal / (Middelværdi)

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Harmonisk gennemsnit

$$x_H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \quad \text{eller} \quad \frac{1}{x_H} = \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}{n}$$

Geometrisk gennemsnit

$$x_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

Kvadratisk gennemsnit

$$x_Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$

Som vist ovenfor er der flere forskellige slags gennemsnit. Man kan generelt sige:

Definition: For et datasæt $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$ bestående af *n* størrelser af ens type, der alle optræder på samme måde i en beregning af en størrelse *y*, er et *gennemsnit* x_g af datasættet en størrelse af samme type som *x*'erne, hvorom det gælder, at samme beregning også giver resultatet *y*, når man estatter alle $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$ med x_g .

Et gennemsnit afhænger altså af, hvilken størrelse man beregner. Dvs. det er, fordi der findes forskellige beregninger, at der findes forskellige gennemsnit. F.eks. er vores velkendte aritmetiske gennemsnit knyttet til addition, mens det såkaldte geometriske gennemsnit er knyttet til multiplikation.

Vi skal se på dette gennem en række eksempler, men vi indleder med et eksempel på, hvordan samme datasæt giver forskellige værdier for de forskellige gennemsnit, dvs. vi ser i første eksempel kun på en række tal, som vi ikke ved, hvad vi skal bruge til.

Eksempel (uvirkeligt – kun for at vise udregninger): Talsæt: 2, 6, 17, 10 og 3.
Vi udregner nu hvert af de fire gennemsnit uden at tænke på, hvad resultaterne fortæller os:

$$\text{Aritmetisk gennemsnit: } \bar{x} = \frac{2+6+17+10+3}{5} = \frac{38}{5} = 7,6$$

$$\text{Harmonisk gennemsnit: } x_H = \frac{5}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{17}+\frac{1}{10}+\frac{1}{3}} = \frac{850}{197} \approx 4,311$$

$$\text{Geometrisk gennemsnit: } x_G = \sqrt[5]{2\cdot 6\cdot 17\cdot 10\cdot 3} \approx 5,72$$

$$\text{Kvadratisk gennemsnit: } x_Q = \sqrt{\frac{2^2+6^2+17^2+10^2+3^2}{5}} \approx 9,36$$

Opgaverne 192*

Man får altså 4 forskellige tal som resultater. Uden bevis kan det nævnes, at det altid gælder, at:

$$x_H \le x_G \le \bar{x} \le x_Q \,.$$

Aritmetisk gennemsnit

Eksempel 1: En fodboldspiller øver sig i at jonglere med en bold, og antallet af berøringerne noteres for hvert forsøg: 8, 31, 2, 5, 52, 9, 17, 43, 41

Der er 9 forsøg, så $n = 9$, og det aritmetiske gennemsnit er

$$\bar{x} = \frac{8+31+2+5+52+9+17+43+41}{9} = \frac{208}{9} = 23,\bar{1} \approx 23$$

Dette fortæller os, at hvis en anden fodboldspiller i de 9 forsøg opnår samme antal berøringer i hvert forsøg, skal dette antal være 23, hvis hun skal opnå det samme samlede antal, som den første fodboldspiller (der vil pga. afrunding mangle en enkelt berøring).

Eksempel 2: På en ferie, der varer 7 dage, bruger du på de enkelte dage følgende beløb i kroner: 201, 318, 2340, 119, 147, 354 og 226.

Det aritmetiske gennemsnit af disse tal er:

$$\bar{x} = \frac{201+318+2340+119+147+354+224}{7} = 529$$

Dette fortæller os, at hvis du hver dag havde brugt 529 kroner, ville du efter de 7 dage samlet have brugt det samme, som du gjorde med de forskellige beløb.

Eksempel 3: Farten v er defineret som $v = \frac{s}{t}$, hvor s er strækningen, genstanden har bevæget sig, og t er den tid, der er brugt på bevægelsen.

