INFINITESIMALREGNING

del 2

Stamfunktioner og differentialkvotienter

Regneregler

Optimering

Taylorrækker

x-klasserne

Gammel Hellerup Gymnasium

Marts 2021 ; Michael Szymanski ; mz@ghg.dk

Indholdsfortegnelse

STAMFUNKTIONER

I forbindelse med differentialregning indførte vi for funktionen *f* differentialkvotienter i x_0, der er tal, som angiver hældningen for tangenten til grafen for *f* i punktet $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$.

Derefter indførte vi den afledede funktion af *f*, der er en funktion, hvis funktionsværdier er de pågældende differentialkvotienter.

Inden for integralregning har vi for funktionen *f* indført det bestemte integral over et interval $\left[a,b\right]$, og det er et tal, der angiver det samlede areal mellem grafen og førsteaksen **regnet med fortegn**.

Vi skal nu indføre en funktion, hvis funktionsværdier kan anvendes til at angive det bestemte integral (og dermed et areal).

Der kommer dog den forskel fra differentialregning, at vi nu får brug for 2 funktionsværdier, da vi skal afgrænse det interval, som arealet er placeret inden for, mens vi inden for differentialregning kun har brug for én funktionsværdi, da vi her finder tangenthældningen i et punkt. Og en anden forskel er, at mens vores afledede funktion er entydig bestemt, dækker vores nye begreb over uendelig mange funktioner, der dog – som vi senere får bevist – kun afviger fra hinanden ved en konstant.

Definition 16 (Stamfunktion): Lad funktionen *f* være kontinuert i intervallet *I*.
En *stamfunktion* til *f* i *I* er en funktion $F: I \to \mathbb{R}$ givet ved

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f\left(t\right)dt + k \qquad ; \; x_0 \in I \; ; \; k \text{ er en (reel) konstant}$$

Der er flere ting at bemærke ved denne definition:

- Vi har skiftet vores integrationsvariabel, så vi integrerer med hensyn til *t*. Det skyldes, at vi ser på funktionen *F* med den uafhængige variabel *x*, og når vi skal finde en funktionsværdi $F\left(x\right)$, kommer *x* til at fungere som den faste, øvre grænse, dvs. vi integrerer fra x_0 til *x*, og så kan *x* jo ikke også angive alle punkterne mellem x_0 og *x*. Det lader vi *t* om. Dvs. *t* repræsenterer alle tallene i intervallet $\left[x_0, x\right]$.
- *k* er en konstant, dvs. et eller andet reelt tal.
- *f* skal være kontinuert i *I*, så vi ved, at *f* er integrabel. Men vi har jo tidligere forudsat, at vores interval skulle være et lukket, begrænset interval $\left[a,b\right]$, mens *I* godt kan være $\mathbb{R}$. Det skyldes, at når x_0 er valgt, så vil $\left[x_0, x\right]$ eller $\left[x, x_0\right]$ udgøre det lukkede, begrænsede interval, dvs. vores bestemte integral er veldefineret.
- Pga. vores Definition 15 kan vores argumenter ligge i hele *I*, dvs. vi kan både have *x*-værdier, der er mindre end, større end og lig x_0.
- $F\left(x_0\right) = k$ (ifølge Definition 15)

Vores stamfunktioners værdier svarer ikke direkte til de arealer i et interval $[a,b]$, som vi er vant til at finde, men det råder vi bod på med følgende sætning:

Sætning 9: Lad funktionen *f* være kontinuert i *I*. Så gælder for alle $a,b \in I$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

, netop hvis *F* er en stamfunktion til *f*.

Bevis 9: Da det er en ”netop hvis”-sætning, skal vi vise to veje.

Vi viser først "$\Leftarrow$", dvs. at hvis *F* er en stamfunktion, så gælder udsagnet for alle $a,b \in I$.

Vi lader *F* være en vilkårlig stamfunktion til *f*, dvs. x_0 er vilkårlig valgt, og *k* er en konstant. Ved hjælp af indskudsreglen og definitionerne 15 og 16 kan vi så for vilkårlige $a,b \in I$ omskrive højresiden i Sætning 9:

$$F(b)-F(a) = \left(\int_{x_0}^{b} f(x)dx + k\right) - \left(\int_{x_0}^{a} f(x)dx + k\right) = \int_{x_0}^{b} f(x)dx - \int_{x_0}^{a} f(x)dx =$$

$$-\int_{x_0}^{a} f(x)dx + \int_{x_0}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Vi skal nu vise "$\Rightarrow$". Dvs. vi antager, at vi har en funktion *F*, hvor udsagnet gælder for alle $a,b \in I$, og vi skal så argumentere for, at *F* må være en stamfunktion.

Da udsagnet gælder for alle $a,b \in I$, gælder det også for det faste tal $x_0 \in I$ samt ethvert andet tal *x* i *I*, dvs. vi har:

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \qquad \Leftrightarrow \qquad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + F(x_0)$$

Da x_0 er et fast tal, er $F(x_0)$ en konstant, dvs. *F* opfylder betingelsen (Definition 16) for at være en stamfunktion.

Vi kan altså både angive det bestemte integral som $\int_a^b f(x)dx$ og som $F(b)-F(a)$, hvor *F* er en vilkårlig stamfunktion til *f*. Bemærk også, at der i Sætning 9 ikke forudsættes noget om beliggenheden af *a* og *b*.

Opgaverne 048*

Det bestemte integral er som nævnt mange gange et tal. Vi indfører nu det ubestemte integral, der er en familie af funktioner:

Definition 17: For funktionen *f* er begreberne *en stamfunktion til f* og *et ubestemt integral af f* synonymer. Dvs. de dækker over præcis det samme.
Med symbolet

$$\int f(x)dx$$

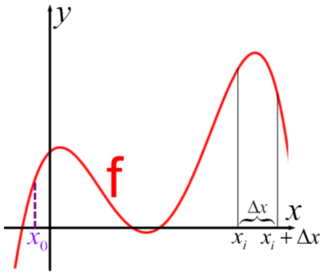
angiver man *det ubestemte integral af f*, der er funktionsfamilien bestående af samtlige stamfunktioner til *f*.

Vi skal senere se, at der gælder en meget simpel matematisk sammenhæng mellem alle de forskellige stamfunktioner til *f*, og derfor vil vi kunne angive *det ubestemte integral af f* på en meget simpel måde. Men først skal vi have vist den helt centrale og ekstremt nyttige …

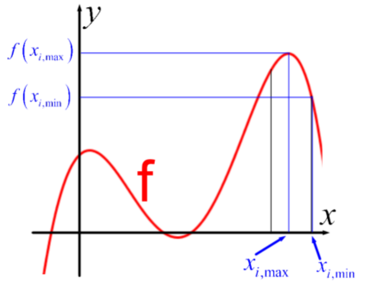
Sætning 10 (Infinitesimalregningens Fundamentalsætning):
Lad funktionen *f* være kontinuert i *I*. Der gælder så:
F er en stamfunktion til *f*, netop hvis $F'(x) = f(x)$

Bevis 10: Vi ser på en funktion *f*, der er kontinuert i intervallet *I*.

Først vises det, at hvis *F* er en stamfunktion til *f*, så gælder $F'(x) = f(x)$:

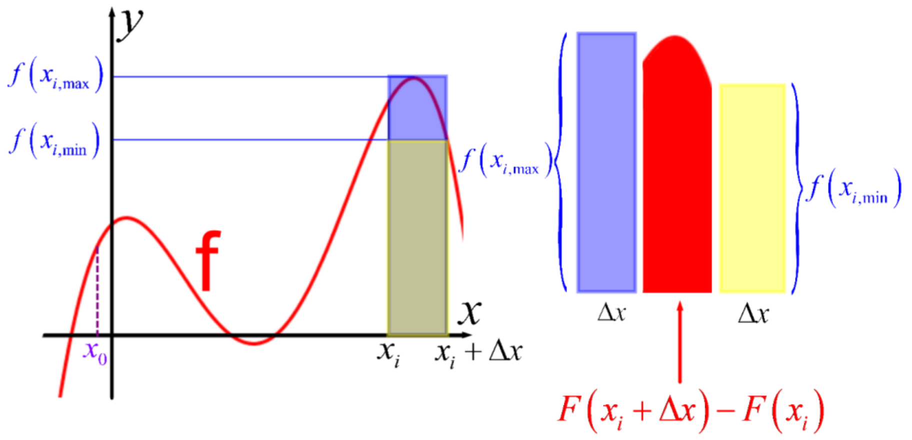


På figuren til venstre ses grafen for *f*. Vi lader *F* være en vilkårlig stamfunktion til *f*, dvs. $x_0 \in I$ vælges vilkårligt og $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + k$. Vi ser på et $x_i \in I$ og danner desuden stedet $x_i + \Delta x \in I$, så vi har intervallet $[x_i, x_i + \Delta x]$.



