Grundlæggende matematiske begreber del 3

Ligninger med flere variable
Ligningssystemer

x-klasserne

Gammel Hellerup Gymnasium

Maj 2023 ; Michael Szymanski ; mz@ghg.dk

Indholdsfortegnelse

LIGNINGER MED FLERE VARIABLE

Ligninger med flere variable i naturvidenskaber

Ligninger med én variabel optræder oftest i deres simpleste form inden for naturvidenskaberne. Hvis du måler en fysisk størrelse, eller hvis du får den angivet i en opgave, vil det være som f.eks. $t = 3{,}0\,\mathrm{s}$ og ikke som f.eks. $5\cdot(3+2t)-8 = 5t+22$ (hvor der er set bort fra enheder). Begge er ligninger med én variabel, og de har samme løsningsmængde, men den simpleste form er det naturlige valg, da fokus ikke er på at løse ligninger.

Ligninger med flere variable kalder vi normalt for *formler*. I formler repræsenterer bogstaverne fysiske størrelser (svarende til variable) eller fysiske konstanter (svarende til konstanter).

Desuden kan man snakke om *frihedsgrader* i en formel, hvor det er antallet af fysiske størrelser, du skal kende, før formlen kan anvendes til at bestemme alle manglende fysiske størrelser.

Der gælder:

Sætning 1: I en formel er antal frihedsgrader *f* forbundet med antallet af fysiske størrelser *s* ved:
$$f = s - 1$$

Eller sagt med almindelige ord: Hvis du kender værdierne af alle formlens fysiske størrelser bortset fra én, kan du bruge formlen til at beregne denne.

Eksempel 1: $$M = \frac{m}{n}$$

I kemi giver denne formel sammenhængen mellem massen *m* af et stof med stofmængden *n* og den molare masse *M*. De er alle 3 fysiske størrelser, og derfor er antallet af frihedsgrader 2. Dvs. hvis du f.eks. kender den molare masse og massen af et stof, kan du beregne stofmængden.

$$\Delta E = m \cdot c \cdot \Delta T$$

I fysik er dette formlen for opvarmning af et stof uden faseovergang, hvor *E* er energien, *T* er temperaturen og *m* er massen. Disse tre er alle fysiske størrelser, mens *c* er en konstant kaldet *den specifikke varmekapacitet*. Da der er 3 fysiske størrelser, er antallet af frihedsgrader 2, dvs. hvis du f.eks. for et kendt stof kender massen og den tilførte energi, kan du beregne temperaturstigningen.

MEN – og her kommer en vigtig pointe i forbindelse med naturvidenskaber – formlen kan både fungere i en opgave, og så gælder ovenstående, eller den kan indgå i et eksperiment, hvor man forsøger at bestemme værdien af konstanten. I dette tilfælde optræder konstanten som en variabel, dvs. der vil i så fald være 3 frihedsgrader.

$$c = \lambda \cdot f$$

Dette er bølgeligningen for lys, hvor *c* er lysets hastighed (en konstant), λ er bølgelængden og *f* er frekvensen. Kun de to sidste er variable, og der er derfor kun én frihedsgrad. Hvis man kender frekvensen for lyset, kan man beregne lysets bølgelængde.

$$f = \frac{1}{T}$$

Dette er sammenhængen mellem frekvensen *f* og perioden *T* for et periodisk fænomen. Der er 1 frihedsgrad, dvs. hvis man kender frekvensen, kan man udregne perioden – og omvendt.

Opgaverne 424*

Ligninger med flere variable i matematik

Først mindes om følgende definitioner:

Definition: En *ligning* er et udsagn, der fastslår, at to udtryk er lige store.
Definition: At *løse en ligning* vil sige at afgøre, om udsagnet er sandt eller falsk, eller at bestemme for hvilke værdier af variablerne, at udsagnet er sandt.

I vores ligninger med én variabel (hvor der i f.eks. andengradsligninger og trigonometriske ligninger godt kan være flere løsninger) førte disse definitioner til, at vi endte med at skrive $x = ...$ og dermed med denne simple ligning angav løsningen på ligningen.
Når vi har ligninger med flere variable, kan vi ikke angive løsningerne på samme måde, men det er vigtigt at være opmærksom på, at vores definitioner også dækker ligninger med flere variable, dvs. hvis vi vil løse ligningerne, skal vi stadig finde de værdier af variablerne, der gør udsagnet sandt.
Men en opskrivning med lighedstegn giver oftest bare ikke så meget mening i sådanne tilfælde.
For prøv at se på følgende ligning: $y = 3x + 5$.
Løsningen kan angives ved en løsningsmængde på følgende måde: $L = \{(x, y) \mid y = 3x + 5\}$.
Dette læses: ”Løsningsmængden er mængden af punkter *x* komma *y*, for hvilket det gælder, at *y* er lig med 3 *x* plus 5”
Og her må vi vel konstatere, at vores ”løsning” af ligningen overhovedet ikke har bragt os ud af stedet.

Vi vil derfor angive vores løsninger på en anden måde.
Når vi arbejder med ligninger med to eller tre variable, vil vi ofte benytte betegnelserne *x* og *y* (og *z*) for vores variable, og vi vil så beskrive løsningerne til ligningerne ved såkaldte *geometriske steder*.

Definition 1: Et *geometrisk sted* er en mængde af punkter, hvis placering i planen eller rummet er bestemt af en eller flere betingelser – f.eks. af en ligning.

Eksempler:

- Givet et linjestykke er en *midtnormal* det geometriske sted for de punkter, der har ens afstande til linjestykkets endepunkter.
- En ret linje er det geometriske sted for de punkter, der opfylder ligningen $y = a \cdot x + b$.
- En cirkel er det geometriske sted for de punkter i en plan, der har samme afstand til et givet punkt i planen.
- En kugle er det geometriske sted for de punkter i rummet, der har samme afstand til et givet punkt i rummet.
- En cirkel er det geometriske sted for de punkter, der opfylder ligningen $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, hvor (a,b) er et givet punkt i planen kaldet *centrum*, og *r* er en konstant kaldet *radius*.
- En parabel er det geometriske sted for de punkter i planen, der har ens afstande til en given linje og et givet punkt uden for linjen.

Når vi i det følgende beskæftiger os med rette linjer, parabler, hyperbler, cirkler, kugler og planer, skal du altså huske på, at det sådan set stadig er løsninger til ligninger, vi arbejder med. Vi arbejder bare med dem som geometriske steder, dvs. som punktmængder i planen eller rummet, der danner nogle figurer, som vi har navne for.

Hvis du bliver spurgt om, hvorvidt et punkt ligger på en ret linje eller på en cirkel, er det altså et spørgsmål om, hvorvidt de værdier for variablerne, som aflæses ud fra punktet, gør udsagnet sandt.

Eksempel 2: Ligger punktet $(2,-5)$ på cirklen givet ved ligningen $(x-5)^2+(y+3)^2=2^2$?

Ud fra punktet aflæser vi $x=2 \wedge y=-5$. Dette indsættes i ligningen:

$(2-5)^2+(-5+3)^2=2^2 \Leftrightarrow (-3)^2+(-2)^2=4 \Leftrightarrow 9+4=4 \Leftrightarrow 13=4$.

Dette er et falsk udsagn. Altså ligger punktet IKKE på cirklen.

Opgaverne 430*

Lidt om nogle ord:

Når geometriske figurer som linjer og cirkler angives med ligninger, kaldes det *analytisk geometri* i modsætning til Euklids klassiske *geometri*, der i den forbindelse kan betegnes som *ren geometri*, *aksiomatisk geometri* eller *syntetisk geometri*.

"Analyse" kommer af det græske ord "analysis", der betyder "opløsning". Når du i forskellige fag laver en analyse, opløser du derfor en tekst, en kemisk blanding, en geometrisk konstruktion eller noget andet i dets bestanddele.

"Syntese" kommer af det græske ord "synthesis", der betyder "sammensætte", dvs. i en syntese sætter du flere enkelte dele sammen til en helhed.

Oftest begynder man med en analyse, hvor man opsplitter en problemstilling i de enkelte dele, der behandles hver for sig, hvorefter man laver syntesen, hvor man sætter det hele sammen igen og forsøger at danne sig et overblik over helheden.

Analytisk geometri siges normalt at være opfundet af filosoffen, matematikeren og fysikeren René Descartes (1596 – 1650), selvom der ligesom i så mange andre tilfælde kan spores tendenser til tankegangen hos flere tidligere matematikere. Descartes opfandt "vores" koordinatsystem, der derfor også kaldes *Det kartesiske koordinatsystem*.

Analytisk geometri er en fantastisk opfindelse, der gør det muligt at løse geometriske problemstillinger ved hjælp af algebra, dvs. med tal og bogstaver.

Isometrier:

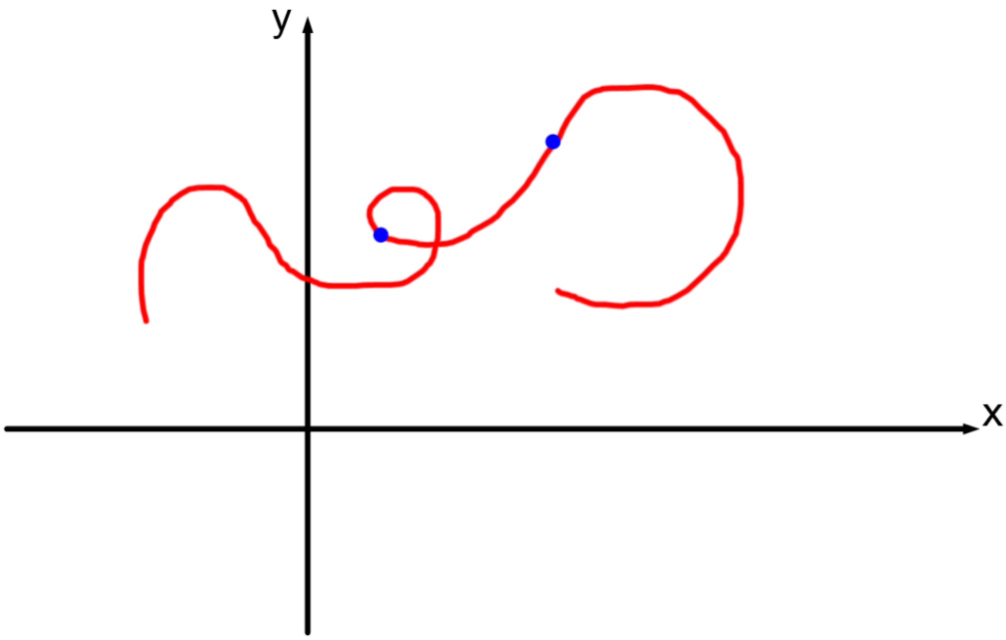
I gymnasiet kommer du til at arbejde meget med grafer for ligninger, funktioner og polynomier. Som vi ved fra tidligere, er en *isometri* en afstandsbevarende afbildning, hvilket inkluderer parallelforskydninger, spejlinger og rotationer. Specielt parallelforskydninger kommer vi til at benytte meget, men nu ser vi på alle tre slags isometrier i forbindelse med ligninger. Vi vil så opdage, at parallelforskydninger og spejlinger kan overføres direkte til funktioner.

Sætning 2: Hvis et geometrisk sted er bestemt ved en ligning, der indeholder variablerne *x*, *y* (og *z*), foretages isometrierne på følgende måder:

- **Parallelforskydning** med *a* langs *x*-aksen, *b* langs *y*-aksen og *c* langs *z*-aksen foretages ved at erstatte alle *x*'er i ligningen med $(x-a)$, alle *y*'er med $(y-b)$ og alle *z*'er med $(z-c)$.
- **Spejling i planen:** Spejling i *x*-aksen foregår ved at erstatte alle *y*'er med $(-y)$, og spejling i *y*-aksen foregår ved at erstatte alle *x*'er med $(-x)$.
- **Spejling i rummet:** Spejling i *xy*-planen foregår ved at erstatte alle *z*'er med $(-z)$, spejling i *xz*-planen foregår ved at erstatte alle *y*'er med $(-y)$ og spejling i *yz*-planen foregår ved at erstatte alle *x*'er med $(-x)$.
- **Rotation i planen:** En rotation med vinklen *w* omkring origo foretages ved at erstatte alle x'er med $(x\cdot\cos(w)+y\cdot\sin(w))$ og alle *y*'er med $(y\cdot\cos(w)-x\cdot\sin(w))$.

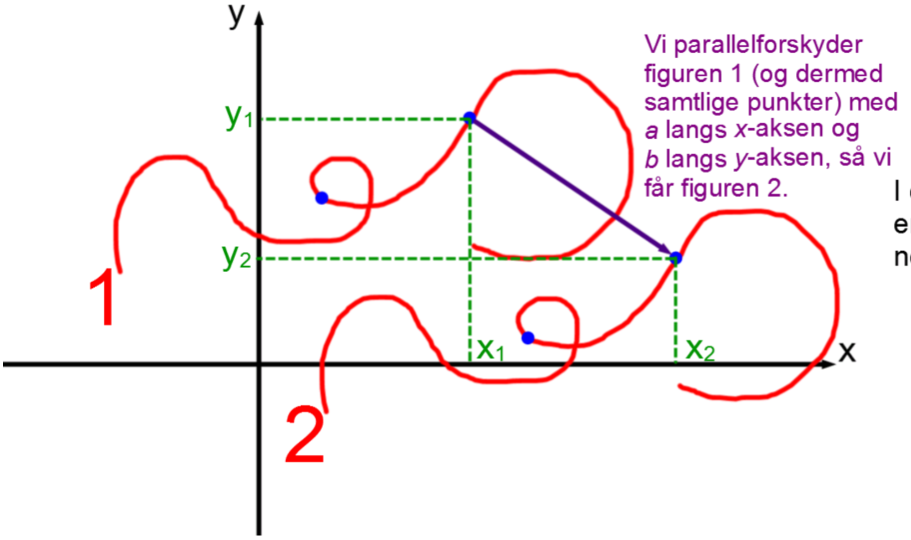
Man kan naturligvis spejle i andre linjer, og man kan rotere omkring andre punkter end origo, men som behandlet under geometrien, kan man ved at kombinere ovenstående danne samtlige isometrier i planen.

Bevis 2:
I beviset benyttes følgende geometriske sted (den røde kurve). Bemærk, at de blå punkter repræsenterer tilfældigt valgte punkter tilhørende det geometriske sted:



Pointen med isometrier er, at de er afstandsbevarende, så udover at følge med i beviset skal du også lægge mærke til, at afstanden mellem de tilfældigt valgte blå punkter ikke ændrer sig under parallelforskydningen, spejlingerne og rotationen.

Parallelforskydning: Vi ser på et eksempel i planen (da det er nemmere at tegne), dvs. du kan selv overveje, hvordan argumenterne kan overføres til rummet. Vores parallelforskydning er med *a* langs *x*-aksen og *b* langs *y*-aksen:



$$x_2 = x_1 + a$$
$$y_2 = y_1 + b$$

I dette konkrete eksempel er *a* altså positiv, og *b* er negativ.

Pointen er nu følgende:
Vi har en ligning (kaldet Ligning 1) indeholdende *x*'er og *y*'er.
Figuren 1 viser det geometriske sted for de punkter, der passer ind i Ligning 1, dvs. specielt vil værdierne x_1 og y_1 indsat på *x*'s og *y*'s pladser i Ligning 1 give et sandt udsagn.
Vores sætning hævder, at figuren 2 – der, som beskrevet på tegningen, er en parallelforskydning af figuren 1 - er det geometriske sted for de punkter, der passer ind i Ligning 2, der er fremkommet ved, at vi i Ligning 1 erstatter alle *x*'er med $(x-a)$ og alle *y*'er med $(y-b)$.
Dette passer, for hvis vi i Ligning 2 på *x*'s og *y*'s plads indsætter punktet (x_2, y_2), der er en parallelforskydning af punktet (x_1, y_1), får vi alle de steder, hvor der i Ligning 1 stod *x*, og hvor der i Ligning 2 nu står $(x-a)$:

$$(x_2-a)=(x_1+a-a)=x_1$$

Og tilsvarende får vi de steder, hvor der i Ligning 1 stod *y*, og hvor der i ligning 2 står $(y-b)$:

$$(y_2-b)=(y_1+b-b)=y_1$$

Dvs. vi får præcis det samme, som da vi indsatte x_1 og y_1 på *x*'s og *y*'s pladser i Ligning 1, dvs. vi får et sandt udsagn, og dermed er figuren 2 det geometrisk sted for de punkter, der opfylder Ligning 2.

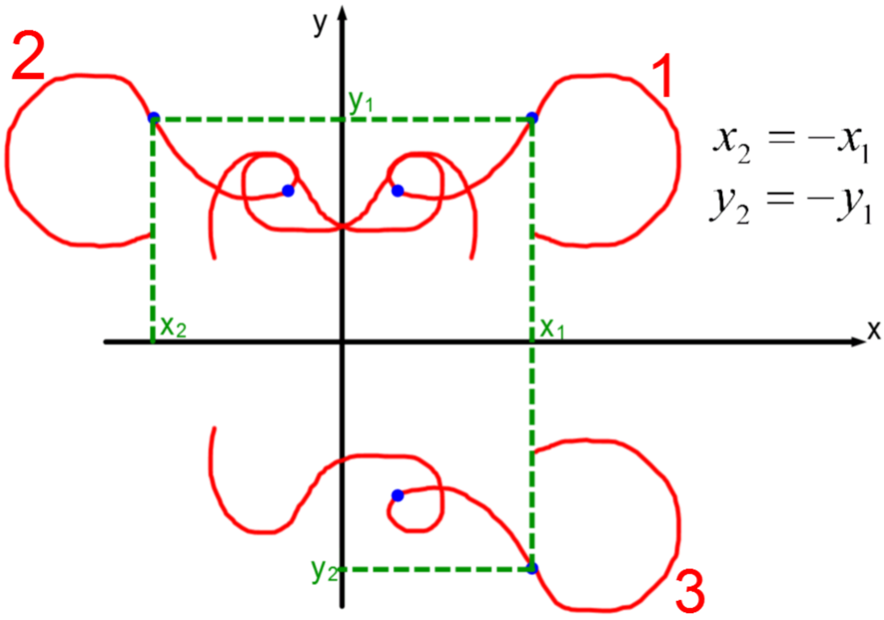
Et eksempel på en ligning, hvor man erstatter alle *x*'er med $(x-a)$ og alle *y*'er med $(y-b)$ er:

Dette er vores oprindelige ligning: $x^2 + \dfrac{y}{x+2} - 3y = y^3 + \sqrt{x+2}$

Her er alle *x*'er og *y*'er erstattet: $(x-a)^2 + \dfrac{(y-b)}{(x-a)+2} - 3(y-b) = (y-b)^3 + \sqrt{(x-a)+2}$

Bemærk pointen med beviset:
Hvis du indsætter $x_1 + a$ og $y_1 + b$ i den nederste ligning, får du det samme, som hvis du indsætter x_1 og y_1 i den øverste. Prøv selv!

Spejling: Beviset for spejlingerne følger samme fremgangsmåde som parallelforskydningen.



Tegningen viser figuren 1, der spejlet i *y*-aksen giver figur 2 og spejlet i *x*-aksen giver figur 3. Figuren 1 er det geometriske sted for de punkter, der opfylder en Ligning 1, der indeholder nogle *x*'er og nogle *y*'er, dvs. punktet (x_1, y_1) giver et sandt udsagn, når det indsættes i Ligning 1.

Vi ser nu på en Ligning 2, der er fremkommet ved at erstatte alle *x*'er i Ligning 1 med $(-x)$.

Ved spejlingen er punktet (x_1, y_1) ført over i punktet $(-x_1, y_1)$. Indsættes dette i Ligning 2, får vi, fordi de to minusser på *x*'erne ophæver hinanden, det samme, som når (x_1, y_1) blev indsat i Ligning 1, dvs. et sandt udsagn. Og dermed er figuren 2 det geometriske sted for de punkter, der er bestemt af Ligning 2.

Prøv selv at gennemføre argumentationen for spejlingen i *x*-aksen.

Et konkret eksempel er følgende ligninger for en ret linje, der spejles i de to koordinatakser:
Ligning 1 (den rette linje, der er vores udgangspunkt): $y = 3x + 5$.

Ligning 2 (ovenstående rette linje, der er spejlet i *y*-aksen): $y = 3(-x) + 5$

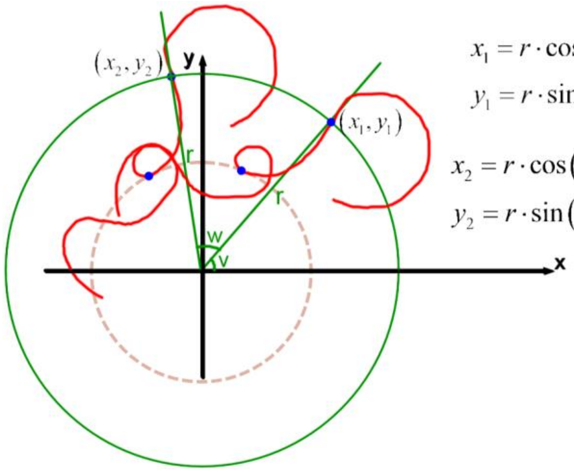
Ligning 3 (den rette linje spejlet i *x*-aksen): $(-y) = 3x + 5$

Vi tager udgangspunkt i et punkt (x_1, y_1), der ligger på vores rette linje, der er vores udgangspunkt, dvs. at $y_1 = 3x_1 + 5$ er et sandt udsagn.

Ved spejlingen i *y*-aksen er (x_1, y_1) ført over i $(-x_1, y_1)$, der nu indsættes i Ligning 2:
$y_1 = 3(-(-x_1)) + 5 \Leftrightarrow y_1 = 3 \cdot x_1 + 5$, og som vi så ovenfor, er det er sandt udsagn.

Ved spejlingen i *x*-aksen er (x_1, y_1) ført over i $(x_1, -y_1)$, der nu indsættes i Ligning 3:
$(-(-y_1)) = 3 \cdot x_1 + 5 \Leftrightarrow y_1 = 3 \cdot x_1 + 5$, og som vi så ovenfor, er det er sandt udsagn.

Rotation: Vi ser på en rotation omkring origo med vinklen *w*. Rotationen foregår ved, at ethvert punkt følger en cirkel rundt (hvert punkt har sin egen cirkel, der har centrum i origo og går gennem punktet). De grønne streger og den stiplede cirkel på figuren er hjælpestreger, der skal gøre det nemmere at forstå, hvad der sker ved rotationen.



$$x_1 = r\cdot\cos(v)$$
$$y_1 = r\cdot\sin(v)$$
$$x_2 = r\cdot\cos(v+w)$$
$$y_2 = r\cdot\sin(v+w)$$

Tjek, at du kan se, hvordan koordinatsættene til de to punkter fremkommer.

For at komme videre i beviset, skal vi anvende de såkaldte additionsformler, der er nævnt – men ikke bevist – under vores behandling af trigonometri. Det er selvfølgelig aldrig godt at være nødt til at anvende ubeviste sætninger, men vi kommer ikke videre uden.

Additionsformlerne giver:

$$x_2 = r\cdot\cos(v+w) \underset{additionsformler}{=} r\cdot(\cos(v)\cdot\cos(w)-\sin(v)\cdot\sin(w)) =$$
$$r\cdot\cos(v)\cdot\cos(w) - r\cdot\sin(v)\cdot\sin(w) = x_1\cdot\cos(w) - y_1\cdot\sin(w)$$

$$y_2 = r\cdot\sin(v+w) \underset{additionsformler}{=} r\cdot(\sin(v)\cdot\cos(w)+\cos(v)\cdot\sin(w)) =$$
$$r\cdot\sin(v)\cdot\cos(w) + r\cdot\cos(v)\cdot\sin(w) = y_1\cdot\cos(w) + x_1\cdot\sin(w)$$

Dvs. vi ved nu, at rotationen fører punktet (x_1, y_1) over i punktet

$$\left(x_1\cdot\cos(w) - y_1\cdot\sin(w),\, y_1\cdot\cos(w) + x_1\cdot\sin(w)\right).$$

Vores sætning siger, at vi i vores oprindelige ligning skal erstatte alle *x*'er med $(x\cdot\cos(w)+y\cdot\sin(w))$ og *y*'er med $(y\cdot\cos(w)-x\cdot\sin(w))$.

Så lad os prøve at sætte vores nye punkts koordinater ind i disse udtryk:

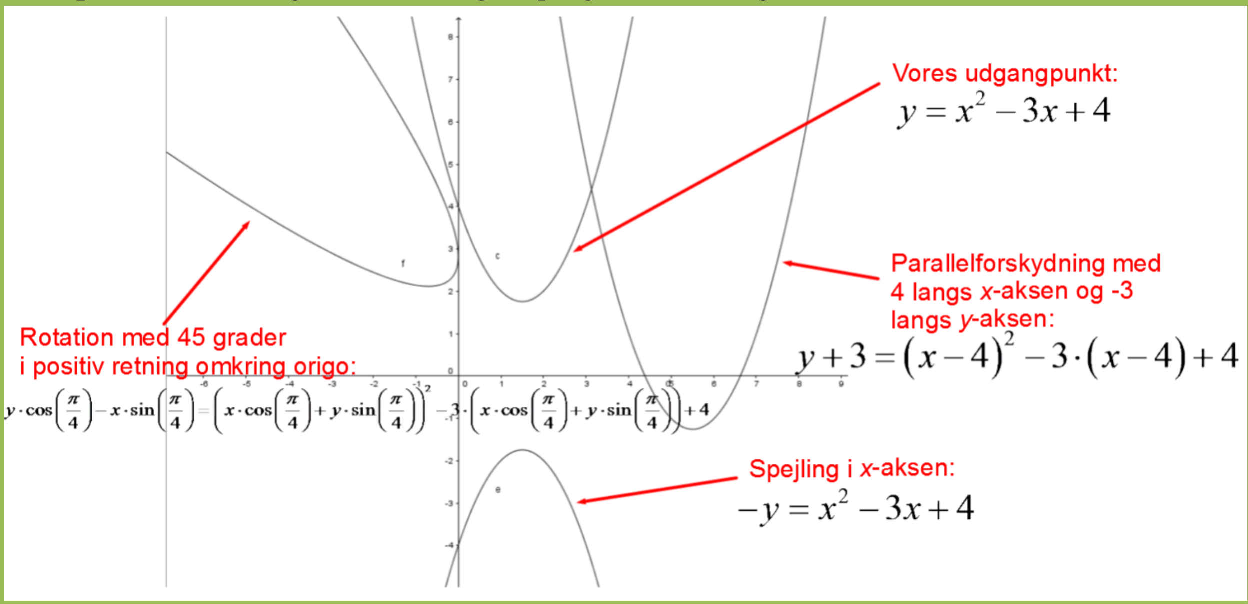
$$(x\cdot\cos(w)+y\cdot\sin(w)):$$
$$\left((x_1\cdot\cos(w)-y_1\cdot\sin(w))\cdot\cos(w)+(y_1\cdot\cos(w)+x_1\cdot\sin(w))\cdot\sin(w)\right)=$$
$$x_1\cdot\cos(w)\cdot\cos(w)-y_1\cdot\sin(w)\cdot\cos(w)+y_1\cdot\cos(w)\cdot\sin(w)+x_1\cdot\sin(w)\cdot\sin(w)=$$
$$x_1\cdot\cos^2(w)+x_1\cdot\sin^2(w)=x_1\cdot\left(\cos^2(w)+\sin^2(w)\right)=x_1$$

$$(y\cdot\cos(w)-x\cdot\sin(w)):$$
$$\left((y_1\cdot\cos(w)+x_1\cdot\sin(w))\cdot\cos(w)-(x_1\cdot\cos(w)-y_1\cdot\sin(w))\cdot\sin(w)\right)=$$
$$y_1\cdot\cos(w)\cdot\cos(w)+x_1\cdot\sin(w)\cdot\cos(w)-x_1\cdot\cos(w)\cdot\sin(w)+y_1\cdot\sin(w)\cdot\sin(w)=$$
$$y_1\cdot\cos^2(w)+y_1\cdot\sin^2(w)=y_1\cdot\left(\cos^2(w)+\sin^2(w)\right)=y_1$$

Vi har hermed vist, at vores nye ligning svarer til figuren, der er fremkommet ved rotationen. Vi vender tilbage til rotationer, når vi skal arbejde med vektorfunktioner. Der vil vi se, at det er nemmere at skrive op, når man anvender *matricer*.