Pheidippides er en udholdende løber. Han løber i tre timer. Den første time løber han med farten 8 km/h, den anden time med farten 15 km/h og den tredje time med farten 7 km/h.

Hvor hurtigt har han løbet i gennemsnit?

Han har løbet i alt 30 km og brugt 3 timer på det, så gennemsnitsfarten er:

$$\bar{v} = \frac{s_{samlet}}{t_{samlet}} = \frac{30km}{3h} = 10\frac{km}{h}\,.$$

Hvis udregningen i Eksempel 3 skal gøres mere generel, kan vi indføre følgende størrelser:

$v_1 = 8\frac{km}{h}$ er farten den første time.

$v_2 = 15\frac{km}{h}$ er farten den anden time.

$v_3 = 7\frac{km}{h}$ er farten den tredje time.

$t = t_1 = t_2 = t_3 = 1\text{h}$: Da tidsintervallerne med hver fart er lige store, bruger vi kun én størrelse *t*, der er 1 h (1 time).

$s_1 = v_1 \cdot t = 8\frac{km}{h} \cdot 1h = 8km$ er den tilbagelagte strækning den første time.

$s_2 = v_2 \cdot t = 15\frac{km}{h} \cdot 1h = 15km$ er den tilbagelagte strækning den anden time.

$s_3 = v_3 \cdot t = 7\frac{km}{h} \cdot 1h = 7km$ er den tilbagelagte strækning den tredje time.

Når vi skal finde gennemsnitsfarten, skal vi se på, hvor langt Pheidippides samlet er kommet, og hvor lang tid han har brugt på det. Det giver følgende udtryk:

$$\bar{v} = \frac{s_{samlet}}{t_{samlet}} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t + t + t} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3t} = \frac{1}{3} \cdot \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{s_1}{t} + \frac{s_2}{t} + \frac{s_3}{t} \right) =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \left(v_1 + v_2 + v_3 \right) = \frac{v_1 + v_2 + v_3}{3} = \frac{8\frac{km}{h} + 15\frac{km}{h} + 7\frac{km}{h}}{3} = \frac{30\frac{km}{h}}{3} = 10\frac{km}{h}$$

Undervejs fik vi udtrykket $\bar{v} = \frac{v_1 + v_2 + v_3}{3}$, der netop er udtrykket for *det aritmetiske gennemsnit*, og vores udregning fortæller os altså, at hvis Pheidippides konstant havde løbet med farten 10km/h, ville han efter de tre timer være kommet lige så langt, som han gjorde med de varierende hastigheder.

Harmonisk gennemsnit

Eksempel 4 (fortsættelse af eksempel 3): Hvad nu hvis Pheidippides havde disponeret anderledes? Hvis han vidste, at han skulle løbe 30 km, og han så løb de første 10 km med farten 8 km/h, de næste 10 km med farten 15 km/h og de sidste 10 km med farten 7 km/h. Hvad ville hans gennemsnitsfart så have været?

Vi skal igen kende den tilbagelagte strækning og den brugte tid. Vi ved, at han har løbet 30 km, men vi ved ikke, hvor lang tid det har taget. Dette skal vi regne ud:

$$\text{De første 10 km tog: } t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{10km}{8\frac{km}{h}} = 1,25h$$

$$\text{De næste 10 km tog: } t_2 = \frac{s}{v_2} = \frac{10km}{15\frac{km}{h}} = 0,67h$$

$$\text{De sidste 10 km tog: } t_3 = \frac{s}{v_3} = \frac{10km}{7\frac{km}{h}} = 1,43h$$

Summen af disse tider giver den samlede tid, og vi kan derfor udregne gennemsnitsfarten:

$$v_{gen} = \frac{30km}{1,25h + 0,67h + 1,43h} = 8,97\frac{km}{h}$$

Dette fortæller os (ud over at han ikke er kommet så hurtigt frem som i eksempel 3), at han ville have opnået den samme samlede tid, hvis han havde løbet med den konstante hastighed 8,97 km/h.