I dette interval findes en største og en mindste funktionsværdi, og argumenterne $x_{i,\max}$ og $x_{i,\min}$ er de steder, hvor disse funktionsværdier antages. På figuren til venstre falder $x_{i,\min}$ sammen med $x_i + \Delta x$, men det gælder (selvfølgelig) ikke generelt.

Vi skal nu til at sammenligne arealer. Vi danner et rektangel med bredden Δx og højden $f(x_{i,\max})$ (det blå rektangel på figuren nedenfor) og et rektangel med bredden Δx og højden $f(x_{i,\min})$ (vist med gul). Desuden udnytter vi, at $F(x)$ angiver arealet mellem grafen for *f* og førsteaksen (regnet med fortegn) i intervallet $[x_0, x]$ (eller $[x, x_0]$). Det fortæller os, at $F(x_i + \Delta x) - F(x_i)$ angiver det areal, der i intervallet $[x_i, x_i + \Delta x]$ afgrænses af grafen for *f* og førsteaksen (regnet med fortegn), dvs. arealet af den punktmængde, der er angivet med rødt nedenfor.



En sammenligning af arealer giver os:

$$A_{gul} \le A_{rød} \le A_{blå}$$

$$f\left(x_{i,\min}\right) \cdot \Delta x \le F\left(x_i + \Delta x\right) - F\left(x_i\right) \le f\left(x_{i,\max}\right) \cdot \Delta x$$

Hvis vi forudsætter, at $\Delta x > 0$, kan vi forkorte med denne størrelse i begge uligheder uden at skulle vende ulighedstegnene, og vi får så:

$$f\left(x_{i,\min}\right) \le \frac{F\left(x_i + \Delta x\right) - F\left(x_i\right)}{\Delta x} \le f\left(x_{i,\max}\right)$$

Vi bemærker, at udtrykket $\frac{F\left(x_i + \Delta x\right) - F\left(x_i\right)}{\Delta x}$ er *F*'s differenskvotient for x_i, og vi har fået klemt den inde mellem to funktionsværdier. Lad os se på, hvad der sker ved grænseovergangen $\Delta x \to 0$.

Da *f* er kontinuert, vil $f\left(x_{i,\min}\right) \to f\left(x_i\right)$ og $f\left(x_{i,\max}\right) \to f\left(x_i\right)$ for $\Delta x \to 0$, for $x_{i,\max}$ og $x_{i,\min}$ ligger begge mellem x_i og $x_i + \Delta x$ og vil altså ligge med $\left|x_{i,\max} - x_i\right| < \delta$ og $\left|x_{i,\min} - x_i\right| < \delta$, hvor δ er det positive tal, der indgår i definitionen på kontinuitet, og som sikrer, at hvis blot afstanden til x_i er mindre end dette δ, så er funktionsværdiens afstand til $f\left(x_i\right)$ mindre end fjendens udleverede ε.

Og da vores differenskvotient er klemt inde mellem $f\left(x_{i,\min}\right)$ og $f\left(x_{i,\max}\right)$, må også

$$\frac{F\left(x_i + \Delta x\right) - F\left(x_i\right)}{\Delta x} \to f\left(x_i\right) \text{ for } \Delta x \to 0.$$

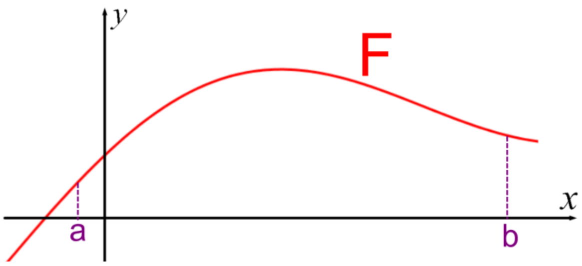
Men dermed kan vi altså se, at $\frac{F\left(x_i + \Delta x\right) - F\left(x_i\right)}{\Delta x}$ har en grænseværdi for $\Delta x \to 0$, og vi ved pr. definition, at denne grænseværdi er differentialkvotienten i x_i, dvs:

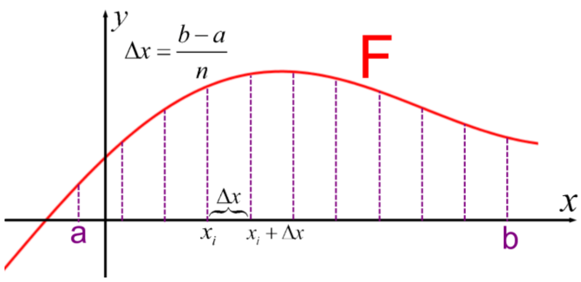
$$F'\left(x_i\right) = f\left(x_i\right)$$

Da vores x_i var vilkårlig valgt, har vi dermed vist, at den afledede funktion af en stamfunktion til *f* er *f*. Det gør ikke nogen forskel, om x_i ligger til højre eller venstre for x_0, men hvis Δx er negativ, skal ulighedstegnene vendes, når der forkortes med Δx. Det ændrer dog ikke noget ved konklusionen, for vores differenskvotient vil stadig være klemt inde mellem to størrelser, der har samme grænseværdi for $\Delta x \to 0$.

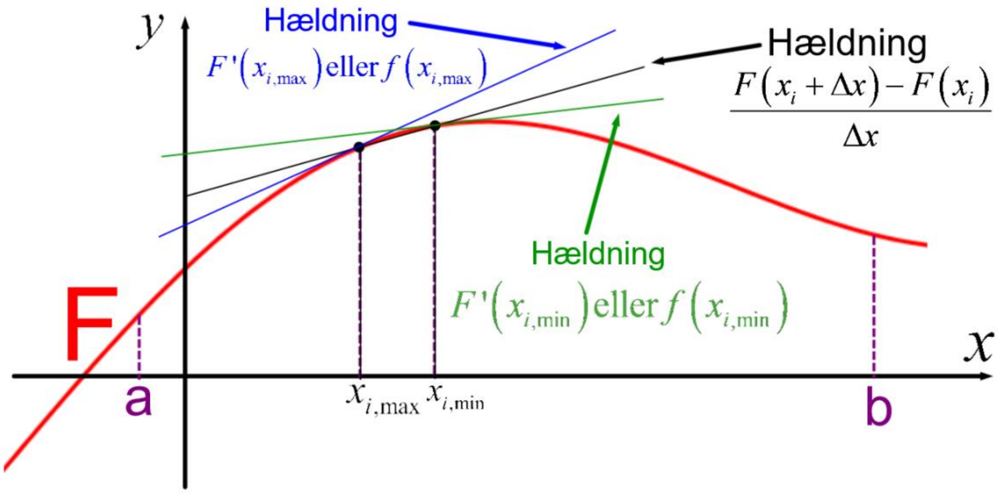
Vi skal nu vise "$\Leftarrow$", dvs. at hvis $F'\left(x\right) = f\left(x\right)$, så er *F* en stamfunktion til *f*.

Vi ser altså på en funktion *F*, hvorom det gælder, at $F'\left(x\right) = f\left(x\right)$. Nedenfor til venstre er grafen for funktionen tegnet, og der er desuden valgt to vilkårlige $a, b \in I$. Da vi gerne vil vise, at *F* er en stamfunktion til *f* (dvs. noget med integraler), er det måske ikke så overraskende, at vi inddeler $\left[a, b\right]$ i *n* delintervaller med bredden $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ (se figuren nedenfor til højre).





