INFINITESIMALREGNING

del 1

Infinitesimaler og differentialer.
Grænseværdibegrebet.
Kontinuitet
Differentiabilitet
Integrabilitet.
Differentialligninger.

x-klasserne

Gammel Hellerup Gymnasium

Februar 2024 ; Michael Szymanski ; mz@ghg.dk

Indholdsfortegnelse

INTRODUKTION

Infinitesimaler er betegnelsen for uendelig små størrelser forstået på den måde, at de er så små, at de ikke kan måles, dvs. at de ligger skarpt mellem 0 og et hvilket som helst positivt tal. Dvs. hvis *e* er vores infinitesimal, gælder $0 < e < t$ for alle positive tal *t*.

Infinitesimaler er på den måde beslægtet med uendeligheder. Vores symbol "∞" repræsenterer en størrelse, der er større end et hvilket som helst tal, og man kunne så – MED EN IKKE LOVLIG NOTATION! – skrive $e = \frac{1}{\infty}$. Bemærk altså, at dette er "ulovlig" matematik, og man kan IKKE flytte rundt og få $e \cdot \infty = 1$, for *e* og ∞ er ikke symboler for tal. Men skrivemåden $e = \frac{1}{\infty}$ anvendes her for at angive det meget vigtige slægtskab mellem infinitesimaler og uendeligheder, som du vil få brug for under integralregning.

Matematikere har arbejdet med infinitesimaler i mere end 2000 år. En af de største matematikere gennem tiderne, Archimedes (287-212 fvt.), arbejdede en hel del med disse, og siden da har utallige matematikere på meget forskellig vis behandlet problemstillinger, der involverer infinitesimaler. For som det måske fremgår af beskrivelsen af infinitesimalerne, er det på ingen måde simpelt at forstå og regne med disse, og infinitesimalregning har undervejs i sin udvikling været udsat for hård kritik for manglende præcision i metoderne. Faktisk lykkedes det først at få helt styr på grundlaget for infinitesimalregningen, da man fik erstattet infinitesimaler med det såkaldte *grænseværdibegreb* og indført en $\varepsilon\delta-$notation (Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) og Karl Weierstrass (1815-1897)). Og således burde infinitesimalerne jo være forsvundet fra matematikken og vores emne hedde f.eks. *grænseværdiregning*. Men det gør det ikke. For i gymnasiet (og mange andre steder) anvendes stadig noget notation og nogle formuleringer, der inddrager infinitesimaler. Vi skal således inden for dette emne møde en skøn blanding af grænseværdibegreb, $\varepsilon\delta$ (udtales "epsilon-delta") og infinitesimaler.

Infinitesimalregning opdeles ofte i differentialregning og integralregning.

Inden for differentialregning ses på forholdet $\frac{dy}{dx}$ mellem infinitesimaler *dy* og *dx* (der i denne sammenhæng kaldes *differentialer* og blev indført af G.W. Leibniz (1646-1716) som uendelig små tilvækster). Pointen er, at man ikke kan regne med differentialerne *dy* og *dx* hver for sig, men man kan godt få *differential**kvotienten*** $\frac{dy}{dx}$ til at give mening, hvis man tager udgangspunkt i vores velkendte $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, som vi kender som hældningen for en ret linje og i denne situation kalder *differenskvotienten*. Man kan sige, at vi ophæver det umålbare ved infinitesimalerne ved både at placere dem i tæller og nævner. MEN! Egentlig er det – på trods af navnet differential**kvotient** – ikke er rigtig brøk, for man kan ikke adskille tæller og nævner, dvs. egentlig er $\frac{dy}{dx}$ ét samlet symbol for en størrelse (differentialkvotienten), som vi kan anvende i beregninger.

Inden for integralregning ses på summer af uendelig mange infinitesimaler. Man tager udgangspunkt i en endelig sum af målbare størrelser $\sum \Delta x$, og dette bliver til $\int dx$, når størrelserne gøres infinitesimale, og der kommer uendelig mange af dem. I dette tilfælde ophæver vi det umålbare ved infinitesimalerne ved at summere uendelig mange af dem (symbolet $\int$ kaldes et *integraltegn* og fungerer altså som en slags uendelig summering – hvor uendeligheden er $\aleph_1$ og ikke bare $\aleph_0$, som optræder ved $\sum_{i=1}^{\infty}$). $\int$ kan ligesom *dy* og *dx* ikke stå alene, men fungerer kun sammen med et differential $\int dx$. Vi kombinerer altså to uhåndterbare begreber og får noget håndterbart og klokkeklart.

Dvs. differential- og integralregning angiver to forskellige metoder til at kunne regne på infinitesimaler. Selve infinitesimalregningen opstod, da Leibniz og Isaac Newton (1642-1727) uafhængigt af hinanden opdagede, at differentialregning og integralregning er to sider af samme sag.

Emnet begynder med eksempler på *differensligninger* og *differentialligninger*, og vi skal se, hvordan infinitesimalerne dukker op …

NUMERISK LØSNING AF DIFFERENTIALLIGNINGER

Introduktion til differensligninger og differentialligninger

Definition 1: En *differensligning* er en ligning, hvor løsningen er en diskret funktion, hvor differensen mellem to successive argumenter er en konstant, og hvor funktionsværdien for et argument er udtrykt ved funktionsværdier for et eller flere tidligere argumenter.

Oftest er den konstante differens 1, og man ser på funktioner, der kun er defineret for heltal.

Fibonacci-talfølgen 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, … , hvor et tal i følgen er summen af de to foregående tal, og hvor de to første tal er sat til 1, er en løsning til differensligningen:

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n) \text{ , } n \in \mathbb{N}$$

Men bemærk, at selve differensligningen ikke direkte fører til fibonacci-talfølgen. Det afhænger af fastsættelsen af de to første tal. Hvis vi f.eks. sætter første tal til 9 og andet tal til -6, får vi:

$$9, -6, 3, -3, 0, -3, -3, -6, -9, -15, -24, -39, -63, -102, \ldots$$

En vigtig pointe, som vi også skal møde i forbindelse med differentialligninger, er, at der er flere forskellige funktioner, der er løsninger til selve ligningen. Hvis man skal finde en bestemt løsning, skal man kende en eller flere funktionsværdier.

Under rentesregning arbejdede vi med kapitalfremskrivningsformlen $K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$, hvor n angiver antallet af terminer og dermed er et naturligt tal. Kapitalfremskrivningsformlen repræsenterer samtlige løsninger til differensligningen:

$$K_{n+1} = K_n \cdot (1+r) \ ; \ n \in \{0,1,2,3,4,5,...\}$$

For denne differensligning fortæller, at vi kommer fra en funktionsværdi til den næste ved at multiplicere med fremskrivningsfaktoren $(1+r)$.

Vi skal nu fra denne differensligning arbejde os hen mod vores første differentialligning.

Vi så i forbindelse med rentesregning, at man med den samme årlige nominelle rentefod kunne opnå forskellige resultater afhængigt af, hvor mange gange om året der blev tilskrevet renter (jo flere tilskrivninger, jo højere slutværdi). Vi ønsker at indarbejde denne mulighed for flere rentetilskrivninger i vores differensligning og gør det ved at tilføje et Δx:

$$L_{n+1} = L_n \cdot (1+r \cdot \Delta x) \ ; \ n \in \{0,1,2,3,4,5,6,...\}$$

Vi kalder nu vores kapitaler for *L*, da vi senere skal sammenligne kapitalerne i de to ligninger.

Vores Δx angiver den del af et år, der går mellem hver rentetilskrivning. Dvs. hvis der er én årlig rentetilskrivning, er $\Delta x = 1$, hvis der er 2 årlige rentetilskrivninger, er $\Delta x = \frac{1}{2}$, hvis der er 3 årlige rentetilskrivninger, er $\Delta x = \frac{1}{3}$ osv.

Hvis f.eks. den nominelle rentefod er 8% p.a., og der er 4 terminer på et år (dvs. $\Delta x = \frac{1}{4}$), så vil fremskrivningsfaktoren ved hver rentetilskrivning være $(1+r \cdot \Delta x) = \left(1+0,08 \cdot \frac{1}{4}\right) = 1,02$.

Vi omskriver nu differensligningen:

$$L_{n+1} = L_n + L_n \cdot r \cdot \Delta x \Leftrightarrow L_{n+1} - L_n = L_n \cdot r \cdot \Delta x \Leftrightarrow \Delta L = L_n \cdot r \cdot \Delta x \Leftrightarrow \frac{\Delta L}{\Delta x} = L_n \cdot r$$

Vi angiver som sædvanlig differensen mellem to successive værdier med et Δ

Dette er en differenskvotient, dvs. en brøk med differenser i tæller og nævner.

Læg allerede nu godt mærke til differenskvotienten. Den kommer til at spille en stor rolle inden for infinitesimalregningen, fordi den som nævnt netop tillader vores overgang til differentialer *dL* og *dx*, da vi har fået angivet dem som et forhold.

Lad os prøve at nærstudere vores differensligning på den nye form:

$$\frac{\Delta L}{\Delta x} = L_n \cdot r$$

ΔL er selve renten (det er jo forskellen mellem kapitalens værdi efter og før rentetilskrivningen), og Δx er en del af året. Hvis vi har fået givet en rentefod r og ser på et tidspunkt med kapitalværdien L_n, så er pointen, at brøkens værdi IKKE afhænger af størrelsen af Δx. For venstresiden er jo lig højresiden, og højresiden er konstant (den afhænger ikke af, hvilket Δx vi måtte vælge).

Lad os derfor nu gøre, som vi gjorde, da vi så på kontinuert rente, dvs. en rente der tilskrives hele tiden. Vi lader Δx komme tættere og tættere på nul, og vi husker, at vores differenskvotient hele tiden giver samme værdi. Dermed må der også gælde:

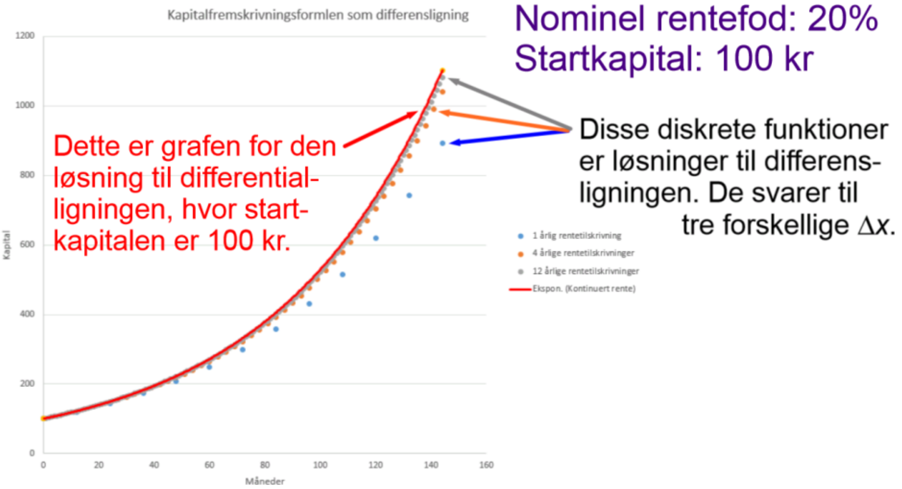
$$\frac{dL}{dx} = L_n \cdot r$$

Vi har altså erstattet en differenskvotient med en differentialkvotient, fordi brøkens værdi ikke afhænger af størrelsen af tæller og nævner. På den måde har vi fået omformet vores differensligning til en *differentialligning*.

Vi kan fra afsnittet om kontinuert rente ræsonnere os frem til, at en løsning til differentialligningen er $L(x) = L_0 \cdot \mathrm{e}^{r \cdot x}$, hvor x er antallet af år.

Og kapitalfremskrivningsformlen giver os de diskrete funktioner, der er løsninger til differensligningen:

Dette kan illustreres på nedenstående figur med udgangspunkt i et eksempel, hvor den nominelle rentefod er 20%, og startkapitalen er 100 kr.



Bemærk, at grafen for løsningen til differentialligningen er sammenhængende, mens dette ikke er tilfældet for løsningerne til differensligningen. Bemærk også, at jo mindre Δx, jo tættere ligger funktionsværdierne for den diskrete funktion på grafen for løsningen til differentialligningen.

Opgaverne 001*

Advarsel: Vores metode til at gå fra en differensligning til en differentialligning gælder IKKE generelt. Gyldigheden beror alene på definitionerne af vores begreber *nominel rentefod* og *effektiv rentefod*. Normalt vil det kun være vores differentialligning, der er rigtig, mens differensligningen blot er tilnærmelsesvis rigtig (dvs. $\frac{dL}{dx} = L_n \cdot r$ og $\frac{\Delta L}{\Delta x} \approx L_n \cdot r$). Vi vil kun bruge differensligningen, hvis vi ikke er i stand til at løse den tilsvarende differentialligning.

Så lad os se lidt mere på, hvad der kan siges om at løse differentialligninger.

Introduktion til begreber i forbindelse med løsning af differentialligninger

Differentialligninger er en bestemt type ligninger, hvor løsningerne er funktioner. Når man løser en differentialligning *analytisk* (hvilket er det, vi kommer til at beskæftige os mest med), finder man disse løsningsfunktioner angivet ved deres forskrift, og man kan evt. tegne graferne for disse funktioner (jf. den røde graf ovenfor).

Når vi løser en differentialligning *numerisk*, finder vi en tilnærmet løsning angivet ved en lang række funktionsværdier i en tabel eller en masse punkter i et koordinatsystem (jf. løsningerne til differensligningen ovenfor og selve ordet *numerisk* – talmæssig – der henviser til, at man finder funktions**værdier** og ikke et funktions**udtryk**). Forskellen mellem at løse en differentialligning og en differensligning numerisk er, at man som udgangspunkt får en eksakt løsning til differensligninger, men kun en tilnærmet løsning til differentialligninger.

Vi er nu klar til at opstille differentialligninger og løse dem numerisk (fordi vi endnu ikke har lært at løse dem analytisk).

Radioaktivt henfald:

En radioaktiv kerne har en vis sandsynlighed for at henfalde inden for et givet tidsrum, og denne sandsynlighed afhænger ikke af, om den er alene eller sammen med andre kerner. Dermed må antallet af henfaldne kerner alt andet lige være proportionalt med antallet af kerner *N*, dvs. $-\Delta N \propto N$. Desuden må antallet af henfaldne kerner tilnærmelsesvis være proportionalt med det tidsrum Δt, man kigger på, dvs. man har:

$$-\Delta N \approx k \cdot N \cdot \Delta t \qquad (k \text{ er proportionalitetskonstanten})$$

Vi omskriver udsagnet til:

$$-\frac{\Delta N}{\Delta t} \approx k \cdot N$$

Vi genkender denne type differensligning, bortset fra at der jo som sagt kun tilnærmelsesvis gælder et lighedstegn, hvilket er selve pointen nu. For problemet med Δt er, at kernerne ikke henfalder på én gang, men løbende. Så et stykke inde i tidsrummet Δt, er antallet af kerner ikke længere *N*, men et mindre antal. Og dermed giver differensligningen os et for stort antal henfaldne kerner $-\Delta N$, og afvigelsen er større, jo større Δt er.

Vi har altså brug for at kunne regne på så små tidsrum, at ingen kerner når at henfalde, altså et infinitesimalt tidsrum. Problemet er bare, at så bliver $-\Delta N$ også så lille, at vi ikke kan måle det (dvs. infinitesimalt). Vi kan ikke tildele disse infinitesimale størrelser en værdi i sig selv, men hvis vi ser på forholdet mellem dem, kan vi godt, og vi omformer udsagnet til en differentialligning:

$$-\frac{dN}{dt} = k \cdot N$$

Bemærk igen: Dette er en løs beskrivelse. Meningen er at introducere begreberne og problemstillingerne og gøre dem forståelige, inden vi skal begynde på den mere grundige matematiske behandling.

Vi forestiller os nu, at vi ikke ved, at løsningen til ovenstående differentialligning er $N(t) = N_0 \cdot e^{-k \cdot t}$ (fordi nogle gange KAN man faktisk ikke finde løsninger til differentialligninger), og vi skal nu se, hvordan man så kan løse den numerisk. Fremgangsmåden er:

1) Isolér differentialkvotienten.

$$\frac{dN}{dt} = -k \cdot N$$

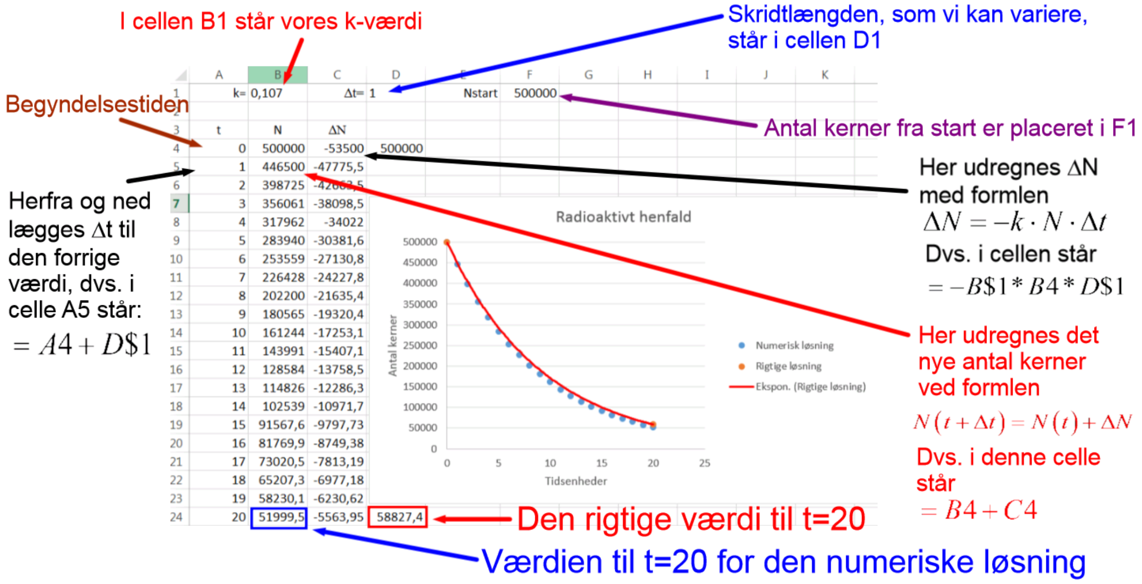
2) Erstat differentialkvotienten med differenskvotienten, så man får en differensligning.

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -k \cdot N$$

3) Forlæng ligningen med differenskvotientens nævner.

$$\Delta N = -k \cdot N \cdot \Delta t$$

Vi har her et udtryk for ΔN, og det kan vi udnytte til at komme fra $N(t)$ til $N(t+\Delta t)$ ved at udnytte $N(t+\Delta t) = N(t) + \Delta N$. Vi ser nu på et konkret eksempel løst med Excel:



Bemærk, at vores løsning til differensligningen til $t = 20$ giver et mindre antal kerner end løsningen til differentialligningen (den rigtige løsning), fordi den ikke tager højde for, at antallet af kerner ændrer sig i løbet af tidsrummet Δt, hvorfor den som nævnt giver et for stort antal henfaldne kerner.

Vi skal nu undersøge betydningen af størrelsen af Δt:

Øvelse 1: Benyt Excel til at løse differensligningen numerisk med forskellige Δt (samme N_0 og k som ovenfor). Vi har allerede anvendt $\Delta t = 1$, og du skal nu prøve med $\Delta t = \frac{1}{2}$, $\Delta t = \frac{1}{4}$, $\Delta t = \frac{1}{8}$, ...

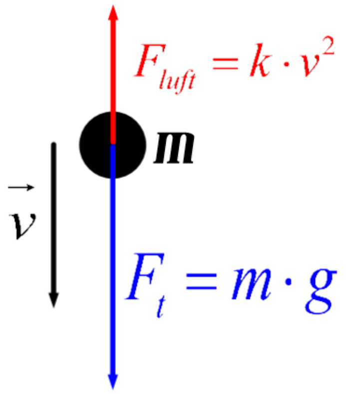
Tjek, at du får nedenstående værdier til $t = 20$:

Δt	$N(20)$
1	52000
0,5	55436
0,25	57138
0,125	57984
0,0625	58406
0,03125	58617
0,015625	58722
0,0078125	58775
0,00390625	58801
Den rigtige værdi: 58827	

Bemærk i Øvelse 1, at vi kommer tættere og tættere på det rigtige tal, jo tættere Δt kommer på 0.

Frit fald:

Vi ser på en kugle med massen *m*, der falder i et tyngdefelt med tyngdeaccelerationen *g*:



k er en konstant, der afhænger af det faldende objekts form og tværsnitsareal og luftens densitet.
Tyngdekraften peger nedad, og luftmodstanden peger modsat af bevægelsesretningen.
Disse to kræfter udgør den resulterende kraft på kuglen, og når den falder nedad, har man så følgende sammenhæng:

$$F_{res} = F_t - F_{luft} \quad \text{(positiv retning er sat til nedad)}$$

$$m \cdot a = m \cdot g - k \cdot v^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = g - \frac{k}{m} \cdot v^2$$

Accelerationen *a* er et udtryk for, hvor hurtigt hastigheden ændrer sig. Hvis hastigheden i tidsrummet Δt har ændret sig med Δv, har den gennemsnitlige acceleration været $a_{gen} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Hvis vi for en kort stund ser bort fra, at dette ”kun” er den *gennemsnitlige* acceleration og indsætter den i ligningen, får vi igen en differensligning:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = g - \frac{k}{m} \cdot v^2$$

Men endnu engang opdager vi problemet. Vores hastighed *v* indgår på højresiden, så differenskvotienten $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ afhænger af *v*. Men $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ fortæller os, at *v* ændrer sig i tidsrummet Δt, og dermed vil differenskvotienten $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ikke føre til det rigtige resultat, da den kun er beregnet ud fra *v* fra starten af tidsrummet.

Vi har altså igen brug for at kunne se på et så kort tidsrum, at ændringen af *v* ikke er målbar, dvs. vi skal kigge på et infinitesimalt tidsrum og hermed en infinitesimal hastighedsændring. Og vores RIGTIGE ligning bliver altså en differentialligning:

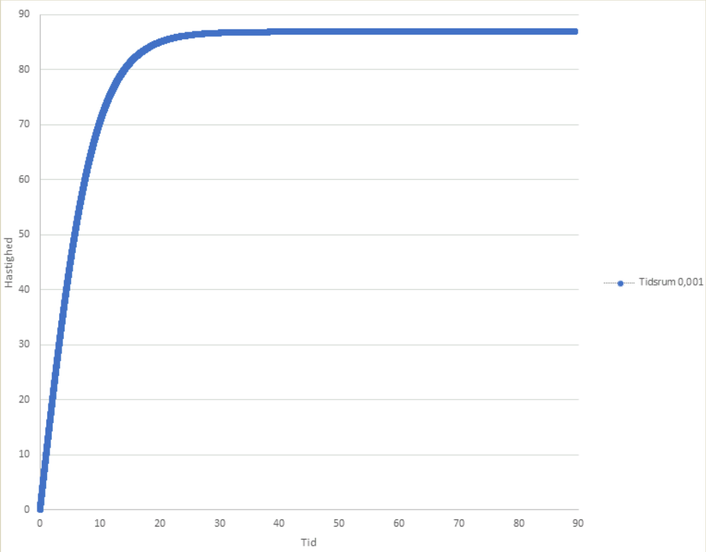
$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m} \cdot v^2$$

Vi er dog ikke i stand til at løse denne ligning analytisk, så vi løser den numerisk ved at gå tilbage til differensligningen og omskrive den til:

$$\Delta v = \left(g - \frac{k}{m} \cdot v^2 \right) \cdot \Delta t$$

Øvelse 2: Se på den konkrete situation med $k = 0,013$, $g = 9,82$, $m = 10$ og $v_{start} = 0$ (alt regnet i SI-enheder). Anvend Excel til at bestemme løsninger til differensligningen, når $\Delta t = 1$, $\Delta t = 0,5$, $\Delta t = 0,1$ og $\Delta t = 0,01$.

Graferne for løsningerne skal minde om følgende graf (løst med $\Delta t = 0,001$):



Bemærk, at man når en maksimal hastighed på 86,91287.
Denne hastighed opnås i de enkelte tilfælde til følgende tider:

Δt	1	0,5	0,1	0,01	0,001
Tidspunkt, hvor hastigheden 86,91287 opnås	80	85	88,5	89,27	89,352

Man kan altså se, at man kommer for hurtigt op i fart, når man anvender ”store” tidsrum. Dette skyldes, at man ikke får korrigeret for, at når hastigheden øges, så øges luftmodstanden også, hvilket mindsker forøgelsen af hastigheden. Men vi ser også, at vi med $\Delta t = 0,01$ har en ret god tilnærmelse til den rigtige løsning, for vi opnår ikke nogen markant forbedring ved at mindske tidsrummets længde med en faktor 10.

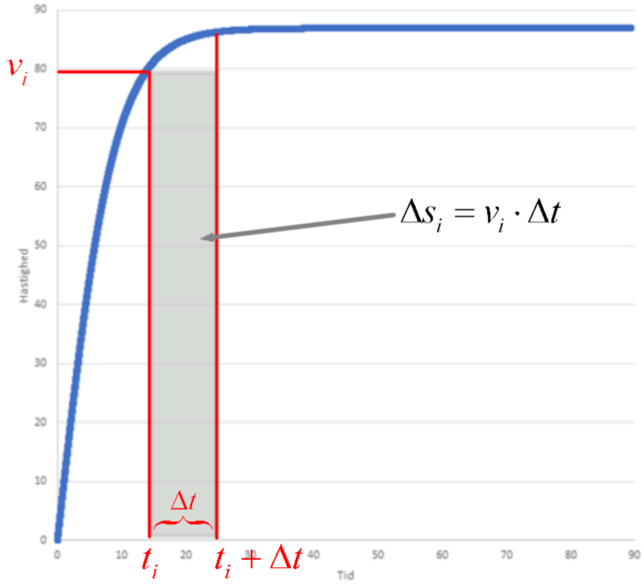
I Øvelse 2 ses grafen for hastigheden som funktion af tiden. Vi kan altså se, hvor hurtigt vi bevæger os til et givet tidspunkt, og vi ville så også kunne beregne accelerationen ved at sætte ind i en af vores første formler.

Men hvad hvis vi vil vide, hvor langt vi har bevæget os inden for et givet tidsinterval, f.eks. fra start til 30 sekunder efter start?

Hvis vi havde bevæget os med konstant hastighed, ville det ikke være noget problem, for så har vi sammenhængen:

$$v_{konstant} = \frac{\Delta s}{t} \Leftrightarrow \Delta s = v_{konstant} \cdot t$$

Men hastigheden er tydeligvis ikke konstant (se grafen i Øvelse 2). Vi kan dog inddele vores tidsinterval i n lige store dele af størrelsen Δt. Nedenfor er angivet et enkelt af disse:



Pointen er nu, at vi med en vis rimelighed kan antage, at hastigheden er konstant i dette interval, og at vi derfor i det i'te interval bevæger os stykket $\Delta s_i = v_i \cdot \Delta t$, hvor v_i er hastigheden til tiden t_i. Dette svarer til arealet af det grå rektangel vist på figuren ovenfor.

Den samlede strækning vil derfor tilnærmelsesvis svare til summen af alle disse bidrag:

$$s_{samlet} \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \Delta t$$

Vores tilnærmelse bliver bedre, jo flere intervaller, vi inddeler i, dvs. jo større n er, for det svarer jo til at gøre Δt mindre og mindre, og så vil hastigheden nå at ændre sig mindre og mindre inden for det givne interval. Men så længe, hastigheden når at ændre sig i vores tidsintervaller, vil vi blive ved med kun at få en tilnærmelsesvis rigtig strækning. Vi har altså brug for at gøre vores intervaller så små, at hastighedsændringen er umålbar, hvilket kun kan opnås ved at se på infinitesimale tidsintervaller. Men så kan vi ikke længere tælle antallet af intervaller, og samtidig med, at vi erstatter vores Δt med et differential, skal vi altså også erstatte vores sumtegn med et integraltegn. Og ved disse erstatninger har vi ikke længere en tilnærmet, men en eksakt, samlet strækning:

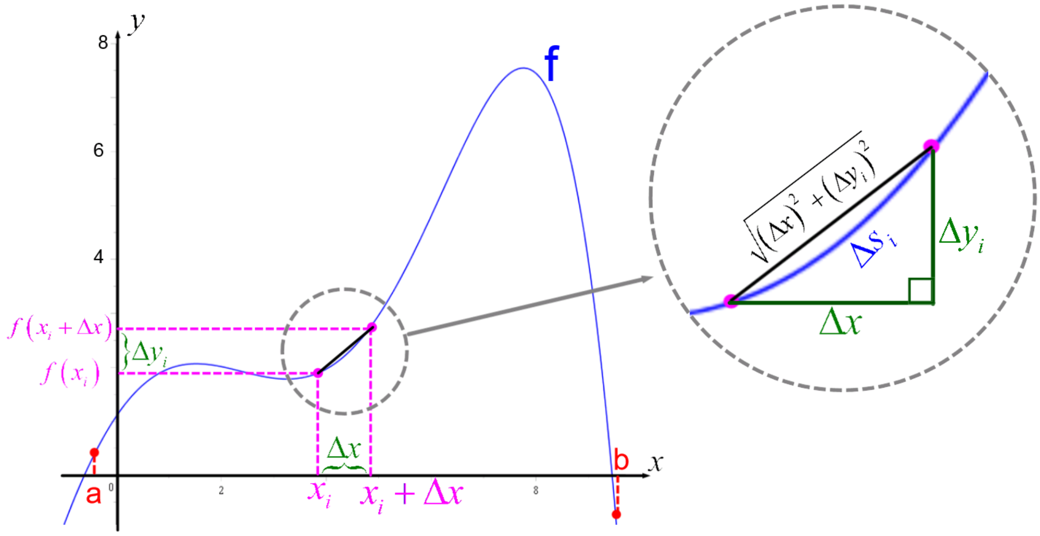
$$s_{samlet} = \int_{t_{start}}^{t_{slut}} v(t) \cdot dt$$

Kommentar: Man kan selvfølgelig kun få en eksakt strækning, hvis man kender hastigheden som funktion af tiden, og det gør vi jo strengt taget ikke i netop dette tilfælde, da vi kun fik løst differentialligningen numerisk. Pointen er dog god nok: Vi finder den samlede strækning ved at integrere hastighedsfunktionen med hensyn til tiden.