Men hvad har dette med det harmoniske gennemsnit at gøre?

Først kan vi lige tjekke, at vi får tallet 8,97, hvis vi tager *det harmoniske gennemsnit* af de tre hastigheder: $x_H = \frac{3}{\frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{8}} = 8,96797$.

Men hvordan ses det med formler?

I dette tilfælde er det strækningerne med de forskellige hastigheder, der er de samme, dvs.:
$s = s_1 = s_2 = s_3$

Tiderne for de tre strækninger er forskellige, så vi arbejder med t_1, t_2 og t_3.

Gennemsnitsfarten beregnes så ved:

$$v_{gen} = \frac{s_{samlet}}{t_{samlet}} = \frac{s+s+s}{t_1+t_2+t_3} = \frac{3s}{t_1+t_2+t_3} = 3\cdot\frac{s}{t_1+t_2+t_3} = 3\cdot\frac{1}{\frac{t_1+t_2+t_3}{s}} = \frac{3}{\frac{t_1}{s}+\frac{t_2}{s}+\frac{t_3}{s}} = \frac{3}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}}$$

Det sidste udtryk viser os altså, at i dette tilfælde er gennemsnitsfarten beregnet som *det harmoniske gennemsnit* af tallene.

Opsamling: Bemærk, at når man snakker om et gennemsnit, så spørger man hele tiden efter ét tal, der i den konkrete sammenhæng ville give det samme samlede resultat, som en række forskellige tal har givet. Og det væsentlige er, at dette søgte tal ikke altid beregnes som *det aritmetiske gennemsnit*.

Eksempel 5: Mange løbere anvender ikke størrelsen fart til at angive, hvor hurtigt de løber. De bruger begrebet *tempo* (på engelsk: *pace*). Det er det modsatte af fart, dvs. tempoet p defineres som:

$$p = \frac{t}{s}.$$

Vi forestiller os nu, at Pheidippides havde tænkt i tempo i stedet for i fart, og vi ser nu på, hvordan eksempel 3 i så fald var forløbet.

Pheidippides løber igen i tre timer. Den første time løber han med tempoet 8 min/km, den næste time med tempoet 4 min/km og den sidste time med tempoet 7 min/km. Hvad har det gennemsnitlige tempo været, dvs. med hvilket tempo skulle Pheidippides have løbet, hvis han skulle have løbet med samme tempo hele vejen og samlet set opnået samme længde?

Vi har brug for den samlede tid og samlede længde. Tiden er 3 timer, og vi finder nu strækningerne:

$$s_1 = \frac{t}{p_1} = \frac{60\,\text{min}}{8\,\frac{\text{min}}{km}} = 7,5km \qquad s_2 = \frac{t}{p_2} = \frac{60\,\text{min}}{4\,\frac{\text{min}}{km}} = 15km \qquad s_3 = \frac{t}{p_3} = \frac{60\,\text{min}}{7\,\frac{\text{min}}{km}} = 8,57km$$

Så gennemsnitstempoet har været: $p_{gen} = \frac{t_{samlet}}{s_{samlet}} = \frac{180\,\text{min}}{7,5km + 15km + 8,57km} = 5,79\,\frac{\text{min}}{km}$

Dette ses at stemme med *det harmoniske gennemsnit* af tallene:

$$x_H = \frac{3}{\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7}} = 5,79$$

I dette tilfælde er det altså det harmoniske gennemsnit, der giver svaret på spørgsmålet: "Med hvilket tempo skulle Pheidippides have løbet, hvis han løb i konstant tempo og skulle nå lige så langt, som han nåede med varierende tempo?"

Øvelse 17: *Prøv at vise med formler, at eksempel 5 skal løses med det harmoniske gennemsnit, og prøv at finde ud af, hvilket gennemsnit der skal anvendes, hvis man ser på eksempel 4, men denne gang anvender tempo i stedet for fart.*

Geometrisk gennemsnit

Eksempel 6: Vi har et rektangel med længden 24 og bredden 6. Vi ønsker nu at finde den sidelængde, et kvadrat skal have, hvis det skal have samme areal som rektanglet.