Lad os se på et eksempel, der tager udgangspunkt i en *parabel*:

Eksempel 3: Indtastningerne er foretaget i programmet Geogebra:



Øvelse 1: Benyt programmet Geogebra og Sætning 2 til at parallelforskyde, spejle og rotere de geometriske steder bestemt ved følgende ligninger:

$y = -2x + 5$ (en ret linje)

$y = -x^2 + 5x - 7$ (en parabel)

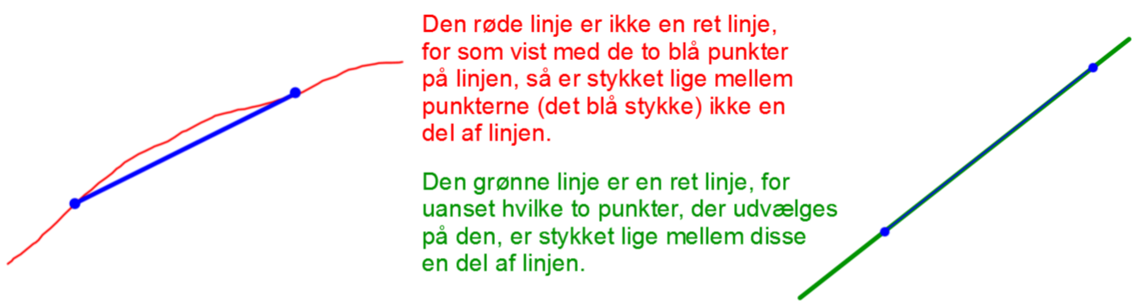
$x^2 + y^2 = 25$ (en cirkel)

Opgaverne 431*

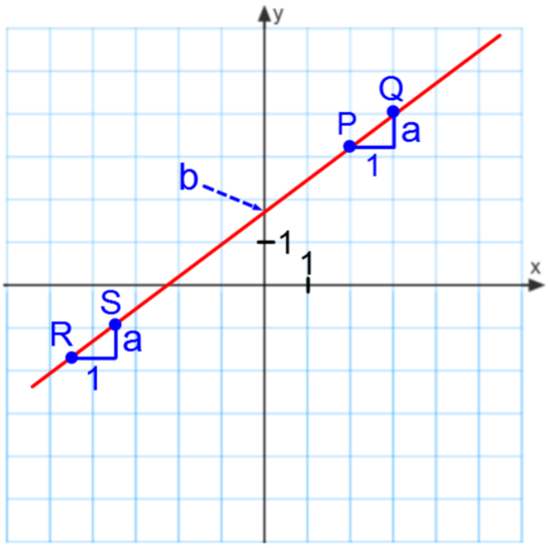
Bemærk, at vores sætning gælder for alle former for ligninger, hvilket vi vil få stor glæde af fremover. Vi går nu over til at behandle nogle helt konkrete geometriske steder, nemlig rette linjer, planer i rummet, parabler, cirkler, ellipser og kugler.

Rette linjer:

Vi husker Euklids definition: En *ret linje* er en linje, som ligger lige mellem punkterne på den.



Disse linjer er tegnet uden et koordinatsystem, men vi vil gerne kunne regne på disse rette linjer, så vi indfører et koordinatsystem og går dermed fra *geometri* til *analytisk geometri*:



Vi indtegner en ikke-lodret ret linje i et koordinatsystem. Da den ikke er parallel med *y*-aksen, vil den skære den et sted, og vi indfører betegnelsen *b* for den værdi på *y*-aksen, hvor linjen skærer denne.

Fra et vilkårligt punkt *P* på linjen bevæger man sig i *x*-aksens retning én enhed ud, og derfra bevæger man sig i *y*-aksens retning eller modsat denne, indtil man kommer til et nyt punkt *Q* på linjen. Det stykke – regnet med fortegn! – som man skulle bevæge sig i *y*-aksens retning (positivt fortegn) eller modsat denne (negativt fortegn) kaldes *a*.

Da den rette linje aldrig ændrer retning (for så ville der være punkter på linjen, hvor linjen ikke gik lige mellem disse), vil tallet *a* blive det samme, uanset fra hvilket punkt på linjen man begynder. *a* er derfor karakteristisk for linjen, og man kalder *a* for *hældningstallet, hældningen* eller *hældningskoefficienten*. Hvis linjen er vandret, er $a = 0$.

Egentlig er ordet *hældningskoefficient* ud fra ovenstående meget misvisende, for der har *a* intet med en koefficient at gøre.

Definition 2: En *koefficient* er en konstant faktor, der ganges på en variabel eller et udtryk indeholdende variable.

Vi har endnu ikke noget produkt, hvor *a* indgår, så den kan endnu ikke være en koefficient. Men det bliver den nu, hvor vi skal vise en sætning, som vi egentlig har anvendt en del gange allerede, men som vi først nu beviser:

Sætning 3: En ikke-lodret ret linje med hældningen *a* og skæringen med *y*-aksen *b* er det geometriske sted for de punkter, der er bestemt ved ligningen $y = a \cdot x + b \quad ; \quad G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Vi skal huske på, at det er en ligning, så den har en grundmængde. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ fortæller os, at vi arbejder med punkter (x, y), hvor både *x* og *y* tilhører de reelle tal. Man kan også skrive det $\mathbb{R}^2$.

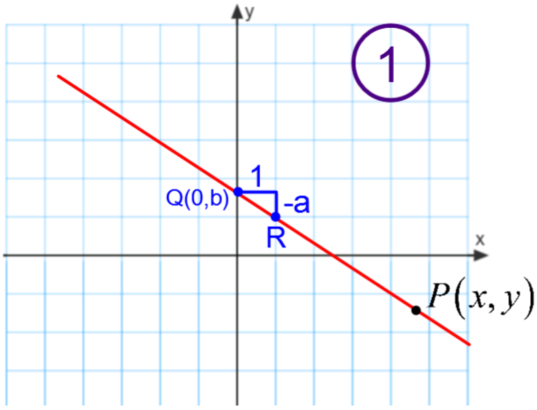
Når vi skal se på geometriske steder i rummet, ser vi på ligninger med grundmængden $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ svarende til, at vi arbejder med punkter (x, y, z), hvis koordinater alle er reelle tal.

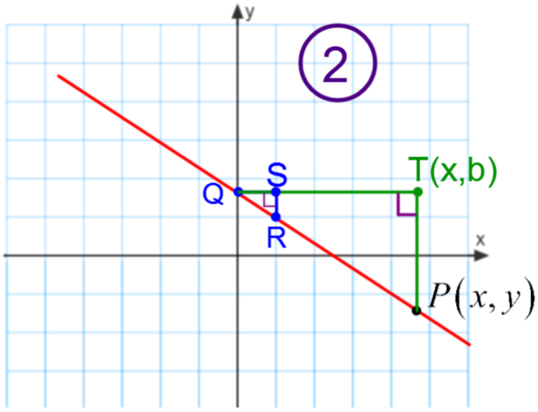
Vores linje er en ret linje.
Vores ligning er ligningen for en ret linje.
Og om variablerne *x* og *y* siger vi:

Definition 3: Hvis variablerne *x* og *y* opfylder ligningen $y = a \cdot x + b$, siger man, at der er en *lineær sammenhæng* mellem dem.

Når man f.eks. ser ligningen $y = -3{,}8x + 2{,}1$, kan man finde på at udbryde: ”Det er jo en lineær sammenhæng!”, hvor man egentlig mener: ”Jamen dog, det er jo en ligning, der angiver, at der er en lineær sammenhæng mellem *x* og *y*!”.

Bevis 3: Vi tegner en ikke-lodret ret linje i et koordinatsystem:





1: Vores udgangspunkt er, at vi kender skæringen *b* med *y*-aksen, og derfor har skæringspunktet *Q* koordinaterne $(0,b)$, og vi kender hældningen *a*, som vi i dette tilfælde har ladet være negativ.

Dermed er længden af det lodrette, blå linjestykke på tegningen som angivet –*a*, da en længde jo er positiv. Tænk hele vejen gennem beviset på, hvordan det ville forløbe, hvis *a* havde været positiv eller 0 (man skal jo overveje alle de mulige situationer).

Det, som vi nu ønsker, er at finde en ligning, der bestemmer netop de punkter *P*, der ligger på linjen.

2: Fra vores skæringspunkt *Q* tegnes en vandret linje, og fra vores vilkårlige punkt på linjen *P* tegnes en lodret linje. Deres skæringspunkt kalder vi *T*, og det får ud fra konstruktionen koordinatsættet (x,b). Vi har nu to retvinklede trekanter *QRS* og *PQT*. De er desuden ensvinklede, da de deler vinklen *Q* (og da *RS* og *PT* er parallelle og de korresponderende vinkler *P* og *R* dermed kongruente).

Der gælder derfor ifølge vores viden om ensvinklede trekanter: $\dfrac{|PT|}{|RS|}=\dfrac{|QT|}{|QS|}$

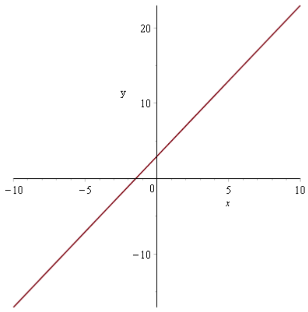
Ved at kigge på tegningen (og huske at være omhyggelig med fortegn) får vi dermed:

$$\frac{b-y}{-a}=\frac{x-0}{1} \quad\Leftrightarrow\quad b-y=-a\cdot(x-0) \Leftrightarrow b-y=-ax \Leftrightarrow ax+b=y$$

Vi har hermed vist det ønskede. Vores biimplikationer sikrer, at vi både ved, at hvis et punkt ligger på den rette linje, så opfylder det ligningen, og hvis et punkt opfylder ligningen, så ligger det også på den rette linje. Vi har altså nu bevist, at $y=a\cdot x+b$ er ligningen for en ret linje.

Eksempel 4: Ligningen $y=2x+3$ har uendeligt mange løsninger. Disse løsninger (x,y) afsat som punkter i et koordinatsystem angiver *grafen for ligningen* $y=2x+3$. Denne graf er en ret linje:

$plot(2x+3) =$



Bemærk, at man ikke skal skrive *y* i Maple, når grafen plottes.
2. aksen har fået tilføjet navnet *y* ved at højreklikke på aksen og vælge 'Axes', 'Labels' og 'Edit Vertical'.

Opgaverne 432*

Hvis vi får at vide, at en ret linje har hældningen -5 og skærer y-aksen i 3, kan vi angive ligningen for den rette linje til at være $y=-5x+3$; $G=\mathbb{R}^2$. Vi kan også tegne den rette linje ved at begynde i punktet $(0,3)$, derefter gå vandret én ud til højre og 5 enheder lodret ned og sætte et punkt dér. Den rette linje kan så tegnes gennem disse to punkter, for som Euklid siger i sit første postulat: *Lad det være forudsat, at man kan trække en ret linje fra et hvilket som helst punkt til et hvilket som helst punkt* og i sit andet postulat *Lad det være forudsat, at man kan forlænge en begrænset ret linje ud i ét.*

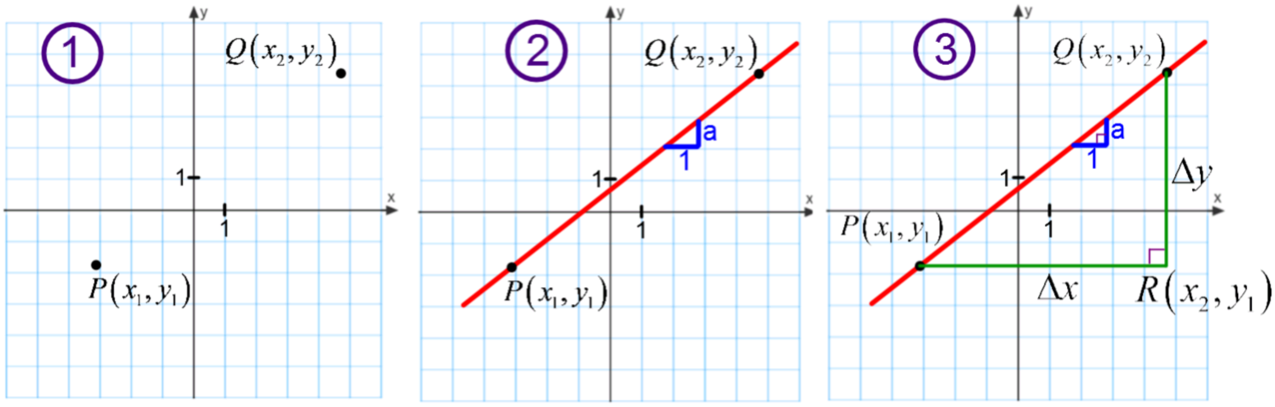
Men ud af dette kan vi jo også se, at vi alene ud fra to kendte punkter på linjen må kunne tegne linjen og dermed også kunne bestemme ligningen for linjen. Lad os se på, hvordan det gøres:

Sætning 4: Lad punkterne (x_1,y_1) og (x_2,y_2) være to punkter på en ikke-lodret ret linje.

Da vil hældningskoefficienten a for den rette linje være givet ved: $a=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Og skæringen med y-aksen vil være givet ved: $b=y_2-a\cdot x_2=y_1-a\cdot x_1$

Bevis 4: Vi har fået givet to punkter $P(x_1,y_1)$ og $Q(x_2,y_2)$, hvor $x_1\neq x_2$, for hvis punkterne havde ens førstekoordinater, ville de ligge lodret over hinanden, og vi ville dermed ikke have en ikke-lodret ret linje.



1: De to punkter er på tegningen placeret med Q til højre for P, men det siger vores sætning ikke noget om. Så du skal hele vejen igennem beviset også tænke over, hvordan argumenterne ville være, hvis vi havde Q til venstre for P eller længere nede end P.

2: Vi benyttet Euklids første postulater og tegner en ret linje gennem de to punkter. Vi markerer også med den lille blå trekant, at vi kan angive en hældning for linjen.

3: Nu tegnes en vandret linje ud fra P og en lodret linje gennem Q, og deres skæringspunkt kaldes R, og det får ud fra konstruktionen koordinatsættet (x_2,y_1). Som i det forrige bevis har vi nu to retvinklede trekanter (blå og grøn), der også er ensvinklede, fordi de grønne og blå linjer er parallelle og skæres af den samme røde linje.

I den grønne trekant har man – pga. den indbyrdes beliggenhed af P og Q – at:

$|QR|=\Delta y=y_2-y_1$

$|PR|=\Delta x=x_2-x_1$

Begge disse størrelser er på tegningen positive.

Vores viden om ensvinklede trekanter giver os:

$$\frac{\Delta y}{a}=\frac{\Delta x}{1} \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a}{1} \Leftrightarrow a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Vi har hermed vist udtrykket for hældningen.
Da både P og Q ligger på vores rette linje, opfylder de vores ligning, dvs. hvis vi indsætter koordinaterne i vores ligning, får vi et sandt udsagn. Der gælder altså:

$y_1=a\cdot x_1+b \Leftrightarrow b=y_1-a\cdot x_1$

$y_2=a\cdot x_2+b \Leftrightarrow b=y_2-a\cdot x_2$

Eksempel 5: En ikke-lodret ret linje går gennem punkterne (3,8) og (9,24). Vi vil gerne bestemme ligningen for denne rette linje:

Vi kan frit vælge, hvilket punkt vi vil lade være det første. Her vælger vi:

$$(\underset{x_1}{3},\underset{y_1}{8}) \quad (\underset{x_2}{9},\underset{y_2}{24})$$

Vi kan så bestemme hældningen: $a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{24-8}{9-3}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$

Når vi kender hældningen, kan vi bestemme skæringen med y-aksen:

$$b=y_1-a\cdot x_1=8-\frac{8}{3}\cdot 3=8-8=0$$

Dvs. vores ligning er $y=\frac{8}{3}\cdot x+0$ eller bare $\underline{\underline{y=\frac{8}{3}\cdot x}}$

I det specielle tilfælde, hvor b-værdien er 0, kalder man sammenhængen for en *(ligefrem) proportionalitet*. Denne type sammenhæng ser vi snart på.

Eksempel 6: En ikke-lodret ret linje går gennem punkterne (-2,5) og (7,-3). Vi vil gerne bestemme ligningen for denne rette linje:

Vi tager punkterne i den rækkefølge, de står, og får dermed:

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-3-5}{7-(-2)}=\frac{-8}{9}=-\frac{8}{9}$$

Da vi nu kender hældningen, kan vi bestemme skæringen med y-aksen:

$$b=y_1-a\cdot x_1=5-\left(-\frac{8}{9}\right)\cdot(-2)=5-\frac{16}{9}=\frac{45}{9}-\frac{16}{9}=\frac{29}{9}$$

Hermed er vores ligning:

$$y=-\frac{8}{9}\cdot x+\frac{29}{9}$$

Opgaverne 433*

Bemærk, at udtrykket for a også gælder for negative hældninger. På vores tegning ville Q så bare have ligget længere nede end vores P, og i vores brøk ville vi derfor som i eksemplet ovenfor få en negativ tæller og en positiv nævner, dvs. brøken ville blive negativ, hvilket passer med antagelsen om den negative hældning.

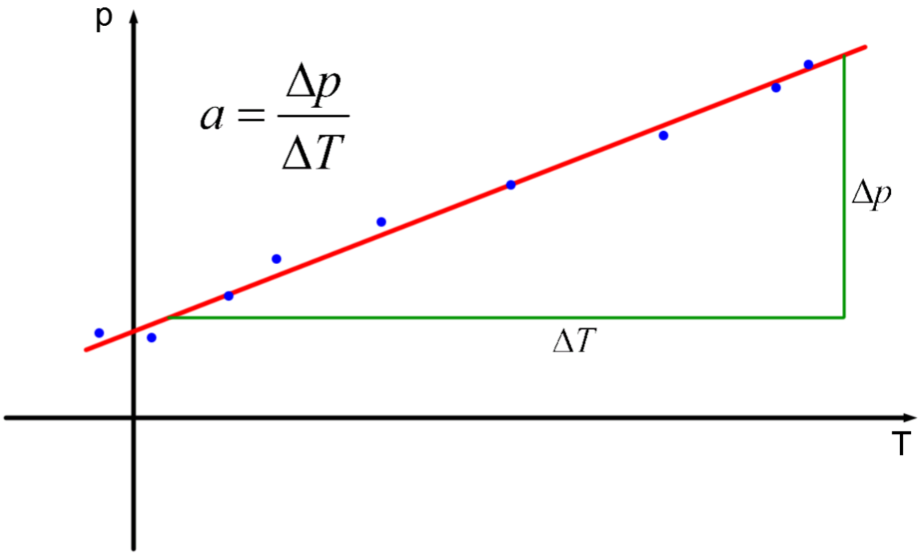
Bemærk også, at det er ligegyldigt hvilket af punkterne, der er tegnet længst til venstre. Udtrykket $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ giver samme værdi som $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, da man bare skifter fortegn i både tæller og nævner. Vi kunne derfor også have skrevet: $a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

Men man benytter generelt (og ikke bare inden for matematik) tilvækstsymbolet Δ som:

$\Delta y = y_2 - y_1 = y_{slut} - y_{start} = y_{efter} - y_{før} \cdots$

Og vi vil gerne bare kunne skrive: $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Eksempel 7: Vi ser på en situation, hvor vi har målt en række sammenhørende værdier af tryk p og temperatur T, og vi regner med en lineær model og tegner derfor en ret linje:



Vi ønsker at bestemme hældningen og tegner derfor ud fra linjen den grønne trekant, hvor vi kan aflæse Δp og ΔT og dermed beregne a.

Sammenhængen $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow \Delta y = a \cdot \Delta x$ fortæller os også en helt generel ting om lineære sammenhænge:

Sætning 5: Hvis der gælder en lineær sammenhæng mellem x og y, hvor hældningen for den pågældende ligning er a, vil man, hvis man øger x-værdien med værdien Δx, opnå en forøgelse af y-værdien med $a \cdot \Delta x$.

Bemærk, at ovenstående sætning gælder uanset hvilken x-værdi, du tager udgangspunkt i, dvs. for en lineær sammenhæng gælder det, at hvis man gentagne gange øger den uafhængige variabel med en fast værdi m, vil den afhængige variabel hver gang øges med en fast værdi n, og sammenhængen mellem værdierne er $n = a \cdot m$.

Vores udledte sammenhæng $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ kan også anvendes, hvis vi i stedet for at arbejde med to faste punkter forestiller os, at vi har et fast punkt (x_0, y_0) på en ret linje, samt kender linjens hældning *a*. Vi ser på et variabelt punkt (x, y), der altså repræsenterer alle punkter på linjen. Benytter vi disse to punkter – et fast og et variabelt – i formlen, får vi: $a = \dfrac{y - y_0}{x - x_0} \Leftrightarrow y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$

Dette fortæller os altså:

Sætning 6: Hvis en ret linje går gennem punktet (x_0, y_0) og har hældningen *a*, er ligningen for den rette linje:

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0).$$

Eksempel 8: Om en ret linje ved vi, at den har hældningen 7 og går gennem punktet (-5,3).
Vi vil nu bestemme en ligning for denne rette linje og benytter derfor vores ligning:

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

$$y - 3 = 7 \cdot (x - (-5)) \Leftrightarrow y - 3 = 7x + 35 \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 7x + 38}}$$

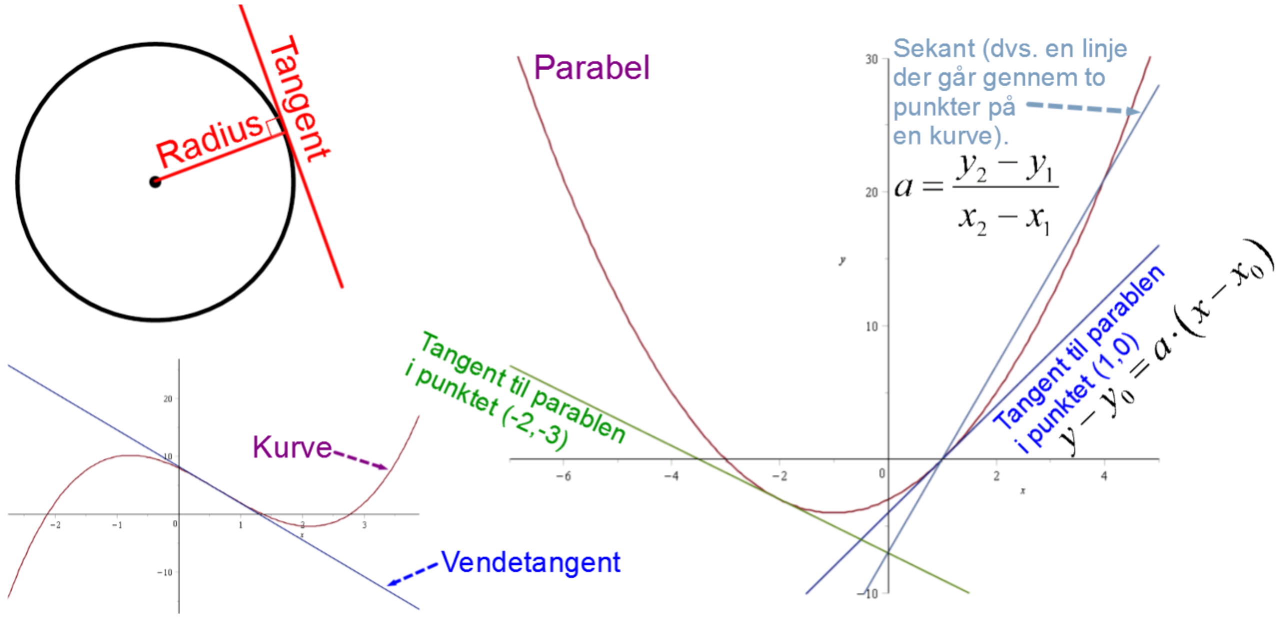
Opgaverne 434*

TANGENTER

En af grundene til at behandle rette linjer grundigt er, at tangenter er rette linjer, og tangenter og deres hældninger er centrale i mange situationer (differentialregning går groft sagt ud på at beregne og fortolke tangenthældninger).

De fleste kender tangenter som et begreb i forbindelse med cirkler, men helt generelt og lidt løst gælder:

Definition 4 (uden differentialregning): Givet en kurve, der er glat omkring punktet *P* (dvs. den er sammenhængende i *P* og laver ikke et ”knæk”), er *tangenten* til kurven i punktet *P* den rette linje, der går gennem punktet *P* og er den bedste lineære tilnærmelse til kurven i et lille, bitte område omkring *P*.



I forbindelse med cirkler står tangenten i et punkt på cirklen ortogonalt på den radius, der går ud til det pågældende punkt. Men bemærk også, hvordan Definition 4 passer, da tangenten og cirklen er næsten sammenfaldende i et meget lille område omkring punktet.
Hvis man har en snor med en kugle for enden og slynger den rundt i en cirkelbevægelse, vil kuglen følge tangentens retning, hvis snoren knækker.

På figuren er tegnet to tangenter til parablen (gennem to forskellige punkter). Hvis man selv prøver at tegne en tangent, opdager man det uklare i Definition 4, for det kan være svært at se, at der lige præcis er én ret linje, der er bedre end alle andre, og hvordan den skal tegnes. **I de tilfælde, hvor du er nødt til at tegne en tangent til en kurve, må du bare gøre det efter bedste evne.**
Vi skal senere under differentialregning lære en præcis metode. Den tager udgangspunkt i en *sekant* (der ikke må forveksles med en *transversal*, der går gennem punkter på to forskellige linjer):

Definition 5: En *sekant* er en ret linje, der går gennem to punkter på en kurve. Linjestykket mellem de to punkter kaldes en *korde*.

Den præcise (matematiske) metode til at bestemme tangenten til en kurve i et bestemt punkt går ud på at tage udgangspunkt i en sekant, hvor det ene punkt er det punkt, hvor man gerne vil finde tangenten (se figuren på side 16). Prøv at se, hvad der sker med sekanterne, hvis du lader det andet punkt på kurven nærme sig det punkt, hvor du vil finde tangenten. Når man gør det på en bestemt måde matematisk, kommer man frem til tangenthældningen, og det er det, vi skal beskæftige os med i differentialregning.

Da sekanter er baseret på to punkter, får du altså brug for $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, og da man med tangenter arbejder med deres hældninger og et røringspunkt, får du brug for $y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$.

En lidt speciel tangent ses på figuren nederst til venstre. En tangent, hvor kurven løber på forskellige sider af tangenten omkring røringspunktet, kaldes en *vendetangent*. Vendetangenter kan ofte være interessante. F.eks. har denne konkrete kurve (der er grafen for et såkaldt tredjegradspolynomium) netop én vendetangent, og den ligger det sted mellem toppene, hvor funktionen har sin laveste væksthastighed, dvs. der hvor det går ”hurtigst nedad”.

Ordet *hældning* anvendes KUN om rette linjer. Dvs. parablen og kurven på figuren har IKKE hældninger nogen steder. Hvis man snakker om hældninger i et punkt på kurven, mener man **hældningen for tangenten til kurven i det pågældende punkt**.