FLERE INFINITESIMALER

Buelængde:

En del af grafen for funktionen f er tegnet med blåt i nedenstående koordinatsystem:



Vi ønsker at bestemme længden af den del af grafen, der ligger i intervallet $[a,b]$, dvs. længden af kurven mellem de to røde (ikke pink) punkter på figuren. Vi kalder dette for *buelængden s* mellem *a* og *b*.

Intervallet $[a,b]$ kan opdeles i n lige store delintervaller, der så får længden $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

På figuren ser vi på et enkelt af disse delintervaller, nemlig $[x_i, x_i+\Delta x]$, som angivet med pink ovenfor. Længden af den del af grafen, der ligger mellem de to pink punkter, kalder vi Δs_i, fordi det er det bidrag til den samlede buelængde, der ligger i det i'te interval. Og vi har så:

$$s = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i$$

Men vores problem er, at vi ikke på nuværende tidspunkt er i stand til at måle længden af buede kurver. Vi kan kun bestemme længder af rette linjestykker. Vi ønsker derfor i første omgang at opnå en tilnærmet værdi for s ved at tilnærme grafen med rette linjestykker, hvoraf et enkelt er angivet med sort i det i'te interval. På figuren ovenfor kigger vi nu på området markeret med den stiplede grå cirkel:

Vi ønsker at bestemme længden af det sorte linjestykke og konstruerer derfor en retvinklet trekant som angivet på figuren. Den vandrette katete har længden Δx, da det er intervalbredden. Den lodrette katetes længde angives Δy_i, da dette stykke afhænger af, hvilket interval vi kigger på. På et stejlt stykke vil Δy være større end på et fladt stykke. Da vores trekant er retvinklet, kan vi finde længden af hypotenusen (det sorte linjestykke) ved Pythagoras og efterfølgende omskrive udtrykket, så vi får dannet en differenskvotient:

$$l_i = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 \cdot \left(1 + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta x)^2}\right)} = \Delta x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2}$$

Pointen med at få dannet en differenskvotient er, at vi ligesom tidligere vil argumentere for, at vi skal erstatte den med den tilsvarende differentialkvotient. Men i dette tilfælde er der jo endnu et problem.

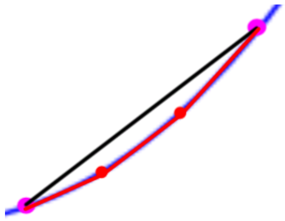
For bemærk, at der står et frit Δx, og som tidligere nævnt, kan vi ikke omdanne sådan et til et differential, da vi ikke kan måle og regne med dette. Vi kan dog hurtigt få løst problemet:

Vi ser, at $\Delta s_i \approx l_i$ (faktisk ved vi også, at $\Delta s_i \geq l_i$), så vi kan skrive:

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} l_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x$$

Dvs. vi kan tilnærmelsesvis finde buelængden ved at summere længderne af alle de rette linjestykker, der kan konstrueres i de *n* intervaller.

Og denne tilnærmelse bliver bedre, jo flere intervaller vi opdeler i. Nedenfor er vist, hvordan en opdeling i tre gange så mange intervaller ville virke i det i'te interval:



Bemærk, at længderne af de tre røde linjestykker er en meget bedre (og rigtig god) tilnærmelse til Δs_i

Vi gør derfor nu det, at vi opdeler i flere og flere intervaller *n*, og dermed bliver Δx mindre og mindre. Og tilsvarende bliver de enkelte Δy også mindre og mindre . Faktisk går vi så vidt som til at opdele i uendelig mange intervaller, hvorved vores tilvækster bliver til differentialer *dx* og *dy*.

Og her er det vigtigt at være opmærksom på, at vi tillader os dette, fordi vi i vores udtryk $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x$ har to af tilvæksterne skrevet som en brøk (dvs. en differenskvotient), mens den tredje tilvækst kan knyttes til sumtegnet, således at antallet af summeringer går op i takt med, at Δx bliver mindre. Og samtidig med, at vi erstatter Δx med differentialet *dx*, erstatter vi sumtegnet med et integraltegn (hvor det angives, at vi *integrerer fra a til b*):

$$s = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Når vi har lært at differentiere og integrere, kan vi altså bestemme buelængder for grafer (og egentlig kan du allerede gøre det nu i Maple).

Opgaverne 002*

Opsamling: Du skal have fået en forståelse for differentialer og integraltegnet og en fornemmelse for de situationer, hvor de optræder. Vi skal nu i gang med at få styr på overgangen fra en differenskvotient til en differentialkvotient og fra et sumtegn til et integraltegn. For vi har endnu ikke set, hvorfor symbolerne $\frac{dy}{dx}$ og $\int dx$ er meningsfulde.

Vi skal derfor se på grænseværdibegrebet.

GRÆNSEVÆRDIBEGREBET

Vi har allerede stiftet bekendtskab med begrebet *grænseværdi* i forbindelse med uendelige rækker (*konvergente* rækker havde en grænseværdi, der var rækkesummen, mens *divergente* rækker var betegnelsen for de rækker, der ikke havde en grænseværdi). Vi anvendte en "εM"-beskrivelse til at afgøre dette ($\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} : n > M \Rightarrow |s_n - s| < \varepsilon$).

Vi skal nu til at se på grænseværdier for funktioner. Det er grundlæggende samme tankegang som med rækker, og vi vil igen få brug for vores "εM"-beskrivelse, men med funktioner arbejder vi (oftest) med et kontinuum for både vore argumenter og værdier, og det giver os mulighed for også at tale om grænseværdier for *x* gående mod et eller andet konkret tal x_0. Og det er i den forbindelse, at vores εδ-notation kommer i spil.

Grænseværdibegrebet står helt centralt inden for infinitesimalregningen, dvs. det er utrolig vigtigt at forstå, hvad det dækker over. Derfor ser vi først på det beslægtede *grænse*begreb, da det nok er lettere tilgængeligt og kan bruges til at pejle hjernen i den rigtige retning.

Grænser

Definition 2: For en talmængde *A* med reelle tal er den *øvre grænse* (eller *supremum*) det mindste tal, der er større end eller lig med alle tal i *A*, hvis et sådant findes. Dette tal skrives $\sup A$.

Den *nedre grænse* (eller *infimum*) for *A*, $\inf A$, er det største tal, der er mindre end eller lig med alle tal i *A*, hvis et sådant findes.

Vi skal skelne disse begreber fra følgende:

Definition 3: For en talmængde *A* med reelle tal er et *maksimum* et tal i *A*, der ikke er mindre end noget andet tal i *A*, hvis et sådant findes. Et maksimum for *A* skrives max *A*.
Et *minimum* for *A* er tilsvarende et tal i *A*, der ikke er større end noget andet tal i *A*, hvis et sådant findes. Det skrives min *A*.

Definition 3's formulering "ikke mindre end" kunne for vores talmængde *A* godt være erstattet af "er større end", da vi i vores mængder ikke tillader det samme element at optræde flere gange. Men grænsebegrebet anvendes i en masse andre sammenhænge, og med formuleringen i Definition 3 sikrer man sig, at der godt kan være flere *maksima* for *A*. Når vi senere skal se på f.eks. maksimumssteder for funktioner, vil det også kunne være mere end ét argument.

Men den detalje er ikke vigtig her, for vi skal nu i stedet gennem nogle eksempler fokusere på forskellen mellem *supremum* og *maksimum*.

Eksempel 1: Vi ser på intervallet $A = [1,5[$.

$\min A = 1$, da det som det eneste tal i *A* har egenskaben, at det ikke er større end noget andet tal i *A*.

$\inf A = 1$, da det er det største blandt de uendeligt mange såkaldte *undertal*, der er mindre end eller lig med alle tal i *A*.

Der eksisterer ikke noget max *A*, for 5 ligger ikke i *A*, og vi kan ikke udpege et tal mindre end 5, der er større end alle andre tal mindre end 5 (hvis vi prøver med 4,9999, er 4,99991 større osv.)

$\sup A = 5$, da dette tal er større end eller lig alle tal i *A* (dvs. det er et *overtal*), og det er det mindste tal med denne egenskab.

Bemærk altså, at minimum og infimum godt kan være samme tal, men at det også er muligt, at kun det ene af dem eksisterer (her set med maksimum og supremum).

Eksempel 2: Vi ser på intervallet $A = \left]0, \infty\right[$ (dvs. $\mathbb{R}_+$).

Der eksisterer ikke noget min *A*, for 0 ligger ikke i *A*.

$\inf A = 0$, da det er det største tal, der er mindre end eller lig med samtlige tal i *A*.

Der eksisterer ikke noget max *A*, for uanset hvilket tal vi kunne forsøge os med, er der et tal i *A*, der er større (Hvis vi prøver med 10^{100}, er f.eks. 10^{101} større)

Der eksisterer ikke noget sup *A*, for der er ingen tal, der er større end eller lig samtlige tal i *A*, og derfor kan der heller ikke være noget mindste blandt disse.

Bemærk, at der altså ikke nødvendigvis findes et supremum og/eller et infimum for en mængde *A*, og bemærk, at dette er direkte knyttet til begreberne *begrænset* og *ubegrænset*, som vi indførte i forbindelse med intervaller i Grundlæggende matematiske begreber del 1. En ubegrænset mængde *A* har hverken inf *A* eller sup *A*, en begrænset mængde har både inf *A* og sup *A*, mens en venstrebegrænset mængde, der ikke er højrebegrænset, har inf *A*, men ikke sup *A* (og omvendt).

Eksempel 3: Vi ser på mængden $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots\right\}$

Der eksisterer ikke noget min *A*, for 0 ligger ikke i *A*, og hvis vi f.eks. prøver med $\frac{1}{7846}$, opdager vi hurtigt, at bl.a. $\frac{1}{7847}$ er mindre.

$\inf A = 0$, da det er det største tal, der er mindre end eller lig med samtlige tal i *A*.

$\max A = 1$, da 1 ligger i *A* og ikke er mindre end noget andet tal i *A*.

$\sup A = 1$, da dette er det mindste tal, der er større end eller lig alle tal i *A*.

Opgaverne 010*

Måske har du lagt mærke til, at **hvis** der findes et maksimum for *A*, så findes der også et supremum for *A*, og $\max A = \sup A$ (og tilsvarende for minimum og infimum). Tænk over, hvorfor dette er tilfældet. Og tænk også over, at supremum og infimum ikke nødvendigvis tilhører mængden *A*. Når du kan gennemskue det, er du kommet et godt stykke af vejen til at kunne forstå grænseværdibegrebet.

Grænseværdier

Grænseværdier optræder i forbindelse med *grænseovergange*.

Når vi arbejder med funktioner, har vi to forskellige typer af grænseovergange. For funktionen $f:\mathbb{R}\setminus\{x_0\}\mapsto\mathbb{R}$ kunne de se ud på følgende måde:

Dette er grænseovergangene

$$f(x)\to-\infty \text{ for } \boxed{x\to x_0}$$

Denne type grænseovergang anvendes i forbindelse med funktioner, og når vi skal arbejde med differentialer.

$$f(x)\to a \text{ for } \boxed{x\to\infty}$$

Denne type grænseovergang anvendes i forbindelse med funktioner og, som vi tidligere har set, i forbindelse med rækker.

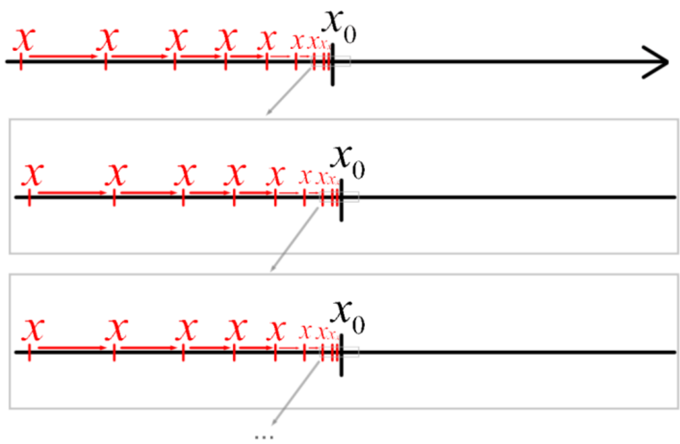
Hvis en grænseværdi findes, står den her.

Disse to matematiske udtryk udtales (grænseovergangen er skrevet med blåt):

f af x går imod minus uendelig for x gående mod x-nul.

f af x går imod a for x gående mod uendelig.

Den første grænseovergang skal forstås på den måde, at man ser på *x*-værdier, der ligger tættere og tættere og tættere og tættere på x_0 (men aldrig bliver x_0):



Dette skal fungere som erstatning for differentialet dx (afstanden mellem *x* og x_0), som man jo pr. definition – da det er et infinitesimal – ikke kan regne med.

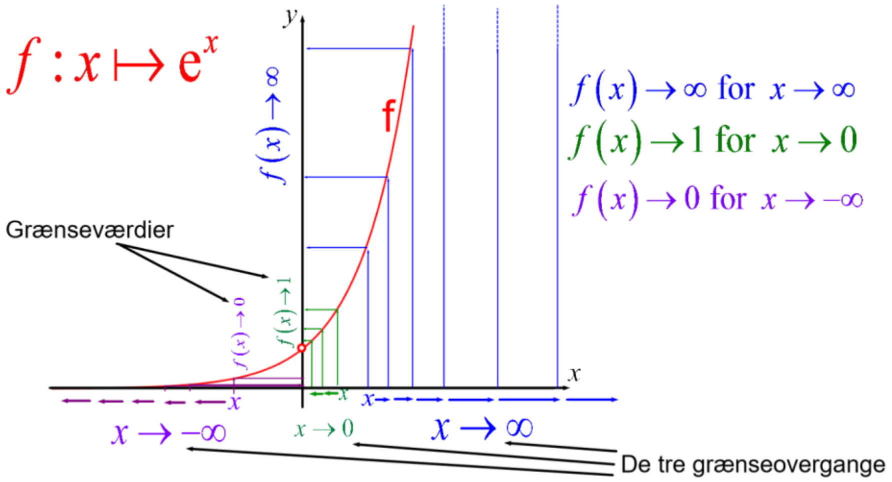
I den anden grænseovergang lader man *x*-værdierne vokse ud over alle grænser, dvs. blive større end et hvilket som helst givet tal. Denne notation skal erstatte den ULOVLIGE skrivemåde $x=\infty$, for vi kan godt snakke om, at *x* bliver større og større, men IKKE at *x* **er** uendelig, for *x* repræsenterer tal, der opfylder bestemte regneregler (kendt fra vores tallegemer), og uendelighedstegnet er ikke et symbol for et tal.

Pointen er, at vi (om muligt) anvender grænseværdier som erstatning for funktionsværdier, når disse ikke findes. Vi kan IKKE sige $f(\infty)$, men kigger i stedet på grænseovergangen $x\to\infty$, og i ovenstående illustrationer skal du altså forestille dig, at x_0 IKKE er en del af *f* 's definitionsmængde, men at alle tal "omkring" x_0 er. Dvs. $f(x_0)$ eksisterer IKKE.

Når vi har vores differenskvotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, har den netop ingen værdi, når $\Delta x=0$, og vi skal derfor se på dens grænseværdi for grænseovergangen $\Delta x\to 0$.

De matematiske udtryk med pile kan også se ud på andre måder (f.eks. $f(x) \to \infty$ for $x \to -\infty$ eller $f(x) \to b$ for $x \to a$), og der findes også en anden skrivemåde, $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$, men det vender vi tilbage til. I første omgang skal vi se på nogle konkrete eksempler for at forstå notationen. For selv om vi snart skal se en mere præcis formulering, er det denne notation med pile, som vi skal anvende, når vi for alvor går i gang med infinitesimalregningen.

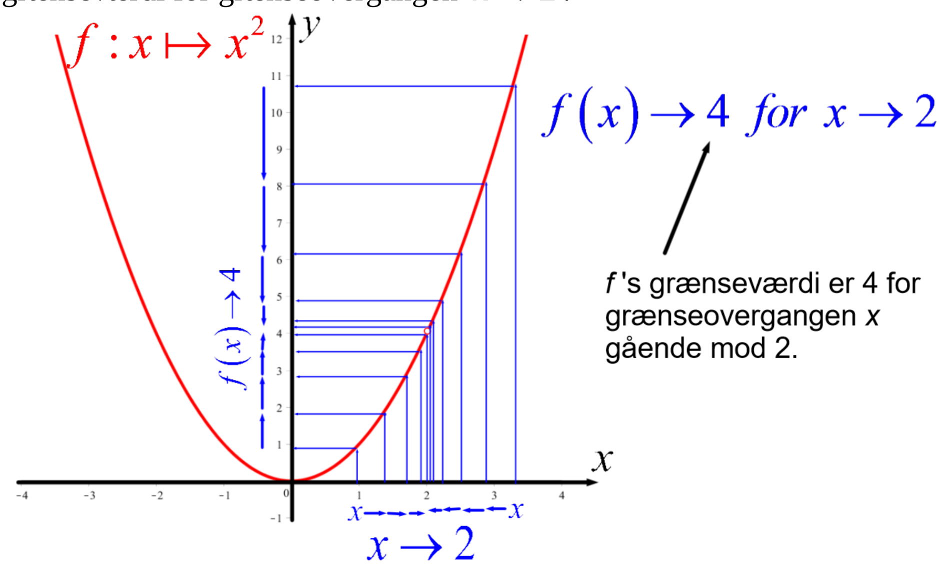
Eksempel 4: Vi ser på funktionen $f : x \mapsto e^x$, hvor vi fjerner 0 fra definitionsmængden, dvs. $Dm(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, og vi kigger så på de tre mulige grænseovergange:



Af de tre grænseovergange er det kun for $x \to 0$ og $x \to -\infty$, at *f* har grænseværdier (henholdsvis 1 og 0), for en grænseværdi skal være et konkret tal, og det er symbolet ∞ ikke.

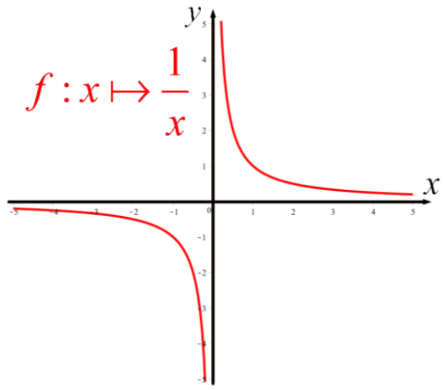
Bemærk, at grænseovergangene altid foregår på *x*-aksen, mens man for funktioner aflæser grænseværdier på *y*-aksen.

Eksempel 5: I Eksempel 4 blev grænseovergangen $x \to 0$ illustreret ved, at man kom fra et sted til højre for 0 og lod *x*-værdierne bevæge sig mod venstre – tættere og tættere på 0. Men grænseovergangen $x \to a$ dækker over, at man skal undersøge, hvad der sker, når man kommer fra begge sider, som illustreret i nedenstående eksempel med $f : x \mapsto x^2$, hvor 2 er fjernet fra definitionsmængden, så det giver mening at snakke om en grænseværdi for grænseovergangen $x \to 2$:



Man kan godt præcisere, at man kun ønsker at se på, hvad der sker, når man kommer fra én af siderne. Dette angives med et + (fra højre) eller – (fra venstre) placeret som et indeks, MEN så er der netop ikke tale om en grænseovergang, og man anvender normalt blot denne notation for at vise, at man netop ikke kan sige noget generelt om den pågældende grænseovergang (se de følgende to eksempler):

Eksempel 6: Vi ser på $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ og ønsker at undersøge grænseovergangen $x \to 0$ (dette giver mening, da *f* jo ikke er defineret i $x = 0$):



Vi ser først på, hvad der sker, når *x*-værdierne nærmer sig 0 fra højre og opdager:

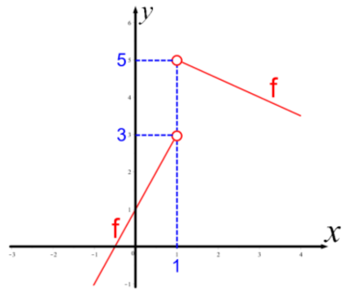
$$f(x) \to \infty \text{ for } x \to 0_+$$

Derefter ser vi på, hvad der sker, når *x*-værdierne nærmer sig 0 fra venstre:

$$f(x) \to -\infty \text{ for } x \to 0_-$$

Der sker forskellige ting afhængigt af, om vi nærmer os 0 fra venstre eller højre, og dermed kan vi IKKE sige noget generelt om grænseovergangen $x \to 0$.

Eksempel 7: Vi ser nu på funktionen *f*, hvis graf er indtegnet i nedenstående koordinatsystem. Bemærk, at der kun er tale om én funktion, selvom den laver et spring. Vi ønsker at se på grænseovergangen $x \to 1$.



Først nærmer vi os 1 fra højre og opdager: $f(x) \to 5$ for $x \to 1_+$

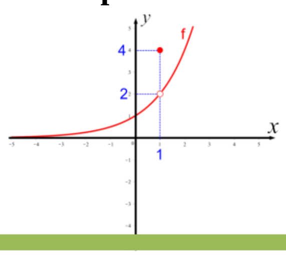
Så nærmer vi os 1 fra venstre og får: $f(x) \to 3$ for $x \to 1_-$

Da 3 og 5 er forskellige tal, har f INGEN GRÆNSEVÆRDI for $x \to 1$.

Det er vigtigt at forstå forskellen mellem grænseværdier og funktionsværdier. Funktionsværdien angiver funktionens værdi netop det pågældende sted, mens grænseværdien fortæller noget om, hvordan funktionen opfører sig i området omkring det pågældende sted, men netop ikke på det pågældende sted. Denne forskel er forsøgt gjort tydelig ved indtil videre at sørge for, at funktionen netop ikke var defineret i x_0, når vi undersøgte grænseovergangen $x \to x_0$.

Men egentlig kan man godt snakke om grænseværdier steder, hvor *f* er defineret, man skal så bare være opmærksom på, at man skal se fuldstændig bort fra, hvad der sker i selve x_0.

Eksempel 8:



Vi er interesseret i stedet $x = 1$ og området omkring det. Her gælder:

$f(1) = 4$	Funktionsværdien er 4
$f(x) \to 2$ for $x \to 1$	Grænseværdien er 2

Der er altså både en funktionsværdi i 1 og en grænseværdi for grænseovergangen $x \to 1$, og de er forskellige.

Opgaverne 011*

εδ– og εM-notation

Vi indfører først et hjælpebegreb:

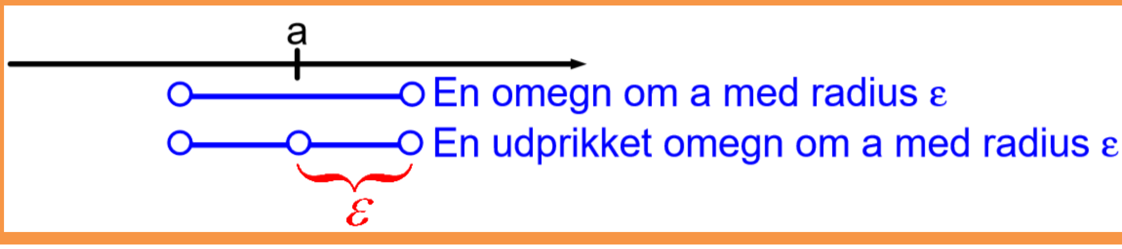
Definition 4: Lad *a* være et tal på talaksen.

Ved en *omegn om a*, der skrives $\omega(a)$, forstås et åbent interval placeret symmetrisk omkring *a*, dvs. $\dfrac{\sup(\omega(a))+\inf(\omega(a))}{2}=a$.

Ved *radius* for omegnen $\omega(a)$ forstås $\dfrac{\sup(\omega(a))-\inf(\omega(a))}{2}$, dvs. den halve intervalbredde.

Ved en *udprikket omegn om a*, der skrives $\overline{\omega}(a)$, forstås $\overline{\omega}(a)=\omega(a)\setminus\{a\}$.

Med $\omega_r(a)$ menes en omegn om *a* med radius *r*, og tilsvarende for $\overline{\omega_r}(a)$



Vi er nu klar til at definere, hvad vi mener med vores grænseovergange:

Definition 5: Lad $f:A\mapsto\mathbb{R}$, hvor $A\subseteq\mathbb{R}$, og lad $a\in\mathbb{R}$ være et tal, hvorom det for samtlige udprikkede omegne $\overline{\omega}(a)$ gælder, at $\overline{\omega}(a)\cap A\neq\varnothing$.

Så siger man, at $f(x)\to b$ for $x\to a$ (hvor $b\in\mathbb{R}$)

hvis det gælder, at $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:|x-a|<\delta\wedge x\in A\setminus\{a\}\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon$

eller tilsvarende *hvis der for enhver* $\omega_\varepsilon(b)$ *findes en* $\overline{\omega_\delta}(a)$, *således at* $f(x)\in\omega_\varepsilon(b)$, når $x\in\overline{\omega_\delta}(a)\cap A$

Man siger i så fald, at *f* har *grænseværdien b* i *a*, og man skriver $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$

"lim" er en forkortelse for *limes*, der på latin kan betyde grænse (og blev anvendt af romerne om forskellige grænsefæstningsværker).

Definition 6: Lad $f:A\mapsto\mathbb{R}$, hvor $A\subseteq\mathbb{R}$ ikke er højrebegrænset.

Så siger man, at $f(x)\to b$ for $x\to\infty$ (hvor $b\in\mathbb{R}$)

hvis det gælder, at $\forall\varepsilon>0\exists M>0:x>M\wedge x\in A\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon$

Man siger i så fald, at *f* har *grænseværdien b* for $x\to\infty$, og man skriver $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$

Lad os med et par eksempler se på, hvordan disse definitioner kan anvendes.

Eksempel 9: Vi ser ligesom i Eksempel 4 på $f : x \mapsto e^x$ og ønsker at undersøge grænseovergangen $x \to 0$. Men denne gang indskrænker vi ikke definitionsmængden, for som det ses i Definition 5, er det ikke væsentligt, om *f* er defineret i 0 eller ej. Det væsentlige er, at der i enhver omegn om 0 findes et punkt, som *f* er defineret i.

Det skal nu ved hjælp af Definition 5 vises, at $f(x) \to 1$ for $x \to 0$.

I vores konkrete tilfælde skal vi altså vise:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - 0| < \delta \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow |e^x - 1| < \varepsilon$$

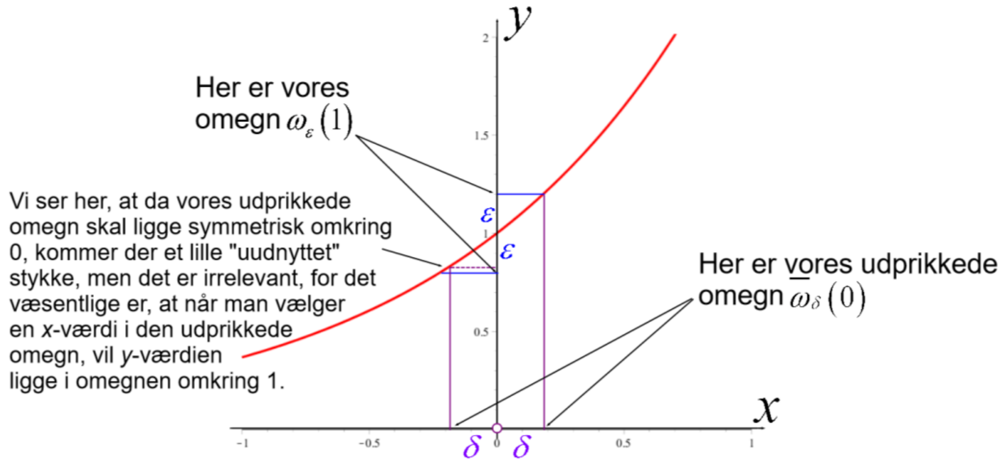
Som vi kender fra forløbet om uendeligheder, kommer fjenden med sit (meget lille) ε gemt på ryggen, og vi skal nu finde et δ (udtrykt ved ε), som vi kan forsvare os med. Vi skal altså sørge for, at:

$$|e^x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < e^x - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \varepsilon < e^x < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow \ln(1-\varepsilon) < x < \ln(1+\varepsilon)$$

Og her har vi så næsten vores δ. Vi bemærker, at *x* er klemt inde mellem et positivt og et negativt tal (da $\ln(1) = 0$), og vi sammenligner så de to tals numeriske værdier og vælger det mindste som δ. Da den naturlige logaritmefunktion har aftagende væksthastighed, vil det blive $\delta = \ln(1+\varepsilon)$.

Dvs., at når fjenden viser sit ε og råber „Ha!", så forsvarer du dig med $\delta = \ln(1+\varepsilon)$.