I hvert delinterval ser vi nu på hældninger for tre linjer (se figuren nedenfor)



Sekanten gennem punkterne $(x_i, F(x_i))$ og $(x_i+\Delta x, F(x_i+\Delta x))$ har hældningen $\frac{F(x_i+\Delta x)-F(x_i)}{\Delta x}$, hvilket er vores differenskvotient for x_i. Den repræsenterer gennemsnitsvæksthastigheden i intervallet, så i intervallet må der både findes væksthastigheder (tangenthældninger), der er større og mindre (med mindre væksthastigheden er konstant). Vi lader nu $x_{i,\min}$ være et sted i intervallet med en tangent, hvis hældning ikke er større end nogen anden tangenthældning i intervallet. Tilsvarende er $x_{i,\max}$ et sted med en tangenthældning, der ikke er mindre end nogen anden tangenthældning. På figuren ovenfor falder disse steder sammen med x_i og $x_i+\Delta x$, men i princippet kan de ligge hvor som helst i intervallet. Tangenthældningerne er pr. definition givet ved $F'(x_{i,\min})$ - angivet med grønt på figuren – og $F'(x_{i,\max})$ - angivet med blåt.

Da vi har antaget, at $F'(x)=f(x)$, vil disse tangenthældninger også svare til $f(x_{i,\min})$ og $f(x_{i,\max})$. Og vi har altså i hvert delinterval:

$$f(x_{i,\min}) \le \frac{F(x_i+\Delta x)-F(x_i)}{\Delta x} \le f(x_{i,\max})$$

Vi forlænger i begge uligheder med det positive tal Δx og får:

$$f(x_{i,\min})\cdot\Delta x \le F(x_i+\Delta x)-F(x_i) \le f(x_{i,\max})\cdot\Delta x$$

Vi summerer nu disse bidrag, og da ulighederne gælder i alle delintervaller, gælder også:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i,\min})\cdot\Delta x \le \sum_{i=1}^{n}\left(F(x_i+\Delta x)-F(x_i)\right) \le \sum_{i=1}^{n} f(x_{i,\max})\cdot\Delta x$$

Lad os først se på den midterste sum. Summen $\sum_{i=1}^{n}\left(F(x_i+\Delta x)-F(x_i)\right)$ kan faktisk angives ret simpelt. For bemærk, at $x_i+\Delta x = x_{i+1}$, da Δx netop er bredden af delintervallerne:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(F(x_i+\Delta x)-F(x_i)\right)=\left(F(x_2)-F(x_1)\right)+\left(F(x_3)-F(x_2)\right)+\left(F(x_4)-F(x_3)\right)+\ldots+\left(F(x_{n+1})-F(x_n)\right)$$

Som det fremgår, indgår samtlige led to gange i summen bortset fra $F(x_{n+1})$ og $F(x_1)$, og alle disse dobbeltoptrædende led optræder med både positivt og negativt fortegn, dvs. de ophæver hinanden. Da $x_1=a$ og $x_{n+1}=b$, har man derfor:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(F\left(x_i+\Delta x\right)-F\left(x_i\right)\right)=F(b)-F(a)$$

Og bemærk, at dette vel at mærke gælder uanset antallet af delintervaller.

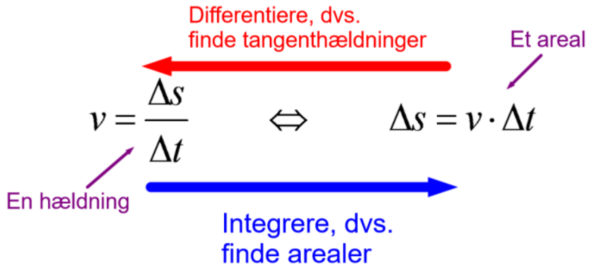
Udtrykkene $\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i,\min}\right)\cdot\Delta x$ og $\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i,\max}\right)\cdot\Delta x$ genkender vi som henholdsvis vores undersum og oversum fra Bevis 3, for $f\left(x_{i,\max}\right)\cdot\Delta x$ og $f\left(x_{i,\min}\right)\cdot\Delta x$ er jo arealerne af de rektangler, der er henholdsvis større og mindre end arealet mellem grafen for *f* og førsteaksen (regnet med fortegn). Og da *f* er kontinuert i *I*, er *f* integrabel over *I*, dvs. undersum og oversum har den samme grænseværdi for $\Delta x \to 0$, nemlig $\int_a^b f(x)\,dx$.

Da $\sum_{i=1}^{n}\left(F\left(x_i+\Delta x\right)-F\left(x_i\right)\right)$ er klemt inde mellem to udtryk, der begge har grænseværdien $\int_a^b f(x)\,dx$ for $\Delta x \to 0$, må dette udtryk svare til grænseværdien, dvs.:

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

Da det gælder for alle $a,b\in I$, har vi ifølge Sætning 9, at *F* er en stamfunktion til *f*.

Bemærk, at den centrale pointe i sætningen (og beviset) er:



Beviset indeholder selvfølgelig en masse med summer og grænseværdier, men bemærk ved ulighederne i beviset, at det netop er ovenstående operation, der foretages.

Infinitesimalregningens Fundamentalsætning udtrykkes også i den helt centrale …

Integrationsprøven: $F(x)=\int f(x)\,dx \quad\Leftrightarrow\quad F'(x)=f(x)$

Den er vigtig, fordi den fortæller os, hvordan vi stort set altid vil gribe sagen an. Hvis vi vil undersøge, om en funktion *F* er en stamfunktion til funktionen *f*, så gør vi det ved at differentiere *F* og se, om vi får *f*.

Det er på denne form, man oftest ser integrationsprøven, men det er (i modsætning til Sætning 10) egentlig ikke en korrekt matematisk opskrivning. For udsagnet $F(x)=\int f(x)\,dx$ lider under, at højresiden angiver familien bestående af samtlige stamfunktioner til *f*, mens venstresiden repræsenterer én vilkårlig stamfunktion til *f*.

REGNEREGLER

Opsamling: Med Infinitesimalregningens Fundamentalsætning har vi fået hele grundlaget for infinitesimalregningen på plads. Læg specielt mærke til to ting:

1) En stamfunktion *F* til funktionen *f* kendes ved, at den differentieret giver *f*.
2) Vi kan bestemme arealer (bestemte integraler) ud fra en vilkårlig stamfunktion.

Nogle vil måske indvende, at dette ikke er så vigtigt, da vi jo allerede har bestemt masser af arealer og rumfang, men til det må vi svare: ”Nej! Det har vi ikke. Det var Maple, der gjorde det.” For husk på, at vi ikke selv har været i stand til at bestemme værdierne af de bestemte integraler. Men det skal vi blive nu, netop fordi vi i 1) har fået en anvisning på, hvordan vi finder stamfunktioner, og fordi 2) fortæller os, at de kan bruges til at bestemme arealer.

Vi tager nu fat på at bestemme afledede funktioner og stamfunktioner til alle vores standardfunktionstyper samt regneregler for differentiation og integration. Følgende er en oversigt over alle de funktioner, du skal kunne differentiere og integrere. Kravet er meget simpelt:

Du skal kunne huske alt det, der er markeret med gult.