Hældning og vinkel for rette linjer

Hvis man har en skrå ret linje i et koordinatsystem, vil den skære begge koordinatakser.
Hvis vi har ligningen for den rette linje på formen $y = a \cdot x + b$ (hvor $a \neq 0$, da det er en skrå ret linje), ved vi allerede, at den skærer *y*-aksen i *b*.
Dette kan vi også komme frem til ved at udnytte følgende vigtige observation:

***x*-aksen består af alle de punkter i planen, der har *y*-koordinaten 0.**
***y*-aksen består af alle de punkter i planen, der har *x*-koordinaten 0.**

Tænk grundigt over dette. Du får brug for denne tankegang mange gange.

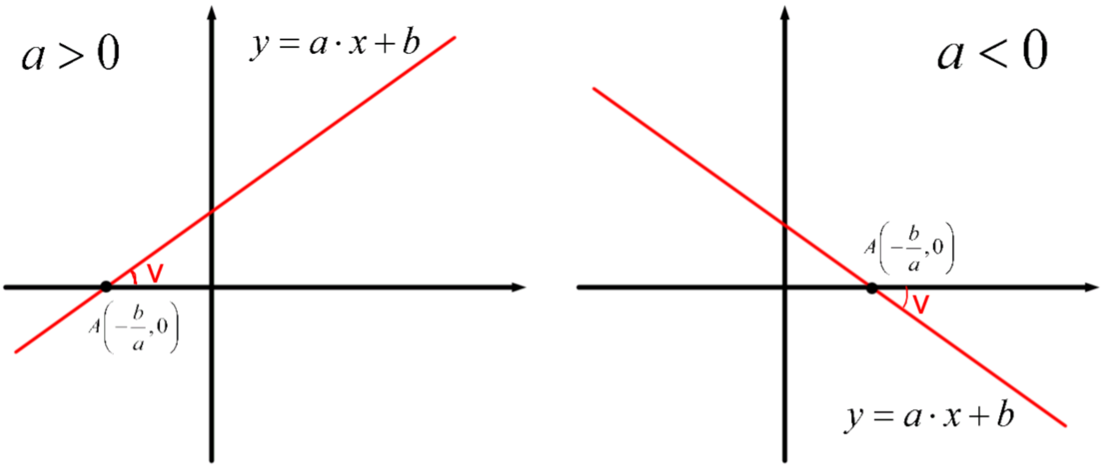
Hvis vi altså vil finde ud af, hvor vores linje med ligningen $y = a \cdot x + b$ skærer y-aksen, så udnytter vi, at vi ved, at på y-aksen er $x = 0$ i samtlige punkter. Så det indsættes i ligningen: $y = a \cdot 0 + b = 0 + b = b$.
Hermed har vi vist (hvad vi godt vidste i forvejen), at skæringen med y-aksen er b.

Når vi vil finde skæringen med x-aksen, udnytter vi, at på x-aksen er $y = 0$ i alle punkter. Så vi har:
$0 = a \cdot x + b \Leftrightarrow -a \cdot x = b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$ (vi må gerne dividere med a, da $a \neq 0$).

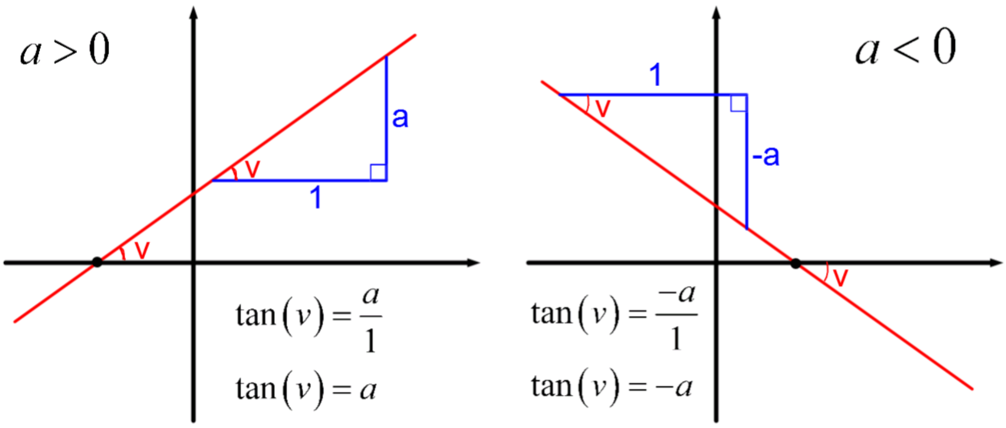
Vi ved nu, at den rette linje med ligningen $y = a \cdot x + b$ går gennem punkterne $(0,b)$ og $\left(-\frac{b}{a},0\right)$

Opgaverne 435*

Vi vil nu finde sammenhængen mellem linjens hældning og den spidse vinkel, som linjen danner med x-aksen (den stumpe vinkel er supplementvinklen til den spidse vinkel):



På ovenstående figur er situationen tegnet for både linjer med positiv og negativ hældning. I begge situationer er angivet den vinkel v, som vi er interesseret i.
For at finde sammenhængen mellem vinklen og hældningen indtegnes de retvinklede trekanter, der benyttes til at angive hældningen, og vi opdager, at vinklen med x-aksen optræder i denne trekant:



Vi benytter, at tangens til en spids vinkel i en retvinklet trekant er givet ved: $\tan(v) = \frac{mod}{hos}$.
I denne situation regner vi ikke vinklen med fortegn, og vores formler giver os da også positive vinkler, da $-a$ er en positiv størrelse, når a er negativ.

Vi kan imidlertid slå de to formler sammen i én, hvis vi benytter den numeriske værdi af hældningen, og vi kommer dermed frem til følgende sætning:

Sætning 7: Den spidse vinkel v, som en skrå ret linje med ligningen $y = a \cdot x + b$ danner med x-aksen, er:

$$v = \tan^{-1}\left(|a|\right)$$

Eksempel 9: For den rette linje med ligningen $y = 2 \cdot x + 3$ gælder:

Den skærer y-aksen i 3.

Den skærer x-aksen i $-\frac{b}{a} = -\frac{3}{2}$.

Den spidse vinkel, som den danner med x-aksen er: $v = \tan^{-1}\left(|a|\right) = \tan^{-1}(2) = 63{,}4°$

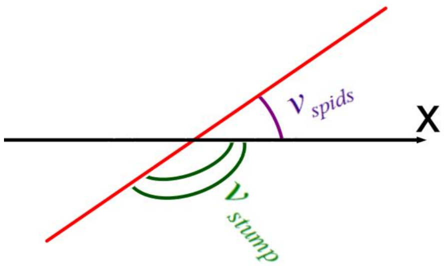
Eksempel 10: For den rette linje med ligningen $y = -\frac{3}{7} \cdot x + 9$ gælder:

Den skærer y-aksen i 9.

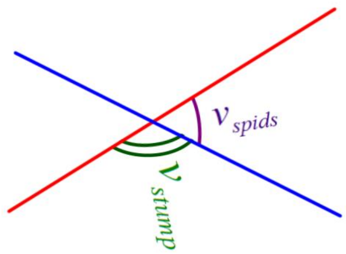
Den skærer x-aksen i $-\frac{b}{a} = -\frac{9}{\left(-\frac{3}{7}\right)} = 9 \cdot \frac{7}{3} = 3 \cdot 7 = 21$.

Den spidse vinkel, som den danner med x-aksen, er: $v = \tan^{-1}\left(|a|\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{7}\right) = 23{,}2°$

Sætning 7 angiver, hvordan man finder den **spidse** vinkel, som den skrå linje danner med x-aksen. Men der vil jo også være en stump vinkel (se figuren til venstre nedenfor):



$$\boxed{v_{spids} + v_{stump} = 180°}$$



Den spidse og den stumpe vinkel udgør tilsammen en lige vinkel, dvs. de er supplementvinkler. Dette gælder helt generelt for to ikke-ortogonale linjer, der skærer hinanden (figuren til højre ovenfor). Man har altså:

Sætning 7,3: To rette linjer, der hverken er ortogonale eller parallelle, danner ved skæringspunktet to kongruente spidse vinkler (topvinkler) og to kongruente stumpe vinkler (topvinkler), og sammenhængen mellem de spidse og stumpe vinkler er:

$$v_{spids} + v_{stump} = 180°$$

Nogle gange anvendes ordvalget ”vinklen mellem linjerne”. Hermed menes ”enten den ene af de spidse eller den ene af de stumpe vinkler”. Andre gange spørges der efter ”den stumpe vinkel”, hvormed der egentlig menes ”den ene af de to kongruente stumpe vinkler”.

Når man skal finde vinklen mellem to skrå, ikke-parallelle linjer (dvs. enten den spidse eller den stumpe vinkel (dvs. enten den ene af de to kongruente spidse vinkler eller den ene af de to kongruente stumpe vinkler)), kan man benytte følgende sætning:

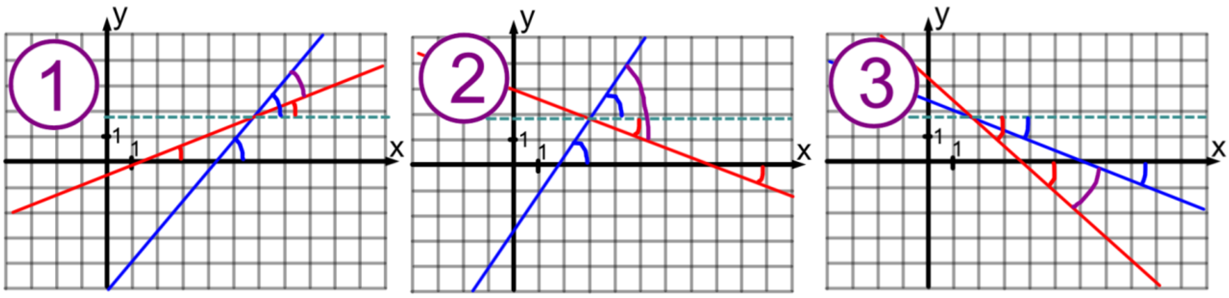
Sætning 7,7: To skrå, ikke-parallelle linjer danner ved deres skæringspunkt vinklen:

$$v = \tan^{-1}\left(a_{\text{størst}}\right) - \tan^{-1}\left(a_{\text{mindst}}\right)$$

hvor $a_{\text{størst}}$ er den største af de to hældningskoefficienter og a_{mindst} den mindste.

Bemærk, at sætningen ikke siger noget om, hvorvidt man finder den spidse eller den stumpe vinkel (eller en ret vinkel, hvis de to linjer er ortogonale).

Bemærk også forskellen fra Sætning 7. Der er ikke numerisktegn om hældningen. Ved at undlade numerisktegnet regner man vinkler med fortegn, og dette sikrer, at sætningen fungerer i alle de tre situationer, man kan komme ud for (se figuren nedenfor). I alle tre tilfælde er det den blå linje, der har den største hældning (husk, at f.eks. er $-2 > -5$), og i alle tre situationer er vinklerne, som linjerne danner med *x*-aksen, angivet med rødt og blåt, mens vinklen mellem linjerne er angivet med lilla:



1) To linjer med positive hældningskoefficienter. Begge linjer danner positive vinkler med *x*-aksen, og den lilla vinkel er så forskellen mellem de to vinkler.
2) En linje med positiv og en linje med negativ hældning. Den blå linje danner en positiv vinkel, og den røde danner en negativ vinklen. Når man i formlen trækker den røde vinkel fra den blå, får man derfor lagt den numeriske værdi af vinklerne sammen.
3) To negative vinkler dannes. Men når man trækker den mindste fra den største, får man en positiv vinkel (f.eks. $v_{lilla} = -20° - (-70°) = -20° + 70° = 50°$).

Eksempel 10,5: Vi vil bestemme vinklen mellem linjerne med ligningerne

$$y = \frac{7}{3}x + \frac{18}{5} \quad \text{og} \quad y = -3x + 2$$

Det bemærkes, at $\frac{7}{3} > -3$, så man har:

$$v = \tan^{-1}\left(a_{størst}\right) - \tan^{-1}\left(a_{mindst}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{7}{3}\right) - \tan^{-1}(-3) = 138{,}37°$$

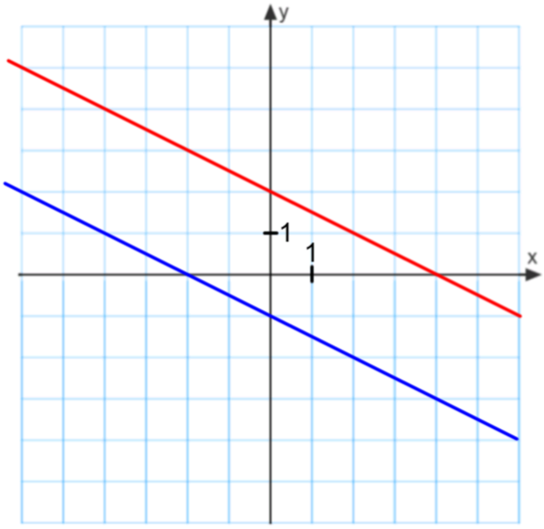
I dette tilfælde fik vi altså den stumpe vinkel. Hvis det er den spidse vinkel, vi er interesseret i, kan vi finde den ved:

$$v_{spids} = 180° - v_{stump} = 180° - 138{,}37° = 41{,}63°$$

Opgaverne 436*

Rette linjer og isometrier

Når vi arbejder med parallelforskydninger af rette linjer, støder vi på et mindre problem:



Vores udgangspunkt er den røde rette linje.

Er den blå rette linje en parallelforskydning med -6 langs *x*-aksen eller med -3 langs *y*-aksen?

Dette spørgsmål kan ikke besvares.

Men hvis vi ser på ligningen for en ret linje, kan vi godt tjekke, at vores generelle sætning omkring isometrier (Sætning 2) fungerer.

Parallelforskydninger:
Vi husker, at man parallelforskyder med *m* langs *x*-aksen ved at erstatte alle *x*'er i ligningen med $x-m$, og vi parallelforskyder med *n* langs *y*-aksen ved at erstatte alle *y*'er i ligningen med $y-n$.

Langs *x*-aksen: Vi ved, at den skrå rette linje med ligningen $y=a\cdot x+b$ skærer *x*-aksen i $-\frac{b}{a}$.

Vi indsætter nu $x-m$ i stedet for *x* og får: $y=a\cdot(x-m)+b \Leftrightarrow y=a\cdot x-a\cdot m+b$.

Skæringen med *x*-aksen bestemmes ved at sætte *y* = 0:

$$0=a\cdot x-a\cdot m+b \Leftrightarrow -a\cdot x=-a\cdot m+b \Leftrightarrow x=\frac{-a\cdot m+b}{-a} \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{-a\cdot m}{-a}+\frac{b}{-a}=m-\frac{b}{a}$$

Vi ser altså, at vores linje nu skærer i $m-\frac{b}{a}$, hvor den inden parallelforskydningen skar i $-\frac{b}{a}$. Desuden bemærker vi, at vores hældning ikke har ændret sig, for koefficienten foran *x* er stadig *a*. Så vi har som forudsagt fået parallelforskudt linjen med *m* langs *x*-aksen.

Langs *y*-aksen: Vi ved, at den skrå rette linje med ligningen $y=a\cdot x+b$ skærer *y*-aksen i *b*.

Vi indsætter nu $y-n$ i stedet for *y*: $y-n=a\cdot x+b \Leftrightarrow y=a\cdot x+(b+n)$.

Denne rette linje har hældningen *a* og skæringen med *y*-aksen $(b+n)$. Så vi har fået parallelforskudt vores linje med *n* langs *y*-aksen.

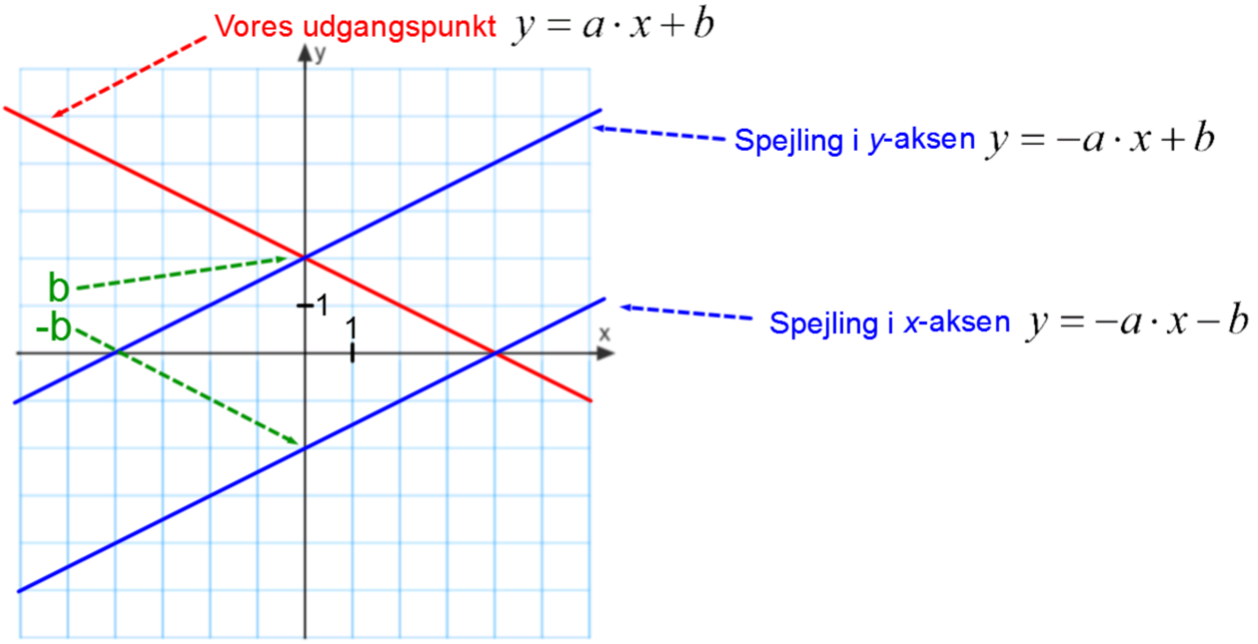
Spejlinger:
Vi spejler i *x*-aksen ved at erstatte *y* med –*y*, og vi spejler i *y*-aksen ved at erstatte *x* med –*x*.

Spejling i *y*-aksen: Vi erstatter *x* med –*x*: $y = a\cdot(-x)+b \Leftrightarrow\ y = -a\cdot x + b$.

Vi ser altså, at vores skæring med *y*-aksen ikke ændrer sig, mens vores hældning skifter fortegn. Dette stemmer netop med en spejling i *y*-aksen.

Spejling i *x*-aksen: Vi erstatter *y* med –*y*: $-y = a\cdot x + b \Leftrightarrow\ y = -a\cdot x - b$.

Vi ser altså, at vores skæring med *y*-aksen ændrer fortegn, og det samme gør vores hældning. Dette stemmer netop med en spejling i *x*-aksen.



Rotationer:
Vi roterer med vinklen *w* omkring origo ved at erstatte *x* med $x\cdot\cos(w)+y\cdot\sin(w)$ og

y med $y\cdot\cos(w)-x\cdot\sin(w)$. Vi får dermed:

$y\cdot\cos(w)-x\cdot\sin(w) = a\cdot(x\cdot\cos(w)+y\cdot\sin(w))+b$

Vi kunne så isolere *y* i udtrykket og dermed komme frem til, at vi igen fik en ret linje, men nu med en ny hældning og skæring.

Vi vælger dog i dette tilfælde kun at beskæftige os med den helt særlige rotation på 90°, da den vil give os en ret linje ortogonal med den oprindelige, og det får vi brug for i mange situationer:

Vi får altså:

$$y\cdot\cos(90°)-x\cdot\sin(90°) = a\cdot(x\cdot\cos(90°)+y\cdot\sin(90°))+b \Leftrightarrow$$
$$y\cdot 0 - x\cdot 1 = a\cdot(x\cdot 0 + y\cdot 1)+b \Leftrightarrow$$
$$-x = a\cdot y + b \Leftrightarrow$$
$$a\cdot y = -x-b \Leftrightarrow\ y = -\frac{1}{a}\cdot x - \frac{b}{a}$$

Det væsentlige for os at bemærke i denne situation er hældningen for den nye rette linje. Den er $-\frac{1}{a}$. Vi har hermed vist følgende sætning:

Sætning 8: To skrå rette linjer er ortogonale, netop når det om deres hældninger a og c gælder:

$$a \cdot c = -1$$

Bemærk, at sætningen ikke gælder for lodrette og vandrette linjer af den simple årsag, at lodrette linjer ikke har nogen veldefineret hældning. Vi skal senere se, hvordan man med vektorer har en metode til at finde ortogonale linjer, der virker i alle situationer. Men generelt er det ikke noget problem, at ovenstående sætning ikke gælder i tilfældet vandret-lodret, for det er det simpleste tilfælde, som du vil kunne klare uden hjælp af sætninger.

Eksempel 11: Punktet $A(3,-2)$ ligger på den rette linje l med ligningen $y = 2x - 8$.

Vi vil gerne bestemme en ligning for den rette linje m, der går gennem punktet A og står vinkelret på l:

Vi begynder med at bestemme hældningen a for m, og her hjælper sætning 8 os:

$$a \cdot c = -1$$

$$a \cdot 2 = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Vi har hermed hældningen for m, og da vi også kender punktet A på linjen, har vi:

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

$$y - (-2) = -\frac{1}{2} \cdot (x - 3) \Leftrightarrow y + 2 = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow \underline{\underline{y = -\frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2}}}$$

Eksempel 12: Punktet $A(-5,4)$ ligger IKKE på den rette linje l med ligningen $y = -\frac{1}{3}x + 4$.

Vi vil gerne bestemme en ligning for den rette linje m, der går gennem punktet A og står vinkelret på l:

Vi begynder med at bestemme hældningen a for m:

$$a \cdot c = -1$$

$$a \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow a = 3$$

Det er fuldstændig ligegyldigt, om punktet A ligger på vores oprindelige linje l eller ej, for det væsentlige er, at vi skal lade linjen m gå gennem punktet. Vi har dermed igen et punkt og en hældning og bestemmer dermed ligningen for m:

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

$$y - 4 = 3 \cdot (x - (-5)) \Leftrightarrow y - 4 = 3 \cdot x + 15 \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 3x + 19}}$$

Opgaverne 437*

Eksempel 13: En cirkel har centrum i $C(-2,-1)$, og punktet $P(2,2)$ ligger på cirklen.

Vi vil gerne bestemme ligningen for den tangent til cirklen, der rører i *P*.
Vi bemærker først, at tangenten står vinkelret på den radius, der går fra *C* til *P*, så først bestemmes hældningen for denne radius ud fra kendskabet til de to punkter:

$$a_r = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-(-1)}{2-(-2)} = \frac{3}{4}$$

Hældningen a_t for vores tangent bestemmes så ud fra vores viden om sammenhængen mellem hældningerne for ortogonale linjer:

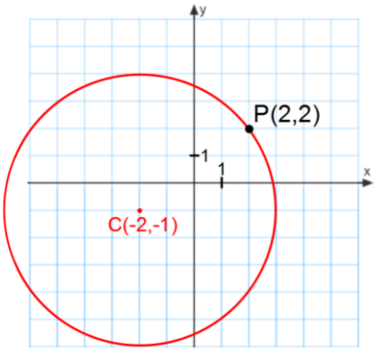
$$a_r \cdot a_t = -1$$

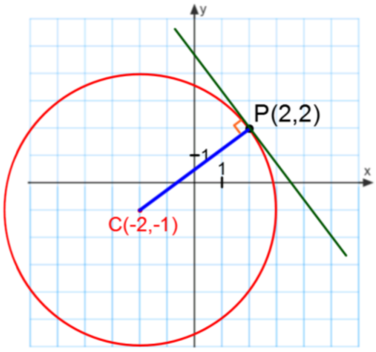
$$\frac{3}{4} \cdot a_t = -1 \Leftrightarrow a_t = -\frac{4}{3}$$

Tangenten går gennem *P* og har ovenstående hældning, så dens ligning er:

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

$$y - 2 = -\frac{4}{3} \cdot (x-2) \Leftrightarrow y - 2 = -\frac{4}{3} \cdot x + \frac{8}{3} \Leftrightarrow \underline{\underline{y = -\frac{4}{3}x + \frac{14}{3}}}$$





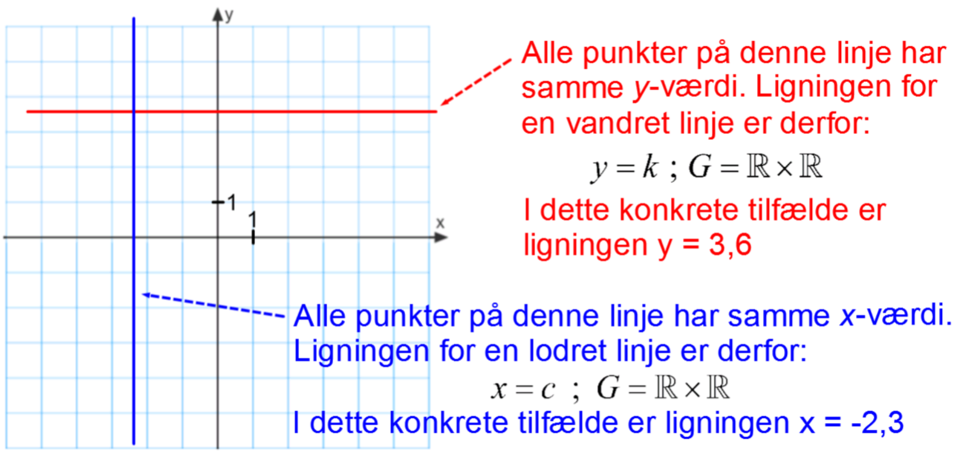
Opgaverne 438*

En anden ligning for en ret linje

Vi har set på ikke-lodrette rette linjer og angivet dem ved ligningen $y = a \cdot x + b$.

Vi skal nu se en anden form at angive rette linjer på, der kan anvendes til alle typer af rette linjer, men som ikke er så lette at aflæse som $y = a \cdot x + b$, hvor vi jo direkte kan aflæse hældning og skæring med *y*-aksen.

Lad os først se på lodrette og vandrette linjer:



Der skal nu argumenteres for, at en vilkårlig ret linje kan angives med ligningen $a\cdot x+b\cdot y+c=0$, hvor ikke både *a* og *b* er nul.

Det er meget vigtigt at være opmærksom på, at koefficienterne *a* og *b* har en anden betydning end tidligere, dvs. de står IKKE for hældning og skæring.

Vi deler analysen op i to dele:

Antager $b\neq 0$: Vi må derfor gerne forkorte ligningen med *b* og kan dermed lave omskrivningen:

$$a\cdot x+b\cdot y+c=0 \Leftrightarrow \frac{a}{b}\cdot x+y+\frac{c}{b}=0 \Leftrightarrow y=-\frac{a}{b}\cdot x-\frac{c}{b}$$

Vi ser her, at vi har fået omskrevet ligningen til vores kendte ligning for en ret linje, og vi kan aflæse, at hældningen er $-\frac{a}{b}$, og skæringen med *y*-aksen er $-\frac{c}{b}$.

Vi ser altså, at hvis $a=0$, er hældningen 0, dvs. vi har i så fald en vandret linje.
Hvis $a\neq 0$, har vi en skrå linje, og skæringen med *x*-aksen kan bestemmes ved at sætte $y=0$: $a\cdot x+b\cdot 0+c=0 \Leftrightarrow a\cdot x=-c \Leftrightarrow x=-\frac{c}{a}$

Antager $b=0$: Vi har sagt, at ikke både *a* og *b* må være nul, så hvis $b=0$, er $a\neq 0$. Vi har så:

$$a\cdot x+0\cdot y+c=0 \Leftrightarrow a\cdot x=-c \Leftrightarrow x=-\frac{c}{a}.$$

Dvs. vi har så en lodret linje.