Dette kan illustreres med omegne på følgende måde:



Det er ekstrem vigtigt at bemærke, at grænseværdier er entydige. I Eksempel 9 er *f* 's grænseværdi 1 i 0. Hvis man havde forsøgt sig med et hvilket som helst andet tal, var det gået galt. Lad os f.eks. prøve med 1,01. Vi ender så med $\ln(1{,}01-\varepsilon) < x < \ln(1{,}01+\varepsilon)$. Men hvis fjenden nu kommer med $\varepsilon = 0{,}001$, vil begge udtryk med logaritmer give positive tal. Dvs. *x* skal ligge mellem to positive tal, hvis afstanden fra $f(x)$ til 1,01 skal være mindre end ε, og det fungerer ikke, for det skal gælde for alle *x*-værdier i vores udprikkede omegn $\overline{\omega_\delta}(0)$, og denne omegn vil nødvendigvis indeholde tal, der er mindre end to givne, positive tal.

Omegne kan også bruges til at definere begreber i forbindelse med intervaller. Vi siger nemlig, at: *Det indre* af et interval *I* består af alle de punkter $a \in I$, hvor der findes en omegn $\omega(a)$ om punktet, hvor $\omega(a) \subseteq I$. *Afslutningen* af *I* er alle de punkter, hvor enhver omegn om punktet har mindst ét punkt fælles med *I*. Differensen mellem disse to mængder kaldes *randen* for *I*.

Eksempel 10: Vi vil bruge Definition 6 til at vise, at $f : x \mapsto e^{-x}$ har grænseværdien 0 ved grænseovergangen $x \to \infty$, dvs. $f(x) \to 0$ for $x \to \infty$.

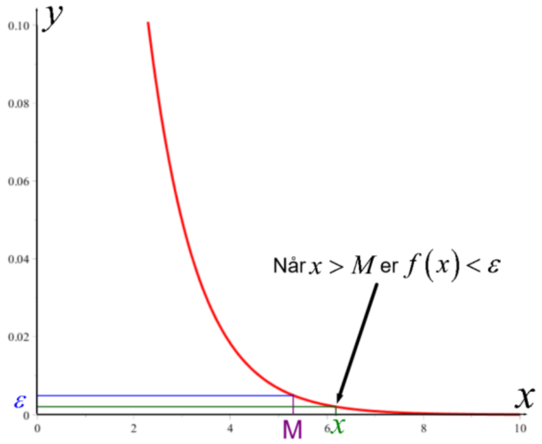
Vores definition giver i dette konkrete tilfælde:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 : x > M \Rightarrow \left| e^{-x} - 0 \right| < \varepsilon$$

Vi bemærker, at funktionsværdierne altid er positive, så det bliver lidt simplere end i Eksempel 9:

$$\left| e^{-x} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow e^{-x} < \varepsilon \Leftrightarrow -x < \ln(\varepsilon) \Leftrightarrow x > -\ln(\varepsilon)$$

I sidste skridt vendes ulighedstegnet, da vi multiplicerer med det negative tal -1. Og vi ser derfor, at vi kan vælge $M = -\ln(\varepsilon)$.



Opgaverne 012*

Og nu til de vigtigste eksempler af dem alle. Vi vil vise, at $x \to a$ for $x \to a$, samt at $k \to k$ for $x \to a$.

Eksempel 11: Vi ser på $f : x \mapsto x$ og vil vise $f(x) \to a$ for $x \to a$. Dvs. vi skal vise:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{a\} \Rightarrow |x - a| < \varepsilon$$

Det søgte δ er ikke så svært at finde. Vi vælger nemlig $\delta = \varepsilon$. For så gælder det jo oplagt, at når $|x - a| < \delta$, så er $|x - a| < \varepsilon$.

Eksempel 12: Vi ser på konstantfunktionen $f : x \mapsto k$ og vil vise $f(x) \to k$ for $x \to a$. Vi skal altså vise:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{a\} \Rightarrow |k - k| < \varepsilon$$

Men her kan alle δ jo bruges, for da $k - k = 0$, gælder det altid, at $|k - k| < \varepsilon$.

Som sagt er de to seneste eksempler meget vigtige. Når vi kombinerer dem med den kommende Sætning 1, kan vi komme meget langt.

Egentlig er vi ikke færdige med behandlingen af grænseovergange, for definitionerne 5 og 6 dækker f.eks. ikke $f(x) \to \infty$ for $x \to a$, og der kunne godt være gjort mere ud af betingelserne i definitionerne. Men nu stopper vi med at grave dybere, for nu har vi de nødvendige begreber til rådighed til for alvor at begynde på infinitesimalregningen.

Følgende elementer fra det indledende er vigtige at tage med videre:

- Vi skal arbejde med differenskvotienter $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, der ikke er definerede for $\Delta x = 0$, og vi skal derfor – om muligt – finde en grænseværdi for differenskvotienten ved grænseovergangen $\Delta x \to 0$. Hvis en sådan grænseværdi eksisterer, kalder vi den differentialkvotienten $\frac{dy}{dx}$.

- Omegne og udprikkede omegne omkring punkter er vigtige, når man på en præcis måde skal beskrive det, der løst sagt foregår lige omkring punkterne.

- Grunden til at begynde at arbejde med grænseværdier er, at infinitesimaler (og herunder differentialer) pr. definition er størrelser, som vi ikke kan regne med, og vi har altså brug for en anden indfaldsvinkel.

REGNING MED GRÆNSEVÆRDIER

Fra *Funktioner del 1 Definition 4* husker du sumfunktionen $(f+g)$, differensfunktionen $(f-g)$, produktfunktionen $(f \cdot g)$, kvotientfunktionen $\left(\frac{f}{g}\right)$ og den sammensatte funktion $(f \circ g)$. Disse funktioner, der – bortset fra den sammensatte funktion – kan virke så banale, blev som nævnt indført, fordi man i forskellige sammenhænge kan udlede nogle regneregler for disse, hvorved man kun behøver at vise egenskaber for standardfunktioner.

Og det skal vi begynde på nu. Vi skal nemlig vise følgende:

Sætning 1: Lad *f* og *g* være reelle funktioner, der i x_0 har grænseværdierne henholdsvis *a* og *b*, dvs.

$$f(x) \to a \text{ for } x \to x_0 \qquad \text{og} \qquad g(x) \to b \text{ for } x \to x_0 .$$

Det gælder så, at:

$$(k \cdot f)(x) \to k \cdot a \text{ for } x \to x_0 \qquad \text{, hvor } k \text{ er en konstant}$$
$$(f+g)(x) \to a+b \text{ for } x \to x_0$$
$$(f-g)(x) \to a-b \text{ for } x \to x_0$$
$$(f \cdot g)(x) \to a \cdot b \text{ for } x \to x_0$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \to \frac{a}{b} \text{ for } x \to x_0 \qquad (\text{gælder kun, hvis } b \neq 0)$$

Sumfunktionen er defineret ved, at man lægger funktionsværdierne sammen. Sætning 1 siger så, at man på tilsvarende måde kan lægge grænseværdier sammen (og på samme måde for de andre funktioner). I sætningen er tilføjet funktionen $k \cdot f$, der for hver *x*-værdi multiplicerer funktionsværdien med *k*. Dette er egentlig blot et specialtilfælde af produktfunktionen, hvor den ene funktion er en konstantfunktion, men egenskaben er så vigtig, at den her er nævnt eksplicit.

Det bemærkes, at den sammensatte funktion ikke er nævnt i sætningen. For man kan ikke sige noget om $f \circ g$, hvis man ikke ved, om *f* har en grænseværdi for $x \to b$ (da $g(x) \to b$ for $x \to x_0$).

Bevis 1: Vi ser først på sumfunktionen $f+g$.

Vi skal vise, at $(f+g)(x) \to a+b$ for $x \to x_0$.

Vi lader fjenden dukke op med sit ε, dvs. en omegn $\omega_\varepsilon(a+b)$, som kravet er, at $f(x)+g(x)$ skal tilhøre, når blot *x* tilhører en passende udprikket omegn $\overline{\omega_\delta}(x_0)$, som altså er den, der skal findes.

Da både *f* og *g* har grænseværdier i x_0, ved vi, at uanset hvilken omegn, fjenden dukker op med, kan vi finde os en passende udprikket omegn at forsvare os med, og vi ser derfor nu på de udprikkede omegne $\overline{\omega_{\delta_f}}(x_0)$ og $\overline{\omega_{\delta_g}}(x_0)$, der forsvarer mod $\varepsilon_f = \frac{\varepsilon}{2}$ og $\varepsilon_g = \frac{\varepsilon}{2}$.

Vi vælger nu **den mindste** af disse, dvs. $\overline{\omega_\delta}(x_0)$, hvor $\delta = \min(\delta_f, \delta_g)$.

Dermed ved vi, at der for alle $x \in \overline{\omega_\delta}(x_0)$ gælder:

$$a-\varepsilon_f < f(x) < a+\varepsilon_f \Leftrightarrow a-\frac{\varepsilon}{2} < f(x) < a+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$b-\varepsilon_g < g(x) < b+\varepsilon_g \Leftrightarrow b-\frac{\varepsilon}{2} < g(x) < b+\frac{\varepsilon}{2}$$

Og dermed gælder også for alle $x \in \overline{\omega_\delta}(x_0)$:

$$a+b-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2} < f(x)+g(x) < a+b+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow a+b-\varepsilon < f(x)+g(x) < a+b+\varepsilon$$

Vores $\overline{\omega_\delta}(x_0)$ kan altså forsvare os mod ε, og vi har dermed vist:

$$(f+g)(x) \to a+b \text{ for } x \to x_0$$

Vi ser nu på differensfunktionen $f-g$.

Vi skal vise, at $(f-g)(x) \to a-b$ for $x \to x_0$.

Vi gør som før. Fjenden kommer med sit ε, og vi vælger $\overline{\omega_\delta}(x_0)$ som den smalleste af omegnene svarende til $\varepsilon_f = \frac{\varepsilon}{2}$ og $\varepsilon_g = \frac{\varepsilon}{2}$, og vi har så for alle $x \in \overline{\omega_\delta}(x_0)$:

$$a-\frac{\varepsilon}{2} < f(x) < a+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$b-\frac{\varepsilon}{2} < g(x) < b+\frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow -b+\frac{\varepsilon}{2} > -g(x) > -b-\frac{\varepsilon}{2}$$

I den nederste dobbeltulighed vendes ulighedstegnene, når der multipliceres igennem med -1.
Vi lægger nøje mærke til, hvordan ulighedstegnene vender, og får så:

$$a-\frac{\varepsilon}{2}+\left(-b-\frac{\varepsilon}{2}\right) < f(x)-g(x) < a+\frac{\varepsilon}{2}+\left(-b+\frac{\varepsilon}{2}\right) \Leftrightarrow a-b-\varepsilon < f(x)-g(x) < a-b+\varepsilon$$

Når fjenden for $k \cdot f$ dukker op med sit ε, så vælger vi den udprikkede omegn $\overline{\omega_\delta}(x_0)$, der for *f* svarer til angrebet med $\frac{\varepsilon}{k}$. Vis selv, at dette virker.

Når vi kommer til produktfunktionen $f \cdot g$ og kvotientfunktionen $\frac{f}{g}$ bliver beviserne langt sværere, fordi vores valgte ε_f og ε_g nu også skal inddrage grænseværdierne *a* og *b*, fordi produktfunktionen ændrer sig meget i forhold til de oprindelige funktioner, når funktionsværdierne er store. Antag f.eks., at *g* konstant er 100 i et interval *I*. Hvis *f* i intervallet *I* øger sine funktionsværdier med 1, vil produktfunktionen i *I* øge sine funktionsværdier med 100. Og hvis *g* også ændrer sig, har *f* 's værdi betydning for, hvor meget produktfunktionen øges.

For produktfunktion skal man – hvis *a* og *b* begge er positive - finde den udprikkede omegn $\overline{\omega_\delta}(x_0)$, der svarer til

$$\varepsilon_f = \varepsilon_g = \frac{\sqrt{(a+b)^2 + 4\cdot\varepsilon} - (a+b)}{2}$$

For kvotientfunktionen bliver det endnu værre, og man skal igen opdele efter fortegn for *a* og *b*.

Eksempel 13: Om funktionerne *f* og *g* gælder $f(x) \to 11$ for $x \to 5$ og $g(x) \to -4$ for $x \to 5$.

Ifølge Sætning 1 gælder så bl.a.:

$(f+g)(x) \to 7$ for $x \to 5$

$(3\cdot f)(x) \to 33$ for $x \to 5$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \to -\frac{11}{4}$ for $x \to 5$

$(f\cdot g)(x) \to -44$ for $x \to 5$

$\left(\frac{5\cdot f - 2\cdot g}{f}\right)(x) \to \frac{63}{11}$ for $x \to 5$

Beviset for Sætning 1 blev ikke helt gennemført, men faktisk burde selve sætningen også have været udvidet. For pointen med sætningen er, at vi kan regne med grænseværdier med regneoperationerne addition, subtraktion, multiplikation og division. Men hvad med potenser og rødder? Strengt taget skulle vi også bevise potensregneregler for grænseværdier, men her nøjes vi med at sige, at disse også gælder, da potensregnereglerne er baseret på nogle definitioner samt multiplikation og division (så kunne man selvfølgelig også sige, at vi kun havde behov for at vise, at man kunne lægge grænseværdier sammen, da de andre regneoperationer fremkommer på baggrund af addition – se Grundlæggende matematiske begreber del 1).

Pointen med eksemplerne 11 og 12, Sætning 1 samt ovenstående kommentar er, at det er uhyre nemt at regne med grænseværdier, for det er præcis som at regne med almindelige tal.

F.eks. gælder:

$e^{2x+5} \to e^{11}$ for $x \to 3$, for Eksempel 11 fortæller os, at $x \to 3$ for $x \to 3$,

og dermed må det for $x \to 3$ gælde, at $2\cdot x \to 6$ (Sætning 1), og $5 \to 5$ (Eksempel 12)

og dermed $2\cdot x + 5 \to 11$ (Sætning 1) og endelig $e^{2x+5} \to e^{11}$ (kommentaren).

Og der gælder:

$$\sqrt{3\cdot x - 4} \to \sqrt{17} \quad \text{for } x \to 7$$

Eksempel 14: Vi ønsker at finde ud af, om udtrykket $7\cdot\Delta x+3$ har en grænseværdi for $\Delta x\to 0$, og hvad den i så fald er.

Vi er nu gået fra variablen x til Δx, men det har jo ingen betydning for vores sætningers indhold, hvad vi kalder variablen, så der gælder:

$$7\cdot\Delta x+3\to 3 \text{ for } \Delta x\to 0,$$

for når $\Delta x\to 0$ gælder $\Delta x\to 0$ og dermed $7\cdot\Delta x\to 7\cdot 0=0$.

Lad os endelig se på et eksempel, der bedre illustrerer, hvad vi kommer til at bruge dette til:

Eksempel 15: Vi ønsker at finde ud af, om $\dfrac{13\cdot(\Delta x)^2-5\cdot\Delta x}{\Delta x}$ har en grænseværdi for $\Delta x\to 0$, og hvad den i så fald er.

Og nu skal vi passe på!

For bemærk, at vi i nævneren har Δx, og vi ved, at $\Delta x\to 0$ for $\Delta x\to 0$. Men da grænseværdien er 0, kan vi ikke anvende Sætning 1, for med kvotientfunktioner må grænseværdien for nævneren ikke være 0.

I stedet omskriver vi udtrykket ved at forkorte brøken med Δx:

$$\frac{13\cdot(\Delta x)^2-5\cdot\Delta x}{\Delta x}=13\cdot\Delta x-5 \;\; ; \; \Delta x\neq 0$$

Bemærk, at disse to udtryk har samme værdi for alle værdier af Δx bortset fra 0, hvor udtrykket til venstre ikke er defineret.

Men hele pointen med vores grænseværdier er jo netop, at de intet har at gøre med funktionsværdien i det pågældende punkt, men kun i punkterne i en udprikket omegn om punktet. Og dermed har de to udtryk ovenfor samme grænseværdi for $\Delta x\to 0$.

Og vi kan se, at $13\cdot\Delta x-5\to -5$ for $\Delta x\to 0$, og dermed gælder:

$$\frac{13\cdot(\Delta x)^2-5\cdot\Delta x}{\Delta x}\to -5 \text{ for } \Delta x\to 0$$

Bemærk altså, at selvom udtrykket $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ikke er defineret for $\Delta x=0$, så kunne det jo godt være, at man kunne omskrive det til et udtryk, der har samme værdi for alle andre værdier for Δx end 0, og på denne måde vil man kunne finde grænseværdien for $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ steder, hvor udtrykket ikke er defineret.

Opgaverne 013*

Notation:

HVIS en funktion har en grænseværdi, kan man som tidligere nævnt også anvende en *limes*-notation.

$$f(x)\to 13 \text{ for } x\to 5 \quad \text{kan også skrives} \quad \lim_{x\to 5} f(x)=13$$

og

$$f(x)\to -7 \text{ for } x\to\infty \quad \text{kan også skrives} \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=-7$$

Men dette gælder som sagt kun, hvis der er en grænseværdi, dvs. man kan ikke bruge notationen, hvis f.eks. $f(x)\to\infty$ for $x\to 5$.

KONTINUITET

Kontinuitet er et centralt begreb inden for matematisk analyse. Og det indgår i et hav af sætninger som en forudsætning, f.eks. "Lad *f* være en kontinuert funktion …". Men alle 'almindelige' funktioner er kontinuerte, og da vi derfor hele tiden arbejder med kontinuerte funktioner, er det svært ikke at overse begrebet (positive tal er nemmere at forstå, fordi vi ofte møder negative tal, og aftagende funktioner hjælper os til at forstå voksende funktioner osv.).

Den mest udbredte og løse beskrivelse af begrebet er, at en funktion er kontinuert, hvis dens graf er sammenhængende, dvs. hvis man kan tegne grafen uden at skulle løfte blyanten fra papiret. Problemet med denne beskrivelse er, at den ikke blot er løs, men også forkert. Prøv at tegne grafen for $f: x \mapsto \frac{1}{x}$, der er en hyperbel med en gren i 1. kvadrant og en gren i 3. kvadrant. Her er du helt klart nødt til at løfte blyanten for at komme fra den ene gren til den anden, men faktisk er det en kontinuert funktion.

Du må altså ikke anvende denne løse beskrivelse af kontinuitet i matematisk sammenhæng, men den er alligevel ikke helt ubrugelig, for den kan give dig et billede af, hvad begrebet drejer sig om, og det kan ofte hjælpe hukommelsen på vej.

Den rigtige beskrivelse af begrebet er:

Definition 7: En reel funktion $f: A \mapsto \mathbb{R}$ siges at være *kontinuert i* $x_0 \in A$, og punktet x_0 et *kontinuitetspunkt for f*, hvis det gælder:

$$f(x) \to f(x_0) \text{ for } x \to x_0$$

eller tilsvarende

$$f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0) \text{ for } \Delta x \to 0$$

eller tilsvarende

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \land x \in A \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

eller i ord:

Hvis f har en grænseværdi ved grænseovergangen $x \to x_0$,

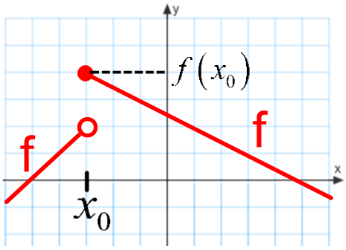
og denne grænseværdi er lig funktionsværdien i x_0.

Hvis funktionen ikke er kontinuert i x_0, siges den at være *diskontinuert i* x_0, og punktet x_0 kaldes for et *diskontinuitetspunkt for f.*

Definition 8: En funktion siges at være *kontinuert*, hvis den er kontinuert i alle punkter i sin definitionsmængde.

Bemærk, at et punkt kun kan være et kontinuitetspunkt eller diskontinuitetspunkt for *f*, hvis det tilhører *f*'s definitionsmængde. Og det er derfor, at $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ er kontinuert. Det sted, hvor du løfter blyanten fra papiret, når du tegner grafen, er ikke en del af *f*'s definitionsmængde, og derfor har dette sted ingen betydning for, om *f* er kontinuert.

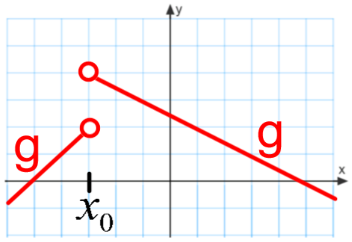
Lad os se grafisk på begrebet. På nedenstående figurer ses på grafer for funktioner, der er kontinuerte overalt, bortset evt. fra i x_0. Dvs. vi skal kun fokusere på, hvad vi kan sige i x_0, når vi skal komme med vores konklusion:



f er defineret i x_0, så funktionsværdien $f(x_0)$ eksisterer.

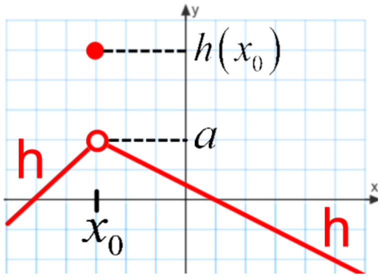
Men *f* har ingen grænseværdi for $x \to x_0$.

Derfor er x_0 et diskontinuitetspunkt for *f*, og ***f* er ikke kontinuert.**



g er ikke defineret i x_0, så punktet kan hverken være et kontinuitetspunkt eller diskontinuitetspunkt for *g*, og dermed er ***g* kontinuert.**

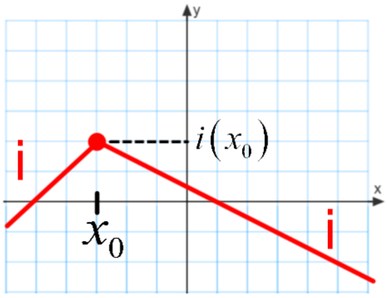
(der er ingen grænseværdi for $x \to x_0$)



h er defineret i x_0, så funktionsværdien $h(x_0)$ eksisterer.

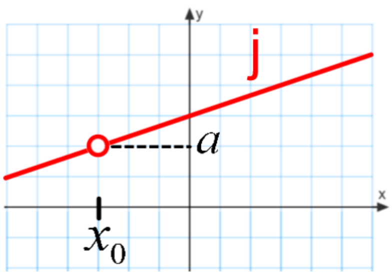
h har grænseværdien *a* i x_0 ($h(x) \to a$ for $x \to x_0$).

Da grænseværdien *a* IKKE er lig funktionsværdien $h(x_0)$, er x_0 et diskontinuitetspunkt for *h*, og ***h* er ikke kontinuert.**



i er defineret i x_0, så funktionsværdien $i(x_0)$ eksisterer.

Og da $i(x) \to i(x_0)$ for $x \to x_0$, er *i* kontinuert i x_0, og dermed er ***i* kontinuert**.



j er ikke defineret i x_0, så punktet kan hverken være et kontinuitetspunkt eller diskontinuitetspunkt for *j*, og dermed er ***j* kontinuert.**

j har grænseværdien *a* i x_0

Opgaverne 014*

Det kan være meget svært på nuværende tidspunkt at gennemskue vigtigheden af begrebet *kontinuitet*. Men egenskaben *kontinuert* sikrer, at en funktion kan integreres (integralregning), og vi skal udnytte $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$ for $\Delta x \to 0$ i forbindelse med differentialregning. Så læg godt mærke til denne formulering og tænk over, hvorfor det er så nemt at overse, at dette KUN gælder for funktioner, der er kontinuerte i x_0.

Da vi har defineret sumfunktioner, differensfunktioner, produktfunktioner og kvotientfunktioner ud fra, om de adderer, subtraherer, multiplicerer eller dividerer **funktionsværdier**, og da vi i Sætning 1 har vist, at der sker præcis det samme med grænseværdier som med funktionsværdier for disse funktionstyper, så følger det direkte af vores definition på kontinuitet, at der også gælder:

Sætning 2: Hvis *f* og *g* begge er kontinuerte i x_0, og *k* er en konstant, så er

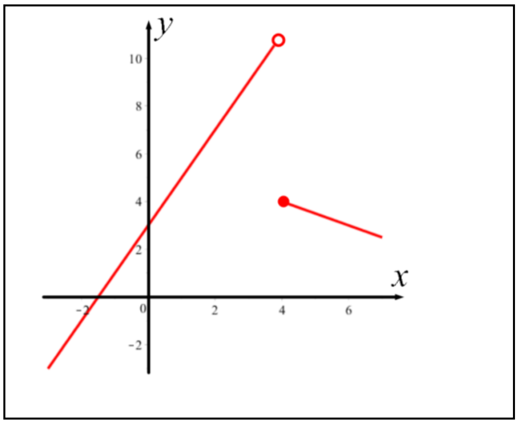
$f+g$, $f-g$, $k\cdot f$, $f\cdot g$ og $\dfrac{f}{g}$ kontinuerte i x_0 (sidstnævnte dog kun, hvis $g(x_0)\neq 0$) .

Igen siger sætningen ikke noget om sammensatte funktioner, men det gælder faktisk også, at hvis *g* er kontinuert i x_0, og *f* er kontinuert i $g(x_0)$, så er $f\circ g$ kontinuert i x_0.
Og igen kunne Sætning 2 udvides til også at dække rødder og potenser.

Dette fører til, at hvis man f.eks. ved, at identitetsfunktionen $f: x\mapsto x$ er kontinuert, så er også f.eks. $g: x\mapsto 3x^3-2x^2+7$ og $h: x\mapsto \dfrac{\sqrt{x-4}}{2^x}$ kontinuerte.

Det er derfor, det er så svært at støde på ikke-kontinuerte funktioner. Man skal virkelig tænke sig om og gøre noget specielt for at få funktioner til at "springe", så de ikke er kontinuerte.
Bortset selvfølgelig fra den oplagte mulighed at lave gaffelforskrifter, f.eks.:

$$f: x\mapsto \begin{cases} 2x+3 & \text{hvis} \quad x<4 \\ -0{,}5\cdot x+6 & \text{hvis} \quad x\geq 4 \end{cases}$$



Funktionerne *floor* og *ceiling* (søg evt. på wikipedia.org efter "floor and ceiling functions") er funktioner, der kan angives ved gaffelforskrifter, og i forbindelse med statistik møder vi trappediagrammer, der er gaffelforskrifter. Så ikke-kontinuerte funktioner findes og anvendes – bare ikke så ofte i gymnasiet.

Endelig er der også det klassiske eksempel på en funktion, der er diskontinuert i samtlige punkter på talaksen (og her har man tænkt sig godt om). Det er funktionen:

$$f: x\mapsto \begin{cases} 1 \;\; \text{hvis} \;\; x\in\mathbb{Q} \\ 0 \;\; \text{hvis} \;\; x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

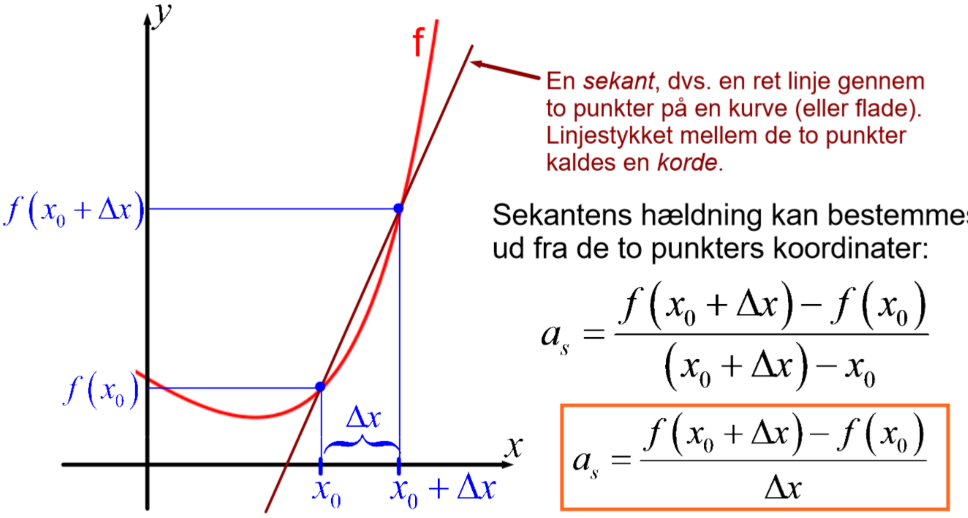
Dvs. funktionen, der antager værdien 1, når argumentet er et rationalt tal, og værdien 0, når argumentet er et irrationalt tal.
Denne funktion er defineret for samtlige reelle tal, men den har ikke nogen grænseværdi for en eneste grænseovergang (overvej selv hvorfor), og den er derfor diskontinuert i samtlige punkter.

DIFFERENTIABILITET

Vi har nu de nødvendige begreber til rådighed til at tage rigtig fat på differentialregning. Inden for differentialregning er vi interesseret i at beskrive væksthastigheder for funktioner. Funktionsværdier angiver værdien af den pågældende funktion det konkrete sted, men vi er nu interesserede i at vide, hvad der er ved at ske med funktionsværdierne. Er de i færd med at stige eller falde, og hvor hurtigt foregår dette?

Vi har allerede et begreb, der angiver væksthastigheder, nemlig hældningskoefficienten. Den angiver netop funktionsværdiens ændring, når argumentet øges med 1.

Men hældninger hører til rette linjer, og grafen for *f* (se nedenfor) er ingen ret linje. Men det er her begrebet *tangent* kommer ind i billedet, for vi gør nu følgende:



Vi vælger et fast sted x_0, der giver os punktet $(x_0, f(x_0))$ - se figuren ovenfor. **Det er i dette punkt, vi ønsker at bestemme væksthastigheden**.