Arealet af rektanglet er: $A_r = l \cdot b = 24 \cdot 6 = 144$

Hvis sidelængden af kvadratet er x, er dets areal $A_k = x^2$, og da arealet skal være 144, har man:

$$144 = x^2$$
$$x = 12$$

Dvs. at sidelængden skal være 12.

Dette er netop *det geometriske gennemsnit* af de to tal ($\sqrt{24 \cdot 6} = 12$), og det ses på formlerne ved:

$$A_k = A_r$$
$$x^2 = l \cdot b$$
$$x = \sqrt{l \cdot b}$$

Svaret på spørgsmålet er altså netop det geometriske gennemsnit.

Eksempel 7 (ligner meget eksempel 6): En kasse har længden 75, bredden 18 og højden 20. Hvilken sidelængde skal en kube/kubus (også kaldet et heksaeder) have, hvis den skal have samme rumfang som kassen?

Da rumfangene skal være lige store, har man:

$$V_{kube} = V_{kasse}$$
$$x^3 = l \cdot b \cdot h$$
$$x = \sqrt[3]{l \cdot b \cdot h} = \sqrt[3]{75 \cdot 18 \cdot 20} = 30$$

Igen giver det geometriske gennemsnit svaret på spørgsmålet.

Eksempel 8: En akties værdi vokser over en 5-årig periode med de årlige vækstrater 3%, 17%, 6%, 9% og 2%. Hvad har den gennemsnitlige vækstrate været, dvs. hvilken fast årlig vækstrate ville på de 5 år have givet samme resultat som de 5 forskellige årlige vækstrater?

Vækstraten (også kaldet rentefoden) betegnes med *r*.

Når man skal lægge procenter til tal, sker det ved at gange med $(1+r)$, der kaldes fremskrivningsfaktoren. Hvis aktiens værdi fra start var *K*, vil dens værdi efter 5 år altså være:

$$K_5 = K \cdot (1+0,03) \cdot (1+0,17) \cdot (1+0,06) \cdot (1+0,09) \cdot (1+0,02) = K \cdot 1,03 \cdot 1,17 \cdot 1,06 \cdot 1,09 \cdot 1,02$$

En konstant vækstrate r_g ville give udregningen:

$$K_5 = K \cdot (1+r_g) \cdot (1+r_g) \cdot (1+r_g) \cdot (1+r_g) \cdot (1+r_g) = K \cdot (1+r_g)^5$$

Når man sammenligner de to udtryk, får man:

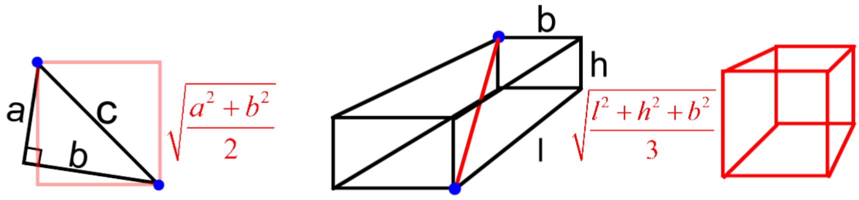
$$(1+r_g)^5 = 1,03 \cdot 1,17 \cdot 1,06 \cdot 1,09 \cdot 1,02$$
$$(1+r_g) = \sqrt[5]{1,03 \cdot 1,17 \cdot 1,06 \cdot 1,09 \cdot 1,02} = 1,073$$
$$r_g = 1,073 - 1 = 0,073 = 7,3\%$$

Bemærk, at den gennemsnitlige vækstrate IKKE blev fundet som det geometriske gennemsnit af vækstraterne, men undervejs anvendes det geometriske gennemsnit på fremskrivningsfaktorerne, og når man beskæftiger sig med rentesregning, er det meget vigtigt at notere sig, at det altid er fremskrivningsfaktorerne, der regnes på.