Stamfunktioner	Funktion		Afledede funktion
$\int k \cdot dx = k \cdot x + c$	Konstantfunktion: $x \mapsto k$		$(k)' = 0$
$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1} + c$	Potensfunktion: $x \mapsto x^a$		$(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$
$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + c$	Herunder	$x \mapsto \sqrt{x}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x \rvert + c$		$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$	Eksponentialfunktion: $x \mapsto a^x$		$(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$
$\int \mathrm{e}^x dx = \mathrm{e}^x + c$	Herunder	$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$
$\int \log_a(x) dx = \log_a(\mathrm{e}) \cdot x \cdot (\ln(x) - 1) + c$	Logaritmefunktion: $x \mapsto \log_a(x)$		$(\log_a(x))' = \frac{\log_a(\mathrm{e})}{x}$
$\int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - x + c$	Herunder	$x \mapsto \ln(x)$	$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$	Trigonometrisk funktion: $x \mapsto \sin(x)$		$(\sin(x))' = \cos(x)$
$\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$	Herunder	$x \mapsto \cos(x)$	$(\cos(x))' = -\sin(x)$
$\int \tan(x) dx = -\ln\lvert \cos(x) \rvert + c$	Herunder	$x \mapsto \tan(x)$	$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$
	Specielle: $x \mapsto x^x$		$(x^x)' = (\ln(x) + 1) \cdot x^x$
	$x \mapsto x^{\sin(x)}$		$(x^{\sin(x)})' = \left(\cos(x) \cdot \ln(x) + \frac{\sin(x)}{x}\right) \cdot x^{\sin(x)}$

Opgaverne 050*

Med stamfunktioner er pointen, at du skal kende reglerne for differentiation og så anvende tankegangen fra integrationsprøven, dvs. tænke:

Hvad er det for en funktion F, der differentieret giver den udleverede funktion f ?

Udregninger af bestemte integraler

Ifølge Sætning 9 er $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, hvor *F* er en vilkårlig stamfunktion til *f*. Vi indfører nu følgende skrivemåde for det bestemte integral:

En skrivemåde: $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$

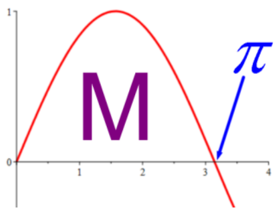
Bemærk, at dette blot er en ekstra skrivemåde. Den indføres, fordi man ellers ikke i udregningen kan se forskriften for stamfunktionen. Vi ved, at vi kan anvende en hvilken som helst stamfunktion, og derfor **vælger vi altid for nemheds skyld stamfunktionen uden konstant (dvs. $c = 0$).**

Eksempel 47: Vi vil bestemme $\int_1^4 x^2 dx$.

Da $x \mapsto \frac{1}{3}x^3$ er den simpleste stamfunktion (den uden konstant), skriver vi:

$$\int_1^4 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^4 = \frac{1}{3}\cdot 4^3 - \frac{1}{3}\cdot 1^3 = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = \frac{63}{3} = 21$$

Eksempel 48: Vi vil bestemme arealet af den punktmængde *M*, der i intervallet $[0, \pi]$ afgrænses af grafen for $x \mapsto \sin(x)$ og førsteaksen:



Vi vælger igen den simpleste stamfunktion $x \mapsto -\cos(x)$:

$$A_M = \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = \left[-\cos(x)\right]_0^{\pi} =$$
$$-\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) - (-1) = 1 + 1 = 2$$

Opgaverne 051*

Vi tager nu fat på at udlede regneregler for afledede funktioner og integraler.

Funktion multipliceret med konstant

Sætning 11: Lad funktionen *f* være differentiabel (evt. blot kontinuert for integralerne). Der gælder så følgende sætninger, hvis *k* er en konstant.

$$(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x) \qquad \int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx \qquad \int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Sætningen siger altså, at vi både ved differentiation og integration skal lade en eventuel konstant stå og kun arbejde med den del, der indeholder vores variabel.

Der er stillet som krav, at *f* skal være differentiabel (eller kontinuert), men disse krav skal (selvfølgelig) kun være opfyldt i de områder, man arbejder med. F.eks. er kvadratrodsfunktionen ikke differentiabel, da den ikke er differentiabel i 0, men sætningen gælder også for denne, når man blot indskrænker sig til at se på positive reelle tal.

Bevis 11: Vi antager, at *f* er differentiabel og dermed differentiabel i ethvert x_0 tilhørende *f* 's definitionsmængde. Pr. definition (Definition 9) ved vi så, at differenskvotienten for x_0 har en grænseværdi for $\Delta x \to 0$, og at denne grænseværdi er $f'(x_0)$, dvs.:

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0) \text{ for } \Delta x \to 0$$

Vi ser nu på vores funktion $k \cdot f$, der er vores oprindelige funktion multipliceret med en konstant. Spørgsmålet er, om denne funktion også er differentiabel, og i så fald hvad differentialkvotienten er. For at få svar på dette skal vi opskrive differenskvotienten:

$$\frac{(k\cdot f)(x_0+\Delta x)-(k\cdot f)(x_0)}{\Delta x} = \frac{k\cdot f(x_0+\Delta x)-k\cdot f(x_0)}{\Delta x} = k\cdot\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Det første lighedstegn kommer af, at det jo simpelthen er det, man mener med *en funktion multipliceret med en konstant*. Man multiplicerer funktionsværdierne med konstanten.

Vi ser nu på det sidste udtryk. Har det en grænseværdi for $\Delta x \to 0$?

Svaret er "Ja". For da den anden faktor er den differenskvotient, som, vi ved, har grænseværdien $f'(x_0)$ for $\Delta x \to 0$, så har vi ifølge Sætning 1 om grænseværdier, at:

$$k\cdot\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \to k\cdot f'(x_0) \text{ for } \Delta x \to 0$$

Og dermed er første del af sætningen vist.

Vi vil nu vise $\int k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int f(x)\,dx$, og vi anvender integrationsprøven til dette. Vi viser nemlig, at højresiden er en stamfunktion til $k\cdot f$ (hvilket venstresiden jo pr. definition er), ved at differentiere den og se, at vi får $k\cdot f(x)$.

$$\left(k\cdot\int f(x)\,dx\right)' \underset{\text{Den netop viste sætning}}{=} k\cdot\left(\int f(x)\,dx\right)' = k\cdot f(x)$$

Hermed er det ønskede vist. Bemærk, hvordan Infinitesimalregningens Fundamentalsætning (Integrationsprøven) gør mange beviser inden for integralregning ret nemme, da man blot anvender den tilsvarende regel fra differentialregning.

Til sidst vises $\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$. Vi udnytter den netop viste sætning, der siger, at hvis *F* er en stamfunktion til *f*, så er $k\cdot F$ en stamfunktion til $k\cdot f$. For hermed kan vi begynde med venstresiden og regne os frem til højresiden:

$$\int_a^b k\cdot f(x)dx = \left[k\cdot F(x)\right]_a^b = k\cdot F(b)-k\cdot F(a) = k\cdot\left(F(b)-F(a)\right) = k\cdot\left[F(x)\right]_a^b = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

Eksempel 49: Vi ser på nogle udregninger, der anvender sætningen.

$$\left(3\cdot x^5\right)' = 3\cdot\left(x^5\right)' = 3\cdot 5x^4 = 15x^4$$

$$\frac{d\left(-7\cdot\cos(x)\right)}{dx} = -7\cdot\frac{d\left(\cos(x)\right)}{dx} = -7\cdot\left(-\sin(x)\right) = 7\cdot\sin(x)$$

$$\int 2\cdot e^x dx = 2\cdot\int e^x dx = 2\cdot\left(e^x+c\right) = 2\cdot e^x + 2c = 2\cdot e^x + c_1$$

$$\int_1^2 4x^3 dx = 4\cdot\int_1^2 x^3 dx = 4\cdot\left[\frac{1}{4}\cdot x^4\right]_1^2 = 4\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot 2^4 - \frac{1}{4}\cdot 1^4\right) = 4\cdot\frac{15}{4} = 15$$

Opgaverne 052*

Sumfunktion og differensfunktion

Sætning 12: Lad *f* og *g* være differentiable (evt. blot kontinuerte for integralerne). Så gælder:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\int (f \pm g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

$$\int_a^b (f \pm g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

Dette er sætningerne om **ledvis** differentiation og integration. Læg godt mærke til dem. Når du skal differentiere eller integrere et funktionsudtryk, tager du altså simpelthen **hvert led for sig**.