Vi ved, at hvis vi har to punkter, kan vi tegne en ret linje gennem dem, og for denne rette linje kan vi bestemme hældningen, der vil svare til gennemsnitshastigheden mellem de to punkter. Vores problem er bare hvilket andet punkt, vi skal vælge!?

I første omgang er vi nødt til at holde os til punkter på grafen, da det er de eneste punkter, vi har, så til at begynde med lægger vi størrelsen Δx til argumentet og får punktet $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$. Bemærk, at Δx godt kan være negativ. I så fald kommer $x_0+\Delta x$ til at ligge til venstre for x_0.

Igennem disse to punkter på kurven tegnes en *sekant* (dvs. en ret linje gennem to punkter på en kurve).

Det er udelukkende sekantens hældning, vi er interesseret i. Om den kan vi sige:

- Den er givet ved $a_s = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.
- Den kaldes *differenskvotienten for* x_0, og den angiver *gennemsnitshastigheden* for *f* i intervallet $[x_0, x_0+\Delta x]$ (eller $[x_0+\Delta x, x_0]$, hvis Δx er negativ).
- **Differenskvotienten er en funktion af** Δx, og hver eneste x_0 har sin egen *differenskvotient:*

$$s_{x_0} : \Delta x \mapsto \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

- Differenskvotienten er ikke defineret for $\Delta x = 0$.

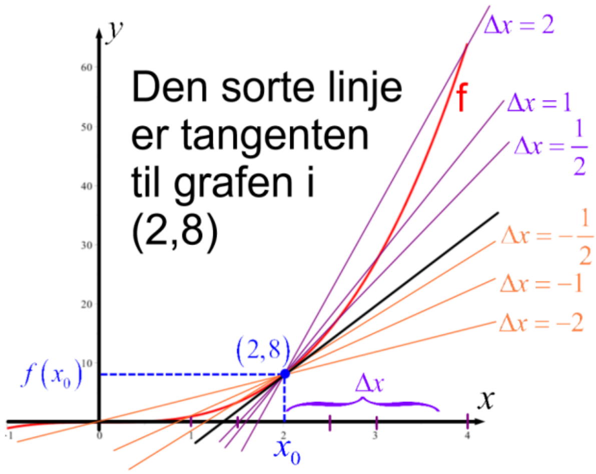
Differenskvotienten er altså en funktion af Δx, der for en given Δx-værdi angiver hældningen af den sekant, der konstrueres mellem punkterne $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ og $\left(x_0+\Delta x, f\left(x_0+\Delta x\right)\right)$. Dvs. funktionsværdien angiver sekanthældningen. Men differenskvotienten er **ikke** defineret for $\Delta x=0$, for vi må ikke dividere med 0, og vi har heller ikke to punkter til rådighed til at danne en sekant, når $\Delta x=0$.

Lad os se på et konkret eksempel.

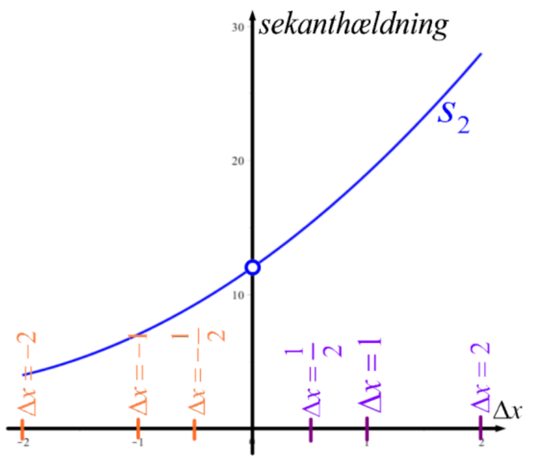
Eksempel 16: Vi ser på $f: x \mapsto x^3$ og ønsker at bestemme differenskvotienten svarende til $x_0=2$.

På figuren nedenfor til venstre er grafen for *f* tegnet med rød. Der er tegnet seks forskellige sekanter svarer til tre positive og tre negative værdier af Δx.

GRAFEN FOR FUNKTIONEN *f*



GRAFEN FOR DIFFERENSKVOTIENTEN



På figuren til højre er grafen for differenskvotienten i $x_0=2$ tegnet. Den er givet ved

$$s_2: \Delta x \mapsto \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{(2+\Delta x)^3-2^3}{\Delta x}$$

Få først styr på sammenhængen mellem 1.-akserne i de to koordinatsystemer. Den venstre angiver *x*, mens den højre angiver Δx, og da $x_0=2$, vil $x=3$ på den venstre svare til $\Delta x=1$ på den højre.

2. akserne på de to figurer angiver forskellige ting. På den venstre figur er det funktionsværdier, mens hele pointen er, at den højre figurs 2. akse angiver sekanthældningerne.

Og bemærk, at differenskvotienten ikke er defineret for $\Delta x=0$.

Men det er ikke noget problem for os, for vi kan jo tydeligt se på grafen, at godt nok er der ikke nogen funktionsværdi for $\Delta x=0$, men differenskvotienten har helt klart en grænseværdi for $\Delta x \to 0$, og denne grænseværdi aflæses til 12.

Denne grænseværdi på 12 vil vi fortolke som væksthastigheden i punktet og kalde den *differentialkvotienten i 2.*

Denne grafiske beskrivelse er kun en hjælp til at forstå, hvad der foregår. I praksis vil vi arbejde alene med funktionsudtryk.

Eksempel 16 (fortsat):

Lad os altså prøve at arbejde med funktionen $s_2 : \Delta x \mapsto \dfrac{(2+\Delta x)^3 - 2^3}{\Delta x}$.

Funktionsudtrykket omskrives til følgende (du kan evt. anvende *expand* i Maple):

$$\frac{(2+\Delta x)^3 - 2^3}{\Delta x} = \frac{8+12\cdot\Delta x+6\cdot\Delta x^2+\Delta x^3-8}{\Delta x} = \frac{12\cdot\Delta x+6\cdot\Delta x^2+\Delta x^3}{\Delta x}$$

Dette udtryk er ikke defineret for $\Delta x = 0$, men vi bemærker, at Δx indgår i alle led, og vi forkorter derfor brøken med Δx og får:

$$12+6\cdot\Delta x+\Delta x^2$$

Bemærk, at vi har oplevet denne situation før, nemlig i Eksempel 15.

Vi har to funktioner $s_2 : \Delta x \mapsto \dfrac{12\cdot\Delta x+6\cdot\Delta x^2+\Delta x^3}{\Delta x}$ og $s_{2,\,forkortet} : \Delta x \mapsto 12+6\cdot\Delta x+\Delta x^2$, der bortset fra i $\Delta x = 0$, hvor den første ikke er defineret, har ens funktionsværdier overalt, og dermed må de også have samme grænseværdi for $\Delta x \to 0$, da denne jo kun afhænger af funktionsværdierne i en udprikket omegn om 0, dvs. ikke i selve 0.

Og det er godt. For vi kan ikke bruge vores regneregler for grænseværdier på s_2, da grænseværdien for nævneren er 0 (for $\Delta x \to 0$), men vi kan bruge dem på $s_{2,\,forkortet}$, hvor vi ser, at:

$$s_{2,\,forkortet} \to 12+6\cdot 0+0^2 = 12 \text{ for } \Delta x \to 0$$

Bemærk, at vi her udnytter regnereglerne for grænseværdier, samt at $\Delta x \to 0$ for $\Delta x \to 0$.

Opgaverne 015*

Stop op her og tjek, at du kan se, at Eksempel 16 og Eksempel 16 (fortsat) er to forskellige måder at komme frem til det samme.

Vi er nu klar til definitionen på differentiabilitet.

Definition 9: Lad $f : A \mapsto \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$, og lad $x_0 \in A$ være et ikke-isoleret punkt i A (dvs. enhver udprikket omegn om x_0 indeholder elementer fra *A*).

Lad $s_{x_0} : \Delta x \mapsto \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ være *differenskvotienten for* x_0.

Hvis differenskvotienten har en grænseværdi for $\Delta x \to 0$, **så** er *f differentiabel i* x_0, og i så fald kaldes grænseværdien for *differentialkvotienten i* x_0, og den betegnes $f'(x_0)$.

Hvis *f* er differentiabel i samtlige punkter i *A*, er *f differentiabel*.

Bemærk, hvordan vi med ovenstående definition ved at anvende grænseværdibegrebet kommer uden om infinitesimaler. Vores differenskvotient er ikke defineret for $\Delta x = 0$, men så kan vi bruge grænseværdien for grænseovergangen $\Delta x \to 0$ i stedet. Så selvom vi kalder det for *differentialkvotienten* – et ord der sprogligt betyder, at vi har opstillet en brøk med infinitesimaler i tæller og nævner – så er det rent matematisk ”bare” en grænseværdi.

Vi har tidligere indført tangenter som den bedste retlinede tilnærmelse til en kurve omkring et givet punkt, og det har vi brugt til at snakke om tangenter og tegne disse. Problemet med ordet ”bedste” er, at vi ikke rigtig ved, hvad det vil sige. Men det kan vi råde bod på nu, for vi er nu i stand til at komme med en rigtig (præcis) definition.

Tankegangen fremgår af den venstre figur i Eksempel 16. Vi har tegnet seks sekanter, der har det tilfælles, at de alle går gennem punktet $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$. De har forskellige hældninger afhængigt af hvilket andet punkt på grafen, de går igennem, men for grænseovergangen $\Delta x \to 0$ er der en grænseværdi for disse hældninger, som vi kalder $f'\left(x_0\right)$, og pointen er, at tangenten bliver den rette linje, der går gennem $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$, og som har $f'\left(x_0\right)$ som hældning.

Definition 10: Hvis en funktion *f* er differentiabel i x_0, findes der netop én *tangent til grafen for f i punktet* $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$, og det er den rette linje givet ved ligningen:

$$y - f\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)\cdot\left(x - x_0\right) \qquad ; \; G = \mathbb{R}^2$$

Bemærk, at det er ligningen $y - y_0 = a\cdot\left(x - x_0\right)$ for en ret linje gennem $\left(x_0, y_0\right)$ med hældning *a*, der er benyttet.

Eksempel 17: Da Maple anvender den korrekte notation, kan vi bestemme ligningen for tangenten til grafen for *f* i et givet punkt. Hvis vi f.eks. har $f: x \mapsto 2x^2 + 2\cdot\ln\left(x\right) - \ln\left(4\right)$ og vil finde en ligning for tangenten til grafen for *f* i punktet $\left(2, f\left(2\right)\right)$, kan det i Maple foregå ved:

$$f := x \to 2\,x^2 + 2\cdot\ln(x) - \ln(4) :$$

$$y - f(2) = f'(2)\cdot(x-2) \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = 9\,x - 10$$

Vi har altså nu fået præciseret, hvad den ”bedste” lineære tilnærmelse til en graf er. Når man vil fremhæve denne egenskab for tangenten, anvender man sommetider betegnelsen *approksimerende førstegradspolynomium:*

Definition 11: Hvis en funktion *f* er differentiabel i x_0, kaldes

$$p\left(x\right) = f'\left(x_0\right)\cdot\left(x - x_0\right) + f\left(x_0\right)$$

for *det approksimerende førstegradspolynomium* til *f* i x_0.

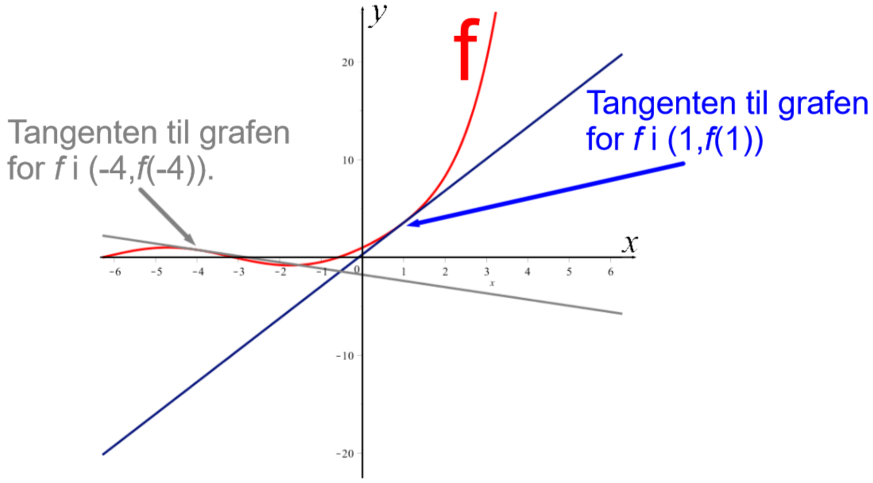
Bemærk, at grafen for det approksimerende førstegradspolynomium til *f* i x_0 er det samme som tangenten fra Definition 10 (det er ligegyldigt, om $f\left(x_0\right)$ er placeret til højre eller venstre). Det er bare spørgsmålet, om vi vil angive den rette linje ved en ligning eller ved et funktionsudtryk.

At tilnærme en funktion med et førstegradspolynomium er den simpleste tilnærmelse, man kan lave. Vi skal senere se på såkaldte *taylorudviklinger*, hvor man kan tilnærme grafer med polynomier af højere grad (2., 3., 4., …).

Eksempel 18: Maple anvender den rigtige notation, og vi kan derfor ved at indtaste højresiden i Definition 11 se to konkrete eksempler på tangenter:

$f := x \rightarrow e^x + \sin(x)$:

$plot([\underline{f(x)}, \underline{f'(1) \cdot (x-1) + f(1)}, \underline{f'(-4) \cdot (x-(-4)) + f(-4)}])$



Opgaverne 016*

Differentialkvotienten i x_0 - dvs. $f'(x_0)$ - er grænseværdien for differenskvotienten ved grænseovergangen $\Delta x \rightarrow 0$, dvs. den er et tal, og dette tal angiver en tangenthældning.

Men vi kan også betragte $f'(x_0)$ som funktionsværdien for funktionen f' i x_0. Dvs. vi indfører en funktion f', der i hvert x_0 har en funktionsværdi, der angiver hældningen for den tangent til grafen for *f*, der rører i $(x_0, f(x_0))$. Dette kaldes *den afledede funktion af f* eller *differentialkvotienten af f*.

Og hermed er de centrale begreber i forbindelse med differentialregning kommet på plads:

For den differentiable funktion *f* har man

Differentialkvotienten i x_0:

- Er et tal, der angiver væksthastigheden for *f* i punktet $(x_0, f(x_0))$.
- Svarer grafisk til hældningen for tangenten til grafen for *f* i punktet $(x_0, f(x_0))$.
- Kan skrives $f'(x_0)$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ eller $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$.

Den afledede funktion af *f* (eller ”Differentialkvotienten af *f*”):

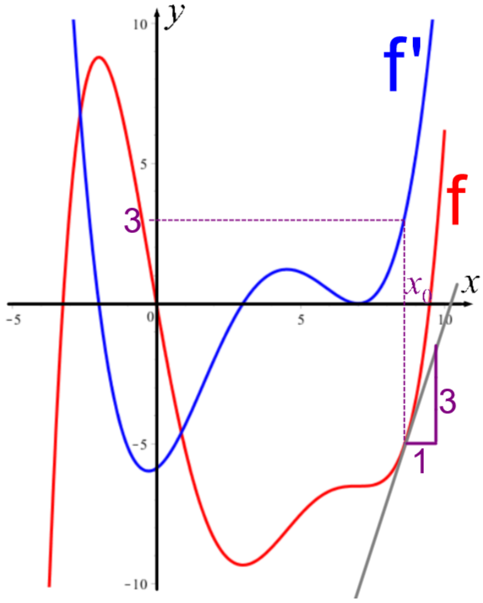
- Er en funktion *f ′*, hvor funktionsværdierne for hvert x_0 er $f'(x_0)$.
- Funktionsudtrykket skrives $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$ eller $\frac{df(x)}{dx}$.

Når man bestemmer den afledede funktion af *f*, siger man, at man *differentierer f* (evt. ”med hensyn til *x*”).

Den afledede funktion og *differentialkvotienten* er altså synonymer, men vi bruger typisk sidstnævnte, når vi snakker om værdien i et bestemt punkt, f.eks. ”Differentialkvotienten i 4”.

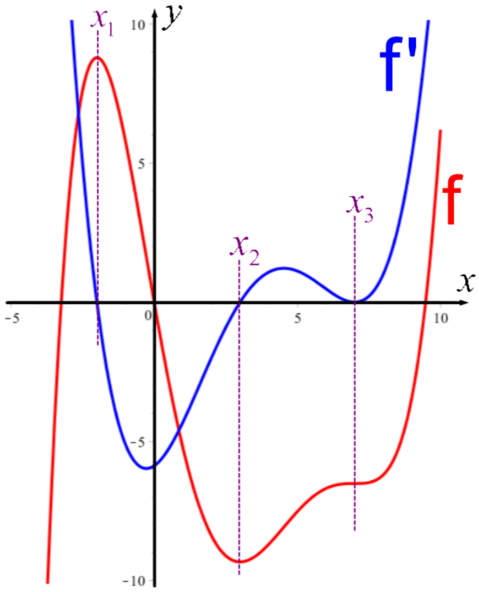
Symbolet $\frac{dy}{dx}$ anvendes sommetider også om *differentialkvotienten i* x_0 .

Da den afledede funktion af *f* i sig selv er en funktion, kan man tegne en graf for den. Og hvis man i samme koordinatsystem indtegner både *f* og *f ′*, kan man få en god forståelse for *f ′*:



Den blå kurve er grafen for *f ′*, mens den røde kurve er grafen for *f*. Husk, at funktionsværdien for den afledede funktion svarer til hældningen for tangenten til grafen for *f*. Dette er vist et enkelt sted, nemlig i x_0. Den grå rette linje er tangenten i $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$, og som angivet har den hældningen 3. Derfor er $f'\left(x_0\right) = 3$, hvilket er angivet på *y*-aksen.

Gennemgå figuren nøje ved løbende at vurdere tangenthældninger for tangenter til den røde graf og tjekke, at det passer med funktionsværdierne til den blå graf.



Her ses samme grafer som før.

Bemærk stederne x_1, x_2 og x_3. Det er de tre typer af steder, hvor der er vandrette tangenter til en graf.

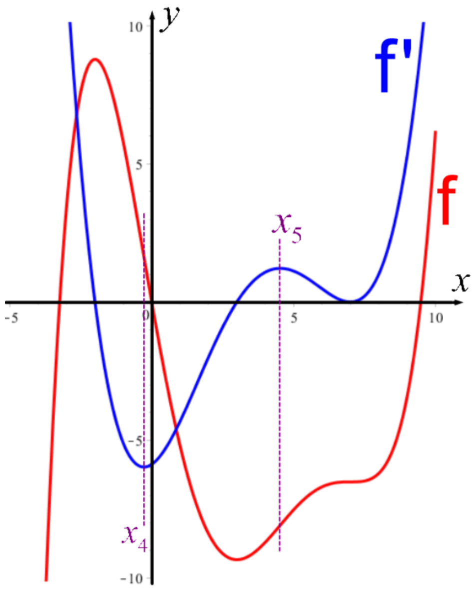
Kig på den røde graf. x_1 er et lokalt maksimumssted, x_2 er et lokalt minimumssted, og i x_3 er der en såkaldt *vandret vendetangent*.

Bemærk, at vi på den blå graf kan genkende disse steder som rødder, dvs. skæringer med *x*-aksen.

Kig også på graferne og se, om du kan finde ud af, hvordan du på den blå graf kan skelne de tre forskellige steder fra hinanden.

I $\left[x_1, x_2\right]$ er *f* aftagende. Det ses på den blå graf ved, at grafen i dette interval ligger under eller på *x*-aksen.

I $\left]-\infty, x_1\right]$ og $\left[x_2, \infty\right[$ er *f* voksende. Her ligger den blå graf over eller på *x*-aksen.



Igen ses samme grafer som før.

x_4 er et lokalt minimumssted **for den afledede funktion**. Dvs. her har vi lokalt den mindste væksthastighed. Dvs. i intervallet, hvor *f* er aftagende, er dette det stejleste sted – stedet med den laveste væksthastighed (dvs. numerisk største).

x_5 er et lokalt maksimumssted for den afledede funktion. Dvs. her er den lokalt højeste væksthastighed for *f* (det er det stejleste sted på den lille stigning efter det lokale minimumssted.)

Opgaverne 017*

Vi har lige set, hvordan graferne for *f* og *f ′* hænger sammen. Lad os nu se, hvordan man kan bestemme funktionsforskriften for den afledede funktion af en given funktion *f*. Bemærk, hvordan fremgangsmåden kommer til at minde meget om Eksempel 16 (fortsat), hvor vi bestemte differentialkvotienten i 2. Når vi skal bestemme en forskrift for den afledede funktion af *f*, skal vi bare arbejde generelt med x_0 i stedet for at se på en konkret værdi.

Eksempel 19: Vi vil undersøge, om funktionen $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ er differentiabel og i så fald bestemme en forskrift for den afledede funktion af *f*.

Vi anvender den såkaldte *tretrinsregel*, der blot er en formalisering af den fremgangsmåde, vi allerede har anvendt:

1. trin: Opstil et udtryk for differenskvotienten for x_0.
2. trin: Reducér udtrykket, så det bliver muligt at anvende regnereglerne for grænseværdier (hvilket ofte vil sige, at man undgår udtryk med grænseværdien 0 for $\Delta x \to 0$ i nævneren på brøker).
3. trin: Undersøg, om det reducerede udtryk har en grænseværdi ved grænseovergangen $\Delta x \to 0$. I så fald er dette et udtryk for differentialkvotienten.

1. trin: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{(x_0+\Delta x) - x_0} = \frac{\frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0}}{\Delta x}$

2. trin: Vi bemærker, at vi ikke kan anvende regnereglerne for grænseværdierne for $\Delta x \to 0$ i dette udtryk, fordi vi har Δx (med grænseværdien 0) i nævneren. Dette vil altid være tilfældet fra start. Vi reducerer udtrykket ved at sætte de to brøker i tælleren på fælles brøkstreg (dvs. vi forlænger først hver brøk med den anden brøks nævner for at få en fællesnævner):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{x_0}{x_0\cdot(x_0+\Delta x)} - \frac{x_0+\Delta x}{x_0\cdot(x_0+\Delta x)}}{\Delta x} = \frac{x_0-(x_0+\Delta x)}{x_0\cdot(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x_0\cdot(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x} = \frac{-1}{x_0\cdot(x_0+\Delta x)}$$

3. trin: Vi kan nu se på grænseværdierne ved grænseovergangen $\Delta x \to 0$:

$$-1 \to -1 \text{ for } \Delta x \to 0$$
$$x_0 \to x_0 \text{ for } \Delta x \to 0$$
$$\Delta x \to 0 \text{ for } \Delta x \to 0$$

Og vores regneregler for grænseværdier fortæller os derfor, at:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{-1}{x_0\cdot(x_0-0)} = -\frac{1}{x_0^2} \quad \text{for } \Delta x \to 0$$

Dvs. differenskvotienten i x_0 **har** en grænseværdi for $\Delta x \to 0$, og **dermed** er *f* differentiabel i x_0 med differentialkvotienten $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x_0^2}$

Da vores udregninger gælder for alle x_0 i $Dm(f)$, har vi dermed også fundet et funktionsudtryk for den afledede funktion af *f*, nemlig:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Vi har altså nu bestemt vores første afledede funktion. Vi kan tjekke resultatet med Maple:

$$f := x \to \frac{1}{x}:$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Lad os nu se på et tilsvarende eksempel med en ekstra pointe:

Eksempel 20: Vi vil undersøge, om funktionen $f: x \mapsto \sqrt{x}$ er differentiabel og i så fald bestemme en forskrift for den afledede funktion af *f*.

1. trin: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{(x_0+\Delta x) - x_0} = \frac{\sqrt{x_0+\Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x}$

2. trin: Dette er ikke noget nemt udtryk at reducere (faktisk kan man ikke få noget pænt ud af det), men det væsentlige er at komme af med Δx i nævneren, og det kan man, hvis man forlænger brøken med et udtryk, der gør det muligt at anvende den tredje kvadratsætning i tælleren (den tredje kvadratsætning udmærker sig ved ikke at have noget dobbelt produkt, men kun indeholde kvadrater, og på den måde kan man komme af med rødderne i tælleren):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\left(\sqrt{x_0+\Delta x} - \sqrt{x_0}\right)\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x} + \sqrt{x_0}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{\sqrt{x_0+\Delta x}^2 - \sqrt{x_0}^2}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{(x_0+\Delta x) - x_0}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x} + \sqrt{x_0}\right)} =$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x} + \sqrt{x_0}}$$

3. trin: Vi ser nu på grænseovergangen $\Delta x \to 0$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{1}{\sqrt{x_0+0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x_0}} \quad \text{for } \Delta x \to 0$$

Dette viser, at hvis $x_0 \neq 0$, har differenskvotienten en grænseværdi for $\Delta x \to 0$, og dermed er *f* differentiabel i alle x_0 bortset fra 0, og differentialkvotienten er $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x_0}}$.

Men hvad med $x_0 = 0$?

f er defineret i 0 $\left(\sqrt{0} = 0\right)$, men som vi kan se, har differenskvotienten i 0 **ikke** en grænseværdi for $\Delta x \to 0$, og dermed er *f* **ikke** differentiabel i 0, og dermed er *f* ikke differentiabel.

MEN!

Vi kan i stedet se på $f: x \mapsto \sqrt{x}$, hvor vi selv indskrænker definitionsmængden til $\mathbb{R}_+$ (dvs. vi fjerner 0 fra den "naturlige" definitionsmængde).

Og denne funktion er differentiabel med den afledede funktion $f': x \mapsto \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$

Når vi siger, at den afledede funktion af kvadratrodsfunktionen er $\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$, så er det altså underforstået, at vi har fjernet det ene punkt, hvor funktionen ikke er differentiabel.

Opgaverne 018*

Vi har nu set et eksempel på et sted, hvor en funktion ikke er differentiabel, fordi differenskvotienten ikke har en grænseværdi for $\Delta x \to 0$ (fordi vi ikke må have 0 i nævneren i en brøk). Dette sted var et intervalendepunkt.

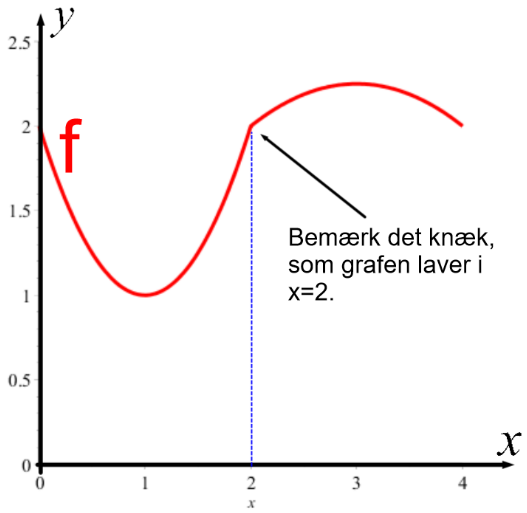
Lad os nu se på, hvad der skal til, for at en funktion ikke er differentiabel i et punkt i det indre af dens definitionsmængde.

Eksempel 21: Vi ser på gaffelforskriftfunktionen $f := x \mapsto \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & \text{hvis} \quad x < 2 \\ -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x & \text{hvis} \quad x \geq 2 \end{cases}$

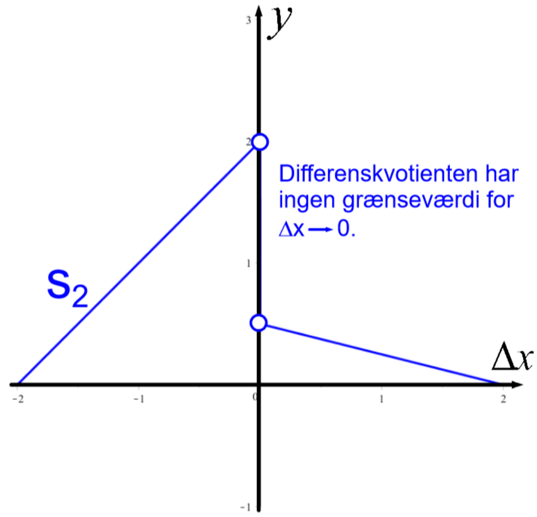
Vi ønsker at afgøre, om funktionen er differentiabel i 2.

På figuren nedenfor til venstre ses grafen for *f*, og man kan her se, hvorfor det netop er $x_0 = 2$, vi er interesserede i at undersøge.

GRAFEN FOR FUNKTIONEN *f*



GRAFEN FOR DIFFERENSKVOTIENTEN i 2



Vores funktionsforskrift giver os, at $f(2) = -\frac{1}{4}\cdot 2^2 + \frac{3}{2}\cdot 2 = -\frac{1}{4}\cdot 4 + 3 = -1 + 3 = 2$, så vores differenskvotient bliver (bemærk, at vi er nødt til at tage hensyn til fortegnet for Δx):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \begin{cases} \dfrac{(2+\Delta x)^2 - 2\cdot(2+\Delta x) + 2 - 2}{\Delta x} & \text{for} \quad \Delta x < 0 \\[2ex] \dfrac{-\frac{1}{4}\cdot(2+\Delta x)^2 + \frac{3}{2}\cdot(2+\Delta x) - 2}{\Delta x} & \text{for} \quad \Delta x > 0 \end{cases}$$

Begge udtryk kan reduceres (regn selv!), så man får: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} 2 + \Delta x & \text{for} \quad \Delta x < 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot\Delta x & \text{for} \quad \Delta x > 0 \end{cases}$

Hermed kan grafen for differenskvotienten som funktion af Δx tegnes (se figuren til højre ovenfor). Husk, at differenskvotienten ikke er defineret i 0.