Vores analyse har ført os frem til følgende:

Sætning 9: Ligningen $a\cdot x+b\cdot y+c=0$; $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, hvor $(a,b)\neq(0,0)$, er ligningen for en ret linje.
Hvis $b=0$, er det en lodret linje.
Hvis $a=0$, er det en vandret linje.
Hvis $b\neq 0 \wedge a\neq 0$, er det en skrå linje med hældningen $-\frac{a}{b}$ og skæringspunkterne $\left(0,-\frac{c}{b}\right)$ og $\left(-\frac{c}{a},0\right)$ med koordinatakserne.

Opgaverne 439*

Umiddelbart kan det virke som en tåbelig måde at angive en ret linje, når man har en simplere ligning, men når vi kommer til vektorregning, får vi brug for den igen, da vi vil opdage, at vi kan aflæse en såkaldt normalvektor til linjen som $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. Og inden vektorregning er du også nødt til at vide, at du har med en ret linje at gøre, hvis f.eks. ligningen $2x-3\cdot y+7=0$ bliver stukket ud.

I Sætning 9 så vi særskilt på situationerne, hvor $a=0$, og hvor $b=0$. Vi skal nu se på $c=0$:

Proportionalitet:

I eksempel 5 stiftede vi bekendtskab med en særlig slags lineær sammenhæng, der kunne beskrives ved ligningen $y = a \cdot x$, dvs. hvor $b = 0$. Det er en så vigtig sammenhæng, at den har sit eget navn. Det kaldes en *proportionalitet* eller en *ligefrem proportionalitet*.

Definition 6: Variablen *y* siges at være (*ligefrem*) *proportional* med variablen *x* med *proportionalitetsfaktoren k*, hvis sammenhængen kan beskrives ved ligningen:

$$y = k \cdot x \qquad G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

hvor *k* er en konstant $(k \neq 0)$. Man kalder også *k* for *proportionalitetskonstanten*.

At *y* er proportional med *x*, angives med tegnet $\propto$, dvs. $y \propto x$

Eksempel 14:

- Hvis sammenhængen mellem variablerne *x* og *y* er givet ved ligningen $y = 5 \cdot x$, er ***y ligefrem proportional med x med proportionalitetsfaktoren 5***.
- Sammenhængen mellem massen *m* og rumfanget *V* af et stof med densiteten ρ (der er en konstant for det pågældende stof i den pågældende tilstand) er givet ved $m = \rho \cdot V$, så massen er proportional med rumfanget, og densiteten er proportionalitetsfaktoren.
- Sammenhængen mellem massen *m* og stofmængden *n* af et stof med den molare masse *M* er givet ved $m = M \cdot n$, så massen er ligefrem proportional med stofmængden, og proportionalitetsfaktoren er den molare masse.
- Sammenhængen mellem den potentielle energi E_{pot} og højden *h* over et valgt nulpunkt for en mursten med massen *m* er givet ved $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$, hvor *g* er tyngdeaccelerationen, der kan regnes for at være konstant nær jordoverfladen. Dermed er den potentielle energi proportional med højden, og proportionalitetsfaktoren er $(m \cdot g)$.

Ovenstående er kun enkelte eksempler på proportionelle sammenhænge inden for naturvidenskaben. Prøv selv at finde flere. Det vrimler med dem.

Da vores ligning blot er et specialtilfælde af $y = k \cdot x + b$, hvor $b = 0$, ved vi, at grafen for en ligefrem proportionalitet er en ret linje med hældningen *k*, der skærer *y*-aksen i 0.

Vi kan desuden se, at $y = k \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{1}{k} \cdot y \quad (k \neq 0)$. Dette fortæller os, at *y* er proportional med *x* med proportionalitetsfaktoren *k*, netop hvis *x* er proportional med *y* med proportionalitetsfaktoren $\frac{1}{k}$. Vi kan derfor også blot sige, at *x* og *y* er proportionale. Problemet ved at sige dette er dog, at man så ikke kan sætte tal på proportionalitetsfaktoren. For bemærk følgende vigtige pointe:

Hvis *y* er proportional med *x* med proportionalitetsfaktoren 7, gælder ligningen $y = 7 \cdot x$.

Hvis *x* er proportional med *y* med proportionalitetsfaktoren 7, gælder ligningen $y = \frac{1}{7} \cdot x$.

Ved omskrivning af ligningen, der gælder for en proportionalitet, får man: $\frac{y}{x} = k$.

Man skal være opmærksom på, at denne omskrivning selvfølgelig kun er lovlig, hvis vi begrænser grundmængden til ikke at indeholde $x = 0$. Men ellers viser denne omskrivning, at forholdet mellem *y* og *x* er en konstant. Dvs. hvis *x* bliver *c* gange større, så bliver *y* også *c* gange større.
Vi ser også, at vi kun har brug for at kende ét punkt (der ikke er origo) for at bestemme hældningen/proportionalitetsfaktoren.

Et kort sidespring

Bemærk følgende egenskab ved brøken $\frac{y}{x}$ i ligningen $\frac{y}{x} = k$. Hvis vi ser på det konkrete tilfælde $\frac{y}{x} = 13$, gælder det, at uanset hvor lille en positiv værdi af *y*, vi vælger, vil brøken altid give 13, da *x* så også bare har en tilpas lille værdi. Hvis f.eks. $y = 0{,}13$, så er $x = 0{,}01$. Hvis $y = 0{,}0013$, så er $x = 0{,}0001$. Hvis $y = 0{,}00000026$, så er $x = 0{,}00000002$. Hvis $y = 0{,}000000000039$, så er $x = 0{,}000000000003$. Og hvis $y = 0{,}000000000000000000000013$,

er $x = 0{,}000000000000000000000001$

Men hvis *x* og *y* begge er 0 (hvilket de gerne må være, hvis vi har ligningen på formen $y = 13 \cdot x$), så er brøken ikke længere veldefineret. Men kunne man så ikke fristes til at sige, at brøken i dette tilfælde også gav 13, når nu den gav 13 i alle andre tilfælde, dvs. at i lige præcis dette tilfælde var $\frac{0}{0} = 13$? Denne problemstilling er central inden for differentialregning, og matematikere har forsøgt at løse den på forskellige måder. Det lykkedes først ordentligt med indførelsen af begrebet *grænseværdi*, som vi skal arbejde lidt med under emnet Uendeligheder og meget med under Differentialregning.

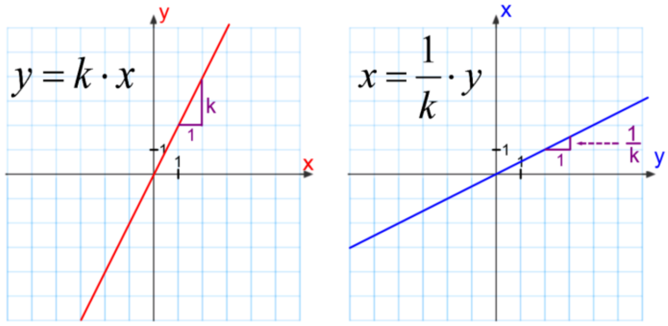
Sætning 10: Ligefrem proportionalitet.

- *y* er ligefrem proportional med *x* med proportionalitetsfaktoren *k*, netop hvis *x* er ligefrem proportional med *y* med proportionalitetsfaktoren $\frac{1}{k}$.

$$y = k \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{1}{k} \cdot y$$

- Grafen for en ligefrem proportionalitet er en ret linje gennem (0,0) med proportionalitetsfaktoren som hældning.

$y \propto x$



$x \propto y$

- Hvis *x* og *y* er proportionale, vil *y* blive *c* gange større, når *x* bliver *c* gange større.
- Hvis *x* og *y* er proportionale, er forholdet mellem dem konstant.

Eksempel 15: Det oplyses, at *y* er proportional med *x* med proportionalitetskonstanten *k*. Desuden oplyses det, at grafen for sammenhængen går gennem punktet (9,24). Bestem *k*.

Da *y* er proportional med *x*, gælder ligningen $y = k \cdot x$.

Vi indsætter punktets koordinater for at finde *k*:

$$24 = k \cdot 9 \Leftrightarrow k = \frac{24}{9} = \frac{3 \cdot 8}{3 \cdot 3} = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}$$

Eksempel 16: Det oplyses, at *x* og *y* er ligefrem proportionale. Udfyld nedenstående skema:

x	5		20
y		8	35

Da *x* og *y* er proportionale, er forholdet mellem dem konstant. Da vi kender et sæt af sammenhørende værdier, kan vi benytte dette til at finde forholdet:

$$\frac{y}{x} = \frac{35}{20} = \frac{7}{4}$$

Når *x*-værdien er 5, har vi altså:

$$\frac{y}{5} = \frac{7}{4} \Leftrightarrow y = \frac{7}{4} \cdot 5 = \frac{35}{4}$$

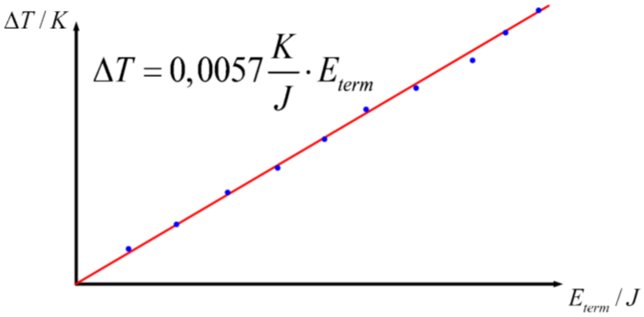
Når *y*-værdien er 8, har man:

$$\frac{8}{x} = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{8} = \frac{4}{7} \Leftrightarrow x = \frac{4}{7} \cdot 8 = \frac{32}{7}$$

Hermed bliver det udfylde skema:

x	5	$\frac{32}{7}$	20
y	$\frac{35}{4}$	8	35

Eksempel 17: Vi har udført et forsøg, hvor vi har opvarmet 400 g af et stof og målt temperaturstigningen og den tilførte energi:



Punkterne danner med god tilnærmelse en ret linje gennem (0,0), hvilket er i overensstemmelse med vores opvarmningsformel $E_{term} = m \cdot c \cdot \Delta T \Leftrightarrow \Delta T = \frac{1}{m \cdot c} \cdot E_{term}$.

Vores hældning kan altså bruges til at bestemme den specifikke varmekapacitet *c*:

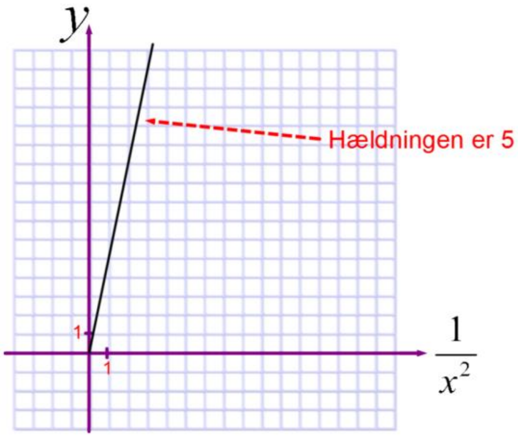
$$\frac{1}{m \cdot c} = 0,057 \frac{K}{J} \text{ dvs. } c = \frac{1}{m \cdot 0,0057 \frac{K}{J}} = \frac{1}{0,400 kg \cdot 0,0057 \frac{K}{J}} = 439 \frac{J}{kg \cdot K}$$

Opgaverne 440*

Eksempel 18: Vi har fået givet ligningen $y = \frac{5}{x^2}$ og er blevet bedt om i et koordinatsystem at tegne en ret linje, der beskriver denne sammenhæng.

Umiddelbart giver det jo ikke mening, for y og x er jo hverken proportionale eller beskrevet ved en lineær sammenhæng.

Men vi kan benytte et snedigt "trick", der består i at ændre, hvad der afsættes ud af koordinatakserne. Så vi omskriver udtrykket til $y = 5 \cdot \frac{1}{x^2}$, hvoraf det fremgår, at y er proportional med variablen $\frac{1}{x^2}$ med proportionalitetsfaktoren 5:



Læg godt mærke til hvilke variable, der afsættes ud af akserne.

Eksempel 19: Formlen for kinetisk energi er $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$, hvor m er massen, og v er farten.

Umiddelbart ligner det ikke en proportionalitet, men det er igen bare et spørgsmål om, hvordan man udtrykker det. I dette tilfælde kan man sige:
Den kinetiske energi er proportional med kvadratet på farten, og proportionalitetsfaktoren er det halve af massen.

Formlen for potentiel energi er $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$. Her skal man være opmærksom på, at både h og m kan varieres (vi regner g som konstant). Det afhænger altså af situationen, hvad man vil sige.

Hvis man kigger på det samme objekt, fungerer massen som en konstant, og derfor vil man sige *Den potentielle energi er proportional med højden h, og produktet af massen og tyngdeaccelerationen er proportionalitetsfaktoren.*

Hvis man kigger på en masse forskellige objekter i samme højde, er det højden, der fungerer som en konstant, og massen er vores variabel. Så siger man: *Den potentielle energi er proportional med massen m, og produktet af højden og tyngdeaccelerationen er proportionalitetsfaktoren.*

Eksempel 20: Du får at vide, at energien E af en fjeder er proportional med produktet af fjederkonstanten k og kvadratet på fjederens udstrækning x fra ligevægt, og proportionalitetsfaktoren er 0,5.
Opstil den formel, der beskriver ovenstående.
I sådan en situation skal du nærlæse teksten og finde de relevante ord. I dette tilfælde skal du lægge mærke til *proportional*, *produktet* og *kvadratet*. Disse tre ord har en helt bestemt matematisk betydning, som du skal benytte i din formel.
Kvadratet på x betyder, at der skal stå x^2.
Produktet af k og x^2 skrives $k \cdot x^2$.
Og det er netop denne størrelse, som energien er proportional med (med proportionalitetsfaktoren 0,5). Dermed gælder $E = 0,5 \cdot k \cdot x^2$.

Eksempel 21: Det oplyses, at man ser på en population med størrelsen N, der er en funktion af tiden t målt i uger. Væksthastigheden af populationen er proportional med produktet af populationens størrelse og differensen mellem 3000 og populationens størrelse. Proportionalitetsfaktoren er 0,036.
Bestem en ligning, der beskriver situationen.
Du har brug for at vide, at væksthastigheder kan skrives med symbolet $\frac{dN}{dt}$. Men derefter har du mulighed for at løse opgaven.
Igen kigger du på de centrale ord: *Proportional*, *produktet*, *differensen*.
Differensen mellem 3000 og N skrives $3000 - N$.
Produktet af N og ovenstående differens er altså: $N \cdot (3000 - N)$.
Og når proportionalitetsfaktoren er 0,036, har man altså: $\frac{dN}{dt} = 0,036 \cdot N \cdot (3000 - N)$
Dette er en såkaldt differentialligning, fordi man har *den afledede funktion* $\frac{dN}{dt}$ med i ligningen. Faktisk er det en helt bestemt type differentialligning kaldet en *logistisk* differentialligning. Vi vil behandle den type ligninger grundigt senere.

Opgaverne 441*

Omvendt proportionalitet:

Der indledes med en definition:

Definition 7: Variablerne x og y siges at være *omvendt proportionale*, hvis deres produkt er konstant, dvs. hvis sammenhængen er givet ved følgende ligning:

$$y \cdot x = k \qquad G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

hvor k er en konstant $(k \neq 0)$.

Bemærk, at da faktorernes orden er ligegyldig, indgår x og y på samme måde i ligningen, hvorfor man da også bare kan nøjes med at sige, at x og y er omvendt proportionale i stedet for at sige "x er omvendt proportional med y" eller "y er omvendt proportional med x".

Vi bemærker også, at ingen af variablerne x og y kan antage værdien 0, for ifølge nulreglen ville vores produkt i så fald være nul, hvilket er i modstrid med $k \neq 0$. **Grafen for en omvendt proportionalitet kan derfor ikke skære koordinatakserne**.

Lad os se på situationen, hvor begge variabler og konstanten er positive, hvilket er det klart hyppigste i praksis:

Vi vil se, hvad der sker med variablen y, hvis vi gør x c gange større. Dvs. vi tager udgangspunkt i et konkret sæt af variablerne (x_1, y_1), der opfylder ligningen, og ser på, hvad der sker med y-værdien, når vi multiplicerer x-værdien med c:

Vores udgangspunkt er (x_1, y_1), hvorom det gælder: $y_1 \cdot x_1 = k \Leftrightarrow y_1 = \dfrac{k}{x_1}$

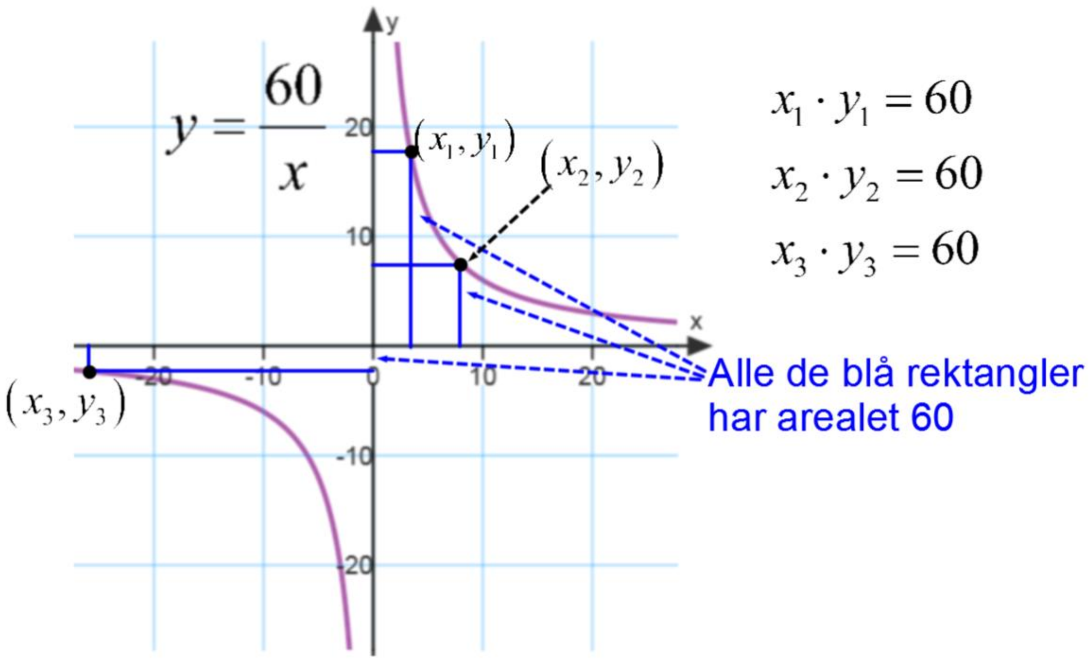
Vi ganger nu x-værdien med c: $y_2 \cdot (c \cdot x_1) = k \Leftrightarrow y_2 = \dfrac{k}{c \cdot x_1} = \dfrac{1}{c} \cdot \dfrac{k}{x_1}$

Vi bemærker, at vi kan erstatte den sidste faktor i udtrykket for y_2 og får: $y_2 = \dfrac{1}{c} \cdot y_1 = \dfrac{y_1}{c}$

Vi ser altså, at når x ganges med c, så divideres y med c.
Dvs., at når x bliver c gange større, bliver y c gange mindre.

Bemærk, at man **IKKE** kan sige "Da y bliver mindre, når x bliver større, er de omvendt proportionelle." Det er for upræcist! Der er uendeligt mange andre sammenhænge, hvorom det gælder. Man kan kun sige, at hvis y bliver c gange mindre, når x bliver c gange større, så er de omvendt proportionelle.

Hvis man ser på graferne for omvendte proportionaliteter, gælder følgende:



Ligegyldigt hvilket punkt på grafen, man bruger til sammen med koordinatakserne at danne et rektangel ved at gå vandret og lodret ind på disse, får man rektangler med samme areal, da man jo netop får rektangler med sidelængder svarende til variablerne (eller variablerne med modsat fortegn, hvis man er i 3. kvadrant).

Eksempel 22: Det oplyses, at variablerne x og y er omvendt proportionale. Udfyld nedenstående skema.

x	**12**		**3**
y		**6**	**8**

Da det er oplyst, at x og y er omvendt proportionale, opfylder de ligningen $x \cdot y = k$.

Vi benytter sættet (3,8) til at bestemme konstanten: $3 \cdot 8 = k \Leftrightarrow k = 24$

Da vi nu kender konstanten, kan vi finde den manglende variabel:

Når x er 12: $12 \cdot y = 24 \Leftrightarrow y = 2$

Når y er 6: $x \cdot 6 = 24 \Leftrightarrow x = 4$

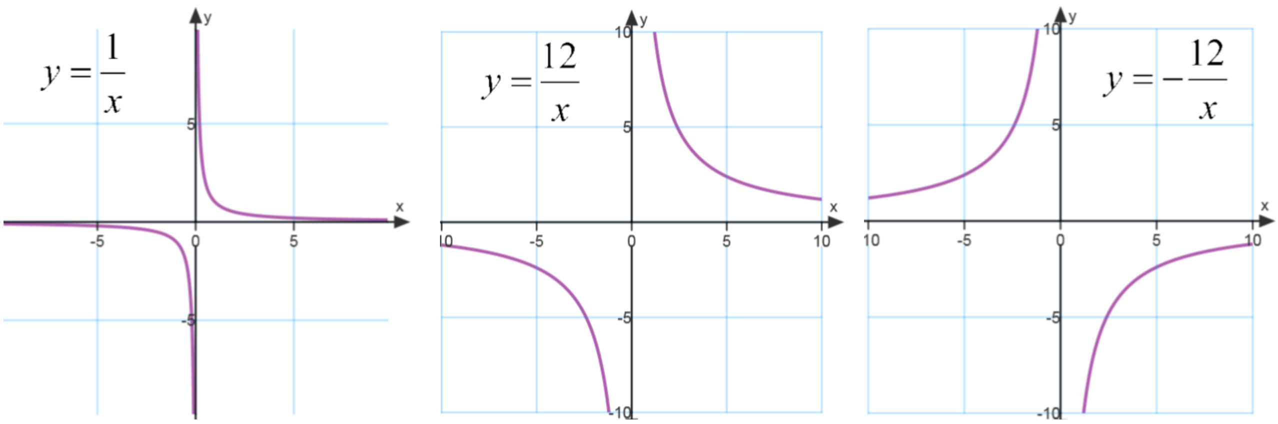
Dvs. den udfyldte tabel bliver:

x	**12**	**4**	**3**
y	**2**	**6**	**8**

Opgaverne 442*

Hyperbler:

Vi har set et enkelt eksempel på en graf for en omvendt proportionalitet. Her ses grafer for tre forskellige omvendte proportionaliteter:



Bemærk, at grafen forløber i 2 kvadranter og aldrig skærer koordinatakserne. Hvis konstanten er positiv, ligger grafen i 1. og 3. kvadrant. Hvis konstanten er negativ, ligger grafen i 2. og 4. kvadrant (Tænk over hvorfor!).

Vi har set på arealet af de rektangler, der kan dannes ud fra koordinatakserne og punkterne på grafen, og da det svarer til (den numeriske værdi af) konstanten, kan man indse, at jo mindre konstanten er (numerisk), jo tættere vil grafen lægge sig til akserne.

Men bemærk igen, at grafen aldrig skærer koordinatakserne. Punkterne på grafen kommer tættere og tættere på en af koordinatakserne, når de bevæger sig væk fra origo. Man kan sige, at man kan komme vilkårligt tæt på koordinatakserne, hvis bare man bevæger sig tilpas langt væk fra origo. Vi har både et navn for denne type grafer og for sidstnævnte egenskab. Begge navne blev indført af Apollonius fra Perga (ca. 262 – 190 fvt.) i et værk om keglesnit. Vi skal senere beskæftige os mere grundigt med keglesnit i et selvstændigt forløb, men indtil videre skal du kun kende følgende to definitioner:

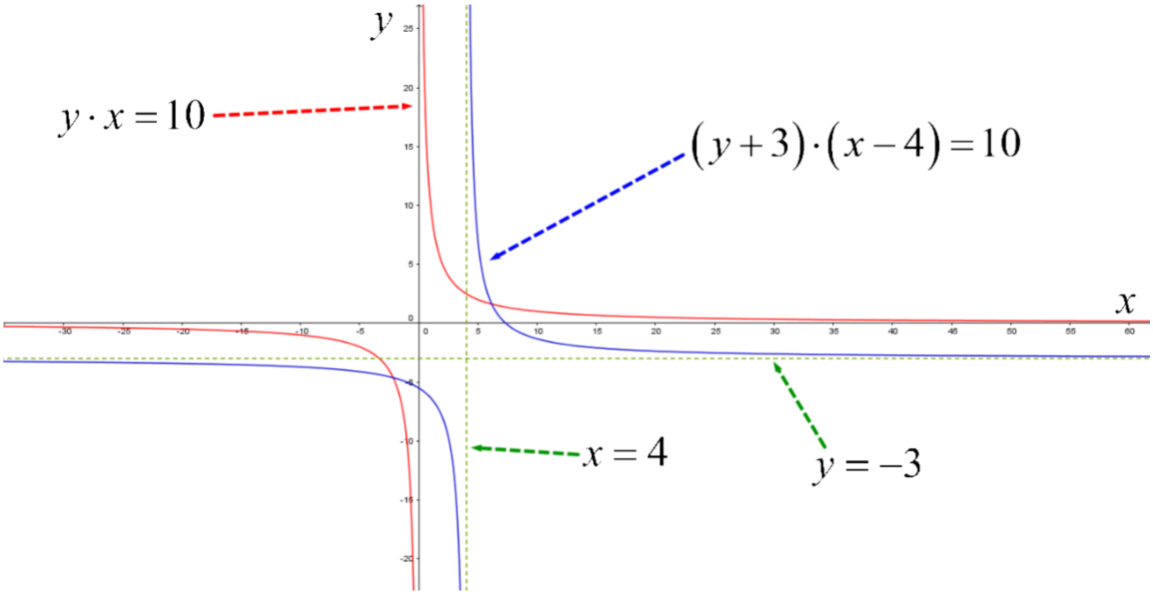
Definition 8: En *hyperbel* er det geometriske sted for de punkter (x, y), der er bestemt ved ligningen $y \cdot x = k$; $k \neq 0$; $G = \mathbb{R}^2$, eller det geometriske sted fremkommet ved en isometri af et sådant.
En hyperbel er opdelt i to adskilte dele, der kaldes hyperblens *grene* eller *ben*.

Dette er kun en af flere mulige definitioner på en hyperbel. Vi skal senere se en rent geometrisk.

Definition 9: En *asymptote* til en given kurve er en ret linje, som kurven ud over en bestemt afstand *a* fra origo vedvarende kan ligge vilkårligt tæt på uden at blive sammenfaldende med, hvis blot afstanden *a* vælges tilpas stor.

Denne definition er nok ikke nem at forstå. Den løse og lettere tilgængelige beskrivelse er, at en asymptote er en ret linje, der lægger sig helt op ad linjen uden at røre den. Du kan også forestille dig en asymptote som en slags *tangent til kurven uendelig langt ude*.

Eksempel 23:
På nedenstående tegning er den røde kurve grafen for sammenhængen beskrevet ved ligningen $y \cdot x = 10$. **Her er *y*-aksen en lodret asymptote, og *x*-aksen er en vandret asymptote.** Kurven er en hyperbel.



Den blå kurve er også en hyperbel, for den er fremkommet ved en isometri af den røde kurve, nemlig en parallelforskydning med 4 i *x*-aksens retning og -3 i *y*-aksens retning. **Vi bemærker, at det nu er linjen med ligningen $y = -3$, der er vandret asymptote, mens linjen med ligningen $x = 4$ er lodret asymptote.**

Hvis man rent matematisk vil vise, hvad vi alle i forvejen godt kan se, nemlig at *x*-aksen er en vandret asymptote til kurven svarende til ligningen $y \cdot x = 10$, skal vi vise følgende:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists a \in \mathbb{R}_+ : x > a \Rightarrow y < \varepsilon$$

Dvs. vi skal vise, at uanset hvilket (lille) tal ε, vi tager udgangspunkt i, så findes der et tal *a*, så det gælder, at hvis bare *x* er større end *a*, så er afstanden til *x*-aksen (som svarer til *y*), mindre end det lille tal ε.