Opgaverne 193*

Kvadratisk gennemsnit

Vi møder *det kvadratiske gennemsnit*, hvis vi søger sidelængden i et kvadrat eller en kubus, hvis diagonal er lige så lang som diagonalen i et givet rektangel eller en given kasse (se figuren):



Desuden skal vi senere under Sandsynlighedsregning og Statistik møde *det kvadratiske gennemsnit* i forbindelse med begrebet *spredning*.

Opsamling

Begrebet 'gennemsnit' anvendes, når man har fået en række forskellige værdier for den samme størrelse og så stiller sig selv spørgsmålet: "Hvilken konstant værdi skulle min størrelse have antaget, hvis jeg i sidste ende skulle have opnået samme resultat?".

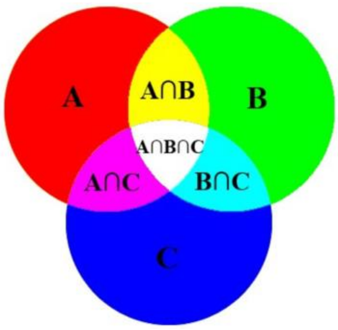
Zermelo-Fraenkels aksiomer for mængdelæren.
Formuleret af Zermelo i 1908 og omformuleret af Fraenkel i 1922.

The axioms of Zermelo-Fraenkel set theory with choice ZFC

In principle all of mathematics can be derived from these axioms

Extensionality	$\forall X \forall Y [X = Y \Leftrightarrow \forall z(z \in X \Leftrightarrow z \in Y)]$
Pairing	$\forall x \forall y \exists Z \forall z [z \in Z \Leftrightarrow z = x \text{ or } z = y]$
Union	$\forall X \exists Y \forall y [y \in Y \Leftrightarrow \exists Z(Z \in X \text{ and } y \in Z)]$
Empty set	$\exists X \forall y [y \notin X]$ (this set X is denoted by $\emptyset$)
Infinity	$\exists X [\emptyset \in X \text{ and } \forall x(x \in X \Rightarrow x \cup \{x\} \in X)]$
Power set	$\forall X \exists Y \forall Z [Z \in Y \Leftrightarrow \forall z(z \in Z \Rightarrow z \in X)]$
Replacement	$\forall x \in X \exists! y P(x,y) \Rightarrow [\exists Y \forall y (y \in Y \Leftrightarrow \exists x \in X (P(x,y)))]$
Regularity	$\forall X [X \neq \emptyset \Rightarrow \exists Y \in X (X \cap Y = \emptyset)]$
Axiom of choice	$\forall X [\emptyset \notin X \text{ and } \forall Y, Z \in X(Y \neq Z \Rightarrow Y \cap Z = \emptyset) \Rightarrow \exists Y \forall Z \in X \exists! z \in Z (z \in Y)]$

Ernst Zermelo (1871-1953). Abraham Fraenkel (1891-1965).



Sætning 1: $a \cdot 0 = 0$

Sætning 2: $a \cdot (-1) = (-a)$

Sætning 3: $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

Sætning 4: $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

Sætning 5: $+(a+b) = a+b$

Sætning 6: $a+(-b) = a-b$

Sætning 7: $-(a+b) = -a-b$

Sætning 8: $a \cdot (b+c-d \cdot e) = a \cdot b + a \cdot c - a \cdot d \cdot e$

Sætning 9: $(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$

Sætning 10: $\frac{a}{a} = 1$

Sætning 11: $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{a}$

Sætning 12: $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

Sætning 13: $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$

Sætning 14: $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$

Sætning 15: $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c}$

Sætning 16: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$

Sætning 17: $\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}}$

Sætning 18: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

Sætning 19: $\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \cdot \frac{c}{b}$

Sætning 20: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

Sætning 21: $\frac{a+b-c \cdot d}{e} = \frac{a}{e} + \frac{b}{e} - \frac{c \cdot d}{e}$

Sætning 22: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$