Bevis 12: Vi antager, at funktionerne *f* og *g* er differentiable. Dermed gælder for ethvert x_0, der tilhører begge funktioners definitionsmængder (og dermed også sumfunktionens Dm):

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0) \text{ for } \Delta x \to 0 \quad \text{og} \quad \frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x} \to g'(x_0) \text{ for } \Delta x \to 0$$

Vi vil gerne vise, at sumfunktionen er differentiabel i x_0 og bestemme dens differentialkvotient i x_0:

$$\frac{(f+g)(x_0+\Delta x)-(f+g)(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)+g(x_0+\Delta x)-\left(f(x_0)+g(x_0)\right)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} + \frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}$$

Vores Sætning 1 om grænseværdier fortæller os så, at da begge ovenstående led har en grænseværdi for $\Delta x \to 0$, så har summen af leddene det også, og summens grænseværdi er summen af grænseværdierne, dvs.

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} + \frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0)+g'(x_0) \text{ for } \Delta x \to 0$$

Og hermed er det ønskede vist … eller på latin *quod erat demonstrandum (q.e.d.)* "Hvilket var det, der skulle bevises".

Ledvis integration: Vi anvender integrationsprøven og den netop viste sætning om ledvis differentiation, dvs. vi differentierer højresiden og viser, at vi får venstresidens integrand:

$$\left(\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right)' \underset{\text{Ledvis differentiation}}{=} \left(\int f(x)\,dx\right)' + \left(\int g(x)\,dx\right)' = f(x)+g(x) = (f+g)(x)$$

For at vise sætningen for de bestemte integraler, lader vi *F* og *G* være stamfunktionerne til *f* og *g* og udnytter så, at vi netop har vist, at en stamfunktion til sumfunktionen $f+g$ er summen af stamfunktionerne til *f* og *g*:

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \left[F(x)+G(x)\right]_a^b = F(b)+G(b)-F(a)-G(a) =$$

$$F(b)-F(a)+G(b)-G(a) = \left[F(x)\right]_a^b + \left[G(x)\right]_a^b = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Øvelse 6: Vi har kun vist Sætning 12 for sumfunktionen. Så nu skal du naturligvis selv bevise den for differensfunktionen.

Eksempel 50: Vi bestemmer følgende differentialkvotienter og integraler:

$$f(x) = 3x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 9 \qquad f'(x) = 12x^3 + 3x^2 - 10x - 1$$

$$g(x) = e^x + \frac{5}{x} - 3\cos(x) \qquad g'(x) = e^x - \frac{5}{x^2} + 3\sin(x)$$

$$h(x) = 4x^3 - 6x^2 + 5x - 7 \qquad \int h(x)\,dx = x^4 - 2x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 7x + c$$

$$p(t) = 2t + 3e^t$$

$$\int_0^1 p(t)\,dt = \int_0^1 2t\,dt + \int_0^1 3e^t\,dt = \left[t^2\right]_0^1 + \left[3e^t\right]_0^1 = 1^2 - 0^2 + 3e^1 - 3e^0 = 3e - 2$$

Opgaverne 053*

Produktfunktion og partiel integration

Sætning 13: Lad *f* og *g* være differentiable funktioner. Da gælder (***Produktreglen***):

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Lad *f* være kontinuert, og lad *F* være en stamfunktion til *f*, og lad *g* være differentiabel med kontinuert afledede g'. Da gælder (***Partiel integration***):

$$\int (f \cdot g)(x)\,dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\,dx$$

$$\int_a^b (f \cdot g)(x)\,dx = \left[F(x) \cdot g(x)\right]_a^b - \int_a^b F(x) \cdot g'(x)\,dx$$

Reglen for differentiation af et produkt lyder altså: ”Den første differentieret ganget den anden uforandret plus den første uforandret ganget den anden differentieret”.

Eller som en eller anden har døbt den, *Frisørreglen:* ”To piger går ind til en frisør. Først klippes den første, mens den anden venter, og bagefter venter den første, mens den anden klippes.”

Eksempel 51: Vi differentierer nedenstående funktioner med produktreglen. Når du læser eksemplet, skal du inde i hovedet tænke ”Den første differentieret …”, så du får en rytme ind i sætningen:

$$\left(x^3 \cdot \sin(x)\right)' = 3x^2 \cdot \sin(x) + x^3 \cdot \cos(x)$$

$$\left(\ln(x) \cdot x^2\right)' = \frac{1}{x} \cdot x^2 + \ln(x) \cdot 2x = x + 2x\ln(x) = x \cdot \left(1 + 2 \cdot \ln(x)\right)$$

$$\frac{d\left(\sqrt{x} \cdot \cos(x)\right)}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos(x) + \sqrt{x} \cdot \left(-\sin(x)\right) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \cdot \sin(x)$$

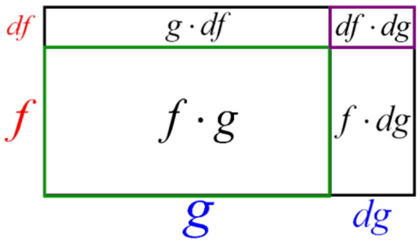
$$\frac{d\left(xe^x\right)}{dx} = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x \cdot (1 + x)$$

Opgaverne 0540*

Bemærk, hvad produktreglen fortæller os. Når vi finder $(f \cdot g)'(x_0)$, er det væksthastigheden det pågældende sted for produktfunktionen, vi finder. Og vores højreside fortæller os, at væksthastigheden for funktionen *g* skal vægtes med funktionsværdien for *f* det pågældende sted – og omvendt. Og det giver mening, da enhver ændring i *g*'s funktionsværdi skal ganges op med *f* 's funktionsværdi, når man skal se på ændringen af produktfunktionens værdier.

Hvis f.eks. $f(x_0)=10$, vil en ændring af *g*'s funktionsværdi på 2 i området omkring x_0 give en ændring af $f \cdot g$'s funktionsværdi på 20 i samme område.

Det kan illustreres geometrisk (se figuren nedenfor). Funktionsværdierne for *f* og *g* udgør bredden og længden i det grønne rektangel, og produktfunktionens værdi er arealet af det grønne rektangel.



Hvis der lægges en tilvækst på dg til *g* (angivet som et differential) og en tilvækst på *df* til *f*, så ser vi på figuren, at tilvæksten for produktfunktionen bliver $(g \cdot df + f \cdot dg + df \cdot dg)$ svarende til arealerne af de tre mindste rektangler. Men når der er tale om meget små ændringer, vil det violette rektangel være så lille, at man kan se bort fra det.

Dette er naturligvis en upræcis formulering, og vi skal nu bevise sætningen rigtigt, men ovenstående figur kan muligvis hjælpe mere på forståelsen af reglen end selve det korrekte bevis.

Bevis 13 (del 1): Vi antager, at funktionerne *f* og *g* er differentiable. Dermed gælder for ethvert x_0, der tilhører begge funktioners definitionsmængder (og dermed også produktfunktionens Dm):

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0) \text{ for } \Delta x \to 0 \quad \text{og} \quad \frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x} \to g'(x_0) \text{ for } \Delta x \to 0$$

Vi vil nu undersøge, om produktfunktionens differenskvotient for x_0 har en grænseværdi.

Undervejs i udledningen tilføjes leddene $-f(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x)+f(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x)$ i tælleren. Da leddene er ens, men med modsatte fortegn, giver de tilsammen 0, og 0 er det neutrale element ved addition og kan altså lægges til enhver størrelse uden at ændre den. Så det er i hvert fald lovligt. Men bemærk også i udregningen, hvorfor det er smart:

$$\frac{(f\cdot g)(x_0+\Delta x)-(f\cdot g)(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0+\Delta x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{\Delta x}=$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0+\Delta x)-f(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x)+f(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{\Delta x}=$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0+\Delta x)-f(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x)}{\Delta x}+\frac{f(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{\Delta x}=$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot g(x_0+\Delta x)+f(x_0)\cdot\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}\to f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0) \text{ for } \Delta x\to 0$$

Til sidst konkluderer vi, at differenskvotienten har en grænseværdi for $\Delta x \to 0$, dvs. at produktfunktionen er differentiabel i x_0 med den angivne differentialkvotient. Det følger af Sætning 1 om grænseværdier, da vi kender grænseværdierne for *f* og *g*'s differenskvotienter, og da $g(x_0+\Delta x) \to g(x_0)$ for $\Delta x \to 0$, **fordi *g* er kontinuert** (da *g* er antaget at være differentiabel).