Vi vælger $a = \frac{10}{\varepsilon}$, for så gælder: $x > a \;\Rightarrow\; \frac{10}{y} > a \Leftrightarrow \frac{10}{y} > \frac{10}{\varepsilon} \Leftrightarrow y < \varepsilon$

Ovenstående er en introduktion til begrebet grænseværdi, der er centralt inden for differentialregning. I argumentationen er *x* anvendt som afstanden fra et punkt på kurven til origo. Det er jo ikke helt korrekt, men prøv evt. at se, om du kan gennemskue, hvorfor det er en god tilnærmelse i den pågældende situation, og hvorfor hele argumentationen stadig holder.

Eksempel 24: Vi ser på endnu en isometri af hyperblen svarende til ligningen $x \cdot y = 10$, nemlig en rotation på 45° omkring origo.

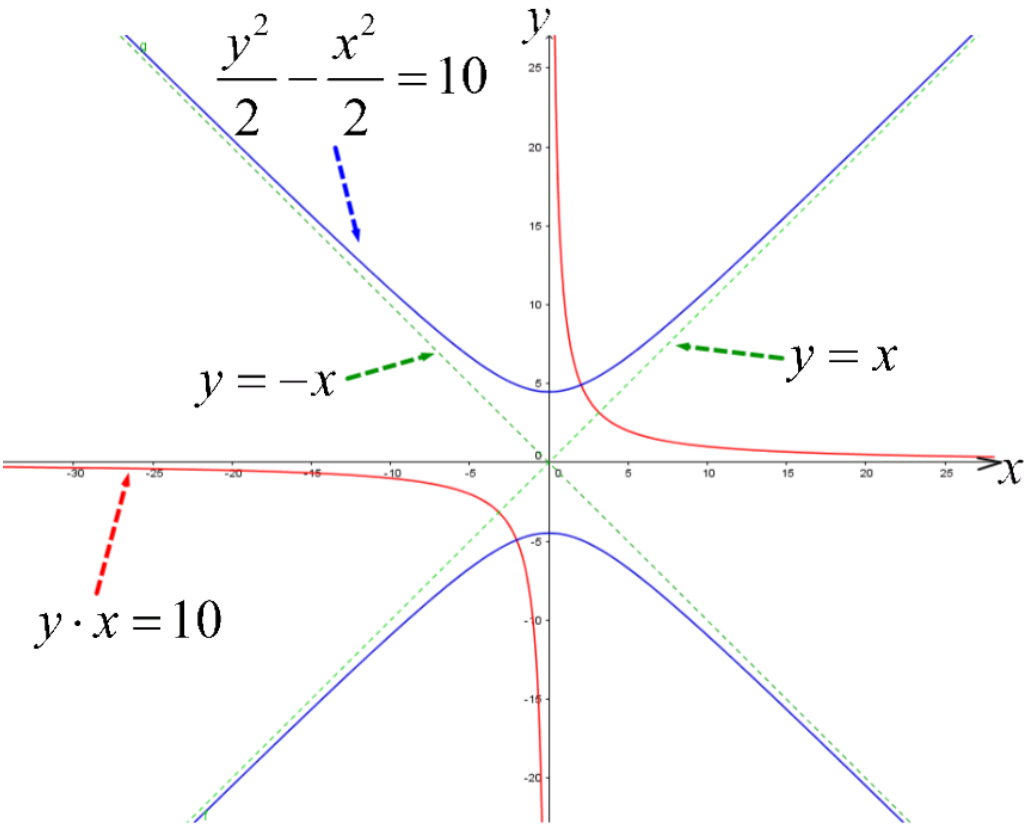
Vi skal altså erstatte *x* med $x \cdot \cos(45°) + y \cdot \sin(45°)$, og vi skal erstatte *y* med $y \cdot \cos(45°) - x \cdot \sin(45°)$.

Da $\cos(45°) = \sin(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ har vi altså ligningen:

$$\left(x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + y \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(y \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 10$$

Venstresiden svarer til den 3. kvadratsætning, så vi får:

$$\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = 10$$



Den blå graf er altså fremkommet ved at rotere den røde graf med 45° omkring origo. Bemærk, at vores asymptoter er fulgt med i denne rotation.
Vi har derfor nu to ***skrå asymptoter*** angivet ved ligningerne $y = x$ og $y = -x$ (de stiplede grønne linjer).

Opgaverne 443*

Vi samler nu op på linearitet, ligefrem proportionalitet og omvendt proportionalitet ved at se på forskellige situationer, hvor disse optræder:

Situationer med linearitet, ligefrem proportionalitet eller omvendt proportionalitet.

Indkøb: Hvis du skal købe økologisk skummetmælk til 7,5 kr. pr. liter, og der ikke er mængderabat, er prisen p i kroner ligefrem proportional med antallet x af liter mælk, og proportionalitetsfaktoren er 7,5.

Hvis du har glemt et indkøbsnet og skal købe en af de magiske indkøbsposer til 3 kr., der kan indeholde vilkårligt mange mælkekartoner, er der en lineær sammenhæng mellem prisen og antal liter mælk, og grafen vil have hældningen 7,5 og skære ordinataksen i 3.

Transport: Hvis du kører med konstant fart, er sammenhængen mellem tilbagelagt strækning s og farten v givet ved $s = v \cdot t$, hvor t er tiden.

Hvis du skal et bestemt stykke (f.eks. fra Roskilde til København), vil din rejsetid være omvendt proportional med din fart.

Hvis du bare kører derudaf med konstant fart, vil den tilbagelagte strækning være ligefrem proportional med tiden.

Idealgasligningen: $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$, hvor p er trykket, V er rumfanget, n er stofmængden, R er gaskonstanten og T er temperaturen.

Hvis du har en bestemt mængde gas og holder temperaturen konstant, mens du trykker gassen sammen, vil trykket være omvendt proportional med rumfanget.

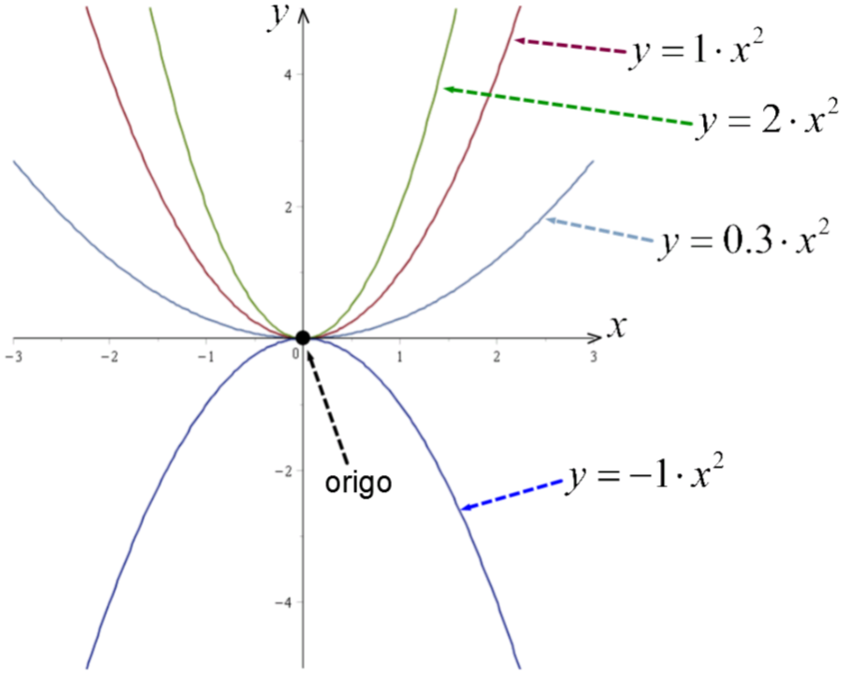
Hvis du har gassen spærret inde i en beholder og dermed holder rumfanget konstant, vil trykket være ligefrem proportionalt med temperaturen.

Om at dele: Hvis en mængde personer har 100 kr., de skal dele ligeligt, vil beløbet hver enkelt modtager være omvendt proportionalt med antallet af personer, der skal dele.

Parabler:

Vi begynder med at se på graferne for de sammenhænge, der beskrives ved ligningen:

$$y = a \cdot x^2 \quad ; \quad G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad ; \quad a \neq 0 \text{, hvor } a \text{ er en konstant.}$$



Alle grafer går gennem origo, og de er symmetriske omkring y-aksen.

Bemærk konstantens betydning for grafens udseende og tænk over, hvorfor det er sådan.

Når du har forstået a's betydning for grafens udseende, har du forstået, hvad der er afgørende for, hvordan en parabel ser ud. For vores definition af en parabel er følgende:

Definition 10: En *parabel* er det geometriske sted for de punkter (x, y), der er bestemt ved ligningen $y = a \cdot x^2$; $a \neq 0$; $G = \mathbb{R}^2$, eller det geometriske sted fremkommet ved en isometri af et sådant.

Vær altså godt opmærksom på følgende: Det er udelukkende *a*, der bestemmer parablens udseende, for isometrier er jo netop afstandsbevarende, dvs. de ændrer ikke på udseendet. Grafen kan parallelforskydes, spejles og roteres omkring et punkt. Men den ændrer ikke form.

Ud fra overvejelserne omkring graferne for $y = a \cdot x^2$ ved vi dermed også, at alle parabler har netop én symmetriakse, som er *y*-aksen, når det er ligningen $y = a \cdot x^2$, men som følger med, når man parallelforskyder, spejler eller roterer (hvilket vi så i forbindelse med hyperblerne).
Vi bruger symmetriaksen til at definere følgende begreber:

Definition 11: Skæringspunktet mellem parablen og dens symmetriakse kaldes parablens *toppunkt*. De to dele af parablen, der ligger på hver sin side af symmetriaksen, kaldes parablens *grene* eller *ben*.

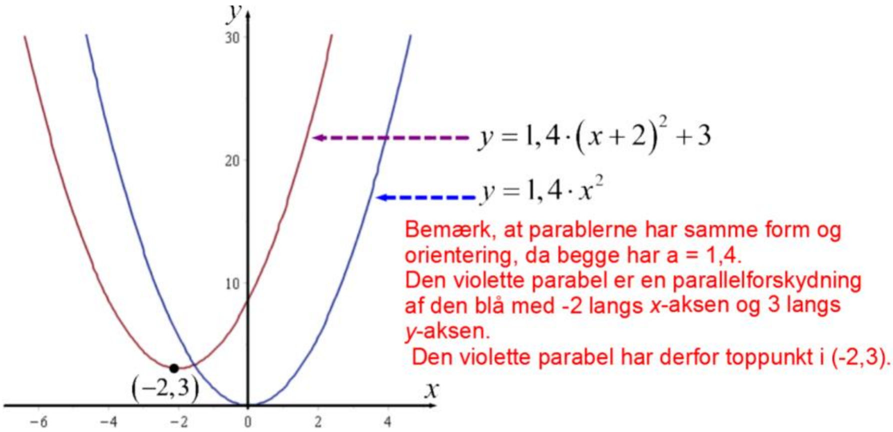
Selve ordet parabel skyldes igen Apollonius fra Perga. Parabler, hyperbler, ellipser og cirkler er de fire keglesnit, som Apollonius behandlede i et af sine værker, hvor han navngav de tre første.

Bemærk, at ved parallelforskydninger vil origo flyttes over i det nye toppunkt. Vi udnytter vores viden om, hvordan man parallelforskyder, til at indse, at grafen for sammenhængen givet ved ligningen $(y-k) = a \cdot (x-h)^2$; $a \neq 0$ er den parabel, der er frembragt ved en parallelforskydning af parablen givet ved ligningen $y = a \cdot x^2$ med *h* langs *x*-aksen og *k* langs *y*-aksen.
Bemærk den vigtige pointe, at det er det samme *a*, der indgår i de to ligninger.

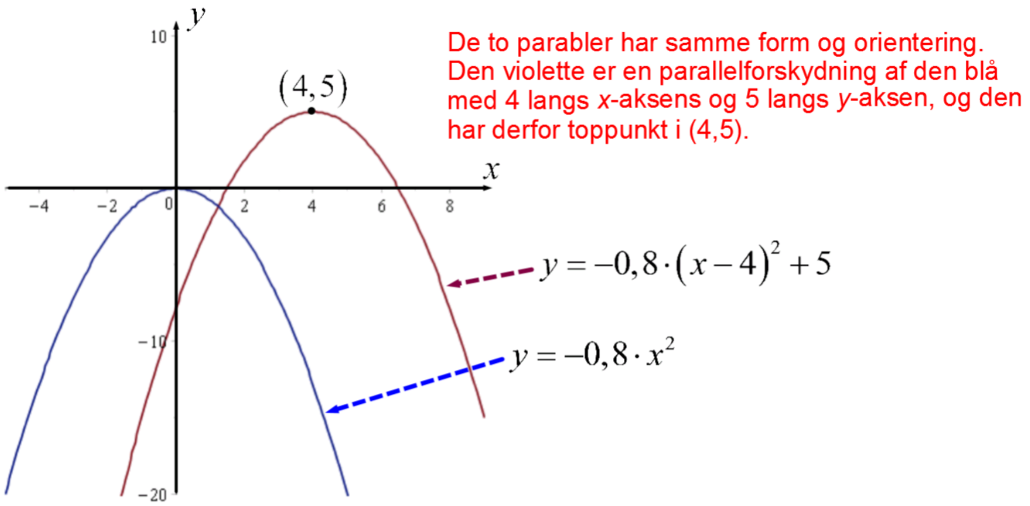
Ved at rykke *k* over på den anden side af lighedstegnet har man derfor:

Sætning 11: Grafen for sammenhængen angivet ved ligningen $y = a \cdot (x-h)^2 + k$; $a \neq 0$ er en parabel med toppunkt i (h, k), der har samme form og orientering som parablen givet ved ligningen $y = a \cdot x^2$.

Eksempel 25:



Eksempel 26:



Det er vigtigt, at du har styr på fortegnene. Bemærk, at der står $(x-h)$, dvs. $(x-7)$ svarer til $h=7$, og $(x+5)$ svarer til $h=-5$.

Bemærk også, at *toppunktet* både kan være punktet på parablen med mindst og størst y-værdi (det afhænger af fortegnet på a).

Opgaverne 444*

Vi er nu ved at være fremme ved en helt central sætning for parabler.

Vores sætning om kvadratkomplettering fortæller os, at $a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$.

Og dette kan vi bruge nu, når vi omskriver følgende ligning:

$$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c \Leftrightarrow \boxed{y=a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}}$$

Sammenlign dette med: $\boxed{y=a\cdot(x-h)^2+k}$

Sætning 11 siger, at grafen for den nederste sammenhæng er en parabel med toppunkt i (h,k).

Men så må grafen for den øverste sammenhæng være en parabel med toppunkt i $\left(\frac{-b}{2a},c-\frac{b^2}{4a}\right)$.

Tænk grundigt over dette. Det er det centrale punkt i argumentationen.

Man kunne sådan set godt anvende dette koordinatsæt for toppunktet, men der er tradition for at blande diskriminanten, som vi kender fra andengradsligninger, ind i billedet. Vi kan nemlig omskrive andenkoordinaten for toppunktet til:

$$c-\frac{b^2}{4a}=\frac{4ac}{4a}-\frac{b^2}{4a}=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{-(b^2-4ac)}{4a}=\frac{-d}{4a}$$, hvor $d=b^2-4ac$.

Toppunktet for parablen givet ved ligningen $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ er altså $\left(\frac{-b}{2a},\frac{-d}{4a}\right)$.

Opgaverne 445* og 446*

Lad os se, hvad vi ellers kan sige om parablen:

Skæring med y-aksen: Her er x-værdien 0, så ligningen giver os $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$.
Vi ser altså, at parablen skærer y-aksen i værdien c.

Skæring med x-aksen: Her er y-værdien 0, så vi får: $0 = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.
Vi genkender dette som vores andengradsligning, der afhængigt af diskriminanten kan have 0, 1 eller 2 løsninger, og vi kan direkte overføre vores viden om løsningerne til andengradsligningen til parablens eventuelle skæringer med x-aksen. Vi har dermed vist det meste af følgende sætning:

Sætning 12: Vi ser på sammenhængen givet ved ligningen $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \;\; ; \;\; a \neq 0$.

- Grundmængden for ligningen er $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- Grafen er en parabel med samme form og orientering som parablen givet ved $y = a \cdot x^2$.
  Dvs. bl.a. gælder, at hvis $a > 0$,vender grenene opad, og hvis $a < 0$, vender grenene nedad.
- Parablen har toppunkt i $T\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right)$, hvor $d = b^2 - 4ac$.
- Parablen skærer y-aksen i værdien c.
- Hvis $d < 0$ skærer parablen ikke x-aksen.
- Hvis $d = 0$ rører parablen x-aksen med sit toppunkt, og røringspunktet er $\left(\frac{-b}{2a}, 0\right)$.
- Hvis $d > 0$ skærer parablen x-aksen stederne $x_1 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}$ og $x_2 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}$.
- $b = 0$ netop hvis parablens toppunkt ligger på y-aksen.
- Hvis a og b har forskellige fortegn, ligger toppunktet til højre for y-aksen.
- Hvis a og b har ens fortegn, ligger toppunktet til venstre for y-aksen.
- Hældningen for tangenten til parablen i skæringspunktet med y-aksen svarer til b-værdien.

Bevis 12: Vi mangler kun at bevise de sidste fire punkter, der omhandler b-værdien. Til dette benytter vi parablens toppunkt $T\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right)$, hvor vi udelukkende ser på førstekoordinaten $\frac{-b}{2a}$.

Vi ser, at da en brøks værdi er 0, netop når tælleren er 0, så er 1. koordinaten 0, netop når $b = 0$. Derfor ligger parablens toppunkt på y-aksen, netop når $b = 0$.

Hvis a og b har forskellige fortegn, er $\frac{-b}{2a} > 0$, og dermed ligger toppunktet til højre for y-aksen.

Hvis a og b har ens fortegn, er $\frac{-b}{2a} < 0$, og dermed ligger toppunktet til venstre for y-aksen.

At hældningen for tangenten til parablen i skæringspunktet med y-aksen netop svarer til b-værdien, kan vi først rigtigt vise under differentialregning, hvor vi kan vise, at tangenternes hældning de forskellige steder er $2ax + b$, hvorfor den i skæringspunktet med y-aksen (hvor x jo er 0) er b.

Tre navne

Andengradsligning:

$$0 = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \quad ; \quad a \neq 0 \quad ; \quad G = \mathbb{R}$$

Vi indførte begrebet diskriminant $\left(d = b^2 - 4ac\right)$, der fortæller, om der er 0, 1 eller 2 *løsninger*.

Parablens ligning:

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \quad ; \quad a \neq 0 \quad ; \quad G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,.$$

Bemærk, at selvom dette også er en ligning, så bruges navnet andengradsligning ikke om denne. Egentlig er *parablens ligning* et lidt misvisende navn, da vi hermed "overser" de parabler, der er rotationer af parabler med ovenstående ligning.

Andengradspolynomium:

$$f\left(x\right) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \quad ; \; a \neq 0 \; ; \; Dm\left(f\right) = \mathbb{R}\,.$$

Dette er en funktionsforskrift, som vi skal se på under emnet Funktioner. Funktionsudtrykket er et andengradspolynomium, og grafen for dette er en parabel, så på den måde minder parablens ligning og et andengradspolynomium meget om hinanden. Men vi kan rotere parablen, når vi arbejder med ligninger. Det kan vi ikke, når vi arbejder med funktioner. Der kan vi kun parallelforskyde og spejle i koordinatakserne. Årsagen til dette gennemgås under Funktioner.

Hvis man har et konkret andengradspolynomium, kan man tale om *den tilsvarende andengradsligning* – og omvendt. F.eks. er $0 = -3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 7$ den tilsvarende andengradsligning til andengradspolynomiet $-3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 7$.

Man bruger dette, når man skal finde såkaldte *rødder* eller *nulpunkter* for et andengradspolynomium (hvilket svarer til at finde skæringer med *x*-aksen for en parabel). Så siger man: "Jeg bestemmer først diskriminanten for den tilsvarende andengradsligning".

Vi vil sige det samme, når vi ser på parablens ligning.

Eksempel 27: Vi ser på parablen givet ved ligningen $y = 2x^2 + 2x - 24$.

Vi kan aflæse, at parablen skærer *y*-aksen i værdien -24, da $c = -24$.

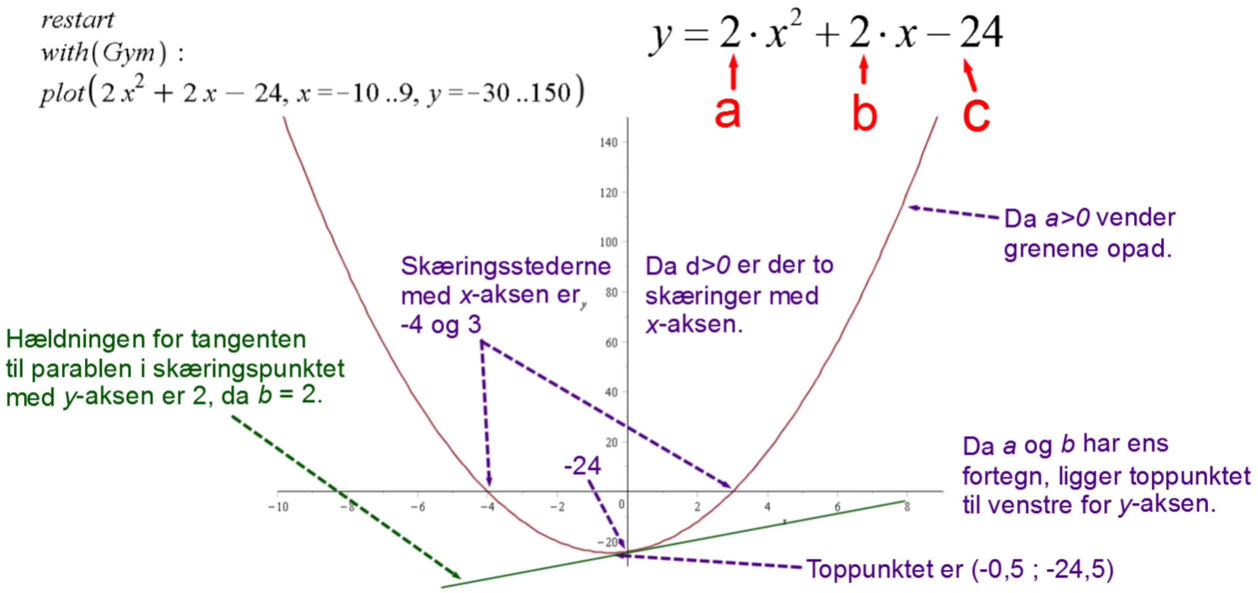
Derefter udregner vi diskriminanten for den tilsvarende andengradsligning, da den både skal bruges i toppunktsformlen og til at afgøre antallet af skæringer med *x*-aksen:

$d = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot \left(-24\right) = 4 + 192 = 196 > 0$ dvs. 2 skæringer med *x*-aksen.

Skæringssteder med *x*-aksen:
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2 \cdot a} = \frac{-2 - \sqrt{196}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 - 14}{4} = -4$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2 \cdot a} = \frac{-2 + \sqrt{196}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 + 14}{4} = 3$$

Parablen har toppunkt i: $T\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-d}{4a}\right) = T\left(\frac{-2}{2 \cdot 2}; \frac{-196}{4 \cdot 2}\right) = T\left(-\frac{1}{2}; -\frac{49}{2}\right)$

Vi tjekker ved at plotte grafen:



Eksempel 28: Vi ser på parablen givet ved ligningen $y = -x^2 + 3x - 5$.

Vi kan aflæse, at parablen skærer *y*-aksen i værdien -5, da $c = -5$.

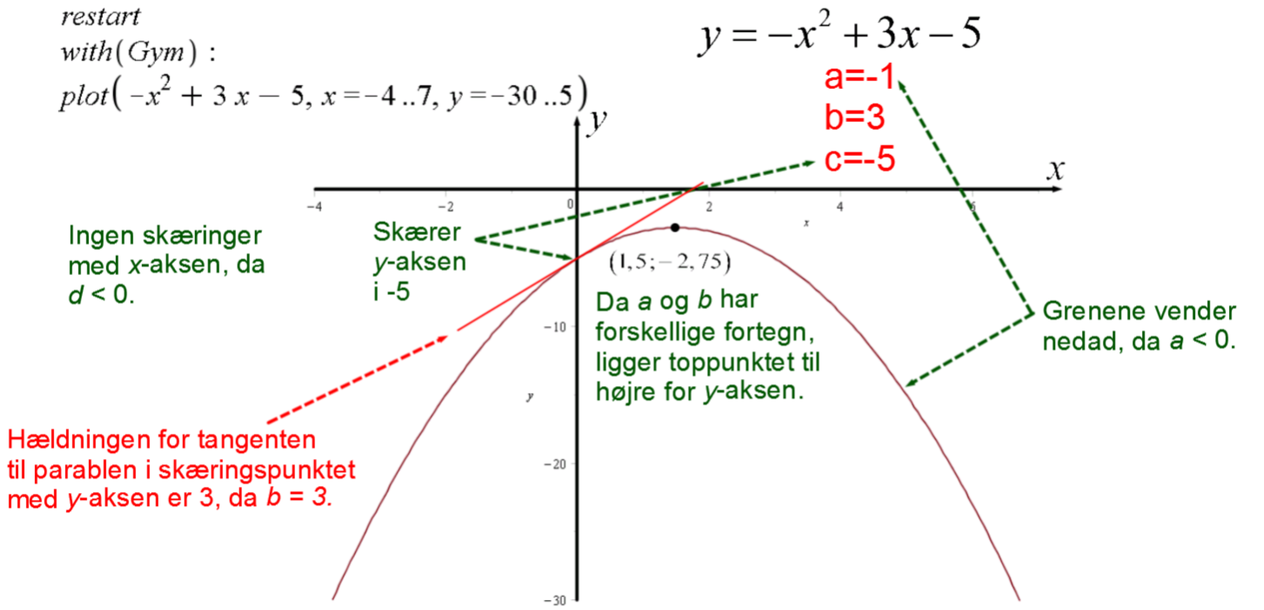
Derefter udregner vi diskriminanten for den tilsvarende andengradsligning, da den både skal bruges i toppunktsformlen og til at afgøre antallet af skæringer med *x*-aksen:

$d = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = 9 - 20 = -11 < 0$ dvs. ingen skæringer med *x*-aksen.

I dette tilfælde er der ingen skæringer, men der er altid et toppunkt, der bestemmes ved:

$$T\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-d}{4a}\right) = T\left(\frac{-3}{2 \cdot (-1)}; \frac{-(-11)}{4 \cdot (-1)}\right) = T\left(\frac{3}{2}; -\frac{11}{4}\right)$$

Vi tjekker ved at plotte grafen:



Eksempel 29: Vi ser på parablen givet ved ligningen $y=-\frac{1}{3}\cdot x^2-2x-3$.