Som det ses på grafen eller i udtrykket for differenskvotienten, har differenskvotienten **ikke** nogen grænseværdi for $\Delta x \to 0$, fordi $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{1}{2}$ for $\Delta x \to 0_+$ og $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 2$ for $\Delta x \to 0_-$, dvs. man får forskellige værdier afhængigt af, om man kommer fra højre eller venstre.

Hvis der er et knæk på grafen for *f*, er *f* ikke differentiabel i dette punkt.

Vi er hermed kommet frem til den løse beskrivelse af, hvornår en funktion er differentiabel i et punkt. Vi samler dette sammen med den løse beskrivelse af kontinuitet.

Løse formuleringer (dvs. du kan IKKE bruge dem matematisk, men kun som billeder)
En funktion er kontinuert, når grafen er sammenhængende.
En funktion er differentiabel, når grafen er glat (dvs. uden knæk).

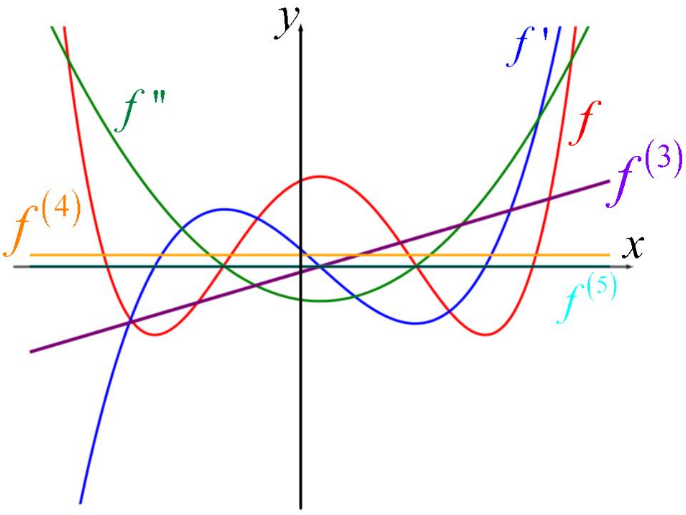
Højere ordens afledede

Da den afledede funktion af en funktion *f* i sig selv jo er en funktion, må man også – hvis den er differentiabel – kunne finde den afledede funktion af den afledede funktion til *f*. Og således kan man fortsætte. Disse funktioner kaldes *den anden afledede af f, den tredje afledede af f, …*
De angives ved at sætte ekstra mærker, eller – hvis man kommer op på mange mærker (1, 2, 3, mange) – ved at angive antallet af afledninger i en parentes. Der er ikke nogen fast regel for, hvornår man stopper med at sætte ekstra mærker, men f.eks. er $f''''''''''''''''''''''''(x)$ jo ikke nemt at læse:

Lad *f* være en funktion, der er differentiabel *n* gange. Der eksisterer så:

Den afledede funktion af *f* :	$f'(x)$ eller $\frac{dy}{dx}$
Den anden afledede (funktion af *f*):	$f''(x)$ eller $\frac{d^2y}{dx^2}$
Den tredje afledede (funktion af *f*):	$f'''(x)$ eller $f^{(3)}(x)$ eller $\frac{d^3y}{dx^3}$
Den fjerde afledede (funktion af *f*):	$f^{(4)}(x)$ eller $\frac{d^4y}{dx^4}$
Den n'te afledede (funktion af *f*):	$f^{(n)}(x)$ eller $\frac{d^ny}{dx^n}$

På nedenstående figur er tegnet graferne for *f* og de første fem afledede funktioner af *f* (den femte afledede er "gemt" oven på *x*-aksen).



Tag graferne to og to og tjek, at du kan se, hvordan f' er den aflede af *f*, hvordan f'' er den afledede af f', osv.

Disse højere ordens afledede kommer vi til at beskæftige os meget med, specielt i forbindelse med optimering og taylorpolynomier. Men også allerede i næste kapitel …

DIFFERENTIALLIGNINGER

Vi har allerede set eksempler på numerisk løsning af nogle differentialligninger, men vi har hidtil ikke været i stand til at definere, hvad en differentialligning egentlig er for en størrelse. Men det er vi nu, hvor vi har lært om afledede funktioner af højere orden.

Definition 12: En *differentialligning* er en ligning $g\left(x, f\left(x\right), f'\left(x\right), f''\left(x\right), \ldots, f^{(n)}\left(x\right)\right) = 0$, der indeholder mindst én afledt funktion af *f*.

Ordenen for den højest afledede funktion af *f*, der forekommer i ligningen, angiver differentialligningens *orden*.

En *løsning* til differentialligningen er en funktion, der er **defineret i et interval**, og som indsat **gør ligningen til en identitet**.

Mængden bestående af samtlige løsninger til differentialligningen kaldes *den fuldstændige løsning*, mens løsningerne hver især kaldes *partikulære løsninger*.

Grafen for en løsning til differentialligningen kaldes for en *løsningskurve* eller en *integralkurve*.

Hvis funktionen $f : x \mapsto 0$ er en løsning til differentialligningen, kaldes det for *den trivielle løsning*.

Definition 12 er meget abstrakt og giver ikke den store fornemmelse for, hvad differentialligninger er, men det kommer løbende, når vi får behandlet dem fra forskellige synsvinkler og endelig ender med at lære at løse nogle af dem.

Vi begynder med at se på, hvad der menes med $g\left(x, f\left(x\right), f'\left(x\right), f''\left(x\right), \ldots, f^{(n)}\left(x\right)\right) = 0$.

Her siges blot, at der skal være et eller andet matematisk udtryk indeholdende nogle af størrelserne i parentesen, der så sættes lig 0. Her ses nogle eksempler med forskellige symboler, funktionsnavne og argumenter:

$x \cdot f\left(x\right) + \sqrt{f'\left(x\right)} = 0$	En 1. ordens differentialligning af funktionen $f\left(x\right)$
$\frac{d^2y}{dx^2} + 2 \cdot \frac{dy}{dx} - 5y \cdot x = 0$	En 2. ordens differentialligning af funktionen $y = f\left(x\right)$
$\frac{f'\left(t\right)}{f\left(t\right)} + t^2 = 0$	En 1. ordens differentialligning af funktionen $f\left(t\right)$
$\frac{d^3N\left(t\right)}{dt^3} - N\left(t\right) \cdot f\left(t\right) - g\left(t\right) = 0$	En 3. ordens differentialligning af funktionen $N\left(t\right)$

Bemærk i den sidste af differentialligningerne, at vi både har $N\left(t\right)$, $f\left(t\right)$ og $g\left(t\right)$, så hvilken af disse funktioner er det, man søger en forskrift for? Her skal man kigge på den afledede funktion. Det er $N\left(t\right)$, der optræder på afledt form i differentialligningen, og derfor er det $N\left(t\right)$, man søger en forskrift for. $f\left(t\right)$ og $g\left(t\right)$ fungerer bare som udtryk med den uafhængige variabel *t*.

Vi tidligere er stødt på differentialligninger, der ikke sluttede på $"=0"$, men pointen er, at man altid kan omskrive dem til den form, f.eks.:

$-\frac{dN}{dt} = k \cdot N$ kan omskrives til $-\frac{dN}{dt} - k \cdot N = 0$ og $\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m} \cdot v\left(t\right)^2$ til $\frac{dv}{dt} - g + \frac{k}{m} \cdot v\left(t\right)^2 = 0$

Vi vil normalt ikke omskrive til formen $"=0"$, da det er uvæsentligt for det videre arbejde.

Da vi på nuværende tidspunkt kender den afledede funktion af nogle enkelte funktioner $\left(\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ og } \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \right)$, kan vi konstruere nogle differentialligninger, som vi kan angive løsninger til. Bemærk, at vi endnu ikke går i gang med at løse differentialligningerne. Vi ser blot på, hvad en løsning er for noget.

Eksempel 22: Vi ser på differentialligningen $x \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2} \cdot y = 0$.

(I dette tilfælde er altså $g:(x, y, y') \mapsto x \cdot y' - \frac{1}{2} \cdot y$)

Vi ønsker at undersøge, om $f: x \mapsto \sqrt{x}$ er en løsning til differentialligningen.
Vi skal altså se, om vi får en identitet, når vi indsætter *f*.

Vi har tre symboler i vores differentialligning: x, y og $\frac{dy}{dx}$.

x er vores uafhængige variabel.

y er vores funktion, dvs. på y's plads skal $f(x)$, dvs. $\sqrt{x}$, indsættes.

$\frac{dy}{dx}$ er den afledede funktion, så her skal $f'(x)$, dvs. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, indsættes.

Vi indsætter disse udtryk i differentialligningen og får:

$$x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{\sqrt{x}}{2} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Da vi får en identitet, er *f* en løsning til differentialligningen.
Husk, at 0 skal fjernes fra definitionsmængden, da *f* ikke er differentiabel i 0.

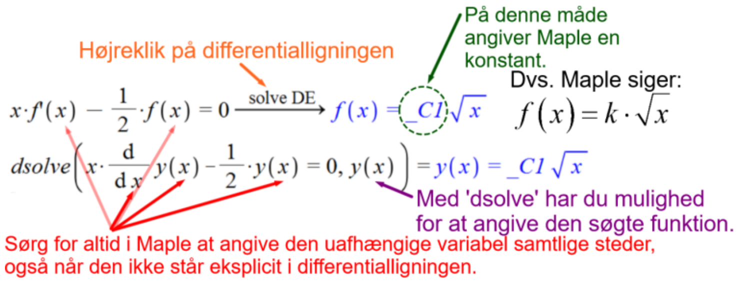
Vi undersøger nu, om $h: x \mapsto \frac{1}{x}$ også er en løsning til differentialligningen.

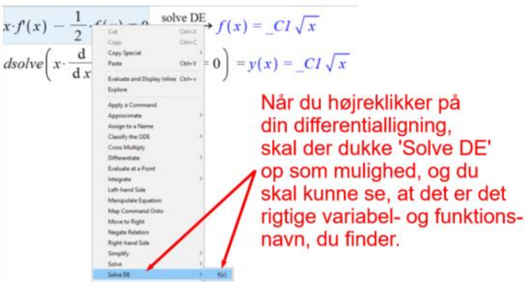
Vi indsætter på samme måde som før i differentialligningen:

$$x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{x^2} - \frac{1}{2x} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x} = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2x} = 0$$

Vi har **ikke** fået en identitet, og derfor er *h* **ikke** en løsning til differentialligningen.

Vi kan lade Maple bestemme den fuldstændige løsning til differentialligningen. Dette kan enten gøres ved at højreklikke på differentialligningen eller skrive *dsolve* foran den:





Maple fortæller os altså, at den fuldstændige løsning til differentialligningen er $f(x) = k \cdot \sqrt{x}$.

Dette stemmer med, at vi opdagede, at $f: x \mapsto \sqrt{x}$ er en løsning (svarer til $k = 1$), mens $h: x \mapsto \frac{1}{x}$ ikke er.

Opgaverne 020*

Eksempel 22 drejer sig om forskrifter for løsninger til differentialligninger. Men differentialligninger kan faktisk også give os andre informationer om løsningerne end selve forskrifterne. For se igen på differentialligningen fra Eksempel 22:

$$x \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2} \cdot y = 0$$

Vi antager nu, at *y* angiver mængden af vand i en beholder målt i liter, mens *x* angiver tiden målt i sekunder. Da $\frac{dy}{dx}$ angiver væksthastigheden, vil det i dette tilfælde betyde hastigheden, hvormed mængden af vand i beholderen ændres (målt i liter pr. sekund).

Og pointen er nu, at hvis en funktion skal være en løsning til differentialligningen, så skal den matematiske sammenhæng, der udtrykkes i differentialligningen, gælde til enhver tid og med en hvilken som helst mængde vand. Dvs. at hvis der f.eks. efter 10 sekunder er 6 liter vand i beholderen, så kan vi beregne væksthastigheden til dette tidspunkt ud fra differentialligningen:

$$10 \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2} \cdot 6 = 0 \Leftrightarrow 10 \cdot \frac{dy}{dx} = 3 \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{10}$$

Dvs. differentialligningen fortæller os, at hvis der efter 10 sekunder er 6 liter vand i beholderen, så vil vandmængden på dette tidspunkt vokse med 0,3 liter pr. sekund.

Og bemærk, at vi ikke på noget tidspunkt kommer omkring forskrifter for løsninger.

Da væksthastigheden svarer til hældningen for tangenten i et punkt, kan man også bestemme tangentligninger ud fra 1. ordens differentialligninger:

Eksempel 23: Vi ser på differentialligningen $x \cdot y' + \frac{y}{x} = 10$.

Det oplyses, at *f* er en løsning til differentialligningen, og at punktet $P(3,12)$ ligger på grafen for *f*.

Vi ønsker at bestemme en ligning for tangenten til grafen for *f* i *P*.

Vi kender allerede røringspunktets koordinater, så vi mangler kun tangentens hældning, og den kan bestemmes ved at indsætte i differentialligningen, **fordi det er oplyst, at *f* er en løsning til differentialligningen.**

$$3 \cdot y' + \frac{12}{3} = 10 \Leftrightarrow \ 3 \cdot y' + 4 = 10 \Leftrightarrow \ y' = 2$$

Dvs. tangenthældningen er 2, og vi kan nu bestemme tangentligningen:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$y - 12 = 2 \cdot (x - 3) \Leftrightarrow \ \underline{\underline{y = 2x + 6}}$$

Opgaverne 021*

Vi har altså set, hvordan vi med førsteordens differentialligninger kan bestemme tangentligningen i forskellige punkter, uden at vi kender funktionsforskriften. Vi ved også, at tangenter er den bedste lineære tilnærmelse til grafen i små omegne om røringsstedet. Dette kan vi udnytte til at skitsere, hvordan løsningskurverne vil se ud.

Det er selvfølgelig kun noget, der er relevant, hvis vi ikke er i stand til at bestemme den fuldstændige løsning, for hvis kan finde forskrifter for løsningerne, kan vi jo bare tegne graferne. Men for at illustrere pointen ses her på situationer, hvor vi godt kan bestemme forskrifter, da vi på den måde kan sammenligne skitserne med de rigtige grafer.

Vi indfører et nyt begreb, der er en slags udvidelse af punkter, fordi vi nu også inddrager væksthastigheden i det pågældende punkt.

Definition 13: Lad funktionen *f* være differentiabel i x_0 .

Man siger så, at *f* indeholder *linjeelementet* $\left(x_0\,,\,f\left(x_0\right);\,f\,'\left(x_0\right)\right)$.

Opgaverne 022*

Egentlig er et linjeelement som sagt blot et udvidet punkt, f.eks. $\left(-3,6;2\right)$, men grafisk kan man illustrere et linjeelement ved i det pågældende punkt at tegne et lille linjestykke med den angivne hældning. Man kan sige, at man tegner et lille stykke af tangenten til grafen for funktionen i det pågældende punkt. Og hvis man gør det i tilpas mange punkter, får man en skitse af, hvordan løsningskurverne til en given differentialligning ser ud:

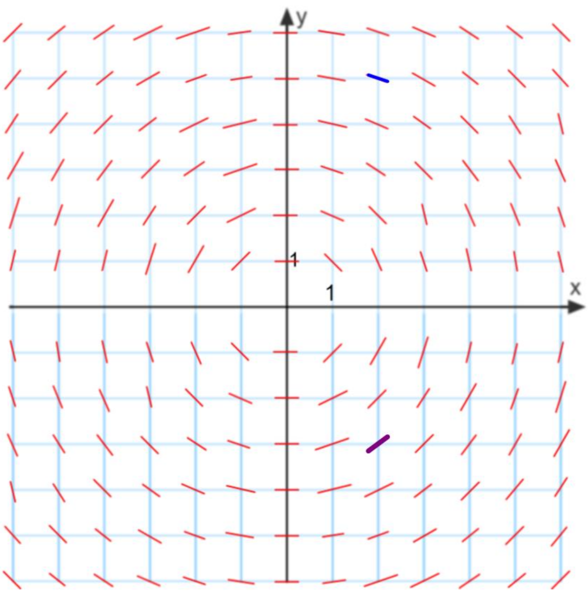
Eksempel 24a: Vi ser på differentialligningen $y'=-\dfrac{x}{y}$.

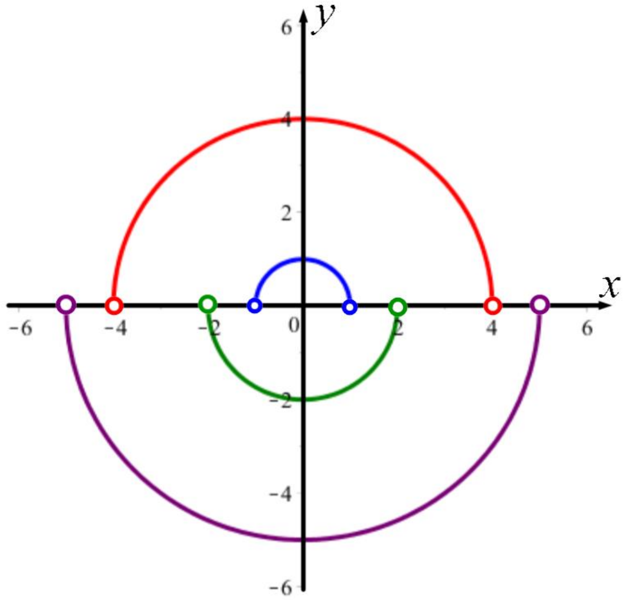
Vi kan for hvert punkt bestemme tangenthældningen og dermed få et linjeelement. Hvis vi f.eks. ser på punktet $\left(2,5\right)$, giver differentialligningen os $y'=-\dfrac{2}{5}$, dvs. den løsning, hvis graf går gennem $\left(2,5\right)$, indeholder linjeelementet $\left(2,5;-\dfrac{2}{5}\right)$. Angivet med det lille, blå linjestykke på figuren nedenfor til venstre.

En anden løsning, hvis graf går gennem punktet $\left(2,-3\right)$, indeholder linjeelementet $\left(2,-3;\dfrac{2}{3}\right)$. Angivet med det lille, violette linjestykke.

Husk på, at der som udgangspunkt er uendelig mange løsninger til en differentialligning, og de linjeelementer, vi bestemmer, kan altså høre til en masse forskellige løsninger.

På figuren til venstre nedenfor ses et *hældningsfelt*, hvor der er indtegnet en masse linjeelementer, der er bestemt ved hjælp af differentialligningen som vist ovenfor:





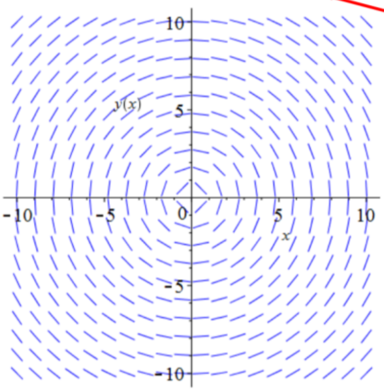
Ved at kigge på hældningsfeltet kan man muligvis se, at løsningerne til differentialligningen må være halvcirkler (det kan ikke være hele cirkler, da de ikke kan angives ved en funktionsforskrift). Med Maple kan differentialligningen løses (prøv selv!), og hvis man tegner graferne for nogle af løsningerne (se figuren til højre), kan man se, at det rigtignok er halvcirkler.

Eksempel 24b: Indtegning af hældningsfelt med Gym-pakken i Maple

Med Gym-pakkens kommandoer *linjeelementer* og *hældningsfelt* (der fungerer ens) kan man tegne hældningsfelter med eller uden løsningskurver for partikulære løsninger.

Vi ser igen på differentialligningen $y' = -\dfrac{x}{y}$:

$$linjeelementer\left(y' = -\frac{x}{y},\ y(x),\ x = -10..10,\ y = -10..10,\ color = blue\right)$$



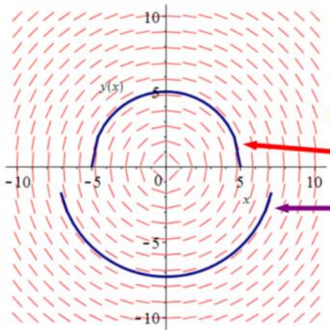
Angiv differentialligningen og angiv, hvad der er funktionsværdi og uafhængig variabel.

Angiv det vindue, hvor hældningsfeltet skal tegnes.

Hvis man også i hældningsfeltet vil vise en løsningskurve for en partikulær løsning, skal man i en firkantet parentes angive et punkt på kurven:

$$linjeelementer\left(y' = -\frac{x}{y},\ y(x),\ x = -10..10,\ y = -10..10,\ color = red,\ [y(7) = -2,\ y(3) = 4]\right)$$

```
Warning, plot may be incomplete, the following errors(s) were issued:
   cannot evaluate the solution further right of 7.2801099, probably a singularity
   cannot evaluate the solution further left of -7.2801106, probably a singularity
Warning, plot may be incomplete, the following errors(s) were issued:
   cannot evaluate the solution further right of 5.0000002, probably a singularity
   cannot evaluate the solution further left of -5.0000004, probably a singularity
```

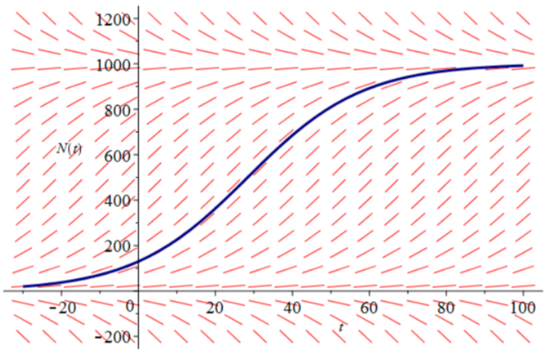


Maple advarer om, at der ikke har kunnet foretages udregninger ude i enderne af kurverne. Det skyldes, at tangenterne kommer tæt på lodret her.

Her angives det punkt, der skal ligge på grafen.

Eksempel 24c: Vi ser på et eksempel, hvor vi arbejder med N og t i stedet for x og y:

$$linjeelementer(N'(t) = 0.000067 \cdot N(t) \cdot (1000 - N(t)),\ N(t),\ t = -30..100,\ N = -200..1200,\ color = red,\ [N(0) = 130])$$



Denne gang kender man startværdien (dvs. værdien, når t=0)

Hældningsfelt for differentialligning med logistisk vækst. Man kan se på hældningsfeltet, at kurven bliver tæt på vandret, når funktionsværdierne kommer tæt på 1000.

Opgaverne 023*

Ofte er man ikke interesseret i den fuldstændige løsning til en differentialligning, men ønsker at finde en partikulær løsning, der opfylder en eller flere betingelser. Det kunne f.eks. være, at man fik oplyst et punkt, som løsningskurven skulle gå igennem.

Eksempel 25: Vi ønsker at bestemme den løsning til differentialligningen $y' = x + y$, hvis graf går gennem punktet $(0,4)$.

Metode 1: Vi anvender Maple til at bestemme den fuldstændige løsning:

$$y' = x + y \xrightarrow{\text{solve DE}} y(x) = -x - 1 + e^{x}\_C1$$

Dvs. Maple fortæller os, at samtlige løsninger er på formen $f_k(x) = -x - 1 + k \cdot e^x$.

Vi kan bestemme værdien af *k* for vores partikulære løsning ved at udnytte, at grafen skal gå gennem $(0,4)$:

$$4 = -0 - 1 + k \cdot e^0 \Leftrightarrow 4 = -1 + k \Leftrightarrow k = 5$$

Dvs. at vores søgte partikulære løsning er: $\underline{\underline{f(x) = -x - 1 + 5 \cdot e^x}}$

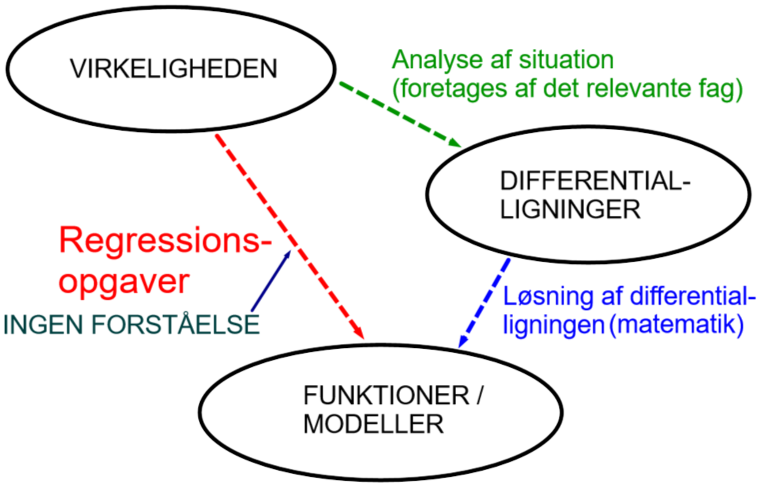
Metode 2: Vi kan lade Maple bestemme den partikulære løsning ved at indskrive betingelsen i vores ligningssystem:

$$[y' = x + y, y(0) = 4] \xrightarrow{\text{solve DE}} y(x) = -x - 1 + 5\,e^{x}$$

Her angives det, at grafen skal gå gennem punktet (0,4)

Opgaverne 024*

Vores Definition 12 giver ikke det store indblik i differentialligningers placering inden for videnskab. På det punkt er eksemplerne med radioaktivitet og frit fald fra indledningen væsentligt bedre. Pointen er nemlig, at differentialligninger fremkommer ud fra virkelige situationer og fører til modeller, der beskriver disse situationer.



Differentialligninger er det teoretiske bindeled mellem modeller og virkeligheden.
Det er i differentialligningerne, at forståelsen ligger.

Vi ser på figuren ovenfor: Hvis man har indsamlet data fra virkeligheden, kan man anvende regression og komme frem til funktionsforskrifter, der fungerer som modeller over virkeligheden. Men selve regressionen er blot nogle matematiske udregninger, der giver den bedst mulige forskrift af den søgte type. Det er i valget af regressionstype (lineær, eksponentiel, potens, …), at der ligger noget forståelse. For dette valg forudsætter – eller burde forudsætte – at man har en formodning om, hvordan modellen ser ud. Og denne formodning kommer oftest fra differentialligninger.

For når man står med en situation fra virkeligheden, kan man ofte med større eller mindre sikkerhed analysere sig frem til en matematisk sammenhæng mellem forskellige begreber, hvoraf nogle omhandler ændringer (væksthastigheder eller accelerationer). På den måde opstår differentialligninger. Det er inden for de enkelte fag (fysik, kemi, biologi, økonomi, …), at denne analyse foregår.

Når differentialligningen er konstrueret, forsøger man så om muligt at løse den under givne betingelser. Det er her, at matematikken kommer ind, og vi har allerede anvendt Maple til den del. Vi skal senere i dette forløb lære, hvordan man rent matematisk – dvs. uden brug af Maple - kan løse nogle differentialligninger.

Men som det sidste i denne omgang skal vi se på den sproglige del af virkelighedsanalysen, dvs. vi skal ikke foretage nogen analyse af en virkelig situation, men i stedet prøve at omsætte sproglige formuleringer til differentialligninger.

Eksempel 26: Vi har analyseret os frem til, at i et frit fald vil den hastighed, hvormed farten *v* ændrer sig, svare til differensen af tyngdeaccelerationen *g* og produktet af en konstant *k* og kvadratet på farten.
Opskriv differentialligningen, når *t* anvendes som symbol for tiden.

Det gælder her om at lægge mærke til de matematiske begreber, der her er: Hastighed, differens, produkt og kvadrat.

- Den hastighed, hvormed farten *v* ændrer sig, angives $v', v'(t)$ eller $\frac{dv}{dt}$.
- Kvadratet på farten angives v^2 eller $v(t)^2$.
- Produktet betyder, at to størrelser skal multipliceres, dvs. $k \cdot v(t)^2$
- Differens betyder, at to størrelser skal trækkes fra hinanden, og der står, at *g* skal stå først, så det bliver $g - k \cdot v(t)^2$

Og hermed bliver differentialligningen: $v'(t) = g - k \cdot v(t)^2$

Eksempel 27: Væksthastigheden for en population *N* er proportional med produktet af populationens størrelse og differensen af 2500 og populationens størrelse. Proportionalitetsfaktoren er 0,0024. Opskriv den differentialligning, der beskriver populationens udvikling.

- Væksthastigheden for populationen er $\frac{dN}{dt}$
- Differensen af 2500 og populationens størrelse er $2500 - N$
- Den angivne produkt er dermed $N \cdot (2500 - N)$

Da væksthastigheden skal være proportional med det angivne produkt, har man:

$$\frac{dN}{dt} = k \cdot N \cdot (2500 - N) \quad \text{dvs.} \quad \frac{dN}{dt} = 0{,}0024 \cdot N \cdot (2500 - N)$$

Opgaverne 025*

Vi vender tilbage til løsning af differentialligninger, men nu skal vi se på endnu et centralt begreb:

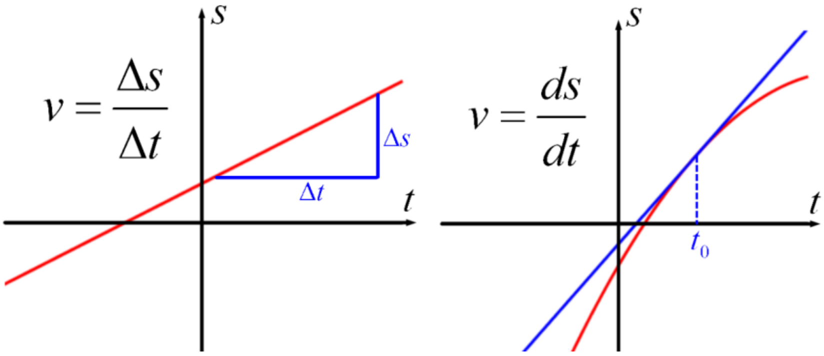
INTEGRABILITET

Vi har set, at differentiation drejer sig om at bestemme væksthastigheder.