Bemærk det afsluttende argument, hvor det udnyttes, at g er kontinuert. Det er nærliggende blot at konkludere $g(x_0+\Delta x)\to g(x_0)$ for $\Delta x\to 0$, for det ser så oplagt ud, men husk på, at dette kun gælder for kontinuerte funktioner (det er faktisk selve definitionen på kontinuitet).

Bevis 13 (del 2): Vi vil nu vise integraldelene af Sætning 13. Først ser vi på betingelserne. Pointen er, at vi skal være sikre på, at integranderne eksisterer og er integrable. Tjek, at du kan se, hvorfor vores forudsætninger sikrer dette.

Vi indleder beviset med at omskrive de to sætninger ved at samle leddene med integraltegn på den ene side og anvende Sætning 12 til at sætte integranderne sammen under ét integraltegn:

$$\int (f\cdot g)(x)dx = F(x)\cdot g(x)-\int F(x)\cdot g'(x)dx \Leftrightarrow \int \left(f(x)\cdot g(x)+F(x)\cdot g'(x)\right)dx = F(x)\cdot g(x)$$

$$\int_a^b (f\cdot g)(x)dx = \left[F(x)\cdot g(x)\right]_a^b-\int_a^b F(x)\cdot g'(x)dx \Leftrightarrow \int_a^b \left(f(x)\cdot g(x)+F(x)\cdot g'(x)\right)(x)dx = \left[F(x)\cdot g(x)\right]_a^b$$

Vi kan altså bevise begge sætninger på én gang ved at vise, at $F(x)\cdot g(x)$ er en stamfunktion til integranden, og det gør vi ved hjælp af integrationsprøven og vores netop viste produktregel for differentiation:

$$\left(F(x)\cdot g(x)\right)' = F'(x)\cdot g(x)+F(x)\cdot g'(x) = f(x)\cdot g(x)+F(x)\cdot g'(x)$$

Bemærk navnet *partiel (delvis)* integration. Det hænger – måske ikke så overraskende - sammen med sætningens indhold. For se på højresiden i udsagnet. Her er to led, hvoraf det ene er et integral. Dvs. når man integrerer et produkt, får man en integreret del, men samtidig også et nyt integral.

Umiddelbart kunne det jo dermed lyde som en ubrugelig sætning. Men pointen er, at man i nogle tilfælde kan opnå, at integranden $F(x)\cdot g'(x)$ er nemmere at arbejde videre med end den oprindelige integrand $f(x)\cdot g(x)$. Det kan ske, hvis *g'* er simplere end *g*, eller *F* er simplere end *f*, eller generelt hvis produktet af *F* og *g'* er simplere end produktet af *f* og *g*.

Sommetider kan man faktisk også få noget ud af at anvende reglen, uden at noget af ovenstående er opfyldt. Og det er her, at den gamle talemåde "*Differentiation er et håndværk, integration er en kunst*" kommer på banen. For med vores metoder vil vi kunne differentiere alle sammensætninger af vores standardfunktioner, men ikke nødvendigvis integrere dem. Nogle sammensætninger kan simpelthen ikke løses analytisk, og andre skal man være meget snedig og få gode ideer for at integrere. Udover *partiel integration* skal vi lære om *integration ved substitution*. Med disse to metoder ved hånden var der tidligere matematikere, der var specialister i at bestemme integraler (og man lavede tabeller og hele bøger alene med integraler). Vi kommer (desværre) mest til at bruge Maple til udregningerne, men vi skal alligevel lære at anvende metoderne på nogle oplagte tilfælde.

Eksempel 52: Vi vil bestemme $\int x\cdot\sin(x)dx$.

Vi bemærker, at *x* bliver simplere ved differentiation, og samtidig bliver $\sin(x)$ ikke vanskelige ved integration. Vi kan derfor forsøge os med partiel integration, hvor vi behandler *x* som funktionen *g* og $\sin(x)$ som funktionen *f* :

$$\int x\cdot\sin(x)dx = -\cos(x)\cdot x-\int -\cos(x)\cdot 1dx = -\cos(x)\cdot x+\int \cos(x)dx = -\cos(x)\cdot x+\sin(x)+c$$

Bemærk pointen: Ved den partielle integration får vi et integral, vi godt kan udregne.

Eksempel 53: Vi vil bestemme $\int_1^3 x^2 \cdot \ln(x)\,dx$.

Vi bemærker, at $\ln(x)$ bliver simplere, når den differentieres, så den behandler vi som *g*. Og bemærk, hvordan integranden som helhed bliver simplere:

$$\int_1^3 x^2 \cdot \ln(x)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \cdot \ln(x)\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x}\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \cdot \ln(x)\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{3}x^2\,dx =$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 \cdot \ln(x)\right]_1^3 - \left[\frac{1}{9}x^3\right]_1^3 = \left(\frac{1}{3}\cdot 3^3 \cdot \ln(3) - \frac{1}{3}\cdot 1^3 \cdot \ln(1)\right) - \left(\frac{1}{9}\cdot 3^3 - \frac{1}{9}\cdot 1^3\right) =$$

$$9 \cdot \ln(3) - 0 - 3 + \frac{1}{9} = 9 \cdot \ln(3) - \frac{26}{9}$$

Vi ser nu på et eksempel, hvor man anvender partiel integration to gange:

Eksempel 54: Vi vil bestemme $\int 5x^2 \cdot e^x\,dx$.

Vi bemærker, at polynomier går en grad ned, når de differentieres, og derfor kan vi bevæge os mod en konstant ved at behandle polynomiet som *g*:

$$\int 5x^2 \cdot e^x\,dx = 5e^x \cdot x^2 - \int 5e^x \cdot 2x\,dx = 5e^x \cdot x^2 - 10\int e^x \cdot x\,dx = 5e^x \cdot x^2 - \left(10 \cdot e^x \cdot x - 10\int e^x \cdot 1\,dx\right) =$$

$$5e^x \cdot x^2 - 10 \cdot e^x \cdot x + 10\int e^x\,dx = 5e^x \cdot x^2 - 10 \cdot e^x \cdot x + 10e^x + c = e^x \cdot \left(5x^2 - 10x + 10\right) + c$$

Lad os sluttelig se på et specielt tilfælde, der kan give en idé om, hvorfor integration er en kunst. I næste eksempel bevæger vi os nemlig ud ad en vej, der tilsyneladende ikke fører til noget, men så…

Eksempel 55: Vi vil bestemme $\int \sin^2(x)\,dx$.

Hvis vi vil anvende partiel integration på dette integral (men hvem kan dog få den tåbelige idé!), er der ikke så meget at rafle om. Vi må sætte den ene $\sin(x)$ til *f* og den anden til *g*:

$$\int \sin^2(x)\,dx = \int \sin(x)\cdot\sin(x)\,dx = -\cos(x)\cdot\sin(x) - \int -\cos(x)\cdot\cos(x)\,dx =$$

$$-\cos(x)\cdot\sin(x) + \int \cos(x)\cdot\cos(x)\,dx$$

Nu ser vi ud til at være gået i stå, for vi kan se, at vi ikke har opnået andet end at få ændret sinus til cosinus, og det er to sider af samme sag. Men så husker vi på grundrelationen (den er ofte god at huske på!), dvs. vi sætter $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$:

$$\int \sin^2(x)\,dx = -\cos(x)\cdot\sin(x) + \int\left(1 - \sin^2(x)\right)dx = -\cos(x)\cdot\sin(x) + \int 1\,dx - \int \sin^2(x)\,dx$$

Vi smider nu integralet med sinus over på venstresiden og får:

$$\int \sin^2(x)\,dx + \int \sin^2(x)\,dx = -\cos(x)\cdot\sin(x) + x + c \Leftrightarrow$$

$$2\cdot\int \sin^2(x)\,dx = -\cos(x)\cdot\sin(x) + x + c \Leftrightarrow$$

$$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left(x - \cos(x)\cdot\sin(x)\right) + c_1$$