Vi kan aflæse, at parablen skærer *y*-aksen i værdien -3, da $c=-3$.
Vi udregner diskriminanten:

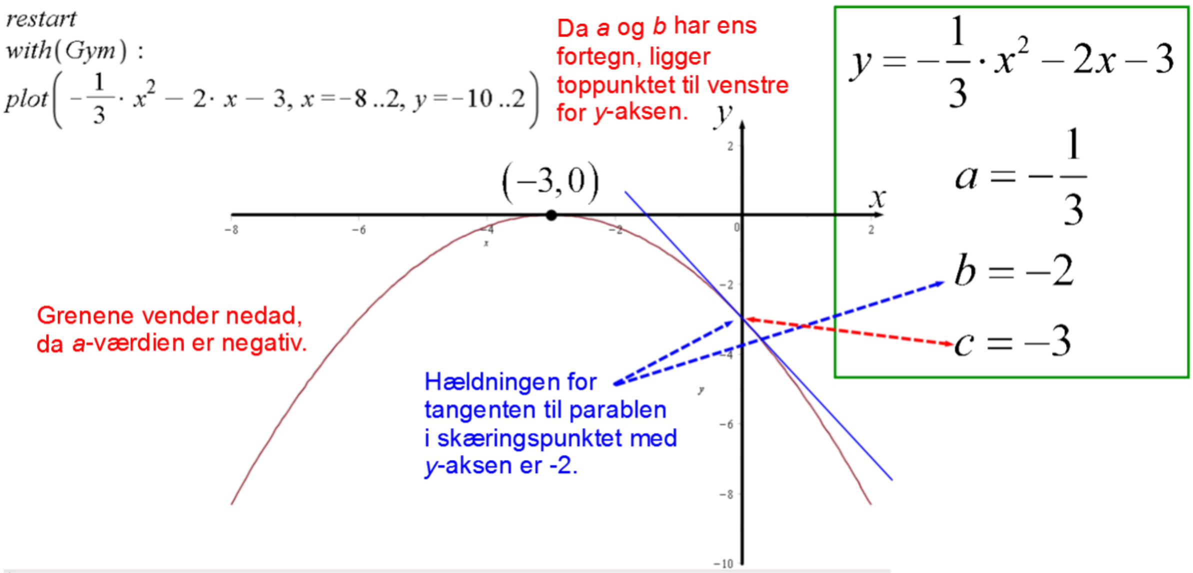
$d=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(-3)=4-4=0$ dvs. toppunktet ligger på *x*-aksen.

Vi kan bestemme dette sted på *x*-aksen enten med toppunktsformlen eller med udtrykket for $d=0$:

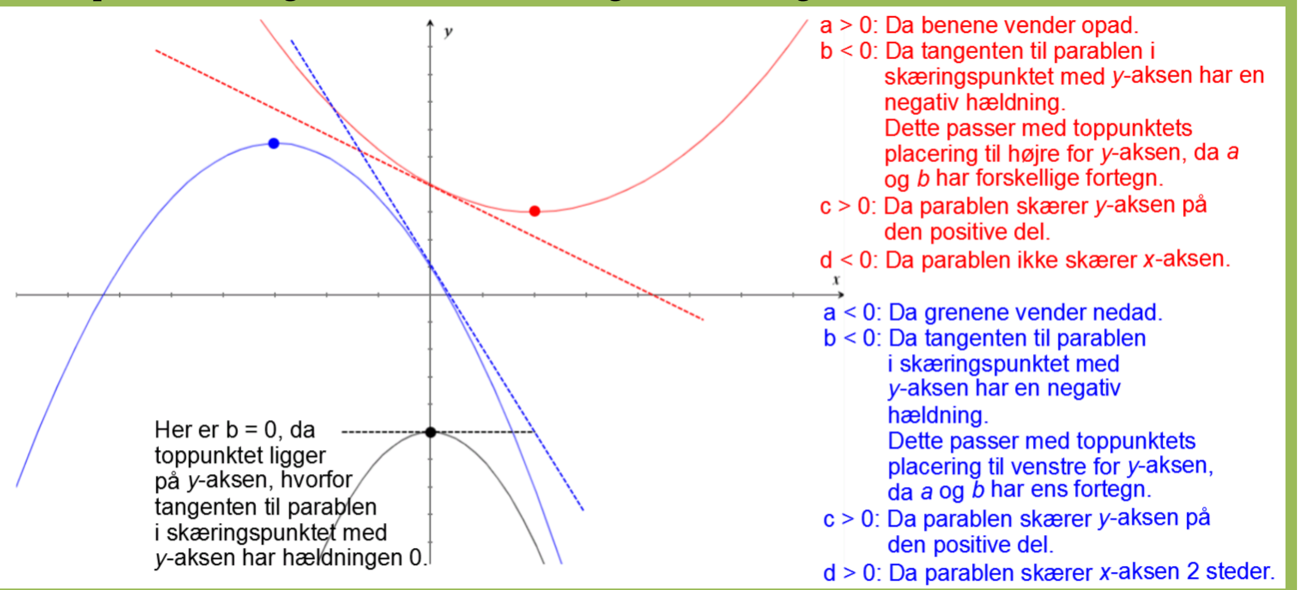
$$d=0:\ x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-2)}{2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{2}{-\frac{2}{3}}=-3$$

$$T\left(\frac{-b}{2a};\frac{-d}{4a}\right)=T\left(\frac{-(-2)}{2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)};\frac{0}{4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}\right)=T(-3;0)$$

Vi tjekker ved at plotte grafen:



Eksempel 30: Ud fra graferne bestemmes fortegn for *a*, *b*, *c* og *d*:



Til sidst kan det nævnes, at parabler ikke har nogen asymptoter. Det er ikke noget, der bevises her, men du kan selv overveje, hvorfor der ikke er nogen vandrette, lodrette eller skrå rette linjer, som parablens grene kommer vilkårlig tæt på, når man når ud over en vis afstand til origo.

Opgaverne 447*

Cirkler:

Vi har allerede stiftet bekendtskab med cirklens ligning i forbindelse med beskrivelsen af geometriske steder. Men vi har ikke bevist nogen sætning om cirklens ligning.

Det skal vi gøre nu, hvor vi skal overføre Euklids rent geometriske beskrivelse af en cirkel til en beskrivelse inden for analytisk geometri – dvs. til en ligning.

Euklids rent geometriske beskrivelse kan formuleres som:

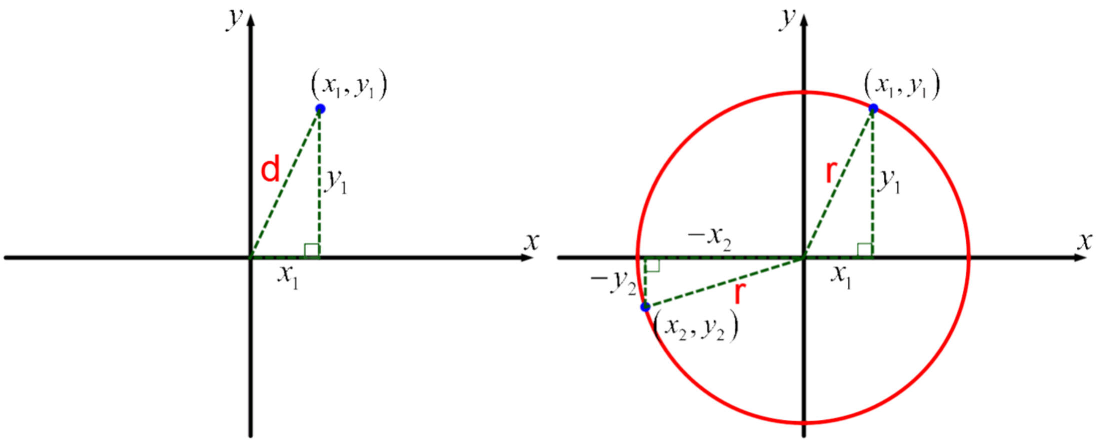
En cirkel er det geometriske sted for alle de punkter, der har ens afstand til et givet punkt.

Det givne punkt kalder vi *centrum*, og afstanden kalder vi *radius.*

Vi skal nu benytte dette til at vise:

Sætning 13: Grafen for sammenhængen bestemt ved ligningen $x^2+y^2=r^2$; $G=\mathbb{R}^2$ er en cirkel med centrum i $(0,0)$ og radius r.

Bevis 13: Måske har du allerede opdaget ud fra udseendet af cirklens ligning, at det bare er en anvendelse af Pythagoras' Læresætning:



Vi ser på et punkt (x_1,y_1), der ikke ligger på koordinatakserne. Ud fra punktet konstrueres en retvinklet trekant ved at gå lodret ned og vandret ind til origo og derfra tilbage til punktet. Hvis punktet ligger i 1. kvadrant, vil denne retvinklede trekant have kateter med længderne x_1 og y_1. Vi kalder afstanden fra origo til punktet (x_1,y_1) for d (for vi har endnu ikke indført cirklen), og der gælder altså ifølge Pythagoras: $d^2=x_1^2+y_1^2$.

Vi kan nu lave følgende slutningsrække, der beviser sætningen:

Punktet (x_1,y_1) ligger på cirklen med centrum i $(0,0)$ og radius r $\Leftrightarrow$

Afstanden fra origo til (x_1,y_1) er r $\Leftrightarrow$

$r^2=x_1^2+y_1^2$

Hermed er sætningen vist for punkter i 1. kvadrant. I de andre kvadranter kan trekantens sidelængder og koordinaterne afvige med et fortegn, men det ændrer ikke på argumentationen, da man arbejder med kvadrater. Tænk også over, hvorfor slutningsrækken passer for punkter på koordinatakserne.

Rotationer og spejlinger er temmelig uinteressante i forbindelse med cirkler. Men parallelforskydningerne giver mening, og vores viden om parallelforskydninger giver os følgende sætning:

Sætning 14: Cirklen med centrum i $C(a,b)$ og radius r er det geometriske sted for de punkter, der er bestemt ved ligningen:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad ; \quad G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

Ovenstående kaldes *cirklens ligning*. Origo er altså parallelforskudt over i $C(a,b)$, og selvom centrum ikke er et punkt på cirklen, så kan man nøjes med at se på denne forskydning, da alle cirklens punkter forskydes på samme måde som centrum.

Eksempel 31: Vi ser på ligningen $(x-7)^2+(y+2)^2=16 \quad ; \; G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Dette er ligningen for en cirkel med centrum i $C(7,-2)$ og radius 4.

Nærlæs dette eksempel. Det er vigtigt, at du fra start får styr på fortegn og pointen med, at det er kvadratet på radius, der indgår i ligningen.

Eksempel 32: Angiv ligningen for den cirkel, der har centrum i $(-4,2)$ og radius 9.

Vi indsætter de kendte størrelser i cirklens ligning $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

$$(x-(-4))^2+(y-2)^2=9^2 \Leftrightarrow \underline{\underline{(x+4)^2+(y-2)^2=81}} \qquad ; \quad G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

Eksempel 33: Vi ønsker at bestemme det geometriske sted for de punkter, der opfylder ligningen

$$(x+3)^2+(y-8)^2=-25 \quad ; \quad G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$

Vi bemærker, at venstresiden er summen af to kvadrater, så venstresiden kan aldrig blive negativ (når vi arbejder med de reelle tal). Derfor er der ingen punkter, der opfylder ligningen, dvs. der er ikke noget geometrisk sted.

Eksempel 34: Vi ønsker at bestemme det geometriske sted for de punkter, der opfylder ligningen

$$(x-10)^2+(y+3)^2=0 \quad ; \quad G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$

Venstresiden er summen af to kvadrater og kan kun give 0, hvis begge kvadrater er 0. Det er de kun, når $x=10 \wedge y=-3$, dvs. det geometriske sted er punktet $(10,-3)$.

Eksempel 35: Vi ønsker at bestemme det geometriske sted for de punkter, der opfylder ligningen

$$2\cdot x^2+2\cdot(y-3)^2=14 \quad ; \quad G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$

Umiddelbart ligner det ikke ligningen for en cirkel, men da det er en ligning, kan man forkorte den, uden at den ændrer sandhedsværdi. Den forkortes med 2:

$$x^2+(y-3)^2=7$$

Heraf kan det aflæses, at vi har at gøre med en cirkel med centrum $C(0,3)$ og $r=\sqrt{7}$

Opgaverne 450*

Cirklens ligning består af to kvadrater, der kan udregnes ved hjælp af kvadratsætningerne:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2+a^2-2ax+y^2+b^2-2by=r^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2-2ax+y^2-2by=r^2-a^2-b^2$$

Vi har ikke fået et simplere udtryk, men bemærk formen, hvor vi på højresiden har en konstant, da vi har samlet alle led med *x* og *y* på venstresiden. Dette fortæller os følgende:

Sætning 15: Hvis $k>-\frac{m^2}{4}-\frac{n^2}{4}$, er ligningen $x^2+m\cdot x+y^2+n\cdot y=k$ ligningen for en cirkel med centrum i $C\left(-\frac{m}{2},-\frac{n}{2}\right)$ og radius $r=\sqrt{k+\frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{4}}$

Øvelse 2: Vis denne sætning ved at sammenligne ligningerne $x^2+m\cdot x+y^2+n\cdot y=k$ og $x^2-2ax+y^2-2by=r^2-a^2-b^2$. Hint: Begynd med centrum.

Sætning 15 er ikke en standardsætning, så hvis du benytter den, skal du henvise til dens ordlyd. Den normale fremgangsmåde i gymnasiet er en anden, som vi skal se lige om lidt. Men her først et eksempel på, hvordan sætning 15 kan anvendes:

Eksempel 36: Vi ser på ligningen $x^2+14x+y^2-4y+28=0$ og bliver bedt om at bestemme centrum og radius for den cirkel, der er bestemt ved ligningen.
Vi ser, at ligningen ikke helt står som ligningen i sætning 15, så vi flytter 28 over på højresiden: $x^2+14x+y^2-4y=-28$.
Vi kan nu aflæse: $m=14$, $n=-4$ og $k=-28$

Cirklen har altså centrum i $C\left(-\frac{m}{2},-\frac{n}{2}\right)=C\left(-\frac{14}{2},-\frac{(-4)}{2}\right)=C(-7,2)$

Og: $r=\sqrt{k+\frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{4}}=\sqrt{-28+\frac{14^2}{4}+\frac{(-4)^2}{4}}=\sqrt{-28+\frac{(2\cdot 7)^2}{4}+\frac{16}{4}}=\sqrt{-28+49+4}=\sqrt{25}=5$

Betingelsen $k>-\frac{m^2}{4}-\frac{n^2}{4}$ behøver man ikke at gå op i fra start, da den er opfyldt, hvis man til sidst får et positivt tal at tage kvadratroden af (dér hvor vi fik 25).

Sætning 15 er en formel, og ulempen ved formler er, at man skal huske dem (hvis ikke man har adgang til hjælpemidler). Vi skal nu i stedet se på en metode. Fordelene ved metoder er bl.a., at de er nemmere at huske, og at de giver noget matematisk forståelse.

I metoden anvendes kvadratkomplettering i sin simpleste udgave $\left(x^2+bx=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}\right)$, men da det jo også bare er en formel, der ville skulle huskes, skal vi se på, hvordan man arbejder med konkrete tal og ud fra disse opnår det samme, som kvadratkompletteringen siger:

Eksempel 37: Vi ser igen på ligningen $x^2+14x+y^2-4y+28=0$ og griber opgaven anderledes an:

1) Vi ved, at vi skal ende med en ligning på formen $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Vi kan altså se, at 14x må være det dobbelte produkt fra det første kvadrat, og -4y må være det dobbelte produkt fra det andet kvadrat. Dette fortæller os, at vi må have $a=-7$ og $b=2$ (for det er jo det **dobbelte** produkt). Altså har vi: $(x+7)^2+(y-2)^2$.

Bemærk, at fortegnene på henholdsvis 7 og -2 er de samme som på 14 og -4!

2) Men hvis du sammenligner x^2+14x med $(x+7)^2$ og y^2-4y med $(y-2)^2$, kan du se, at kvadraterne indeholder mere end udtrykkene med to led, for disse mangler nemlig kvadratet på sidste led i parenteserne. Vi har altså fået $7^2+(-2)^2$ for meget ved at indføre kvadraterne, men dette kan vi rette op på ved at lægge det samme til på højresiden af lighedstegnet. Vi får altså (når vi også flytter de 28 over på højresiden):

$$(x+7)^2+(y-2)^2=-28+7^2+(-2)^2$$

Det er dette skridt, der svarer til kvadratkomplettering. Bemærk, at det ALTID bliver positive led, du lægger til på højresiden, da det er <u>kvadrater</u> på sidste led.

3) Vi kan nu udregne højresiden og derefter aflæse centrums koordinater og radius:

$$(x+7)^2+(y-2)^2=-28+49+4=25=5^2$$

Dvs. $\underline{\underline{C(-7,2)\quad r=5}}$

Eksempel 38: Bestem centrum og radius for cirklen bestemt ved ligningen $x^2-6x+y^2+12y=19$.

Udtrykket omskrives til formen $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, hvorefter radius og centrums koordinater kan aflæses:

$$x^2-6x+y^2+12y=19 \Leftrightarrow$$
$$(x-3)^2+(y+6)^2=19+(-3)^2+6^2 \Leftrightarrow$$
$$(x-3)^2+(y+6)^2=19+9+36=64=8^2$$

Dvs. $\underline{\underline{C(3,-6)\quad r=8}}$

Eksempel 39: Bestem centrum og radius for cirklen bestemt ved ligningen $-y^2+8y-x^2-13=0$.

Vi skal her bemærke, at koefficienterne foran x^2 og y^2 ikke er 1. I dette tilfælde er de -1, men uanset hvilken værdi forskellig fra 1, der havde stået, ville det være en forkert form (jf. sætning 15). Hvis koefficienterne foran x^2 og y^2 er ens (som i dette tilfælde), kan man dog forlænge eller forkorte sig ud af problemet. Vi forlænger her med -1:

$$x^2+y^2-8y^2+13=0$$

Vi er nu klar til at omskrive, så vi kan aflæse centrums koordinater og radius:

$$x^2+y^2-8y^2+13=0 \Leftrightarrow$$
$$(x-0)^2+(y-4)^2=-13+(-4)^2=3$$

Dvs. $\underline{\underline{C(0,4)\quad r=\sqrt{3}}}$

Opgaverne 451* og 452*

Ellipser:

Det sidste geometriske sted i planen, som vi skal have introduceret, er endnu et keglesnit, nemlig ellipsen. Som nævnt blev det navngivet og behandlet af Apollonius fra Perga, og vi vender også tilbage til det under emnet Keglesnit og under vektorfunktioner, hvor vi bl.a. skal se på rotation af ellipser. Vi skal dog til at begynde med kun se på ligningen for en ellipse.

En ellipse er en slags fladtrykt cirkel, og den kan defineres ved:

Definition 12: En *ellipse* er det geometriske sted for de punkter, der er bestemt ved ligningen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ ;\ a>0\ ;\ b>0\ ;\ G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

eller det geometriske sted fremkommet ved en isometri af et sådant.

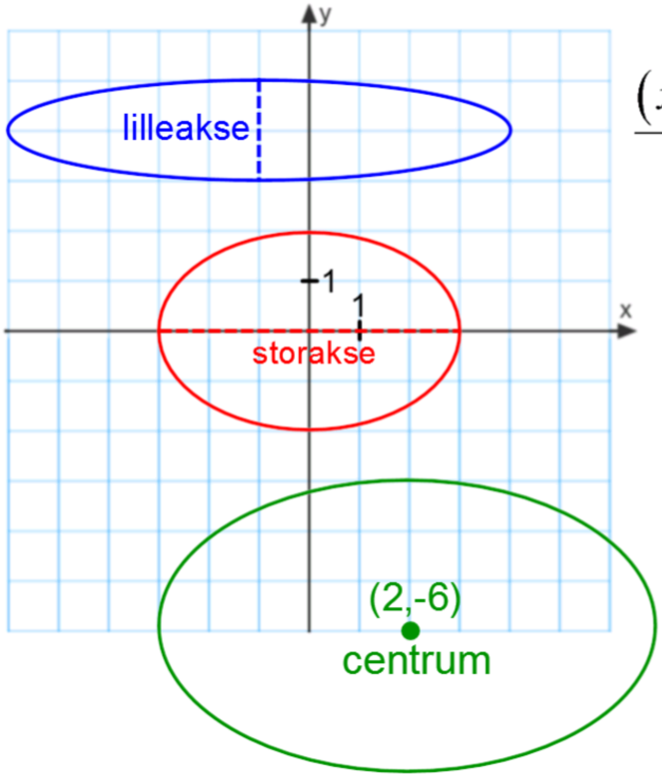
Nævnerne er kvadrater, så egentlig har man rent matematisk bare brug for betingelsen $a \neq 0, b \neq 0$ (og ikke $a>0, b>0$). Men årsagen til betingelserne ses i næste sætning, som vi ikke beviser, men som vi kan forstå dele af, da vi ved, hvordan man parallelforskyder grafer for ligninger:

Sætning 16: Grafen for sammenhængen angivet ved ligningen:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1\ ;\ a>b>0\ ;\ G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

er en ellipse med centrum i (h,k) og med den halve storakse *a* og den halve lilleakse *b*.

Begreberne *storakse* og *lilleakse* fremgår af nedenstående tegning af forskellige ellipser:



$$\frac{(x+1)^2}{5^2}+\frac{(y-4)^2}{1^2}=1$$

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$

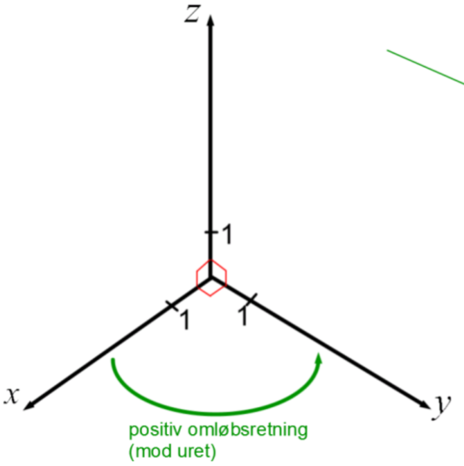
$$\frac{(x-2)^2}{5^2}+\frac{(y+6)^2}{3^2}=1$$

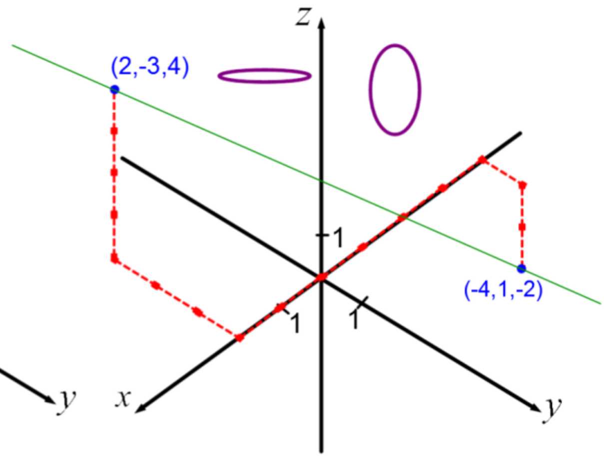
Tjek, at du kan forstå betydningen af alle tallene på venstre side af lighedstegnene.

Opgaverne 453*

Planer i rummet:

Vi går nu over til at se på geometriske steder i rummet. Vi har derfor brug for et koordinatsystem i rummet. Vi udvider vores kartesiske koordinatsystem med en *z*-akse, der står vinkelret på både *x*-aksen og *y*-aksen. Desuden har vi den regel, at hvis man placerer sig på *z*-aksens positive del (forestil dig, at du sætter dig på pilespidsen på *z*-aksen), og kigger ned på *xy*-planen, skal den korteste vinkelafstand at føre *x*-aksen over i *y*-aksen være i positiv omløbsretning (husk fra vores arbejde med enhedscirklen, at positiv omløbsretning er mod uret).





Tegninger i planen af figurer i rummet giver visse problemer. Vi kan godt afsætte punkter. Se f.eks. på punkterne $(2,-3,4)$ og $(-4,1,-2)$. Man afsætter $(2,-3,4)$ ved at begynde i origo, gå 2 enheder i *x*-aksens retning, derefter 3 enheder i modsat retning af *y*-aksen og endelig 4 enheder i *z*-aksens retning. Tjek, at du forstår, hvordan man afsætter punkterne.

Derefter kan vi også tegne den (grønne) rette linje, der går gennem de to punkter.

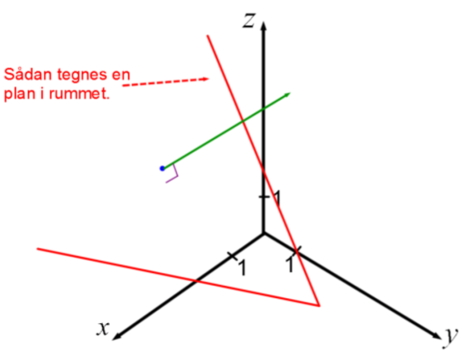
Og vi kan også tegne to violette **cirkler** i rummet.

Men bemærk, at du er nødt til at få at vide, at det er cirkler, der er tegnet (og ikke f.eks. ellipser). Inde i dit hoved kan du så forestille dig, hvordan cirklerne ligger. Men prøv også at se, om du inde i dit hoved kan få placeret cirklerne forskellige steder. Kan du f.eks. få cirklen til højre til både at være placeret med positive og negative *y*-værdier? Og kan du få den anden cirkel til både at ligge med positive og negative *z*-værdier.

Og hvad med punkterne? Prøv at afsætte punktet $(0,5,3)$. Det tegnes samme sted som punktet $(-4,1,-2)$. Og du kan finde uendelig mange andre punkter, der skal tegnes her. Prøv selv at finde nogle.

Dvs. du kan ikke ud fra et punkt på papiret aflæse koordinatsættet. Du kan kun afsætte et punkt ud fra et kendt koordinatsæt.

Helt generelt gælder det, at når du arbejder med tegninger i rummet, skal du selv hjælpe til med at se tingene rigtigt:



Her får du at vide, at tegningen viser en (rød) plan i rummet, hvori der ligger et (blåt) punkt, der er udgangspunkt for en (grøn) vektor, der står vinkelret på planen.

Kig på figuren. Du skal inde i dit hoved få oplysningerne til at passe, når du kigger på figuren.

Bemærk, hvordan man med to rette linjestykker forsøger det umulige, nemlig at tegne en plan.

Du kan forestille dig en plan som en bordplade uden tykkelse, der er forlænget uendeligt til alle sider i længden og bredden, og som du bagefter har vinklet i en eller anden retning. Der er uendeligt mange punkter på en plan, og den deler rummet i to dele. Man kan ikke langs en sammenhængende kurve komme fra et punkt i rummet på den ene side af planen til et punkt i rummet på den anden side af planen uden at gå igennem planen. Der er ingen vej udenom.
Prøv ud fra ovenstående at overveje, hvorfor det er umuligt at tegne en plan i rummet.
Derfor anvender man den angivne metode, der bare ligner en vinkel. Du må altså ikke forstå de to (røde) rette linjer som en afgrænsning af planen.

Vi vil nu gerne se på planens ligning, og her begynder vi med tre planer, der er simple at angive som en ligning, nemlig *xy*-planen, *yz*-planen og *xz*-planen.

xy-planen: Det karakteristiske for alle punkter i *xy*-planen er, at deres *z*-koordinat er 0. Hvis du tager et punkt i rummet, der har *z*-koordinaten 0, så ligger det i *xy*-planen, og hvis du tager et punkt i *xy*-planen, så har det *z*-koordinaten 0. *xy*-planen er derfor bestemt ved ligningen $z=0$.

Tilsvarende kan siges om de to andre planer, så man har:

Sætning 17: *xy*-planen er bestemt ved ligningen $z=0$.
xz-planen er bestemt ved ligningen $y=0$.
yz-planen er bestemt ved ligningen $x=0$.

Opgaverne 454*

Men hvad med planer generelt?
Vi skal under vektorgeometrien indføre begrebet *normalvektor*, der kan hjælpe os til at forstå de følgende sætninger, men indtil videre må vi bare nøjes med at se første del af sætningen som en ubevist påstand, mens anden del følger af vores viden om parallelforskydning.