Integration drejer sig om at finde arealer.

Væksthastigheder er vigtige, da de beskriver udviklingen af en størrelse. Men hvorfor er arealer vigtige? Lad os se på nogle eksempler:

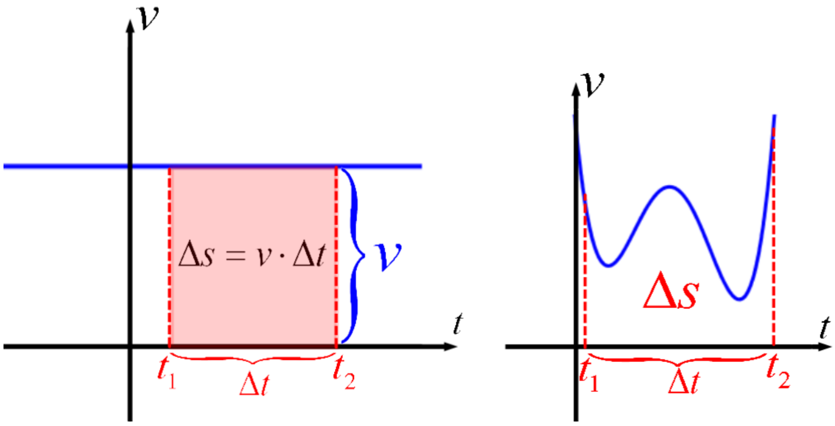
Eksempel 28: Vi ser på to bevægelser, hvor et objekts position *s* er angivet som funktion af tiden *t* (de røde kurver):



På figuren til venstre bevæger objektet sig med konstant hastighed, og vi kan bestemme denne ved $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, hvor vi genkender højresiden som differenskvotienten.

På figuren til højre bevæger objektet sig ikke med konstant hastighed, men vi har nu lært, at vi kan finde hastigheden i et punkt ved at finde differentialkvotienten det pågældende sted, hvilket svarer til tangenthældningen.

Vi ser nu på to andre bevægelser, og denne gang med udgangspunkt i objekternes hastigheder:

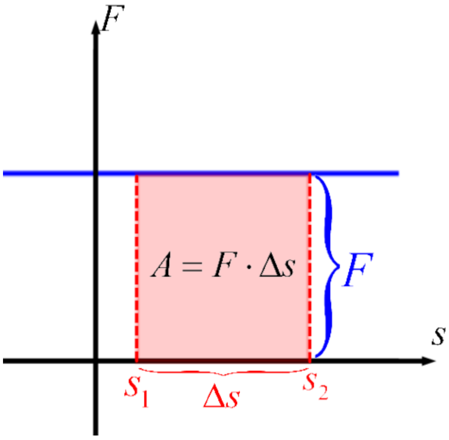


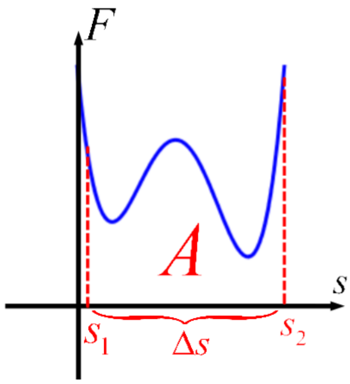
På figuren til venstre er der konstant hastighed, og vi ser, at da formlen $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ kan omskrives til $\Delta s = v \cdot \Delta t$, svarer den tilbagelagte strækning i tidsrummet Δt til arealet af det markerede område under grafen. Bemærk, hvordan vi allerede her kan få en idé om, at det at finde tangenthældninger og arealer er to sider af samme sag, ligesom multiplikation og division er to sider af samme sag (kvotienten $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ er det tal, der multipliceret med Δt, giver Δs).

På figuren til højre varierer hastigheden. Men den tilbagelagte strækning i tidsrummet Δt vil stadig svare til arealet under grafen. Dette kan indses, når vi om lidt i forbindelse med begrebet integrabilitet opdeler grafen i en masse smalle rektangler.

Et andet eksempel, hvor arealet under en graf angiver værdien for en fysisk størrelse, er:

Eksempel 29: Vi ved, at en kraft F's arbejde A er givet ved $A = F \cdot \Delta s$, når kraften er ensrettet med bevægelsesretningen. Vi ser nu på to forskellige situationer med helt unikke kurver:





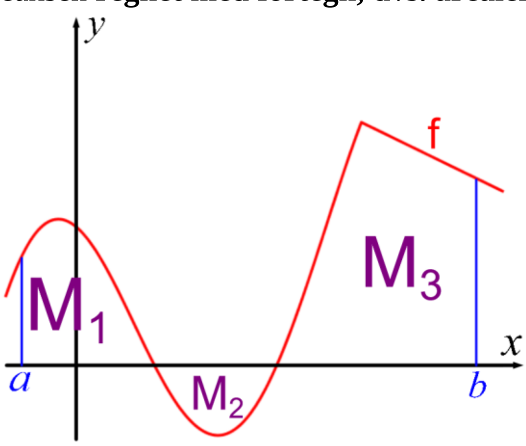
På den venstre figur er kraften konstant, og vi ser, at det udførte arbejde over strækningen Δs svarer til arealet af det markerede område under grafen.

På den højre figur varierer kraften, men igen kan det udførte arbejde findes som arealet under grafen. Hvis grafen for F på et tidspunkt kom under 1. aksen – dvs. hvis kraften blev negativ – ville det svare til en kraft, der var modsat bevægelsesretningen og derfor udførte et negativt arbejde, og vi ser altså, at et areal, der ligger under 1.aksen, skal regnes som negativt.

Eksempel 28 beskæftigede sig med bevægelsen af et objekt. Men indholdet kan bruges om enhver form for væksthastighed. Hvis man kender den hastighed v, hvormed et stof er blevet tilført en blanding, så vil den samlede mængde tilført stof inden for et tidsrum Δt svare til arealet under (t,v)-grafen. Og hvis man kender den hastighed $p'(h)$, hvormed trykket ændrer sig med højden h over jordoverfladen, vil den samlede trykændring under en given opstigning Δh svare til arealet under (h, p') – grafen.

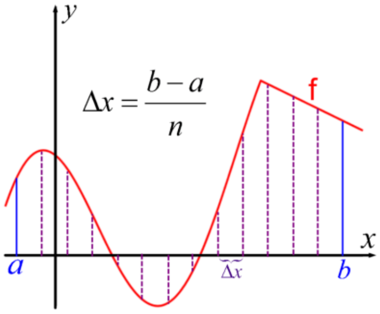
Lad os derfor nu kaste os ud i arealbestemmelse…

Vi ser på grafen for en funktion f, der er kontinuert i intervallet $I = [a,b]$, og vi ønsker at bestemme det samlede areal A af områderne (M_1, M_2 og M_3) i intervallet I mellem grafen for f og førsteaksen **regnet med fortegn, dvs. arealer af områder under førsteaksen regnes negative.**

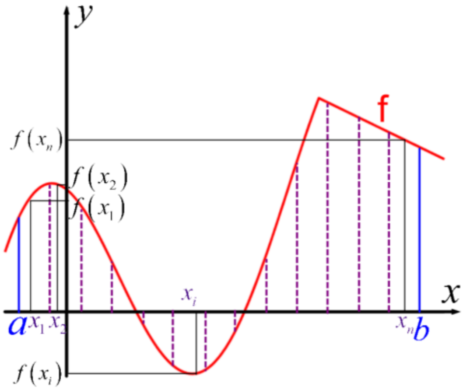


Arealer kan selvfølgelig som sådan ikke i sig selv være negative, men det kan være hensigtsmæssigt at regne dem med fortegn, når de skal fortolkes, hvilket vi var inde på i Eksempel 29.

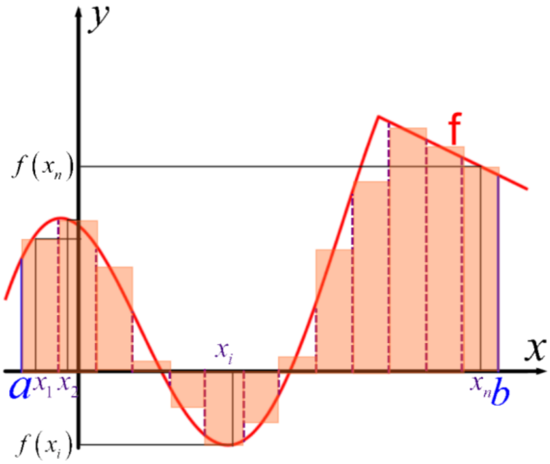
Funktionen f har fået et punkt, hvor den ikke er differentiabel (der er et knæk på grafen). Dette er gjort for at vise, at det netop **ikke** spiller nogen rolle, om den kontinuerte funktion også er differentiabel.



For at bestemme det samlede areal A (regnet med fortegn) opdeler vi intervallet I i n lige store delintervaller, og da bredden af I er $b-a$, bliver bredden af hver af disse dele $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.



I hvert delinterval vælges et argument (det kan vælges helt vilkårligt, det skal bare ligge i delintervallet)
$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.
På figuren til venstre er for overskuelighedens skyld kun vist argumenterne x_1, x_2, x_i og x_n.



Der konstrueres nu rektangler, der alle har bredden Δx, og hvor højden er givet ved den pågældende funktionsværdi, dvs. det i'te rektangel har højden $f(x_i)$.

Arealet af det *i*'te rektangel bliver derfor **(regnet med fortegn)** $A_i = f(x_i)\cdot\Delta x$. For hvis funktionsværdien er negativ, skal arealet regnes negativt.

(Du kan sammenligne denne konstruktion med vores konstruktioner af sekanter som retlinede tilnærmelser til en graf)

Det samlede areal af rektanglerne – regnet med fortegn – kaldes en *middelsum*, og den er givet ved:

$$S_{middel} = A_{\text{rektangler}} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x$$

Pointen er nu, at arealet af rektanglerne er en tilnærmelse til det søgte areal *A*. Og den tilnærmelse vil være bedre jo flere delintervaller, der opdeles i.

Og her kommer vores grænseværdier igen ind i billedet. For vi kan se på grænseovergangen $n \to \infty$ eller tilsvarende $\Delta x \to 0$, og vi siger så:

Definition 14: Hvis middelsummen for funktionen *f* over intervallet $I = [a,b]$ har en grænseværdi ved grænseovergangen $\Delta x \to 0$, **så** siges *f* at være *integrabel over I*, og grænseværdien kaldes *det bestemte integral af f over* $[a,b]$ (eller *integralet af f over I*), og det skrives $\int_a^b f(x)\,dx$, dvs.

der gælder: $$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x \to \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{for } \Delta x \to 0$$

a er den *nedre* og *b* den *øvre grænse*. Udtrykket inden i $\int_a^b dx$ - her $f(x)$ - kaldes *integranden*.

Det følger af det gennemgåede, at det bestemte integral af *f* over *I* altså angiver arealet i intervallet *I* mellem grafen og førsteaksen **regnet med fortegn**.

Men spørgsmålet er selvfølgelig, om dette bestemte integral findes? For som man kan bemærke, er der meget i ordlyden, der er fælles med Definition 9 (differentialkvotient), og der opdagede vi, at f.eks. et knæk på grafen gjorde, at differenskvotienten ikke havde en grænseværdi det pågældende sted.

Vi ønsker nu at vise følgende meget vigtige sætning, som vi vil henvise til igen og igen:

Sætning 3: Hvis funktionen *f* er kontinuert i intervallet $I=[a,b]$, er den integrabel over *I*.

Bevis 3: Vi ser på en funktion *f*, der er kontinuert i intervallet $I=[a,b]$.

Vi skal nu vise, at middelsummen har en grænseværdi for $\Delta x \to 0$.

For at vise dette indføres nu to nye slags summer, der lige som middelsummen er baseret på opdelingen af *I* i *n* delintervaller. En *oversum* er en sum, hvor man i hvert eneste interval som højde på rektanglet vælger en værdi, der ikke er mindre end nogen funktionsværdi i delintervallet, mens man i en *undersum* vælger en højde, der ikke er større end nogen funktionsværdi i intervallet. Vi ser nu på den mindste oversum og den største undersum:

O: Den oversum der dannes, når man i hvert delinterval vælger den største funktionsværdi.

U: Den undersum der dannes, når man i hvert delinterval vælger den mindste funktionsværdi.

Vi lader $x_{i,\max}$ og $x_{i,\min}$ være det argument i det *i*'te interval, der har henholdsvis den største og den mindste funktionsværdi, hvorved vi har de tre summer givet ved (vi kalder nu middelsummen for *S*):

$$U=\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i,\min}\right)\cdot\Delta x$$

$$S=\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i}\right)\cdot\Delta x$$

$$O=\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i,\max}\right)\cdot\Delta x$$

Ud fra vores definition af de tre summer gælder:

$$U\le S\le O$$

Vi viser, at *S* har en grænseværdi for $\Delta x\to 0$, ved at vise, at $O-U\to 0$ for $\Delta x\to 0$, for så vil vores oversum og vores undersum have samme grænseværdi for $\Delta x\to 0$, og denne grænseværdi må også være grænseværdien for *S*, da *S* er klemt inde mellem oversummen og undersummen.

Vi har:

$$O-U=\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i,\max}\right)\cdot\Delta x-\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i,\min}\right)\cdot\Delta x=\sum_{i=1}^{n}\Big(f\left(x_{i,\max}\right)-f\left(x_{i,\min}\right)\Big)\cdot\Delta x$$

Og vi skal altså **vise**, at: $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\Delta x<\delta\Rightarrow\left|\sum_{i=1}^{n}\Big(f\left(x_{i,\max}\right)-f\left(x_{i,\min}\right)\Big)\cdot\Delta x\right|<\varepsilon$

(Numerisktegnene er ligegyldige, da alle led er positive)

Som altid kommer fjenden med sit ε.

Vi tager nu dette ε med os hen til funktionen *f*, hvor vi danner et nyt epsilon $\varepsilon_f=\dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

Da f er kontinuert i I (**Det er her, vi anvender vores forudsætning!**), vil der for samtlige argumenter i I findes et δ, der kan forsvare os mod $\varepsilon_f = \dfrac{\varepsilon}{b-a}$, og vi vælger nu et positivt $\delta_{\min}$, der ikke er større end nogen af disse, for så sikrer vi os, at dette $\delta_{\min}$ kan bruges overalt i I, dvs. der gælder:

$$\forall x_1, x_2 \in I : |x_2 - x_1| < \delta_{\min} \Rightarrow \left| f(x_2) - f(x_1) \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Med dette $\delta_{\min}$ går vi nu tilbage til vores summer, hvor fjenden spændt venter i håbet om, at det ikke vil lykkes for os at afparere hans ε. Men fjenden skuffes, for se bare her:

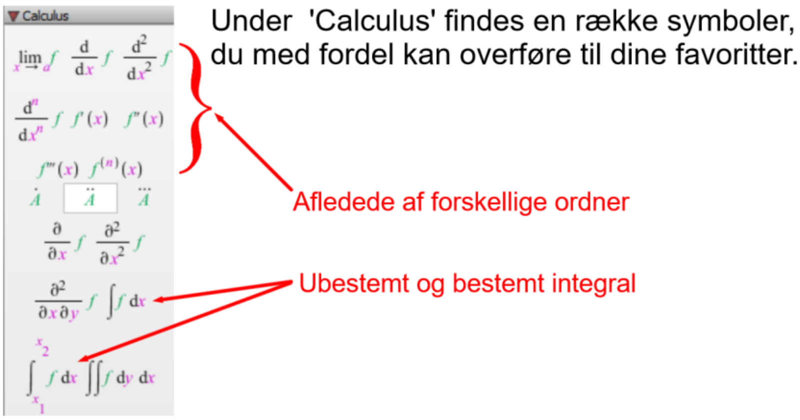
$$\Delta x < \delta_{\min} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left| \left(f(x_{i,\max}) - f(x_{i,\min}) \right) \cdot \Delta x \right| < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \Delta x = n \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \Delta x = \frac{n}{b-a} \cdot \Delta x \cdot \varepsilon = \frac{1}{\Delta x} \cdot \Delta x \cdot \varepsilon = \varepsilon$$

Bemærk, at vi altså nu ved, at kontinuerte funktioner er integrable i lukkede, begrænsede intervaller, dvs. der findes et bestemt integral, der svarer til arealet regnet med fortegn.

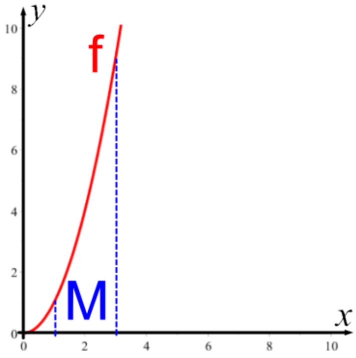
Men vi ved intet om, hvordan vi finder dette bestemte integral - udover som grænseværdi for middelsummen, men en sådan sum svarer til en række, som det ikke er helt nemt at håndtere.

Men det skal snart lykkes os at få kædet differentialregning og integralregning sammen, og på den måde slipper vi for at skulle håndtere rækker. Vi får altså skabt en fantastisk genvej til at bestemme arealer, da vi kan gøre det ved hjælp af resultater fremkommet ud fra de noget lettere håndterbare differenskvotienter.

Inden vi bliver i stand til selv at udregne disse integraler, kan vi dog lære at indtaste dem i Maple (hvilket ikke er særlig svært, da Maple anvender den korrekte notation).



Eksempel 30: Vi vil gerne bestemme arealet af punktmængden M, der afgrænses af grafen for



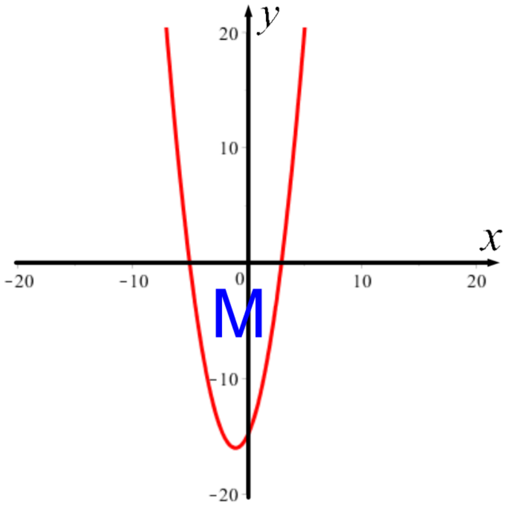
$f: x \mapsto x^2$, førsteaksen samt linjerne med ligningerne $x = 1$ og $x = 3$.

Da punktmængden ligger over x-aksen, vil dens areal være lig det bestemte integral $\int_1^3 f(x)\,dx$.

Så det beregnes i Maple:

$$A_M = \int_1^3 x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{26}{3}$$

Eksempel 31: Vi vil bestemme arealet af punktmængden *M*, der afgrænses af førsteaksen og grafen for $f: x \mapsto x^2 + 2x - 15$.



Vi faktoriserer først polynomiet og anvender nulreglen for at bestemme nulpunkter:

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow (x+5)\cdot(x-3) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x = -5 \vee x = 3$$

Vi bemærker, at punktmængden ligger **under** *x*-aksen, og da det bestemte integral regner arealer med fortegn, vil det give en negativ værdi. Men arealet af *M* er positivt, og vi siger derfor:

Bemærk

$$A_M = -\int_{-5}^{3} \left(x^2 + 2x - 15\right) \mathrm{d}x = \frac{256}{3}$$

Opgaverne 030*

Vores Definition 14 tillader kun $b > a$ i det bestemte integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

Men det råder vi bod på med følgende definition:

Definition 15: Lad *f* være kontinuert i et interval *I*. For vilkårlige $a, b \in I$ gælder så:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Bemærk, at den nederste definition er meningsfuld i forhold til arealer, for der er ikke noget interval fra *a* til *a*, og derfor ingen punktmængde (arealet er 0).

Den øverste definition er en lidt speciel definition. For normalt ved vi i en definition, hvad vi kender i forvejen, og hvad vi definerer ud fra dette, men det gør vi ikke her, for definitionen kan gå begge veje.

Hvis $a < b$, er det venstresiden vi kender (ifølge Definition 14), og det er altså højresiden, der defineres. Hvis $a > b$ er det omvendt.

Men vi ser altså, at vi kan bytte rundt på grænserne ved at ændre fortegn på integralet.

Eksempel 32: I Eksempel 31 så vi på grafen for $f: x \mapsto x^2 + 2x - 15$, der dannede en punktmængde *M* under førsteaksen. Da vi skulle bestemme arealet, huskede vi, at det bestemte integral regner arealer med fortegn, så vi korrigerede med et minus.

Men vi ved nu, at vi også bare kunne have korrigeret for det ved at bytte rundt på grænserne, så vi så at sige "integrerer fra højre mod venstre":

Bemærk, at grænserne er byttet rundt, så det højeste tal står som nedre grænse

$$A_M = \int_{3}^{-5} \left(x^2 + 2x - 15\right) \mathrm{d}x = \frac{256}{3}$$

Da vi indførte det bestemte integral, blev det gjort klart, at når man skal beregne værdien af det bestemte integral, skal arealer regnes med fortegn, således at et areal placeret under førsteaksen vil give et negativt bidrag til værdien af det bestemte integral.

Definition 15 fortæller os, at vi nu også skal regne med fortegn i forhold til den nedre og øvre grænses indbyrdes placering. Hvis den nedre grænse er størst, så vi så at sige ”integrerer fra højre mod venstre”, bidrager arealet til værdien af det bestemte integral med det modsatte fortegn af, hvad det ville i vores ”normale” integral, hvor vi integrerer fra venstre mod højre.

Vi har altså:

Bidrag til værdien af det bestemte integral	Punktmængden ligger OVER førsteaksen	Punktmængden ligger UNDER førsteaksen
Den nedre grænse er mindre end den øvre grænse (der integreres fra venstre mod højre)	Positivt bidrag	Negativt bidrag
Den nedre grænse er større end den øvre grænse (der integreres fra højre mod venstre)	Negativt bidrag	Positivt bidrag

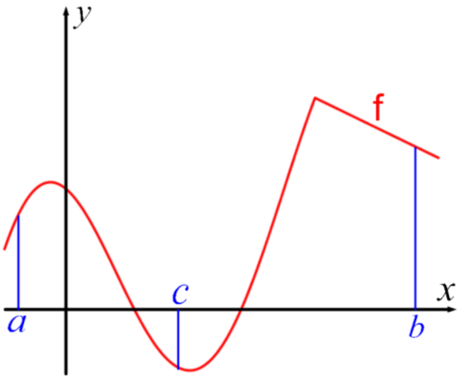
Definition 15 fører os frem til en indskudsregel (ligesom vi har en indskudsregel inden for vektorregning):

Sætning 4 (Indskudsreglen): Lad f være kontinuert i intervallet I. Uanset den indbyrdes beliggenhed gælder for alle $a, b, c \in I$:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Navnet ”Indskudsreglen” kommer af, at man forestiller sig, at man på vejen fra a til b indskyder et punkt c. Men bemærk altså, at punktet c ikke behøver at ligge mellem a og b (og at a ikke behøver at ligge før b).

Bevis 4: Bemærk, at det ikke er forudsat, at I er et lukket, begrænset interval, som vi ellers har anvendt i Definition 14. I Sætning 4 kunne I f.eks. være hele $\mathbb{R}$. Men når a, b og c er valgt, vil de danne lukkede, begrænsede intervaller, dvs. vi kan anvende både definitionerne 14 og 15, og vi kan udnytte, at de bestemte integraler svarer til arealer regnet med fortegn, **når man får placeret grænserne, så den nedre grænse er mindre end den øvre.**



Vi vil i beviset udnytte, at man kan lægge arealer sammen, således at hvis a, b og c er placeret som på figuren til venstre, så ses det direkte, at

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Egentlig kræver denne argumentation, at vi er sikre på, at der er grænseværdier for $\Delta x \to 0$ for de middelsummer, der er vores udgangspunkt. Men her hjælper Sætning1 os, for vi ved, at hvis venstresidens to middelsummer har grænseværdier, så har middelsummen svarende til højresiden – der er summen af venstresidens middelsummer – også en grænseværdi, der er summen af grænseværdierne.

Vi vil altså ikke i beviset hele tiden anvende middelsummer og henvise til sætninger om grænseværdier, men i stedet arbejde med bestemte integraler, hvor vi ved hjælp af Definition 15 bytter rundt på grænserne, så vi kan sammenligne arealer. Vi gennemgår alle de mulige indbyrdes placeringer af *a*, *b* og *c* (vi har allerede set på $a<c<b$):

$a<b<c$: Med denne indbyrdes placering giver arealbetragtningen på figuren:

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx\,.$$

Vi omskriver nu ved først at flytte et led og bagefter anvende Definition 15:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx-\int_b^c f(x)\,dx \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

Vi har altså igen fået det søgte udtryk i Sætning 4.

$b<c<a$: Arealbetragtning: $\int_b^c f(x)\,dx+\int_c^a f(x)\,dx=\int_b^a f(x)\,dx\,.$

Omskrivning: $-\int_b^a f(x)\,dx=-\int_c^a f(x)\,dx-\int_b^c f(x)\,dx \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$

$b<a<c$: Arealbetragtning: $\int_b^a f(x)\,dx+\int_a^c f(x)\,dx=\int_b^c f(x)\,dx\,.$

Omskrivning: $-\int_b^a f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx-\int_b^c f(x)\,dx \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$

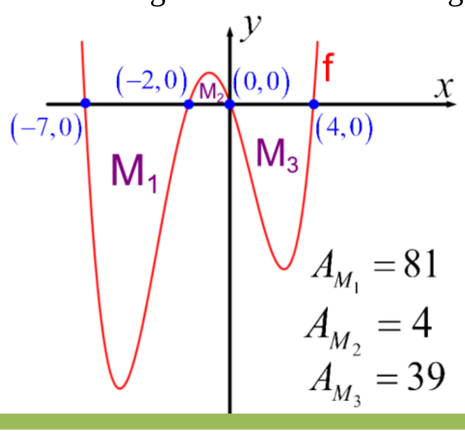
Øvelse 3: Vis det også for $c<b<a$ og $c<a<b$.

Med Definition 15 og indskudsreglen har vi fået helt styr på sammenhængen mellem værdierne af de bestemte integraler og arealerne af punktmængder over og under førsteaksen.

Eksempel 33: Nedenfor ses grafen for en funktion *f* med nulpunkterne -7, -2, 0 og 4. Grafen afgrænser sammen med førsteaksen tre punktmængder M_1, M_2 og M_3 med de angivne arealer.

Bemærk, at arealerne af punktmængderne (selvfølgelig) er positive, uanset om de ligger over eller under førsteaksen. Det er først, når vi skal bruge dem til at bestemme værdier for bestemte integraler, at de skal regnes med fortegn.

Nu udregnes en masse forskellige bestemte integraler. Tjek, at du forstår samtlige tal og fortegn.



$$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx=A_{M_2}=4 \qquad \int_{-7}^{-2} f(x)\,dx=-A_{M_1}=-81 \qquad \int_4^4 f(x)\,dx=0$$

$$\int_4^0 f(x)\,dx=-\int_0^4 f(x)\,dx=-\left(-A_{M_3}\right)=A_{M_3}=39$$

$$\int_{-7}^{4} f(x)\,dx=\int_{-7}^{-2} f(x)\,dx+\int_{-2}^{0} f(x)\,dx+\int_0^4 f(x)\,dx$$

$$=-A_{M_1}+A_{M_2}-A_{M_3}=-81+4-39=-116$$

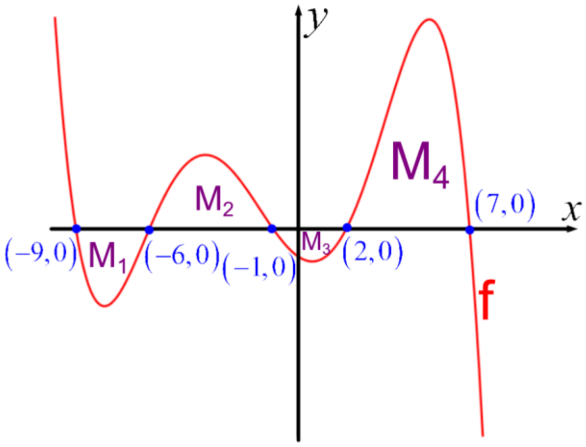
I sidste udregning i Eksempel 33 blev det benyttet, at indskudsreglen kan udvides, så man kan skyde lige så mange tal ind mellem den nedre og øvre grænse, som man har lyst til, og den indbyrdes beliggenhed af disse tal er uden betydning:

$$\int_{-19}^{8} f(x)\,dx = \int_{-19}^{5} f(x)\,dx + \int_{5}^{-50} f(x)\,dx + \int_{-50}^{346} f(x)\,dx + \int_{346}^{-1} f(x)\,dx + \int_{-1}^{8} f(x)\,dx$$

Man kan også gå den modsatte vej og bestemme arealer ud fra kendskabet til bestemte integraler:

Eksempel 34: Nedenfor ses grafen for en funktion *f*, der sammen med førsteaksen afgrænser 4 punktmængder M_1, M_2, M_3 og M_4. Funktionens fem skæringspunkter med *x*-aksen er angivet på figuren, og desuden er værdien af 4 forskellige bestemte integraler angivet.