Opgaverne 055*

Kvotientfunktion

Sætning 14: Lad *f* og *g* være differentiable funktioner og $g(x) \neq 0$. Da gælder (***Kvotientreglen***):

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Bevis 14: Vi antager, at funktionerne *f* og *g* er differentiable. Dermed gælder for ethvert x_0, der tilhører begge funktioners definitionsmængder (og dermed også kvotientfunktionens Dm):

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0) \text{ for } \Delta x \to 0 \quad \text{og} \quad \frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x} \to g'(x_0) \text{ for } \Delta x \to 0$$

Vi vil så undersøge, om kvotientfunktionens differenskvotient for x_0 har en grænseværdi for $\Delta x \to 0$. Beviset minder om beviset for produktfunktionen, da vi tilføjer to led, der tilsammen svarer til 0, men derudover er der lidt flere beregninger, da vi skal sætte på fælles brøkstreg:

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x_0+\Delta x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{\Delta x} = \frac{\frac{f(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{\Delta x} = \frac{\frac{f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0)}{g(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0)} - \frac{f(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x)}{g(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x)}}{\Delta x} =$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0)\cdot \Delta x} =$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0)\cdot \Delta x} =$$

$$\frac{\left(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot\left(g(x_0+\Delta x)-g(x_0)\right)}{g(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0)\cdot \Delta x} =$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot\frac{1}{g(x_0+\Delta x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0)}\cdot\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x} \to$$

$$f'(x_0)\cdot\frac{1}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)^2}\cdot g'(x_0) \text{ for } \Delta x \to 0$$

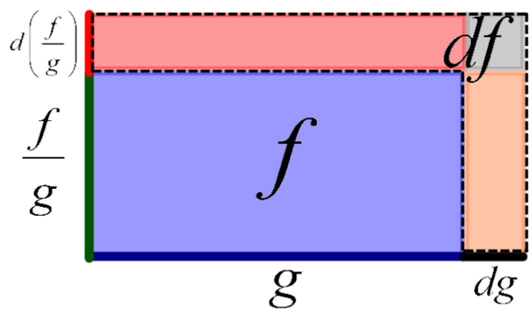
Bemærk igen, at $g(x_0+\Delta x) \to g(x_0)$ for $\Delta x \to 0$, fordi *g* er kontinuert (da *g* er differentiabel).

Dvs. vores differenskvotient har en grænseværdi for $\Delta x \to 0$ og er dermed differentiabel. Og denne grænseværdi er differentialkvotienten i x_0. Når man sætter udtrykket på fælles brøkstreg, får man udtrykket på den form, det er angivet i sætningen.

Som det fremgår af beviset (og almindelige brøkregneregler), kunne man også skrive sætningen som $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$, men når man vælger formuleringen angivet i Sætning 14, skyldes det, at den nok er nemmere at huske. For bemærk, at tælleren er identisk med produktreglen, **bortset fra minustegnet mellem leddene!** (hvilket nok skulle kunne huskes med reglen, at plus hører til gange og minus til division). Oftest er det nævneren, der volder problemer. Bemærk, at **det er funktionsværdien, der kvadreres** (og ikke den afledede funktions værdi).

Kvotientreglen er ikke så nem at illustrere geometrisk som produktreglen og heller ikke så nem at forstå intuitivt. Men her kommer et forsøg baseret på omskrivningen (se figuren nedenfor):

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)}{g(x)}-\frac{\frac{f(x)}{g(x)}\cdot g'(x)}{g(x)}.$$



Vi lader *f's* funktionsværdi være repræsenteret ved arealet af det blå rektangel. *g*'s funktionsværdi svarer til længden af den blå side. Så svarer kvotientfunktionens værdi til længden af den grønne side. Tilvæksten *df* vil så være arealet af det stiplede område, og vores søgte tilvækst $d\left(\frac{f}{g}\right)$ er længden af den røde side. Denne længde findes ved at tage arealet af det røde område og dividere med længden af den blå side.

Hvis vi siger $\frac{df}{g}$, har vi taget arealet af hele det stiplede område og divideret med længden af den blå side. Men det er for meget. Vi trækker derfor $\frac{\frac{f}{g}\cdot dg}{g}$ fra svarende til arealet af det orange område delt med længden af den blå side.

Den skarpsindige læser har så opdaget, at vi har "overset" det lille grå område i øverste, højre hjørne. Men dette er igen et område, hvis areal er et produkt af to differentialer $d\left(\frac{f}{g}\right)$ og *dg*, og derfor smides dette bidrag væk.

Lad os se nogle eksempler på anvendelse af kvotientreglen:

Eksempel 56: $\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)'=\frac{(\sin(x))'\cdot x-\sin(x)\cdot(x)'}{x^2}=\frac{\cos(x)\cdot x-\sin(x)\cdot 1}{x^2}=\frac{\cos(x)}{x}-\frac{\sin(x)}{x^2}$

Eksempel 57: $\frac{d\left(\frac{x^2}{\ln(x)}\right)}{dx}=\frac{2x\cdot\ln(x)-x^2\cdot\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}=\frac{2x}{\ln(x)}-\frac{x}{(\ln(x))^2}$

Eksempel 58: $\frac{d\left(\frac{\cos(t)}{\mathrm{e}^t}\right)}{dt}=\frac{-\sin(t)\cdot\mathrm{e}^t-\cos(t)\cdot\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t)^2}=-\frac{\sin(t)+\cos(t)}{\mathrm{e}^t}$

Opgaverne 056*

Hvis vi i Eksempel 56 havde omskrevet $\frac{\sin(x)}{x}$ til $\sin(x)\cdot\frac{1}{x}$, kunne vi have anvendt produktreglen i stedet for kvotientreglen. Det giver selvfølgelig samme resultat (tjek selv!).

Sammensat funktion

Sætning 15: Lad *f* og *g* være differentiable funktioner (for det enkelte sted skal det gælde, at *g* er differentiabel i x_0, og *f* er differentiabel i $g(x_0)$). Så gælder:

Differentiation af sammensat funktion (Kædereglen)

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x)) \quad \text{eller} \quad \frac{d(f(g(x)))}{dx} = \frac{d(g(x))}{dx} \cdot \frac{d(f(g(x)))}{d(g(x))} \quad \text{eller} \quad \frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx} \cdot \frac{df}{dg}$$

Lad *g* være differentiabel og *f* kontinuert med stamfunktion *F*. Så gælder:

Integration ved integrationsvariabelskift (eller "Integration ved substitution")

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(g(x))\,d(g(x)) = F(g(x)) + c$$

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(g(x))\,d(g(x)) = \left[F(g(x))\right]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

Kig godt på de tre forskellige skrivemåder for sætningen om differentiation af sammensat funktion og tjek, at du kan se, at der står det samme. Vi ved fra vores behandling af sammensatte funktioner, at *g* er den *indre funktion*, mens *f* er den *ydre funktion*. Og sætningen siger så, at: **Man differentierer en sammensat funktion ved først at differentiere den indre funktion og derefter differentiere den ydre funktion MED HENSYN TIL DEN INDRE FUNKTION.**

Med formuleringen "med hensyn til …" menes, at du skal betragte selve funktionsudtrykket for den indre funktion som differentiationsvariabel.

Husk, at man skelner den indre funktion fra den ydre funktion ved at tænke på, hvordan man ville gribe situationen an, hvis man skulle udregne en funktionsværdi i hånden eller på en gammeldags lommeregner. Den indre funktion er det udtryk, man først ville udregne værdien af, hvorefter man ville sætte den netop fundne værdi ind i den ydre funktion:

Eksempel 59: Vi vil differentiere $f : x \mapsto \sin(x^2)$.

Vi identificerer x^2 som den indre funktion og $\sin(x)$ som den ydre og får:

$$f'(x) = 2x \cdot \cos(x^2)$$

Den ydre funktion differentieret med hensyn til den indre funktion.