Sætning 18:

- Ligningen $a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z=0\ ;\ (a,b,c)\neq(0,0,0)\ ;\ G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ beskriver en plan, der indeholder origo.
- Ligningen $a\cdot(x-x_0)+b\cdot(y-y_0)+c\cdot(z-z_0)=0\ ;\ (a,b,c)\neq(0,0,0)\ ;\ G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ beskriver en plan, der indeholder punktet $P_0(x_0,y_0,z_0)$.
- En *plan* er det geometriske sted for de punkter $P(x,y,z)$, der er bestemt ved ligningen:

$$a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z+d=0\ \ ;\ \ (a,b,c)\neq(0,0,0)\ \ ;\ \ G=\mathbb{R}^3$$

Den sidste del af sætningen kan vi komme frem til ud fra den midterste, hvis vi ganger ind i parenteserne og får $a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z\underbrace{-a\cdot x_0-b\cdot y_0-c\cdot z_0}_{\text{Dette udtryk svarer til } d}=0$. Det væsentlige er, at det markerede udtryk udelukkende indeholder konstanter, og derfor kan man erstatte det med én konstant *d*.

Der er 2 frihedsgrader i ligningen for en plan. Dette kan du udnytte, hvis du vil finde punkter i en angivet plan. Du kan frit vælge to af variablerne *x*, *y* og *z*, hvorefter den sidste kan beregnes.

Bemærk, at man ikke kan angive en linje i rummet med en ligning. Man kan i stedet anvende en parameterfremstilling, hvilket vi behandler under Vektorgeometri og Vektorfunktioner.

Eksempel 40: Vi ser på planen bestemt ved ligningen $3x-4y+2z+12=0$; $G=\mathbb{R}^3$.

Vi kan finde nogle punkter, der ligger i planen, ved at udnytte vores 2 frihedsgrader og selv sætte værdier for to af variablerne. Det nemmeste er ofte at sætte dem til 0:

$x=y=0$: Vi får så ligningen $2z+12=0 \Leftrightarrow z=-6$.

Dvs. punktet $(0,0,-6)$ ligger i planen.

$x=z=0$: Vi får så ligningen $-4y+12=0 \Leftrightarrow y=3$.

Dvs. punktet $(0,3,0)$ ligger i planen.

$y=z=0$: Vi får så ligningen $3x+12=0 \Leftrightarrow x=-4$.

Dvs. punktet $(-4,0,0)$ ligger i planen.

Bemærk, at man ved ovenstående metode finder skæringspunkterne med koordinatakserne.

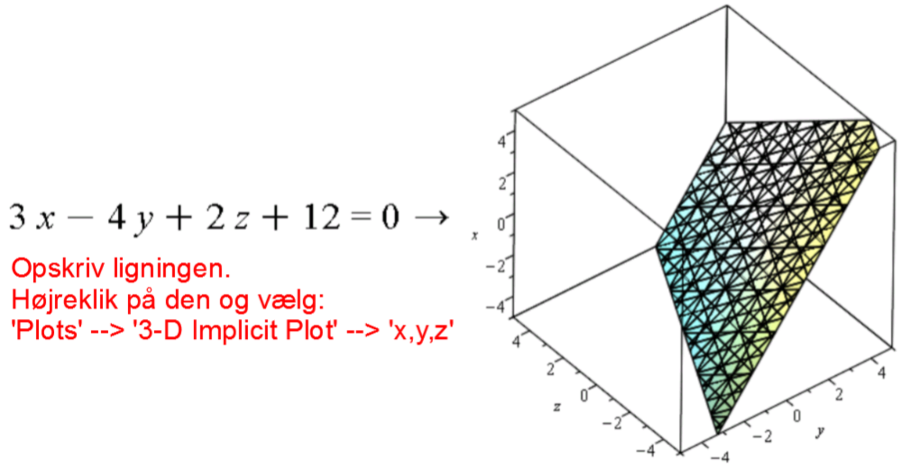
Man kunne også have sagt $x=2 \wedge y=-1$: Så får man:

$$3\cdot 2-4\cdot(-1)+2z+12=0 \Leftrightarrow 6+4+2z+12=0 \Leftrightarrow z=-11$$

Dvs. punktet $(2,-1,-11)$ ligger i planen.

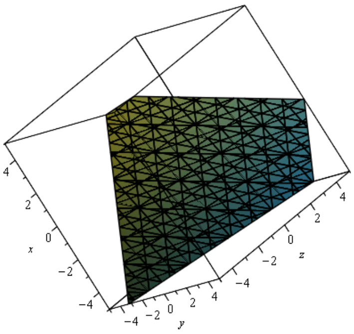
Vi har nu set, hvordan man kan bestemme lige så mange punkter i planen, som man har lyst til. Vi har ikke set, hvad det skal bruges til. Vi vil senere se, at vi får brug for det, når man skal gå fra en ligning til en parameterfremstilling for en plan.

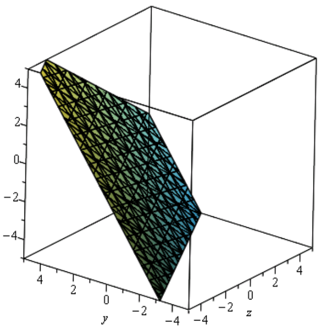
Maple kan tegne en plan i rummet på følgende måde:

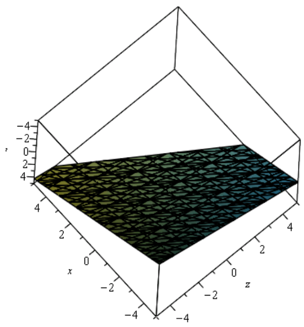


Prøv at se, om du kan finde punkterne $(0,3,0)$ og $(-4,0,0)$ på plottet.

Du kan også dreje plottet, så det ses fra andre sider (prøv selv):







Eksempel 41: Vi ser igen på planen bestemt ved ligningen $3x-4y+2z+12=0$; $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Vi har allerede gennemgået, hvordan vi finder skæringer med koordinatakserne. Vi skal nu se på, hvordan man bestemmer skæringer med *xy*-planen, *yz*-planen og *xz*-planen.

Hvis man overvejer situationen, kan man indse, at skæringerne må være rette linjer.

Lad os se på, hvordan det fremkommer ud fra ligningen:

Skæring med *xy*-planen:
Her er $z=0$, og indsat i planens ligning giver det: $3x-4y+12=0$.
Vi genkender dette som ligningen for en ret linje i *xy*-planen, hvilket stemmer med vores overvejelse ovenfor.

Skæring med *yz*-planen:
Her er $x=0$, og indsat i planens ligning giver det: $-4y+2z+12=0$.
Dette er ligningen for en ret linje i *yz*-planen.

Skæring med *xz*-planen:
Her er $y=0$, og indsat i planens ligning giver det: $3x+2z+12=0$.
Dette er ligningen for en ret linje i *xz*-planen.

I eksempel 41 så vi tre eksempler på ligninger for rette linjer i tre forskellige planer. Men er dette ikke i modstrid med bemærkningen om, at man ikke i rummet kan angive en ret linje ved hjælp af en ligning?

Svaret er nej.

Vi skal her huske på vores grundmængder:

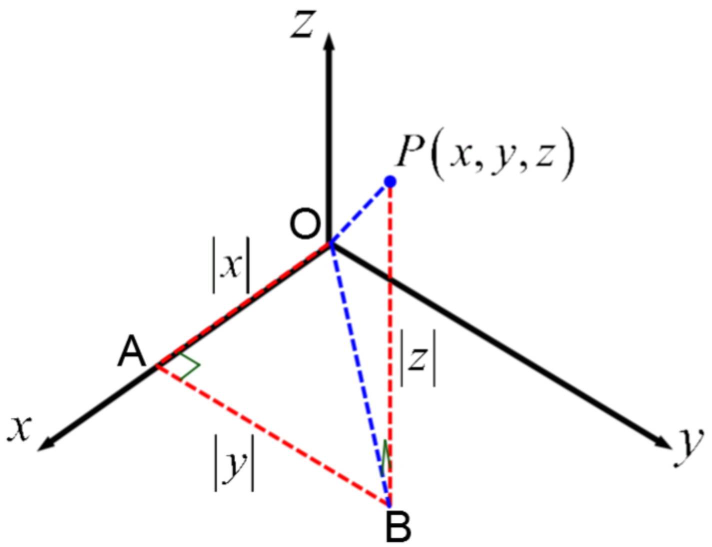
$3x-4y+12=0$; $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ er ligningen for en ret linje i *xy*-planen.

$3x-4y+12=0$; $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ er ligningen for en plan i rummet.

Opgaverne 455*

Kugler:

Som det sidste geometriske sted ses på en kugle, der ligesom en plan er en rumlig figur. Vi vil gerne angive kuglen ved hjælp af en ligning og ser derfor på følgende situation:



Vi ser på et vilkårlig punkt $P(x,y,z)$ i rummet, og vi vil gerne bestemme afstanden $|OP|$ fra *O* til *P*.

Vi vil benytte de to retvinklede trekanter *OAB* og *OBP*, hvor *A* er projektionen af *P* på *x*-aksen, og *B* er projektionen af *P* på *xy*-planen.

Pythagoras anvendt på $\triangle OAB$ giver: $|OA|^2+|AB|^2=|OB|^2$. Og på $\triangle OBP$: $|OB|^2+|BP|^2=|OP|^2$. Altså er: $|OA|^2+|AB|^2+|BP|^2=|OP|^2$

Vores tegning giver os altså: $|OP|^2=x^2+y^2+z^2 \Leftrightarrow |OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Dette kan vi benytte, når vi skal overføre vores geometriske definition på en kugle til en sætning inden for analytisk geometri:

Definition 13 (geometrisk definition): En kugle med radius *r* består af alle de punkter i rummet, der har afstanden *r* til et givet punkt i rummet kaldet centrum.

Sætning 19 (analytisk geometri): En kugle med radius *r* og centrum i origo er det geometriske sted for de punkter $P(x,y,z)$, der er bestemt ved ligningen:

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \quad ; \quad G=\mathbb{R}^3$$

Vores viden om parallelforskydninger giver os så følgende sætning:

Sætning 20: En kugle med radius *r* og centrum i punktet $C(a,b,c)$ er det geometriske sted for de punkter $P(x,y,z)$, der er bestemt ved ligningen:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \quad ; \quad G=\mathbb{R}^3$$

Eksempel 42: Bestem radius og centrums koordinater for den kugle, der er bestemt ved ligningen:

$$(x-4)^2+(y+12)^2+z^2=49 \quad ; \quad G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

Vi aflæser ud fra ligningen, at $\underline{\underline{C=(4,-12,0) \text{ og } r=7}}$

Opgaverne 456*

Den matematiske behandling af cirkler og kugler er på mange måder ens, og vi kan også omskrive sætning 20, så vi får:

Sætning 21: Hvis $k>-\frac{l^2}{4}-\frac{m^2}{4}-\frac{n^2}{4}$, er ligningen $x^2+l\cdot x+y^2+m\cdot y+z^2+n\cdot z=k$ ligningen for en kugle med centrum i $C\left(-\frac{l}{2},-\frac{m}{2},-\frac{n}{2}\right)$ og radius $r=\sqrt{k+\frac{l^2}{4}+\frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{4}}$

Det drejer sig igen om kvadratkomplettering, men igen er det nemmest at forstå med et konkret eksempel.

Eksempel 43: Bestem centrum og radius for en kugle givet ved ligningen:

$$x^2+4x+y^2-6y+z^2-10z+2=0 \quad ; \quad G=\mathbb{R}^3$$

Vi omskriver til formen $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$, hvorefter vi kan aflæse:

$$x^2+4x+y^2-6y+z^2-10z+2=0 \Leftrightarrow$$
$$(x+2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=-2+2^2+(-3)^2+(-5)^2 \Leftrightarrow$$
$$(x+2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=-2+4+9+25=36=6^2$$

Dvs. $\underline{\underline{C=(-2,3,5) \text{ og } r=6}}$

Opgaverne 458*

LIGNINGSSYSTEMER

Når man skal løse et matematisk problem eller et problem fra virkeligheden, kan det vise sig, at man ud fra situationen kan opstille flere forskellige ligninger. Hvis man har to eller flere forskellige ligninger, der indgår i samme problemstilling, taler man om *ligningssystemer*.

Definition 14: At *løse et ligningssystem* vil sige at bestemme det eller de sæt af værdier af de variable, der gør samtlige udsagn sande, eller at afgøre, at ingen sæt af værdier gør samtlige udsagn sande.

Eksempler på ligningssystemer er:

$$\begin{aligned} 2x+3y&=7 \\ 5x-9y&=-12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x-6y+2z&=9 \\ -x+2y+8z&=14 \\ 2x-5y+z&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y^2&=9 \\ x^2-\sqrt{y}&=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x+3y&=8 \\ 5x+y&=9 \\ -x+2y&=-4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x+6y-z&=12 \\ x+3y+9z&=8 \end{aligned}$$

De fire ligningssystemer til venstre kaldes *lineære* ligningssystemer, mens ligningssystemet til højre ikke er lineært, da man både har kvadrater og en kvadratrod i forbindelse med variablerne.
Det lineære ligningssystem øverst til venstre kaldes kort: *To ligninger med to ubekendte.*
Det optræder f.eks., når man skal finde et skæringspunkt mellem to rette linjer.

Øverst i midten har vi et *lineært ligningssystem bestående af 3 ligninger med 3 ubekendte*.
Det optræder f.eks., når man inden for rumgeometrien skal finde skæring mellem 3 planer.

Nederst til venstre er *tre ligninger med to ubekendte*.

Nederst i midten er *to ligninger med tre ubekendte.*

Som udgangspunkt – men KUN som udgangspunkt - kan man sige, at hvis antallet af ligninger i et lineært ligningssystem svarer til antallet af variable, vil der være én løsning. Hvis der er flere ligninger end variable, kan man sige, at der "kræves" for meget, så der vil ikke være nogen løsning, og hvis der er flere variable end ligninger, vil der være uendeligt mange løsninger.
Bemærk dog, at det kun er som udgangspunkt. Der kan være specielle omstændigheder, der gør, at disse tommelfingerregler ikke gælder. Men det opdager man, når man begynder at løse systemerne.

Vi skal i første omgang kun beskæftige os indgående med lineære ligningssystemer bestående af 2 ligninger med 2 ubekendte. Vi skal gennemgå 3 forskellige måder at løse disse ligningssystemer.

Derefter ses eksempler på ikke-lineære ligningssystemer, hvor vi skal finde skæringer mellem rette linjer, parabler, hyperbler og cirkler.

Lineære ligningssystemer

Substitutionsmetoden

"Substitution" betyder "udskiftning". Metoden går ud på at udskifte et udtryk i en ligning med et andet udtryk, der har samme værdi som det første, men ser anderledes ud.

Eksempel 44: Som bekendt kan man angive ligningen for en ret linje på formen $y = a \cdot x + b$.

Så nedenstående ligningssystem kan f.eks. være fremkommet ved, at man ønsker at bestemme skæringspunktet mellem to rette linjer:

$$\begin{aligned} y &= 2x - 9 \\ y &= -6x + 5 \end{aligned}$$

Vi ønsker altså at løse dette ligningssystem, dvs. vi skal finde sæt (x, y), der gør udsagnene sande. Bemærk, at dette sæt altså skal gøre BEGGE udsagn sande.

Vi kan derfor tage udgangspunkt i alle de $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, der gør det øverste udsagn sandt, dvs. **lighedstegnet i den øverste ligning gælder**.

Substitutionsmetoden går så ud på, at vi kan erstatte vores *y* i den **nederste** ligning med højresiden i vores **øverste** ligning, netop fordi vi har taget udgangspunkt i, at lighedstegnet i den øverste ligning gælder **og** fordi sættet (x, y) skal opfylde begge ligninger, dvs. vi kræver, at *y*-værdierne i de to ligninger skal være ens:

$$\left.\begin{aligned} y &= 2 \cdot x - 9 \\ y &= -6 \cdot x + 5 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow 2 \cdot x - 9 = -6 \cdot x + 5$$

Nærlæs ovenstående og tænk grundigt over det. Hvis du forstår dette, forstår du pointen med substitutionsmetoden.

Ved at indsætte den øverste lignings højreside i den nederste ligning, har vi nu fået omformet problemet til: $2 \cdot x - 9 = -6 \cdot x + 5$

Dvs. vi har en "almindelig" ligning, og denne ligning vil give os *x*-værdien i det sæt (x, y), der opfylder BEGGE udsagn (ligninger).

$$\begin{aligned} &2 \cdot x - 9 = -6 \cdot x + 5 \Leftrightarrow \\ &8 \cdot x = 14 \Leftrightarrow \\ &x = \frac{14}{8} = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Vi har fundet *x*-værdien i sættet, men mangler stadig at finde *y*-værdien. Vi har netop fundet den *x*-værdi, der giver ens *y*-værdier, og derfor kan man finde løsningens *y*-værdi ved at indsætte i en hvilken som helst af de to ligninger. Her indsættes det for forståelsens skyld i begge ligninger, men bemærk, at du IKKE skal gøre dette i en opgave, da det er nok at indsætte i én ligning:

x-værdien indsat i $y = 2x - 9$: $y = 2 \cdot \frac{7}{4} - 9 = \frac{14}{4} - 9 = \frac{14}{4} - \frac{36}{4} = \frac{-22}{4} = -\frac{11}{2}$

x-værdien indsat i $y = -6 \cdot x + 5$: $y = -6 \cdot \frac{7}{4} + 5 = -\frac{42}{4} + 5 = \frac{-42}{4} + \frac{20}{4} = \frac{-22}{4} = -\frac{11}{2}$

Dvs. at løsningen til ligningssystemet er $\left(\frac{7}{4}, -\frac{11}{2}\right)$.

Eksempel 45: Vi vil løse ligningssystemet:

$$\begin{aligned} y &= 2x+5 \\ 3x-4y &= 9 \end{aligned} \quad ; \quad G = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

Hvis man isolerer *y* i den nederste ligning, vil man kunne se, at det faktisk også er ligningen for en ret linje, så igen svarer problemet til at finde skæring mellem to linjer. Den øverste ligning fortæller os, hvad *y* skal svare til, og højresiden i den øverste ligning indsættes derfor på *y*'s plads i den nederste ligning:

$$3x-4\cdot(2x+5)=9 \;\Leftrightarrow$$

$$3x-8x-20=9 \;\Leftrightarrow$$

$$-5x=29 \;\Leftrightarrow$$

$$x=-\frac{29}{5}$$

Igen kan man frit vælge, hvilken af ligningerne man vil indsætte i for at finde den tilsvarende *y*-værdi, men her er den øverste ligning tydeligvis den nemmeste at arbejde med (da *y*-værdien allerede er isoleret i denne), og derfor indsættes i denne:

$$y=2\cdot\left(-\frac{29}{5}\right)+5=-\frac{58}{5}+5=-\frac{58}{5}+\frac{25}{5}=-\frac{33}{5}$$

Så løsningen på ligningssystemet – svarende til skæringspunktet mellem de to rette linjer – er $\underline{\underline{\left(-\frac{29}{5},-\frac{33}{5}\right)}}$

Maple kan også løse ligningssystemer. Disse skal opskrives i firkantede parenteser, hvor hver ligning adskilles af et komma:

$$[y=2x+5,\ 3x-4y=9] \xrightarrow{\text{solve (specified)}} \left\{x=-\frac{29}{5},\ y=-\frac{33}{5}\right\}$$

Resultatet er fremkommet ved at højreklikke på udtrykket i den firkantede parentes og vælge "solve" , "solve for variables" og derefter angive {x,y}.

Da ligningssystemet i dette tilfælde kun indeholder de variable, man ønsker at finde, er det dog lidt overflødigt med "specified" solve.

Man kan her nøjes med den lidt nemmere og hurtigere løsning at højreklikke og vælge "solve" og "solve":

$$[y=2x+5,\ 3x-4y=9] \xrightarrow{\text{solve}} \left\{x=-\frac{29}{5},\ y=-\frac{33}{5}\right\}$$

Man kunne også selv angive solve-kommandoen:

$$solve([y=2x+5,\ 3x-4y=9]) = \left\{x=-\frac{29}{5},\ y=-\frac{33}{5}\right\}$$

Ulempen ved denne metode er lighedstegnet mellem det blå og det sorte udtryk, der ikke er et korrekt placeret matematisk lighedstegn.

Med "fsolve" regnes ikke eksakt:

$$fsolve([y=2x+5,\ 3x-4y=9]) = \{x=-5.800000000,\ y=-6.600000000\}$$

Eksempel 46: Vi vil løse ligningssystemet:

$$\begin{matrix} 6x+3y=9 \\ 4x-7y=2 \end{matrix} \quad ; \quad G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

Dette problem adskiller sig fra de foregående ved, at vi ikke har noget $y=...$

Det kan vi imidlertid selv opnå ved at forkorte den øverste ligning med 3 og flytte første led over på højresiden:

$$6x+3y=9 \Leftrightarrow \quad 2x+y=3 \Leftrightarrow \quad y=-2x+3$$

Husk på, at det at forkorte en ligning IKKE ændrer dens sandhedsværdi.
Vi kan nu indsætte dette udtryk i den nederste ligning:

$$4\cdot x-7\cdot(-2x+3)=2 \Leftrightarrow$$
$$4x+14x-21=2 \Leftrightarrow$$
$$18x=23 \Leftrightarrow \quad x=\frac{23}{18}$$

Igen kan vi frit vælge den ligning, vi vil indsætte i, men her er det vigtigt at bemærke, at vi jo allerede har isoleret y i den ene ligning, og ved at udnytte ligningen på denne form gør vi arbejdet nemmere for os selv. Dvs. vi benytter $y=-2x+3$:

$$y=-2\cdot\frac{23}{18}+3=-\frac{23}{9}+\frac{27}{9}=\frac{4}{9}$$

Så løsningen er $\underline{\underline{\left(\frac{23}{18},\frac{4}{9}\right)}}$

Vi tjekker med Maple:

$$[6\,x+3\,y=9,\ 4\,x-7\,y=2] \xrightarrow{\text{solve}} \left\{x=\frac{23}{18},\ y=\frac{4}{9}\right\}$$

I alle de foregående eksempler har det været y, der var eller blev isoleret i den øverste ligning, og der blev indsat i den nederste ligning. Der er ikke noget krav om, at det skal være sådan, for der er hverken noget specielt ved y eller ved den øverste ligning. Man kan isolere en hvilken som helst variabel i en hvilken som helst af ligningerne og indsætte den i en anden ligning.

Eksempel 47: Vi vil løse ligningssystemet:

$$\begin{matrix} 2x+5y=-4 \\ -x+3y=5 \end{matrix} \quad ; \quad G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

Vi isolerer x i den nederste ligning: $x=3y-5$ og indsætter dette i den øverste ligning:

$$2\cdot(3y-5)+5\cdot y=-4 \Leftrightarrow$$
$$11\cdot y=6 \Leftrightarrow$$
$$y=\frac{6}{11}$$

Dette indsættes i det udtryk, hvor vi allerede har isoleret x: $x=3\cdot\frac{6}{11}-5=\frac{18}{11}-\frac{55}{11}=-\frac{37}{11}$

Dvs. løsningen til ligningssystemet er $\underline{\underline{\left(-\frac{37}{11},\frac{6}{11}\right)}}$

Opgaverne 460*

Lige store koefficienters metode

Substitutionsmetodens helt store styrke er, at den kan anvendes i et hav af forskellige tilfælde, hvilket vi skal se under behandlingen af ikke-lineære ligningssystemer. Vi skal nu se på en metode, der ikke er lige så universel, men som til gengæld oftest er nemmere at anvende, når man arbejder med lineære ligningssystemer.

Vi ser på ligningssystemet:

$$\begin{matrix} 2x+5y=-11 \\ 4x-2y=14 \end{matrix} \quad ; \quad G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

Koefficienterne er tallene foran variablerne, dvs. i dette tilfælde har vi koefficienterne 2, 5, 4 og -2.

Lige store koefficienters metode er opkaldt efter, at man til at begynde med ved at forlænge eller forkorte en eller begge ligninger opnår, at **ligningerne har lige store koefficienter foran *x* ELLER *y*.**

Eksempel 48: Vi betragter ligningssystemet:

$$\begin{matrix} 2x+5y=-11 \\ 4x-2y=14 \end{matrix} \quad ; \quad G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

Vi ønsker, at der skal være lige store koefficienter foran enten *x* eller *y*, og i dette tilfælde er det nemmest at opnå foran *x*, da vi blot skal forlænge den øverste ligning med 2. Vi får dermed følgende ligningssystem, hvor du skal bemærke, at koefficienterne foran *x* i begge ligninger er 4:

$$\begin{matrix} 4x+10y=-22 \\ 4x-2y=14 \end{matrix}$$

Vi husker på, at en løsning er et sæt (x,y), der skal opfylde begge ligninger, og derfor går vi ud fra, at begge lighedstegn gælder. Der må derfor også gælde, at hvis vi trækker de to venstresider fra hinanden, får vi det samme, som hvis vi trækker de to højresider fra hinanden.

$$\left.\begin{matrix} 4x+10y=-22 \\ 4x-2y=14 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (4x+10y)-(4x-2y)=-22-14 \quad\Leftrightarrow\quad 12y=-36 \quad\Leftrightarrow\quad y=-3$$

Bemærk pointen med metoden: Netop fordi koefficienterne foran *x* er ens, forsvinder variablen *x*, når vi trækker siderne fra hinanden.

Vi indsætter *y*-værdien i den øverste ligning for at finde *x*:

$$2x+5\cdot(-3)=-11 \quad\Leftrightarrow\quad 2x=4 \quad\Leftrightarrow\quad x=2$$

Dvs. løsningen er $\underline{\underline{(2,-3)}}$

Vi tjekker med Maple:

$$[2x+5y=-11,\ 4x-2y=14] \xrightarrow{\text{solve}} \{x=2,\ y=-3\}$$

For at forstå skridtet, hvor venstresiderne og højresiderne trækkes fra hinanden, kan du tænke over:

$$\left.\begin{matrix} a=7 \\ b=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a-b=7-2 \quad\Leftrightarrow\quad a-b=5$$

Eksempel 49: Vi ser på ligningssystemet:

$$\begin{matrix} -3x-2y=-2 \\ 6x+3y=-3 \end{matrix} \quad ; \quad G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

Igen er det nemmest at få lige store koefficienter foran *x*. Det kan opnås ved at forlænge den øverste ligning med -2, og udregningerne bliver:

$$\left.\begin{matrix} 6x+4y=4 \\ 6x+3y=-3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (6x+4y)-(6x+3y)=4-(-3) \iff y=7$$

Det indsættes i den nederste ligning for at finde *x*-værdien:

$$6x+3\cdot 7=-3 \iff 6x=-24 \iff x=-4$$

Dvs. løsningen er $\underline{\underline{(-4,7)}}$

Der tjekkes med Maple:

$$[-3x-2y=-2,\ 6x+3y=-3] \xrightarrow{\text{solve}} \{x=-4,\ y=7\}$$

Som nævnt er pointen med lige store koefficienters metode, at man først skaber lige store koefficienter foran enten *x* eller *y*. Men faktisk er det nemmere at undgå fortegnsfejl i beregningerne, hvis man i stedet for lige store koefficienter skaber **numerisk** lige store koefficienter, men med modsatte fortegn. For så kan man få fjernet en variabel ved at lægge siderne sammen i stedet for at trække dem fra hinanden.