Tjek først, at du ud fra grafen kan se, at fortegnene på integralerne giver mening.



$$\int_{-9}^{-6} f(x)\,dx = -7$$

$$\int_{2}^{-1} f(x)\,dx = 3$$

$$\int_{-9}^{7} f(x)\,dx = 31$$

$$\int_{-6}^{2} f(x)\,dx = 8$$

Vi vil nu bestemme arealerne af de fire punktmængder.

Tjek, at du forstår alle fortegn og anvendelsen af indskudsreglen og ombytning af grænser.

Og bemærk, at alle fire arealer naturligvis skal være positive tal.

$$A_{M_1} = -\int_{-9}^{-6} f(x)\,dx = -(-7) = 7$$

$$A_{M_2} = \int_{-6}^{-1} f(x)\,dx = \int_{-6}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{-1} f(x)\,dx = 8 + 3 = 11$$

$$A_{M_3} = -\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = -\left(-\int_{2}^{-1} f(x)\,dx\right) = -(-3) = 3$$

$$A_{M_4} = \int_{2}^{7} f(x)\,dx = \int_{2}^{-6} f(x)\,dx + \int_{-6}^{-9} f(x)\,dx + \int_{-9}^{7} f(x)\,dx =$$

$$-\int_{-6}^{2} f(x)\,dx - \int_{-9}^{-6} f(x)\,dx + \int_{-9}^{7} f(x)\,dx = -8 - (-7) + 31 = 30$$

Man kan også – men det er egentlig bare som træning – anvende indskudsreglen og Definition 15 til at regne på bestemte integraler uden at tænke over deres fortolkning som arealer.

Eksempel 35: Vi har fået følgende bestemte integraler oplyst:

$$\int_{11}^{-5} f(x)\,dx = 43 \qquad \int_{8}^{3} f(x)\,dx = -4 \qquad \int_{-5}^{3} f(x)\,dx = 17 \qquad \int_{-2}^{11} f(x)\,dx = -9$$

Vi bestemmer nu en række andre bestemte integraler ved hjælp af ovenstående:

$$\int_{-5}^{-2} f(x)\,dx = \int_{-5}^{11} f(x)\,dx + \int_{11}^{-2} f(x)\,dx = -\int_{11}^{-5} f(x)\,dx - \int_{-2}^{11} f(x)\,dx = -43-(-9) = -34$$

$$\int_{8}^{11} f(x)\,dx = \int_{8}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{-5} f(x)\,dx + \int_{-5}^{11} f(x)\,dx = \int_{8}^{3} f(x)\,dx - \int_{-5}^{3} f(x)\,dx - \int_{11}^{-5} f(x)\,dx = -4-17-43 = -64$$

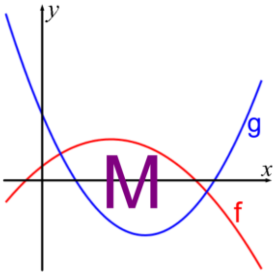
$$\int_{3}^{-2} f(x)\,dx = \int_{3}^{-5} f(x)\,dx + \int_{-5}^{11} f(x)\,dx + \int_{11}^{-2} f(x)\,dx = -\int_{-5}^{3} f(x)\,dx - \int_{11}^{-5} f(x)\,dx - \int_{-2}^{11} f(x)\,dx = -17-43-(-9) = -51$$

Opgaverne 031*

Vi kender nu sammenhængen mellem arealer og begrebet *det bestemte integral*, så vi både kan arbejde med punktmængder over og under *x*-aksen. Det næste, vi skal se på, er arealet af en punktmængde, der ligger mellem to – eller flere – grafer.

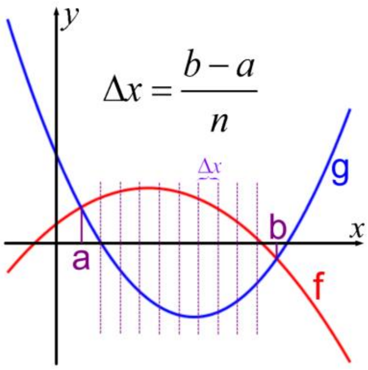
Areal mellem grafer

Vi ser på to funktioner *f* og *g*, der er kontinuerte i et interval *I*, og hvis grafer skærer hinanden to steder inden for *I*, hvorved de tilsammen danner en punktmængde *M*:



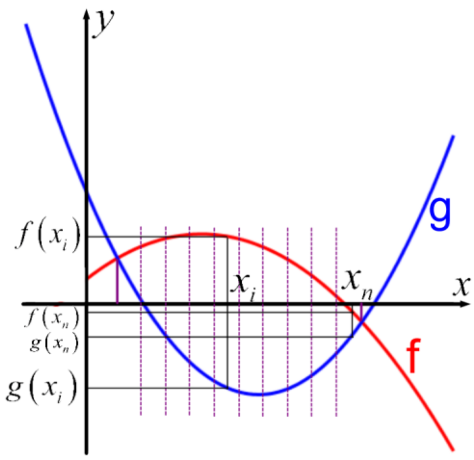
Vi ønsker at bestemme arealet af *M*.

Først skal vi finde ud af i hvilket interval på *x*-aksen, punktmængden ligger. Tidligere har det været nulpunkter for grafen, der har afgrænset intervallet, men vi ser, at det i dette tilfælde er **skæringsstederne mellem de to grafer**, der afgrænser intervallet.



Vi kalder skæringsstederne for *a* og *b*.

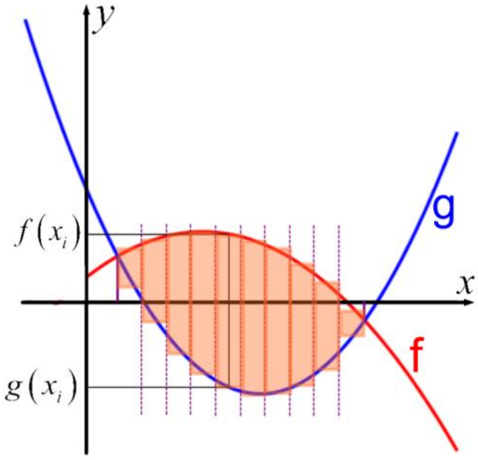
Intervallet $[a,b]$ opdeles nu i *n* lige store delintervaller, der hver får længden $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.



I hvert delinterval vælges et argument x_i.

For hvert af disse argumenter er vi interesserede i begge funktionsværdier, dvs. både $f(x_i)$ og $g(x_i)$.

På figuren til venstre er dette vist for to argumenter.



Som en tilnærmelse til arealet af M dannes der nu i hvert delinterval et rektangel.

Alle rektanglerne har bredden Δx, mens højden af det i'te rektangel er $f(x_i)-g(x_i)$. Dvs. arealet af det i'te rektangel er $\left(f(x_i)-g(x_i)\right)\cdot\Delta x$.

Når vi lægger arealerne af samtlige rektangler sammen, får vi:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-g(x_i)\right)\cdot\Delta x=\sum_{i=1}^{n}(f-g)(x_i)\cdot\Delta x$$

Men dette er netop middelsummen for funktionen $(f-g)$ over intervallet $[a,b]$.

Hvis f og g er kontinuerte i $[a,b]$, så er $(f-g)$ ifølge Sætning 2 også kontinuert i $[a,b]$ og dermed – ifølge Sætning 3 – integrabel over $[a,b]$. Dermed ved vi, at:

$$\sum_{i=1}^{n}(f-g)(x_i)\cdot\Delta x\to\int_a^b(f-g)(x)\,dx \quad\text{for}\quad \Delta x\to 0 \qquad ,$$

og $\int_a^b(f-g)(x)\,dx$ svarer til arealet af M.

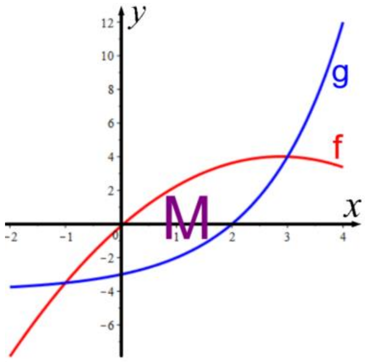
Vi har på figurerne og i teksten set på den punktmængde, der afgrænses af graferne inden for deres skæringssteder, men der er ikke noget i vejen for, at man på figuren ovenfor kunne rykke a og b nærmere hinanden og se på en mindre punktmængde. Udregningerne og argumenterne er præcis de samme. Dvs. vi behøver ikke at have skæringer mellem graferne. Det væsentlige er blot, at den ene graf ligger over den anden i hele det interval, vi kigger på.

Vi har altså vist følgende sætning:

Sætning 5 (areal mellem grafer): Hvis funktionerne f og g er kontinuerte i intervallet $[a,b]$, og $f(x)>g(x)\ \ \forall x\in\,]a,b[$, så er arealet af punktmængden M, der afgrænses af graferne for f og g og evt. linjerne med ligningerne $x=a$ og $x=b$, givet ved:

$$A_M=\int_a^b(f-g)(x)\,dx$$

Eksempel 36: Vi ønsker at bestemme arealet af den punktmængde M, der afgrænses af graferne for funktionerne f og g med forskrifterne $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{23}{8}x-\frac{1}{8}$ og $g(x)=2^x-4$.



Til venstre er graferne tegnet. Bemærk, at sådanne tegninger altid kun er en hjælp til at gennemskue opgaven og kontrollere resultaterne, der skal fremkomme ved beregningerne.

Funktionerne defineres: $f(x) := -\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{23}{8}\cdot x-\frac{1}{8}$: $g(x) := 2^x-4$:

Skæringsstederne bestemmes: $fintervalsolve(f(x)=g(x), x=-10..10) = [-1.000000000, 3.0000000$

Et sted i intervallet mellem skæringsstederne bestemmes to funktionsværdier: $f(0)=-\frac{1}{8}$ $g(0)=-3$

Dvs. grafen for f ligger over grafen for g i intervallet. Arealet af punktmængden M er dermed:

$A_M=\int_{-1}^{3}(f-g)(x)\,dx=\frac{1}{6}\ \frac{-45+134\ln(2)}{\ln(2)}\xrightarrow{\text{at 10 digits}}11.51312053$

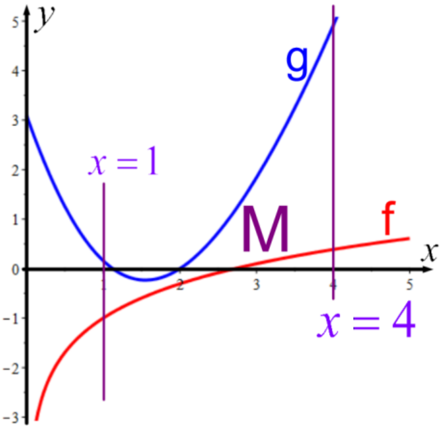
I Eksempel 36 anvendtes *fintervalsolve* til at finde de to skæringspunkter. Det skyldes, at almindelig *solve* eller *intervalsolve* ikke virker i dette tilfælde. For det er faktisk en ret kompliceret ligning, selvom skæringsstederne viste sig at være hele tal (det er en konstrueret opgave). Ligningen indeholder nemlig både et polynomium (potensfunktioner) og en eksponentialfunktion, og så kan man ikke isolere *x* analytisk (prøv selv med den tilsyneladende simple ligning $x = e^x$).

Øvelse 4 (vigtig): Prøv at løse ligningen fra Eksempel 36 med alle de forskellige typer af *solve*, du kan finde (*intervalsolve,fintervalsolve, solve, fsolve,evalf(solve(...)),* Højreklik: *solve*, *Numerically Solve*, *Numerically Solve from point*, …).
Husk, at *intervalsolve* ligger i Gym-pakken.

Bemærk muligheden *Numerically Solve from point* ved højreklik. Det er et meget stærkt redskab, når man ud fra en graf kan se, hvor løsningerne skal søges. Man skal tage udgangspunkt i et sted, som, man kan se, ligger tæt på løsningen, og man finder så kun én løsning ad gangen.

Lad os se på et eksempel, hvor der ikke er nogen skæringer mellem graferne, og hvor vi lader grafen for *g* ligge over grafen for *f*:

Eksempel 37: Vi vil bestemme arealet af den punktmængde *M*, der afgrænses af graferne for funktionerne $f: x \mapsto \ln(x) - 1$ og $g: x \mapsto \sin(x-2) + (x-2)^2$ og linjerne med ligningerne $x = 1$ og $x = 4$.



Funktionerne defineres:

$f := x \to \ln(x) - 1 : g := x \to \sin(x-2) + (x-2)^2 :$

Det undersøges, om der er skæringer i [1,4]:

$\mathit{fintervalsolve}(f(x) = g(x), x = 1..4) = [\ ]$

Dvs. der er ingen skæringer i [1,4].

Da $f(2) = \ln(2) - 1 \xrightarrow{\text{at 5 digits}} -0.30685$ og $g(2) = 0$

ligger grafen for *g* over grafen for *f* i intervallet, og dermed bliver arealet af *M*:

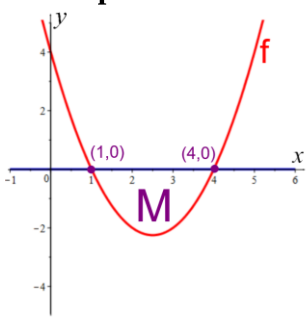
$A_M = \int_1^4 (g - f)(x)\, dx = \cos(1) + 9 - \cos(2) - 8\ln(2) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 4.4112$

Bemærk altså, at da grafen for *g* ligger øverst, skal den stå forrest i integranden. Og vi har bestemt, at

$A_M = 4{,}4$

Når vi har haft et areal under *x*-aksen, har vi hidtil skulle være opmærksom på, at dets bidrag til det bestemte integral var negativt. Men hvis vi betragter *x*-aksen som grafen for funktionen *g* med forskriften $g(x) = 0$, kan vi beregne et areal under *x*-aksen som arealet mellem to grafer:

Eksempel 38: Vi vil bestemme arealet af den punktmængde *M*, der afgrænses af *x*-aksen og grafen



for funktionen $f: x \mapsto x^2 - 5x + 4$, og vi får oplyst, at parablen (grafen for *f*) skærer *x*-aksen i $(1,0)$ og $(4,0)$. Da parablens *a*-værdi er positiv, vender benene opad, dvs. *M* ligger under *x*-aksen.

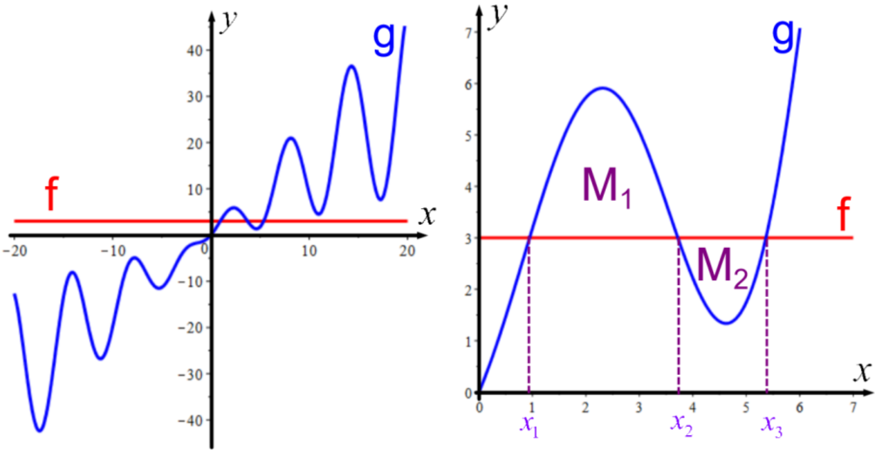
Vi betragter *x*-aksen som grafen for $g: x \mapsto 0$ og får så:

$$A_M = \int_1^4 \left(g(x) - f(x)\right) dx = \int_1^4 \left(0 - f(x)\right) dx = \int_1^4 -f(x) dx$$

Maple giver: $A_M = \int_1^4 -(x^2 - 5x + 4)\, dx = \frac{9}{2}$

Helt generelt er vandrette linjer grafer for funktioner af typen $f(x) = k$, så man kan også anvende Sætning 5, hvis man vil finde arealer afgrænset af vandrette linjer og grafen for en funktion:

Eksempel 39: Vi vil bestemme arealet af de to punktmængder M_1 og M_2, der afgrænses af linjen med ligningen $y = 3$ (kaldet *f* nedenfor) og grafen for funktionen $g : x \mapsto (x+1) \cdot \sin(x) + \frac{3}{2}x$.



Det oplyses, at der er 3 skæringspunkter, og at grafen for *g* ligger øverst mellem de to første og nederst mellem de to sidste.
Skæringsstederne bestemmes med *intervalsolve*, da der er en trigonometrisk funktion indblandet:

$$intervalsolve\left((x+1) \cdot \sin(x) + \frac{3}{2} x = 3,\ x = 0\,..6 \right)$$

Warning, some roots are returned as numeric approximations

$$= [0.9467636255, 3.719872709, 5.367075148]$$

Vi advares om, at der er regnet numerisk, men det er ikke noget problem, når vi ikke søger eksakte løsninger.
Da vi ved, at grafen for *g* ligger øverst mellem de første skæringssteder, har vi:

$$A_{M_1} = \int_{0.9467636255}^{3.719872709} (g - f)(x)\, dx = \int_{0.9467636255}^{3.719872709} \left((x+1) \cdot \sin(x) + \frac{3}{2} x - 3 \right) dx = 5.118336930$$

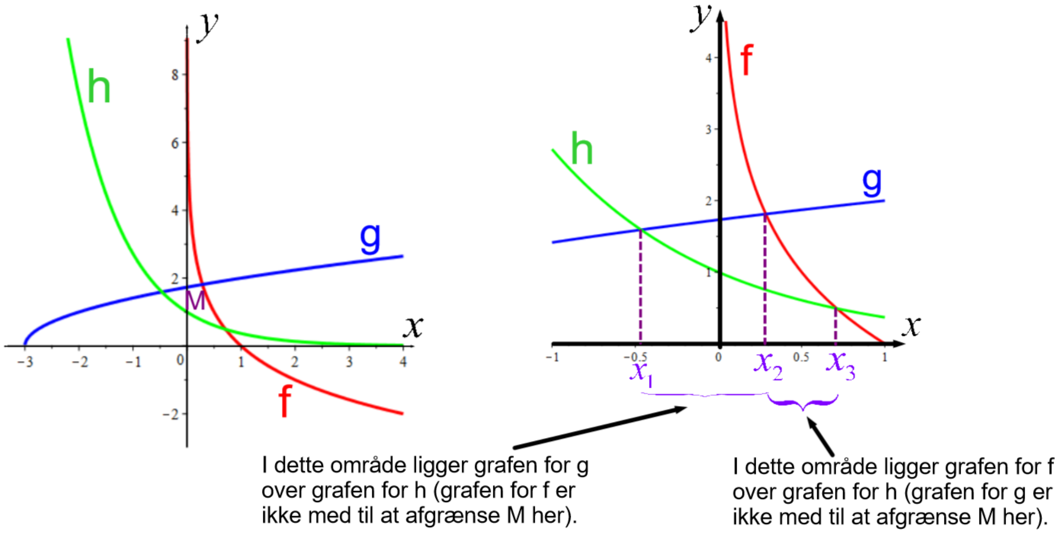
Da grafen for g ligger nederst mellem de to sidste skæringssteder, har man:

$$A_{M_2} = \int_{3.719872709}^{5.367075148} (f - g)(x)\, dx = \int_{3.719872709}^{5.367075148} \left(3 - \left((x+1) \cdot \sin(x) + \frac{3}{2} x \right) \right) dx = 1.791647948$$

Som sidste eksempel ses på et tilfælde, hvor en punktmængde afgrænses af grafer for 3 funktioner. I sådanne tilfælde er det væsentligt, at man hele tiden kun arbejder med to funktioner ad gangen, dvs. man skal sørge for at opdele det interval, hvor punktmængden befinder sig, i nogle mindre intervaller (afgrænset af skæringssteder), hvor punktmængdens rand kun udgøres af to grafer.

Eksempel 40: Vi ønsker at bestemme arealet af den punktmængde *M*, der afgrænses af graferne for funktionerne $f: x \mapsto \log_{\frac{1}{2}}(x)$, $g: x \mapsto \sqrt{x+3}$ og $h: x \mapsto e^{-x}$.

Først tegnes graferne for de tre funktioner i samme koordinatsystem.



Tjek, at du kan se, at der ikke er andre punktmængder, der afgrænses af netop de tre grafer, end punktmængden *M*. For at kunne bestemme arealet af *M* skal vi beregne de tre skæringssteder x_1, x_2 og x_3:

$$f := x \to \log_{0.5}(x) : g := x \to \sqrt{x+3} : h := x \to e^{-x} :$$

x_1 (skæring mellem *h* og *g*): $g(x) = h(x) \xrightarrow{\text{solve}} -0.4650808680$

x_2 (skæring mellem *f* og *g*): $f(x) = g(x) \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 0.2847208621\}$

x_3 (skæring mellem *f* og *h*): $f(x) = h(x) \xrightarrow{\text{solve}} 0.7116022054$

Disse tre steder opdeler området i to intervaller (se figuren ovenfor til højre). Så vi har:

$$A_M = \int_{x_1}^{x_2} (g-h)(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_3} (f-h)(x)\,dx = \int_{-0.4650808680}^{0.2847208621} (g-h)(x)\,dx + \int_{0.2847208621}^{0.7116022054} (f-h)(x)\,dx = 0.6259853727$$

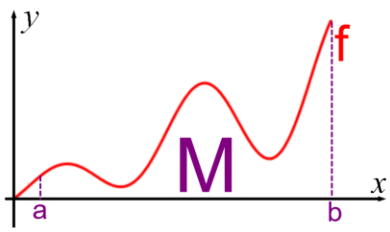
Opgaverne 033*

Øvelse 5: Se på figuren til venstre i Eksempel 40. Find den punktmængde, der afgrænses af:

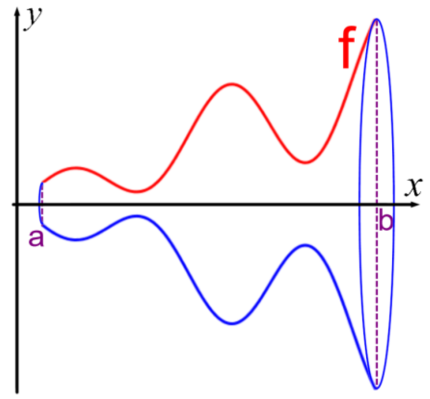
1) Grafen for *h*, grafen for *f* og de to koordinatakser.
2) Grafen for *g*, grafen for *h* og andenaksen.
3) Grafen for *g*, grafen for *h* og koordinatakserne.
4) Grafen for *g*, grafen for *f*, grafen for *h* og førsteaksen.

Rumfang af omdrejningslegeme

Vi ser på grafen for en funktion *f*, der er kontinuert i et interval $[a,b]$:

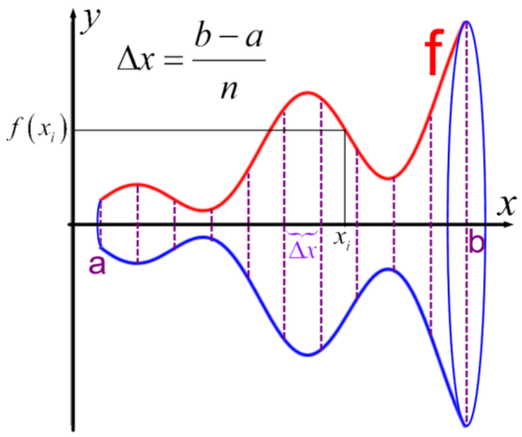


På figuren ses på en funktion med positive funktionsværdier i $[a,b]$, men som det vil fremgå af det følgende, ændrer det ikke noget ved rumfanget af det omdrejningslegeme, vi danner om et øjeblik, hvis funktionsværdierne er 0 eller negative.



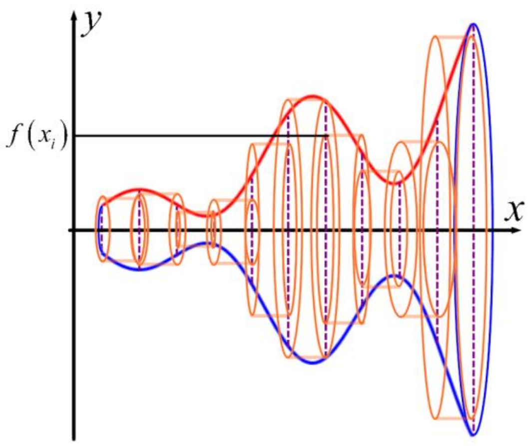
Vores *omdrejningslegeme* fremkommer, når punktmængden M afgrænset af grafen for f, førsteaksen og linjerne $x = a$ og $x = b$ drejes 360° omkring x-aksen (dvs. en hel omgang). På figuren er med blåt tegnet den cirkel, som punktet $\left(b, f\left(b\right)\right)$ danner, når grafen roteres. Radius i denne cirkel er $f\left(b\right)$. Du skal forestille dig, hvordan samtlige punkter i M danner en cirkel med radius svarende til punktets andenkoordinat.

På denne måde dannes en kompakt, rumlig figur, og det er denne figur, vi ønsker at bestemme rumfanget af.

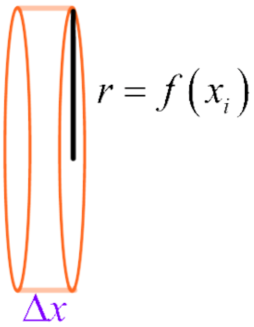


Vi opdeler intervallet $\left[a,b\right]$ i n lige store delintervaller, der altså hver får længden $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. I hvert af disse delintervaller vælges en x-værdi.

På figuren er vist den i'te x-værdi og den tilsvarende funktionsværdi.



Som en tilnærmelse til omdrejningslegemet dannes nu for hvert delinterval en cylinder med radius lig funktionsværdien for den valgte x-værdi i det pågældende delinterval.



Da $V_{cylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h$, er rumfanget af den i'te cylinder (Δx er højden):

$$\pi \cdot f\left(x_i\right)^2 \cdot \Delta x$$

Det samlede rumfang af cylindrene er middelsummen for funktionen $\pi \cdot f^2$ over $\left[a,b\right]$:

$$V_{cylindre} = S = \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot f\left(x_i\right)^2 \cdot \Delta x$$

Vi vil gerne vise, at rumfanget af omdrejningslegemet svarer til grænseværdien for middelsummen, når $\Delta x \to 0$.

Når f er kontinuert i $\left[a,b\right]$, er $\pi \cdot f^2$ ifølge Sætning 2 også kontinuert i $\left[a,b\right]$ (π er en konstant, og $f^2 = f \cdot f$ er en produktfunktion). Og da $\pi \cdot f^2$ er kontinuert i $\left[a,b\right]$, er den ifølge Sætning 3 også integrabel over $\left[a,b\right]$.

Vi har altså:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi \cdot f\left(x_i\right)^2 \cdot \Delta x \to \int_a^b \pi \cdot f\left(x\right)^2 \, dx \text{ for } \Delta x \to 0 .$$

Og denne grænseværdi er rumfanget af omdrejningslegemet. Vi har altså vist følgende sætning:

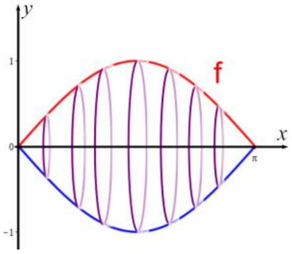
Sætning 6: Lad f være en funktion, der er kontinuert i intervallet $[a,b]$.

Det samlede rumfang V af det eller de omdrejningslegemer, der dannes, når den eller de punktmængder, der afgrænses af grafen for f, førsteaksen og evt. linjerne med ligningerne $x=a$ og $x=b$, roteres 360° omkring x-aksen, er:

$$V=\int_a^b \pi\cdot f(x)^2\,dx$$

Hvis f er positiv i $[a,b]$ (som i udledningen af Sætning 6), er der kun én punktmængde, der roteres. Det samme gælder, hvis f er negativ i $[a,b]$. Men hvis f både antager negative og positive værdier i $[a,b]$ - eller bare har steder inde i intervallet, hvor f antager værdien 0 – er der tale om flere adskilte punktmængder (egentlig er de forbundet af enkelte punkter, men man betegner dem alligevel som adskilte). Det ændrer dog ikke ved udregningen. Udtrykket giver under alle omstændigheder det samlede rumfang.

Eksempel 41: Vi ser på funktionen $f: x \mapsto \sin(x)$ i intervallet $[0,\pi]$. Vi ønsker at bestemme rumfanget af det omdrejningslegeme, der dannes, når punktmængden mellem grafen for f og førsteaksen roteres 360° omkring x-aksen:



Vi beregner rumfanget med Maple:

$$V=\int_0^{\pi}\pi\cdot\sin(x)^2\,dx=\frac{1}{2}\pi^2$$

Dvs. $V_{omdrejningslegeme}=\dfrac{\pi^2}{2}$

Eksempel 42: Vi ser på halvcirklen med centrum i origo og radius r.

Den kan beskrives ved funktionen $f: x\mapsto\sqrt{r^2-x^2}\;;\;-r\le x\le r$.

Vi vil beregne rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når punktmængden afgrænset af grafen for f og x-aksen roteres 360° omkring x-aksen:

$$V=\int_{-r}^{r}\pi\cdot\sqrt{r^2-x^2}^{\,2}\,dx=\frac{4}{3}r^3\pi$$

Vi genkender (ikke overraskende) formlen for rumfanget af en kugle med radius r.