Eksempel 50: Vi ser på ligningssystemet fra Eksempel 49 igen:

$$\begin{matrix} -3x-2y=-2 \\ 6x+3y=-3 \end{matrix} \quad ; \quad G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

Den øverste ligning forlænges med 2, så koefficienterne foran *x* er -6 og 6:

$$\begin{matrix} -6x-4y=-4 \\ 6x+3y=-3 \end{matrix}$$

Vi lægger nu venstresiderne sammen og højresiderne sammen:

$$(-6x-4y)+(6x+3y)=-4+(-3) \iff -y=-7 \iff y=7$$

Det indsættes i den nederste ligning for at finde *x*-værdien:

$$6x+3\cdot 7=-3 \iff 6x=-24 \iff x=-4$$

Dvs. løsningen er $\underline{\underline{(-4,7)}}$

Vi har hidtil kunnet nøjes med at forlænge den ene ligning. Nu ser vi på et eksempel, hvor man – hvis man vil have pæne tal – er nødt til at forlænge begge ligninger:

Eksempel 51: Vi ser på ligningssystemet:

$$\begin{array}{r} -5x+3y=-1 \\ 7x-4y=2 \end{array} \quad ; \quad G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

Her forlænges den øverste ligning med 4 og den nederste med 3. Så får vi numerisk lige store koefficienter foran *y*, men med forskellige fortegn, hvorfor vi efterfølgende kan lægge sammen i stedet for at trække fra.

$$\left.\begin{array}{r} -20x+12y=-4 \\ 21x-12y=6 \end{array}\right\} \Rightarrow (-20x+12y)+(21x-12y)=-4+6 \;\Leftrightarrow\; x=2$$

Dette indsættes i den øverste ligning (i dette tilfælde er der ingen af ligningerne, der er mere oplagt end den anden):

$$-5\cdot 2+3\cdot y=-1 \;\Leftrightarrow\; 3y=9 \;\Leftrightarrow\; y=3$$

Dvs. løsningen er $\underline{\underline{(2,3)}}$

Vi har indtil videre kun set på ligningssystemer, hvor der var en løsning. Vi skal nu se på et par specialtilfælde:

Eksempel 52: Vi ser på ligningssystemet:

$$\begin{array}{r} 2x-3y=7 \\ -4x+6y=-3 \end{array} \quad ; \quad G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

Vi forlænger den øverste ligning med 2 og lægger sammen:

$$\left.\begin{array}{r} 4x-6y=14 \\ -4x+6y=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow (4x-6y)+(-4x+6y)=14+(-3) \;\Leftrightarrow\; 0=11$$

Bemærk denne ligning. Det er en absurditet.
Spørgsmålet er, hvordan dette skal fortolkes?

Vi søgte et sæt (x,y), der opfylder begge ligninger, og vi er kommet frem til en absurditet. Dette fortæller os, at der ikke findes et sæt (x,y), der opfylder begge ligninger, dvs. ligningssystemet har ingen løsninger. Dette skrives: $\underline{\underline{L=\varnothing}}$

Hvis det er to rette linjer, hvor man søgte efter en skæring, fortæller dette, at der ikke er nogen skæringer, dvs. linjerne er parallelle.

Hvis man forsøger at anvende Maple, får man:

$$[2x-3y=7,-4x+6y=-3] \xrightarrow{\text{solve}}$$

Bemærk dette. Maple fortæller dig altså ikke, at der ikke er nogen løsning på problemet på anden måde end ved slet ikke at skrive noget.

Eksempel 53: Som sidste eksempel ser vi på ligningssystemet:

$$\begin{matrix} -4x+7y=5 \\ 12x-21y=-15 \end{matrix} \quad ; \quad G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

Den øverste ligning forlænges med 3, og der lægges sammen:

$$\left.\begin{matrix} -12x+21y=15 \\ 12x-21y=-15 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (-12x+21y)+(12x-21y)=15+(-15) \quad \Leftrightarrow \quad 0=0$$

Den sidste ligning er en identitet.
Spørgsmålet er så, hvordan dette skal fortolkes?

Vi har søgt alle de sæt (x,y), der gør begge ligninger sande, og svaret er, at alle sæt (x,y) gør udsagnet sandt (det er jo hele pointen med en identitet).

MEN her det vigtigt at bemærke implikationspilen "$\Rightarrow$" i udregningen. Den forhindrer os i at gå den modsatte vej, dvs. vi kan alligevel ikke konkludere, at alle sæt (x,y) gør begge udsagn sande. For ikke alle sæt (x,y) gør de enkelte udsagn set hver for sig sande.
Vores konklusion er i stedet, at alle de (x,y), der gør det ene udsagn sandt, også gør det andet udsagn sandt. Eller udtrykt på en anden måde: De to rette linjer er sammenfaldende.

Maple fortæller os ovenstående på følgende måde:

$$[-4x+7y=5,\ 12x-21y=-15] \xrightarrow{\text{solve}} \left\{x=-\frac{5}{4}+\frac{7}{4}y,\ y=y\right\}$$

Det sidste udtryk i parentesen fortæller os, at y kan være hvad som helst, mens det første giver os den sammenhæng, der skal gælde mellem x og y, og udtrykket er fremkommet ved, at x er isoleret i en af ligningerne.
Der er altså uendeligt mange løsninger, nemlig alle de sæt (x,y), der opfylder den ene af ligningerne (og dermed også den anden ligning).

Opgaverne 461* og 462* og 463*

Determinant

Som du måske bemærkede, er lige store koefficienters metode en meget systematisk metode, hvor man følger den samme procedure igen og igen. Man kan derfor behandle et generelt ligningssystem og foretage udregningerne én gang for alle. Dette fører til indførelsen af begrebet *determinant*.

Vi indleder med definitionen af en determinant, og den efterfølgende udregning viser så, hvorfor man indfører denne størrelse.

Definition 15: For ligningssystemet $\begin{matrix} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2 \end{matrix}$; $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ indføres determinanterne:

$$d = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

$$d_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = b_2 \cdot c_1 - b_1 \cdot c_2$$

$$d_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1$$

Bemærk, at dette er en definition. Dvs. der foregår ikke nogen udregning eller matematisk argumentation i forbindelse med lighedstegnene. Definitionen fortæller os simpelthen, hvordan vi skal forstå symbolerne d, d_x, d_y og $\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$.

Eksempel 54: Vi ser på ligningssystemet:

$$\begin{matrix} 4x - 7y = 9 \\ -3x + y = -2 \end{matrix} \qquad G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Vi udregner nu determinanterne (bemærk, at du endnu ikke har fået at vide, hvad disse skal bruges til, så indtil videre er det kun en øvelse i at forstå definitionen):

$$d = \begin{vmatrix} 4 & -7 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - (-3) \cdot (-7) = 4 - 21 = -17$$

$$d_x = \begin{vmatrix} 9 & -7 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \cdot 1 - (-2) \cdot (-7) = 9 - 14 = -5$$

$$d_y = \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-2) - (-3) \cdot 9 = -8 + 27 = 19$$

Opgaverne 464*

Vi skal nu forstå, hvorfor man indfører determinanterne. Vi ser altså på ligningssystemet:

$$\begin{matrix} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2 \end{matrix} \quad ; \quad G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Bemærk, at dette er et generelt lineært ligningssystem bestående af to ligninger med to variable.

Vi ønsker at få lige store koefficienter foran *x*, og det opnås ved at forlænge den øverste ligning med a_2 og den nederste med a_1. Hold godt øje med indices i udregningerne. Alle produkter er opskrevet efter reglerne, at bogstaverne opskrives alfabetisk, og for ens bogstaver opskrives koefficienten med det mindste indeks først:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdot a_2 \cdot x + a_2 \cdot b_1 \cdot y = a_2 \cdot c_1 \\ a_1 \cdot a_2 \cdot x + a_1 \cdot b_2 \cdot y = a_1 \cdot c_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(a_1 \cdot a_2 \cdot x + a_1 \cdot b_2 \cdot y\right) - \left(a_1 \cdot a_2 \cdot x + a_2 \cdot b_1 \cdot y\right) = a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1$$

På venstresiden forsvinder leddene med *x* ved subtraktionen, og vi sætter *y* uden for en parentes. Når dette er gjort, genkender vi to af determinanterne fra vores definition:

$$\left(a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1\right) \cdot y = a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1$$
$$d \cdot y = d_y$$

Vi er meget tæt på at kunne isolere *y*, men problemet er, at vi for at gøre dette skal dividere med *d*. Dette må vi kun gøre, hvis *d* ikke er nul, så nu **antager** vi i første omgang, at $d \neq 0$. Og vi får så:

$$y = \frac{d_y}{d}$$

Dette har altså – under forudsætning af at $d \neq 0$ – givet os *y*-værdien i det sæt (x, y), der er løsning til ligningssystemet.

Vi mangler at finde *x*-værdien, og for at gøre dette skal vi have lige store koefficienter foran *y*. Dette får vi ved at forlænge den øverste af de oprindelige ligninger med b_2 og den nederste med b_1.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdot b_2 \cdot x + b_1 \cdot b_2 \cdot y = b_2 \cdot c_1 \\ a_2 \cdot b_1 \cdot x + b_1 \cdot b_2 \cdot y = b_1 \cdot c_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(a_1 \cdot b_2 \cdot x + b_1 \cdot b_2 \cdot y\right) - \left(a_2 \cdot b_1 \cdot x + b_1 \cdot b_2 \cdot y\right) = b_2 \cdot c_1 - b_1 \cdot c_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1\right) \cdot x = b_2 \cdot c_1 - b_1 \cdot c_2 \quad \Leftrightarrow \quad d \cdot x = d_x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{d_x}{d}$$

Opsamling: Vi er kommet frem til, at hvis $d \neq 0$, er løsningen til ligningssystemet $\left(\frac{d_x}{d}, \frac{d_y}{d}\right)$.

Du skulle altså nu kunne se, hvorfor man har indført determinanterne.

Vi mangler dog endnu at se på situationen, hvor $d = 0$. Så vi **antager** nu, at $d = 0$:
Vores udregninger forløber på samme måde som før, indtil vi når det skridt, hvor vi tidligere kunne dividere med *d*, da vi havde antaget, at *d* var forskellig fra nul. Men nu har vi antaget, at *d* **er** nul, og derfor får vi:

$$\left(a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1\right) \cdot y = a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \cdot y = a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = d_y$$

Den tilsvarende udregning for *x*-værdien giver os:

$$\left(a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1\right) \cdot x = b_2 \cdot c_1 - b_1 \cdot c_2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \cdot x = d_x \quad \Leftrightarrow \quad 0 = d_x$$

HVIS $d_y \neq 0 \wedge d_x \neq 0$, har vi to absurditeter, hvilket som tidligere set fortæller os, at ligningssystemet ikke har nogen løsninger.
HVIS $d_y = 0 \wedge d_x = 0$, har vi to identiteter, hvilket fortæller os, at der er uendeligt mange løsninger til ligningssystemet (hvis det er rette linjer, er de sammenfaldende), nemlig alle de sæt (x, y), der opfylder den ene af ligningerne.

Men hvad hvis $d_y \neq 0 \wedge d_x = 0$ eller $d_y = 0 \wedge d_x \neq 0$?

Her ville vi komme ud i en underlig situation med både en identitet og en absurditet, hvor vi tilsyneladende ville kunne bruge alle værdier for den ene variabel, men ingen for den anden.
Svaret på denne paradoksale situation er: **Disse to muligheder eksisterer ikke**.
Og det vil vi nu vise:
Da dette problem er fremkommet under forudsætningen $d = 0$, skal vi altså vise, at følgende to situationer IKKE kan forekomme:

$$d = 0 \wedge d_x = 0 \wedge d_y \neq 0$$
$$d = 0 \wedge d_x \neq 0 \wedge d_y = 0.$$

Her behandles kun den øverste situation. Du skal selv efterfølgende gøre det samme med den nederste:
Vi antager, at $d = 0 \wedge d_x = 0$. Dvs. at:

$$a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 = 0 \Leftrightarrow a_1 \cdot b_2 = a_2 \cdot b_1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$
$$b_2 \cdot c_1 - b_1 \cdot c_2 = 0 \Leftrightarrow b_1 \cdot c_2 = b_2 \cdot c_1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Den sidste biimplikation i begge linjer kræver nogle ekstra kommentarer, for hvordan kan vi være sikre på, at vi ikke kommer til at dividere med 0?

For det første bemærkes, at ikke både a_1 og a_2 kan være 0. Det samme gælder for b_1 og b_2. For i så fald ville den ene af variablerne slet ikke indgå i ligningssystemet, dvs. vi ville ikke have to ligninger med to ubekendte.

Ligeledes kan ikke både a_1 og b_1 være 0. Og heller ikke både a_2 og b_2. For så ville den ene af ligningerne slet ikke indeholde hverken *x* eller *y*, men blot være en absurditet eller identitet.

Og når ovenstående tages i betragtning, kan heller ikke både a_1 og b_2 eller både a_2 og b_1 være nul, for så ville *d* ikke være 0 (da det ene led ville være 0, mens det andet ville være forskelligt fra 0, da det består af to faktorer, der er forskellige fra 0 – jf. nulreglen).

Dette fortæller os, at højst én af a_1, a_2, b_1 og b_2 kan være 0. Og da vi frit kan bytte rundt på nederste og øverste ligning, kan vi sørge for, at ingen af a_2 og b_2 er 0.

Men hvad med *c*'erne?

Hvis $c_2 \neq 0$ følger det af de to udtryk yderst til højre på de to linjer, at:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow a_1 \cdot c_2 = a_2 \cdot c_1 \Leftrightarrow a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1 = 0 \Leftrightarrow d_y = 0$$

Og så er det ønskede vist, nemlig at man ikke kan have $d = 0 \wedge d_x = 0 \wedge d_y \neq 0$.

Hvis $c_2 = 0$ følger af $b_1 \cdot c_2 = b_2 \cdot c_1$, at $c_1 = 0$, da $b_2 \neq 0$. Og så er $d_y = a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1 = 0$.

Hermed er det ønskede vist. Det kræver selvfølgelig en nærlæsning af argumentationen at se, at alle muligheder er behandlet, men lad os prøve at samle det hele i en anvendelig sætning:

Sætning 22: For ligningssystemet $\begin{matrix} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2 \end{matrix}$; $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gælder:

Hvis $d \neq 0$, er der én løsning til ligningssystemet, og den er $(x, y) = \left(\frac{d_x}{d} ; \frac{d_y}{d} \right)$

Hvis $d = 0 \wedge d_x \neq 0$, er der ingen løsninger til ligningssystemet.

Hvis $d = 0 \wedge d_x = 0$, er der uendeligt mange løsninger til ligningssystemet, nemlig alle de sæt (x, y), der opfylder den ene ligning.

Eksempel 55: Vi ønsker at løse ligningssystemet: $\begin{matrix} 6x - 3y = 7 \\ -2x + 5y = 11 \end{matrix}$; $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$d = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 6 \cdot 5 - (-2) \cdot (-3) = 30 - 6 = 24$$

Vi udregner determinanterne: $d_x = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 11 & 5 \end{vmatrix} = 7 \cdot 5 - 11 \cdot (-3) = 35 + 33 = 68$

$$d_y = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} = 6 \cdot 11 - (-2) \cdot 7 = 66 + 14 = 80$$

Da $d \neq 0$, er der én løsning, som er $(x, y) = \left(\frac{d_x}{d} ; \frac{d_y}{d} \right) = \left(\frac{68}{24} ; \frac{80}{24} \right) = \underline{\underline{\left(\frac{17}{6} ; \frac{10}{3} \right)}}$

Eksempel 56: Vi ønsker at løse ligningssystemet: $\begin{matrix} 3x + 7y = 6 \\ -9x - 21y = 2 \end{matrix}$; $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Vi går i gang med at udregne determinanterne:

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -9 & -21 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-21) - (-9) \cdot 7 = -63 + 63 = 0$$

$$d_x = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 2 & -21 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-21) - 2 \cdot 7 = -126 - 14 = -140 \neq 0$$

Da $d = 0 \wedge d_x \neq 0$, behøver vi ikke at regne videre, men kan konkludere, at $\underline{\underline{L = \varnothing}}$

Eksempel 57: Vi ønsker at løse nedenstående ligningssystem.

$$\begin{matrix} 2x - 6y = -8 \\ -x + 3y = 4 \end{matrix} \quad ; \quad G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Vi går i gang med at udregne determinanterne:

$$d = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot (-6) = 6 - 6 = 0$$

$$d_x = \begin{vmatrix} -8 & -6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -8 \cdot 3 - 4 \cdot (-6) = -24 + 24 = 0$$

Da $d = 0 \wedge d_x = 0$, er der uendeligt mange løsninger.

Opgaverne 465*

Ikke-lineære ligningssystemer

Som afslutning på vores behandling af ligninger ses på ikke-lineære ligningssystemer. Vi vil udelukkende se på situationer, hvor disse anvendes til at finde skæringer mellem forskellige geometriske steder.

Vi begynder med at se på skæringen mellem en ret linje og en parabel. Prøv først selv at skitsere problemstillingen på et papir!

Du skal komme frem til, at der er mulighed for 0, 1 eller 2 skæringspunkter. Lad os se på, hvordan det fremkommer ud fra vores ligninger:

Eksempel 58: Skæring mellem ret linje og parabel.

Vi ser på en ret linje og en parabel, og vores ligningssystem bliver så:

$$\begin{matrix} y = 2x+1 \\ y = x^2+x+1 \end{matrix} \quad ; \quad G = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

Det er leddet x^2, der gør, at vores ligningssystem ikke er lineært.

Højresiden i den øverste ligning indsættes i den nederste:

$$\begin{aligned} &2x+1 = x^2+x+1 \Leftrightarrow \\ &0 = x^2 - x \Leftrightarrow \\ &0 = x\cdot(x-1) \Leftrightarrow \\ &x = 0 \ \vee \ x = 1 \end{aligned}$$

Undervejs er højresiden faktoriseret og nulreglen benyttet.

Vi har fundet to x-værdier, og vi kan frit vælge den ligning, vi vil indsætte i. Det er nemmest at indsætte i den øverste:

$$\begin{aligned} &x=0: \quad y = 2\cdot 0+1 = 1 \\ &x=1: \quad y = 2\cdot 1+1 = 3 \end{aligned}$$

Dvs. vi har to løsninger – svarende til to skæringspunkter – og de er $\underline{\underline{(0,1) \text{ og } (1,3)}}$

Vi tjekker med Maple:

$$\left[y = 2x+1,\ y = x^2+x+1\right] \xrightarrow{\text{solve}} \{x=0,\ y=1\},\ \{x=1,\ y=3\}$$

Lad os prøve at gøre det mere generelt (men stadig ikke helt generelt, da vi ikke ser på rotationer af parabler, selvom det dog ikke ændrer noget ved konklusionen). Vi ser altså på en ret linje beskrevet ved ligningen $y = a\cdot x+b$ og en parabel angivet ved ligningen $y = a_1\cdot x^2+b_1\cdot x+c_1$.

Samme fremgangsmåde som i eksemplet fører til:

$$\begin{aligned} &a\cdot x+b = a_1\cdot x^2+b_1\cdot x+c_1 \Leftrightarrow \\ &0 = a_1\cdot x^2+(b_1-a)\cdot x+(c_1-b) \end{aligned}$$

Kig godt på denne ligning! Det er en andengradsligning, og vi kan altså se, at vi altid vil få en andengradsligning, hvorfor der er mulighed for 0, 1 eller 2 skæringer (afhængigt af fortegnet på andengradsligningens diskriminant).

Vi skal nu se på skæring mellem to parabler. Vi skal kun se på situationen, hvor vi ikke har anvendt rotationer. Prøv selv at skitsere problemstillingen og se, at der i dette tilfælde er afgørende forskel på, om vi tillader rotation eller ej.

Du skal være kommet frem til, at der med ikke-roterede parabler er mulighed for 0, 1 eller 2 skæringer. Vi skal se på, hvordan det ses ud fra ligningerne:

Eksempel 59: Skæring mellem to parabler.

Ligningssystemet er:

$$\begin{matrix} y=-x^2+4x+1 \\ y=x^2+x-4 \end{matrix} \quad ; \quad G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

Substitutionsmetoden giver os:

$$-x^2+4x+1=x^2+x-4 \Leftrightarrow$$

$$0=2\cdot x^2-3x-5$$

Vi løser med diskriminantmetoden:

$$d=b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-5)=9+40=49>0 \text{ dvs. 2 løsninger}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{d}}{2\cdot a}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{49}}{2\cdot 2}=\frac{3\pm 7}{4}=\begin{cases}\frac{5}{2}\\ -1\end{cases}$$

Disse to værdier indsættes i den nederste ligning:

$$x=-1:\ \ y=(-1)^2-1-4=-4$$

$$x=\frac{5}{2}:\ y=\left(\frac{5}{2}\right)^2+\frac{5}{2}-4=\frac{25}{4}+\frac{5}{2}-4=\frac{25+10-16}{4}=\frac{19}{4}$$

Dvs. løsningerne er $\underline{\underline{(-1,-4) \text{ og } \left(\frac{5}{2},\frac{19}{4}\right)}}$

$$\left[y=-x^2+4x+1,\ y=x^2+x-4\right] \xrightarrow{\text{solve}} \{x=-1,\ y=-4\},\ \left\{x=\frac{5}{2},\ y=\frac{19}{4}\right\}$$

Vi så altså, at vi igen fik en andengradsligning, hvilket stemmer med muligheden for 0, 1 og 2 løsninger. Der er selvfølgelig også mulighed for at have to sammenfaldende parabler, der giver uendeligt mange løsninger.

I de følgende eksempler fortsættes kun, indtil vi når til en andengradsligning, da vi ved, at vi altid vil kunne løse denne.

Eksempel 60: Skæring mellem ret linje og hyperbel.

Prøv først selv at skitsere problemstillingen.

Vi ser på ligningssystemet:

$$\begin{matrix} y=5x+3 \\ y=\frac{20}{x} \end{matrix} \quad ; \quad G=\mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}$$

(vi kan jo ikke have en *x*-værdi på 0)

De to højresider sættes lig hinanden:

$$5x+3=\frac{20}{x} \Leftrightarrow (5x+3)\cdot x=20 \Leftrightarrow 5x^2+3x-20=0$$

Vi får altså en andengradsligning, dvs. der kan være 0, 1 eller 2 skæringspunkter.

Eksempel 61:Skæring mellem linje og cirkel.

Prøv først selv at skitsere problemstillingen og overvej det mulige antal skæringer. Du skulle gerne komme frem til, at der er mulighed for 0, 1 eller 2 skæringer.

Vi ser en konkret ret linje og en konkret cirkel:

$$\begin{aligned} &y = -2x+8 \\ &(x+3)^2+(y-4)^2 = 4^2 \end{aligned} \quad ; \quad G = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

Vi indsætter vores udtryk for *y* fra den øverste ligning i den nederste:

$$\begin{aligned} &(x+3)^2+(-2x+8-4)^2 = 4^2 \Leftrightarrow \\ &x^2+6x+9+(-2x+4)^2 = 16 \Leftrightarrow \\ &x^2+6x+9+4x^2-16x+16 = 16 \Leftrightarrow \\ &5x^2-10x+9 = 0 \end{aligned}$$

Vi ser her, at vi kommer frem til en andengradsligning, der giver os mulighed for 0, 1 eller 2 *x*-værdier.

Når du skal sætte ind i en ligning for at finde de tilsvarende *y*-værdier, er det vigtigt, at du sætter ind i linjens ligning. Overvej, hvilket problem der opstår, hvis du indsætter i cirklens ligning.

Maple giver os:

$$[y=-2x+8,\ (x+3)^2+(y-4)^2=16] \xrightarrow{\text{solve (specified)}}$$

$$\{x = RootOf(5\_Z^2-10\_Z+9),\ y=-2\,RootOf(5\_Z^2-10\_Z+9)+8\}$$

Dette fortæller os, at der ikke er nogen reelle løsninger (*Z* står for et komplekst tal).

Opgaverne 466*

Øvelse 3: Hvordan finder man skæringspunkter mellem en cirkel og en koordinatakse?

Øvelse 4: Hvordan finder man skæringspunkter mellem en kugle og en koordinatakse?

Øvelse 5: Hvordan finder man skæringspunkter mellem to cirkler?

Øvelse 6: Hvorfor kan man ikke generelt finde skæring mellem plan og kugle?

OVERSIGT

Isometrier:

Hvis et geometrisk sted er bestemt ved en ligning, der indeholder variablerne *x*, *y* (og *z*), foretages isometrierne på følgende måder:

- **Parallelforskydning** med *a* langs *x*-aksen, *b* langs *y*-aksen og *c* langs *z*-aksen foretages ved at erstatte alle *x*'er i ligningen med $(x-a)$, alle *y*'er med $(y-b)$ og alle *z*'er med $(z-c)$.
- **Spejling i planen:** Spejling i *x*-aksen foregår ved at erstatte alle *y*'er med $(-y)$, og spejling i *y*-aksen foregår ved at erstatte alle *x*'er med $(-x)$.
- **Spejling i rummet:** Spejling i *xy*-planen foregår ved at erstatte alle *z*'er med $(-z)$, spejling i *xz*-planen foregår ved at erstatte alle *y*'er med $(-y)$ og spejling i *yz*-planen foregår ved at erstatte alle *x*'er med $(-x)$.
- **Rotation i planen:** En rotation med vinklen *w* omkring origo foretages ved at erstatte alle *x*'er med $(x\cdot\cos(w)+y\cdot\sin(w))$ og alle *y*'er med $(y\cdot\cos(w)-x\cdot\sin(w))$.

Geometriske steder:

GEOMETRISK STED	LIGNING
Ret linje med hældningen *a* og skæring med *y*-aksen i *b*.	$y=a\cdot x+b\ ;\ G=\mathbb{R}^2$
Hyperbel	$y\cdot x=k\ ;\ k\neq 0\ ;\ G=\mathbb{R}^2$
Parabel	$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c\ ;\ a\neq 0\ ;\ G=\mathbb{R}^2$
Cirkel med centrum i $C(a,b)$ og radius *r*	$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\ ;\ G=\mathbb{R}^2$
Ellipse med centrum i (h,k) og med den halve storakse *a* og den halve lilleakse *b*	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1\ ;\ a>b>0\ ;\ G=\mathbb{R}^2$
Plan i rummet	$a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z+d=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3$
Kugle med radius *r* og centrum i punktet $C(a,b,c)$	$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2\ ;\ G=\mathbb{R}^3$

Sammenhænge mellem x og y:

NAVN	LIGNING
Lineær	$y=a\cdot x+b\ ;\ G=\mathbb{R}^2$
(Ligefrem) proportionalitet	$y=k\cdot x\ ;\ G=\mathbb{R}^2$
Omvendt proportionalitet	$y\cdot x=k\ ;\ G=\mathbb{R}^2$

Rette linjer:

På formen $y = a \cdot x + b \quad ; \; G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- Hældningen: $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- Skæring med *y*-aksen: $b = y_2 - a \cdot x_2$.
- Ligning ud fra kendt hældning *a* og punkt $P(x_0, y_0)$ på linjen: $y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$.
- Den spidse vinkel *v*, som linjen danner med *x*-aksen, er: $v = \tan^{-1}(|a|)$.
- To rette linjer med hældningerne *a* og *c* er ortogonale, netop hvis $a \cdot c = -1$.

På formen $a \cdot x + b \cdot y + c = 0 \quad ; \; G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- Hældningen er $-\dfrac{a}{b}$.
- Skæringspunkterne med koordinatakserne er $\left(0, -\dfrac{c}{b}\right)$ og $\left(-\dfrac{c}{a}, 0\right)$

Parabler (uden rotation):

På formen $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \; ; \; a \neq 0 \; ; G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

- Parablen har samme form og orientering som parablen givet ved $y = a \cdot x^2$.
- Hvis $a > 0$,vender grenene opad, og hvis $a < 0$, vender grenene nedad.
- Parablen har toppunkt i $T\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-d}{4a}\right)$, hvor $d = b^2 - 4ac$.
- Parablen skærer *y*-aksen i værdien *c*.
- Hvis $d < 0$ skærer parablen ikke *x*-aksen.
- Hvis $d = 0$ rører parablen *x*-aksen med sit toppunkt, og røringspunktet er $\left(\dfrac{-b}{2a}, 0\right)$.
- Hvis $d > 0$ skærer parablen *x*-aksen stederne $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{d}}{2a}$ og $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{d}}{2a}$.
- $b = 0$ netop hvis parablens toppunkt ligger på *y*-aksen.
- Hvis *a* og *b* har forskellige fortegn, ligger toppunktet til højre for *y*-aksen.
- Hvis *a* og *b* har ens fortegn, ligger toppunktet til venstre for *y*-aksen.
- Hældningen for tangenten til parablen i skæringspunktet med *y*-aksen svarer til *b*-værdien.