Ovenstående er udregnet med Maple. Når du har lært at udregne bestemte integraler ved hjælp af såkaldte stamfunktioner (funktioner der differentieret giver den oprindelige funktion), kan udregningen foretages i hånden:

$$V=\int_{-r}^{r}\pi\cdot\sqrt{r^2-x^2}^{\,2}\,dx=\pi\cdot\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx=\pi\cdot\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r}=$$

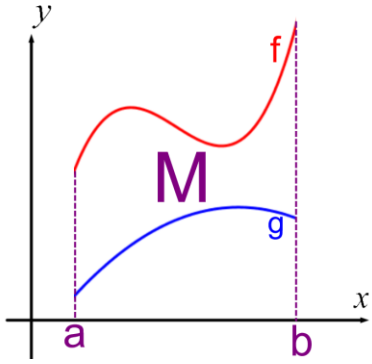
$$\pi\left(\left(r^2\cdot r-\frac{1}{3}\cdot r^3\right)-\left(r^2\cdot(-r)-\frac{1}{3}\cdot(-r)^3\right)\right)=\pi\left(r^3-\frac{1}{3}r^3+r^3-\frac{1}{3}r^3\right)=\frac{4}{3}\pi r^3$$

Opgaverne 034*

Sætning 6 omhandler rotation omkring førsteaksen af punktmængder, der afgrænses af grafen for en funktion og førsteaksen (og evt. to lodrette linjer). Men man kan også rotere punktmængder afgrænset på andre måder, og man kan rotere omkring andre vandrette linjer. Og faktisk kan vi også ved at anvende vores viden om isometrier rotere om skrå eller lodrette linjer.

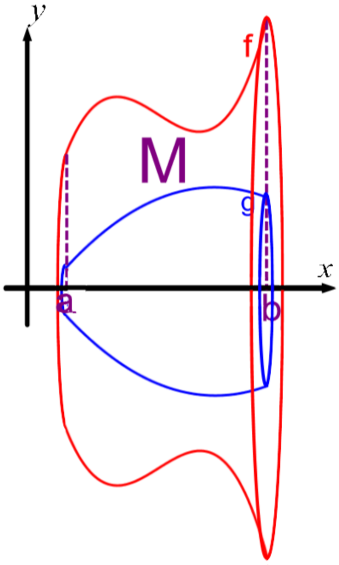
Rotation af punktmængde mellem to grafer

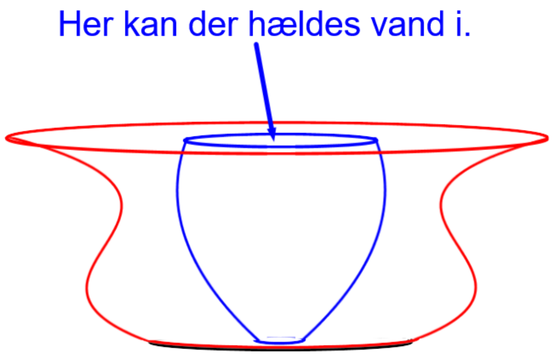
Vi ser på to funktioner *f* og *g*, der er kontinuerte og positive i $[a,b]$, og hvor grafen for *f* ligger over grafen for *g* i $[a,b]$. Sammen med de lodrette linjer givet ved ligningerne $x=a$ og $x=b$ afgrænser de to grafer en punktmængde *M* (se figuren til højre).



Vi vil bestemme rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når *M* roteres 360° omkring *x*-aksen.

Lad os se på det frembragte omdrejningslegeme. Det er skabt ved, at vi først danner et omdrejningslegeme ved at rotere den punktmængde, der afgrænses af grafen for *f*, førsteaksen og de lodrette linjer givet ved ligningerne $x=a$ og $x=b$. Dette er den røde del af figurerne nedenfor:

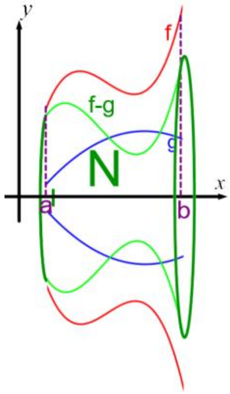




Derefter skal vi fra dette omdrejningslegeme fjerne det omdrejningslegeme, der fremkommer, når punktmængden under grafen for *g* roteres (den blå figur ovenfor). Vores søgte omdrejningslegeme er altså området mellem den røde og den blå figur ovenfor. I dette tilfælde danner dette område nærmest en slags vase, som der kan fyldes vand i (hvis man lige sørger for at lukke bunden med en plade). Hvis vasen er lavet af glas, vil vores omdrejningslegeme altså bestå af glas, mens vandet ikke er en del af omdrejningslegemet.

Vi ser altså, at rumfanget af vores omdrejningslegeme bliver:

$$\boxed{V_{M_{roteret}} = \int_a^b \pi \cdot f(x)^2\,dx - \int_a^b \pi \cdot g(x)^2\,dx}$$



DEN KLASSISKE FEJL

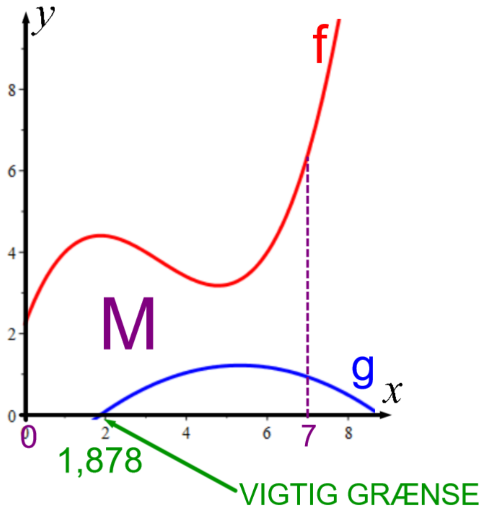
I denne type opgave er den typiske fejl, at man udregner:

$$V = \int_a^b \pi \cdot \left(f(x) - g(x) \right)^2 dx$$

Men dette er ikke rumfanget af det pågældende omdrejningslegeme.
Det er i stedet rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når man roterer punktmængden afgrænset af $f - g$ og førsteaksen omkring førsteaksen, dvs. det grønne omdrejningslegeme på figuren til venstre.

En variation af rotation af punktmængde mellem to grafer er situationen, hvor den roterede punktmængde ikke blot afgrænses af to grafer, men også af koordinatakserne eller en tredje graf.
I disse tilfælde skal man være meget opmærksom på grænserne i de integraler, der udregnes:

Eksempel 43: Vi ser på den punktmængde *M*, der i første kvadrant afgrænses af koordinatakserne, grafen for funktionen $f : x \mapsto \frac{1}{10}x^3 - x^2 + \frac{27}{10}x + \frac{11}{5}$, grafen for funktionen $g : x \mapsto \ln(x+10) - \frac{1}{10} \cdot x^2 + x - 4$ og den lodrette linje med ligningen $x = 7$ (se figuren nedenfor til venstre). Funktionsforskrifterne gemmes i Maple.



Vi ønsker at bestemme rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når *M* roteres 360° omkring førsteaksen.
Bemærk her, at grafen for *g* skærer *x*-aksen i [0,7]. Vi finder dette skæringssted med Maple:

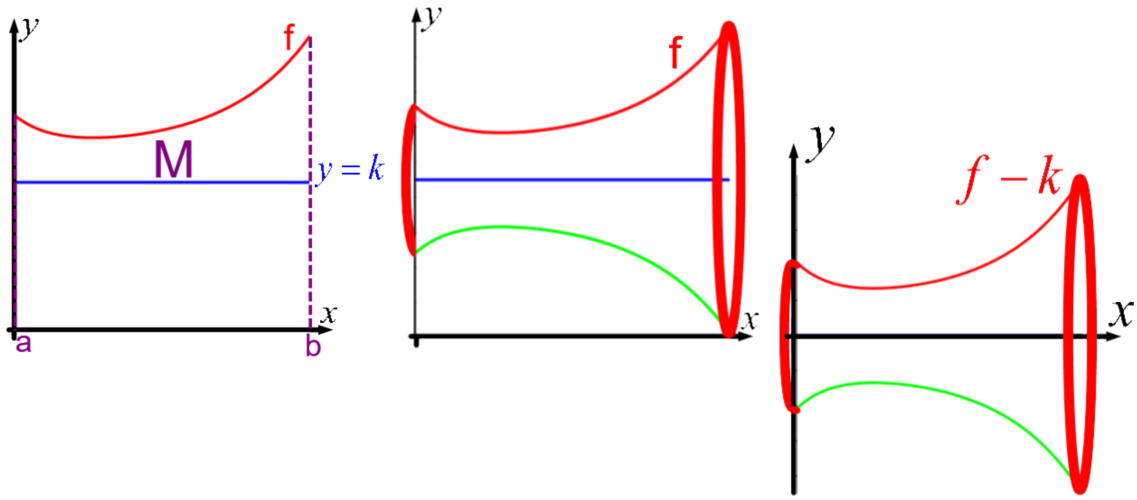
$$g(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} 1.878000636$$

Når vi skal trække rumfanget af det "lille" omdrejningslegeme fra, skal vi bruge dette som nedre grænse:

$$V = \int_0^7 \pi \cdot f(x)^2 \, dx - \int_{1.878000636}^7 \pi \cdot g(x)^2 \, dx = 328.849403$$

Rotation omkring en vilkårlig vandret linje

Vi har en funktion *f*, der er kontinuert i et interval $[a,b]$. Vi ser nu på den eller de punktmængder, der afgrænses af grafen for *f*, en vandret linje med ligningen $y = k$ og evt. de to lodrette linjer med ligningerne $x = a$ og $x = b$. På nedenstående figur ligger grafen for *f* over den vandrette linje, så der kun dannes én punktmængde *M*, men grafen for *f* må også gerne krydse linjen, så der dannes flere punktmængder.



Vi vil se på rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når *M* roteres 360° omkring linjen med ligningen $y = k$. Dette omdrejningslegeme er angivet på den midterste figur ovenfor.

Men vi kan se, at dette blot er en parallelforskydning af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når punktmængden afgrænset af grafen for funktionen $f - k$, førsteaksen og de to lodrette linjer med ligningerne $x = a$ og $x = b$ roteres 360° omkring førsteaksen (angivet på figuren til højre).

Vi har altså:

Rotation omkring den vandrette linje givet ved $y = k$

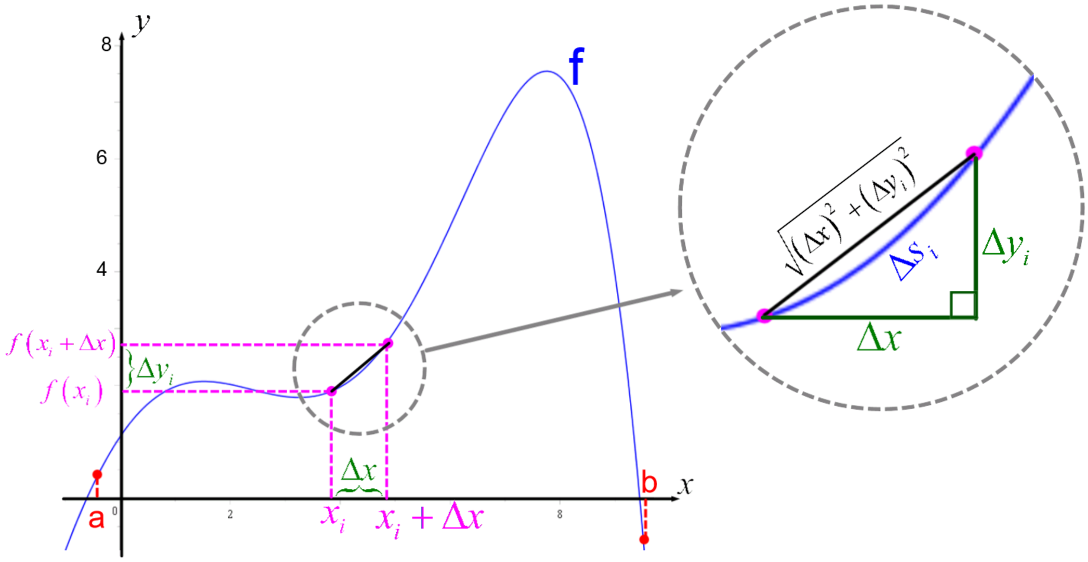
$$V = \int_a^b \pi \cdot \left(f(x) - k \right)^2 dx$$

Opgaverne 035*

Buelængde

Vi har allerede analyseret problemstillingen omkring det at finde længden af en del af en kurve i indledningen. Så vi skal nu blot tilføje grænseværdibegrebet til det allerede gennemgåede.

Vores udgangspunkt er en funktion *f*, der i intervallet $[a,b]$ er differentiabel med kontinuert afledt funktion (dvs. $f\,'$ er kontinuert). Det gælder så om at bestemme længden af den del af grafen for *f*, der ligger i intervallet $[a,b]$ (se nedenstående figur):



Vi opdelte intervallet $[a,b]$ i *n* delintervaller med bredden $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, og i hvert delinterval forbandt vi punkterne på grafen svarende til delintervallets endepunkter med rette linjestykker, og på den måde kom vi frem til en tilnærmelse til buelængden bestemte ved summen:

$$s = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x$$

I indledningen indførte vi så direkte integraltegnet sammen med en række differentialer. Men det skal vi ikke gøre nu. For nu kan vi gøre det ordentligt. **Dvs. i det følgende kommer det nye i forhold til indledningen:**

Vi skal se på grænseovergangen $\Delta x \to 0$. Problemet er, at vi nu har en sammenblanding af differentialregning og integralregning, og vi har ikke et funktionsudtryk stående i vores sum, hvilket vi skal have, hvis vi skal kunne benytte vores Sætning 3 om integrabilitet.

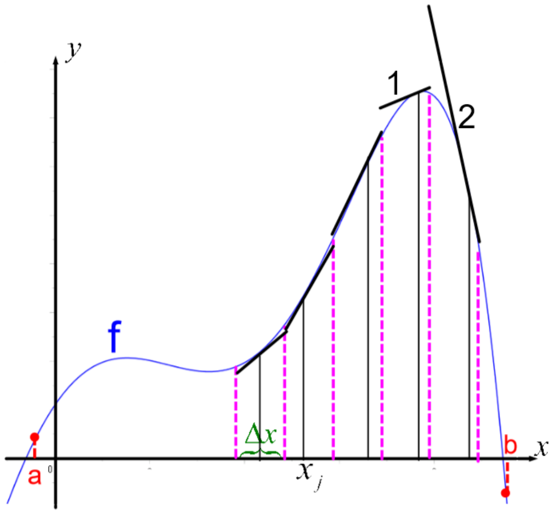
Vi gør derfor følgende: I hvert delinterval vælger vi et sted x_j, og i stedet for at konstruere et linjestykke mellem to punkter, vælger vi nu i hvert delinterval linjestykket, der er en del af tangenten til grafen for *f* i punktet $\left(x_j, f\left(x_j\right)\right)$, dvs. et linjestykke med hældningen $f\,'\left(x_j\right)$.

Bemærk, at da *f* er differentiabel i $[a,b]$, ved vi, at $f\,'\left(x_j\right)$ eksisterer for alle x_j i $[a,b]$.

Linjestykkerne skal stadig løbe i hele det pågældende delinterval, og længden af disse er altså:

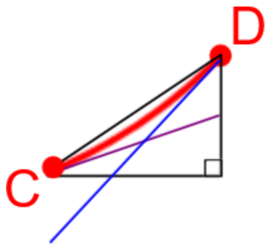
$$l_j = \sqrt{1+f\,'\left(x_j\right)^2} \cdot \Delta x$$

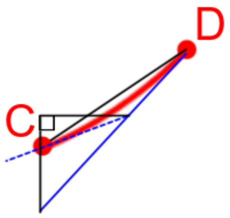
Som vist på figuren nedenfor til venstre er linjestykkernes endepunkter ikke længere forbundet. På figuren er tegnet fem eksempler på x-værdier og tilsvarende linjestykker.



Bemærk, at linjestykkerne både kan være kortere og længere end selve buestykket i intervallet. F.eks. er linjestykket markeret med 1 kortere end det tilsvarende buestykke, mens linjestykket markeret med 2 er længere end buestykket.

Det afhænger af, om man har fået valgt et x_j med en relativ lille eller stor $f'(x_j)$.





Se f.eks. på et delinterval, hvor grafen for f løber fra C til D. På dette buestykke kan tangenthældningerne antage værdier inden for et vist interval. Her findes den mindste tangenthældning i C, mens den største er i D. Tangenter i punkter mellem disse to yderpunkter vil have hældninger mellem disse (og mindst én vil have samme hældning som linjestykket CD).

Det violette linjestykke er en del af tangenten i C. Dette stykke er kortere end det røde buestykke, for det er kortere end det direkte sorte linjestykke fra C til D (det har en længde mellem den vandrette katete i den sorte retvinklede trekant og hypotenusen i denne).

Det blå linjestykke er en del af tangenten i D. Det er længere end det røde buestykke. Det kan indses ved at forestille sig, at man et eller andet sted på det blå linjestykke "knækkede" det, så det også gik gennem C (angivet med den stiplede linje). Den blå linje løber på ydersiden af det røde buestykke, så alene det blå stykke fra D til C er længere end det røde buestykke, og den stiplede linje må fortsætte gennem punktet C (begrundet med den retvinklede trekant).

Pointen er, at

$$S = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{1 + f'(x_j)^2} \cdot \Delta x$$

er en middelsum for funktionen $\sqrt{1+(f')^2}$ over $[a,b]$. Man kunne også danne en undersum ved at vælge x-værdier med de mindste differentialkvotienter og en oversum ved at vælge x-værdier med de største differentialkvotienter, men det er ikke så vigtigt. Det væsentlige er, at $\sqrt{1+(f')^2}$ er kontinuert, fordi f' er kontinuert (Sætning 2 med tilføjelser), og derfor er $\sqrt{1+(f')^2}$ integrabel, og:

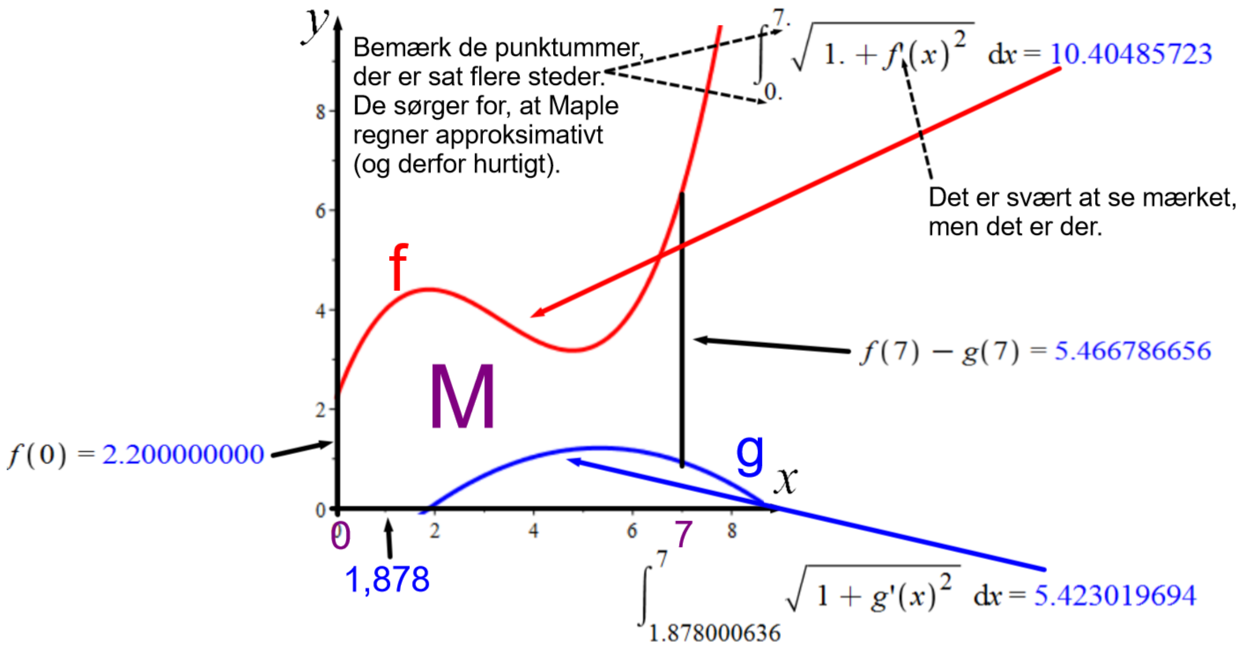
$$\sum_{j=1}^{n} \sqrt{1 + f'(x_j)^2} \cdot \Delta x \to \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx \quad \text{for} \quad \Delta x \to 0$$

Vores grænseværdi svarer til buelængden (vi kunne klemme buelængden inde mellem undersummen og oversummen). Og vi har dermed vist sætningen:

Sætning 7 (buelængde): For en funktion f, der er differentiabel med kontinuert afledt $f\,'$ i intervallet $[a,b]$, er længden l_{bue} af stykket af grafen for f mellem punkterne $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ givet ved:

$$l_{bue} = \int_a^b \sqrt{1+f\,'(x)^2}\,dx$$

Eksempel 44: Vi ønsker at bestemme omkredsen af punktmængden fra Eksempel 43. Omkredsen består af 5 kurver, hvoraf 3 af dem er rette linjestykker. Det er kun til de buede kurver fra f og g, at vi skal bruge Sætning 7. I Maple er funktionerne defineret, inden nedenstående udregninger foretages:



Lægges de fem længder sammen, får man omkredsen $O = 25{,}372664$

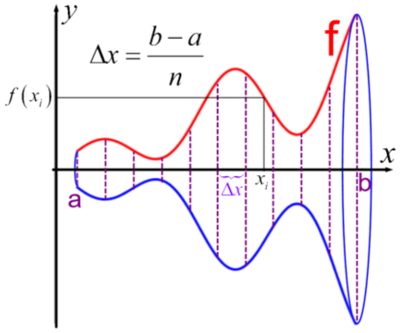
Opgaverne 037*

Med det bestemte integral er vi i stand til at bestemme arealer af punktmængder, og ved buelængdeberegninger kan vi bestemme omkredsen af disse punktmængder.

Vi er også i stand til at bestemme rumfang af omdrejningslegemer, og vi skal nu se, hvordan vi kan bestemme overfladearealet af disse omdrejningslegemer.

Overfladeareal

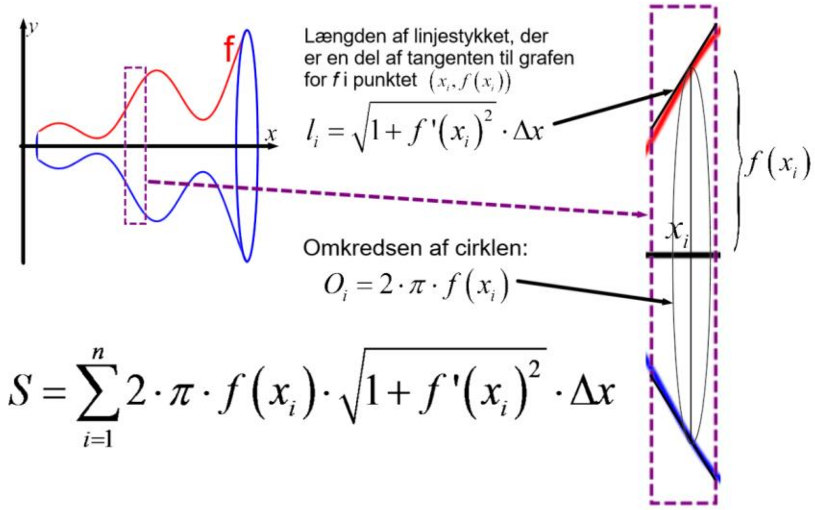
Vi ønsker at bestemme overfladearealet af et omdrejningslegeme. Vi ser på en funktion *f*, der i $[a,b]$ er ikke-negativ og differentiabel med kontinuert afledt funktion f'.



Vi konstruerer omdrejningslegemet på samme måde som tidligere og opdeler igen intervallet $[a,b]$ i *n* delintervaller med bredden $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. I hvert delinterval vælges et argument x_i.

Vi udnytter nu vores viden fra udledningen af udtrykket for buelængder, da vi i hvert delinterval indtegner en del af tangenten til grafen for *f* i punktet $(x_i, f(x_i))$ - se figuren til højre nedenfor. Vi ved, at dette linjestykke både kan være længere og kortere end buestykket (den røde bue).

Vi konstruerer også en cirkel med radius $f(x_i)$. Omkredsen af denne cirkel kan både være længere og kortere end den gennemsnitlige omkreds af de cirkler, der kunne konstrueres i det pågældende interval.



Dermed kan $2\cdot\pi\cdot f(x_i)\cdot\sqrt{1+f'(x_i)^2}\cdot\Delta x$ både være større og mindre end den del af overfladearealet, der ligger i det pågældende interval. Dermed er

$$S = \sum_{i=1}^{n} 2\cdot\pi\cdot f(x_i)\cdot\sqrt{1+f'(x_i)^2}\cdot\Delta x$$

en middelsum (I dette tilfælde skulle man ved undersummer og oversummer tage højde for hele udtrykket $2\cdot\pi\cdot f(x_i)\cdot\sqrt{1+f'(x_i)^2}\cdot\Delta x$). Vi ved, at funktionen $2\cdot\pi\cdot f\cdot\sqrt{1+(f')^2}$ er kontinuert og dermed integrabel over $[a,b]$, dvs.:

$$\sum_{i=1}^{n} 2\cdot\pi\cdot f(x_i)\cdot\sqrt{1+f'(x_i)^2}\cdot\Delta x \to \int_a^b 2\cdot\pi\cdot f(x)\cdot\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \text{ for } \Delta x \to 0$$

Vi har altså vist følgende sætning:

Sætning 8: Lad *f* være en funktion, der er differentiabel med kontinuert afledt $f\,'$ og ikke-negativ i intervallet $[a,b]$. Overfladearealet af det omdrejningslegeme, der dannes, når punktmængden, der afgrænses af grafen for *f*, førsteaksen og evt. linjerne med ligningerne $x=a$ og $x=b$, roteres 360° omkring *x*-aksen, er:

$$A_{overflade}=\int_a^b 2\cdot\pi\cdot f(x)\cdot\sqrt{1+f\,'(x)^2}\,dx$$

(Hvis *f* er negativ, kan man anvende den numeriske værdi af funktionsværdien)

Eksempel 45: Vi vil bestemme overfladearealet af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når den punktmængde, der i intervallet $[0,\pi]$ afgrænses af grafen for $f: x \mapsto \sin(x)$ og førsteaksen, roteres 360° omkring førsteaksen.
Vi foretager udregningen i Maple:

$f := x \to \sin(x)$:

$$A_{overflade}=\int_0^\pi 2\cdot\pi\cdot f(x)\cdot\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = 2\,\pi\,\sqrt{2}+2\,\pi\,\ln\left(1+\sqrt{2}\right) \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 14.42359945$$

Eksempel 46: Vi vil bestemme overfladearealet af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når den punktmængde, der i intervallet $[-r, r]$ afgrænses af grafen for $f : x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$ og førsteaksen, roteres 360° omkring førsteaksen.
Vi foretager udregningen i Maple:

$$f := x \to \sqrt{r^2 - x^2} :$$

$$A_{overflade} = \int_{-r}^{r} 2 \cdot \pi \cdot f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx = \int_{-r}^{r} 2\,\pi \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1. + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \, dx \xrightarrow{\text{assuming positive}} 12.56637061\, r^2$$

$$evalf(4 \cdot \pi) = 12.56637062$$

Vi genkender formlen for overfladearealet af en kugle med radius *r*: $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$
Egentlig er *f* ikke differentiabel i $[-r, r]$, men kun i $]-r, r[$. Men det har ikke nogen betydning for overfladearealet.

Ligesom med rumfanget af en kugle kan man også beregne overfladearealet af kuglen i hånden, når man har lært at udregne bestemte integraler ved hjælp af stamfunktioner. Man skal desuden kende kædereglen, så man kan differentiere en sammensat funktion:

$$f'(x) = -2x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$A_{overflade} = \int_{-r}^{r} 2\pi\, f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx = \int_{-r}^{r} 2\pi \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{(-x)^2}{\sqrt{r^2 - x^2}^{\,2}}} \, dx =$$

$$\int_{-r}^{r} 2\pi \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \, dx = \int_{-r}^{r} 2\pi \cdot \sqrt{(r^2 - x^2) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}\right)} \, dx =$$

$$\int_{-r}^{r} 2\pi \cdot \sqrt{r^2 - x^2 + x^2} \, dx = \int_{-r}^{r} 2\pi \cdot r \, dx = [2\pi r x]_{-r}^{r} = 2\pi r \cdot r - 2\pi r \cdot (-r) = 4\pi r^2$$

Opgaverne 038* og 039*

Opsamling

Vi har nu set, hvad det bestemte integral kan bruges til. Men husk på, at det for os endnu kun er et symbol, og at vi kun er i stand til at bruge det, fordi Maple kan foretage alle udregningerne.

Som tidligere nævnt skyldes problemet, at vi godt nok ved, at vores middelsummer har en grænseværdi, som vi betegner *det bestemte integral*, men vi ved ikke, hvad denne grænseværdi er, for middelsummer er ikke lette at arbejde med i praksis.

Dette problem skal vi dog nu tage hul på at løse. Og det er her, en af de allerstørste matematiske erkendelser kommer på banen. For vi skal opdage, at vi bliver i stand til at bestemme integraler ud fra viden om differentialkvotienter. Og når vi har opdaget det, tager vi hul på at bestemme afledede funktioner til samtlige funktioner, vi arbejder med.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Karl Weierstrass (1815-1897)