Den indre funktion differentieret

Eksempel 60: Vi vil differentiere $f : x \mapsto \sin^2(x)$.

Her er det $\sin(x)$, der er den indre funktion, for først skal vi udregne sinusværdien til argumentet, og derefter skal denne værdi kvadreres (dvs. x^2 er den ydre funktion). Vi får derfor:

$$f'(x) = \underline{\cos(x)} \cdot \underline{2 \cdot \sin(x)}$$

Den ydre funktion differentieret med hensyn til den indre funktion.

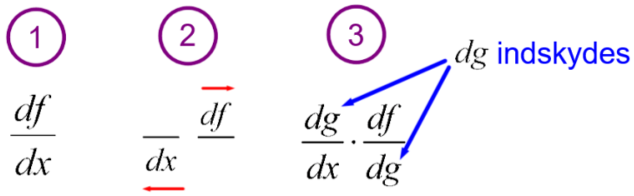
Den indre funktion differentieret

Eksempel 61: Vi vil differentiere $f: x \mapsto \ln\left(x^2+3x-7\right)$.

Vi genkender $\left(x^2+3x-7\right)$ som den indre funktion og $\ln(x)$ som den ydre.

$$f'(x)=(2x+3)\cdot\frac{1}{x^2+3x-7}=\frac{2x+3}{x^2+3x-7}$$

Bemærk skrivemåden $\frac{df}{dx}=\frac{dg}{dx}\cdot\frac{df}{dg}$. Differentialkvotienterne er jo IKKE brøker, dvs. vi kan ikke behandle *df* og *dg* som tællere og *dx* og *dg* som nævnere. Men skrivemåden gør det nemt at huske reglen, for man kan forestille sig følgende VISUELLE operation:



Og faktisk gælder reglen – som vi skal se, når vi beviser den – også for sammensætning af flere funktioner. Faktisk lige så mange, det skulle være:

$$\frac{df}{dx}=\frac{dh}{dx}\cdot\frac{dg}{dh}\cdot\frac{df}{dg} \quad \text{eller} \quad \frac{df}{dx}=\frac{dj}{dx}\cdot\frac{di}{dj}\cdot\frac{dh}{di}\cdot\frac{dg}{dh}\cdot\frac{df}{dg} \quad \text{eller} \quad \frac{dk}{dl}=\frac{dg}{dl}\cdot\frac{dt}{dg}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dp}{ds}\cdot\frac{df}{dp}\cdot\frac{dw}{df}\cdot\frac{dk}{dw}$$

Tjek, at du forstår systemet. Pointen er, at man differentierer ”indefra”, og når man bevæger sig udad, differentierer man hele tiden med hensyn til det, der ligger længere inde.

Eksempel 62: Vi differentierer nu funktioner sammensat af mere end to funktioner. I hvert tilfælde anvendes farverne rød (inderste), blå (næstinderste), violet (tredje inderste) og orange (fjerde inderste) om funktionerne og deres afledede. Bemærk specielt, hvordan der differentieres med hensyn til den del, der ligger længere inde:

$f: x \mapsto \cos\left(e^{x^2+5x+2}\right)$ $\qquad$ $f'(x)=(2x+5)\cdot e^{x^2+5x+2}\cdot\left(-\sin\left(e^{x^2+5x+2}\right)\right)$

$g: x \mapsto \ln\left(\sin\left(4^{x^3+4x}\right)+2\right)$ $\qquad$ $g'(x)=\left(3x^2+4\right)\cdot\ln(4)\cdot 4^{x^3+4x}\cdot\cos\left(4^{x^3+4x}\right)\cdot\frac{1}{\sin\left(4^{x^3+4x}\right)+2}$

$h: x \mapsto \left(3x+\sin\left(e^{\sqrt{x}\cdot\cos(x)}\right)\right)^3$

$$h'(x)=\left(3+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\cos(x)+\sqrt{x}\cdot\left(-\sin(x)\right)\right)\cdot e^{\sqrt{x}\cdot\cos(x)}\cdot\cos\left(e^{\sqrt{x}\cdot\cos(x)}\right)\right)\cdot 3\cdot\left(3x+\sin\left(e^{\sqrt{x}\cdot\cos(x)}\right)\right)^2$$

Bemærk, hvordan man på det violette niveau i *g* også skal anvende ledvis differentiation, og hvordan man i *h* udover differentiation af sammensat funktion også skal anvende ledvis differentiation og produktreglen. Du skal altså lægge mærke til, at når du kombinerer reglerne, kan du differentiere selv komplicerede funktionsudtryk.

Opgaverne 057*

Vi skal nu bevise Sætning 15, og her vil vi endnu engang benytte, at når *g* er differentiabel og dermed også kontinuert i x_0, så gælder:

$$g(x_0+\Delta x)\to g(x_0) \text{ for } \Delta x\to 0 \text{ og dermed også } g(x_0+\Delta x)-g(x_0)\to 0 \text{ for } \Delta x\to 0$$

Det skal vi bruge, fordi vi skal arbejde med *g* i x_0, og *f* i $g(x_0)$.

Bevis 15: Vi har forudsat, at g er differentiabel i x_0, og f er differentiabel i $g(x_0)$, dvs.:

$$\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x} \to g'(x_0) \text{ for } \Delta x \to 0 \qquad \text{og}$$

$$\frac{f(g(x_0)+\Delta g)-f(g(x_0))}{\Delta g} \to \left.\frac{df(g(x))}{d(g(x))}\right|_{x=x_0} \quad \text{for } \Delta g \to 0$$

I vores situation er g en funktion af x, så vi har $\Delta g = g(x_0+\Delta x)-g(x_0)$, og da g er kontinuert i x_0, har vi $\Delta g = g(x_0+\Delta x)-g(x_0) \to 0$ for $\Delta x \to 0$. Dvs. vi har:

$$\frac{f(g(x_0+\Delta x))-f(g(x_0))}{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)} \to \left.\frac{df(g(x))}{d(g(x))}\right|_{x=x_0} \quad \text{for } \Delta x \to 0$$

Og hermed er vi klar til at gennemføre beviset, for vi skal nu argumentere for, at differenskvotienten for den sammensatte funktion $f \circ g$ har en grænseværdi for $\Delta x \to 0$ samt bestemme denne grænseværdi. Vi opstiller derfor først differenskvotienten og forlænger derefter brøken med $g(x_0+\Delta x)-g(x_0)$, da det giver os to brøker, vi kan arbejde med:

$$\frac{(f\circ g)(x_0+\Delta x)-(f\circ g)(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(g(x_0+\Delta x))-f(g(x_0))}{\Delta x} =$$

$$\frac{f(g(x_0+\Delta x))-f(g(x_0))}{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x} \to \left.\frac{d(f(g(x)))}{d(g(x))}\right|_{x=x_0} \cdot \left.\frac{d(g(x))}{dx}\right|_{x=x_0} \quad \text{for } \Delta x \to 0$$

Vi har igen udnyttet vores Sætning 1 om grænseværdier, hvor vi kan multiplicere grænseværdierne.

Integrationsdelen af sætningen vises ret hurtigt ved hjælp af integrationsprøven og vores netop viste regel for differentiation af sammensat funktion. For vi skal kun vise to ting:

1) At når vi differentierer $F(g(x))+c$ med hensyn til x, får vi integranden i det integral, hvor integrationsvariablen er x, dvs. $f(g(x))\cdot g'(x)$.

$$\frac{d(F(g(x)))}{dx} = \frac{d(g(x))}{dx} \cdot \frac{d(F(g(x)))}{d(g(x))} = g'(x)\cdot F'(g(x)) = g'(x)\cdot f(g(x))$$

2) At når vi differentierer med hensyn til $g(x)$, får vi integranden i integralet med integrationsvariablen $g(x)$, dvs. $f(g(x))$.

$$\frac{d(F(g(x)))}{d(g(x))} = F'(g(x)) = f(g(x))$$

Bemærk, at man med placeringen af mærket fortæller, hvad man differentierer med hensyn til. $\left(F(g(x))\right)'$, hvor mærket er placeret for enden, betyder, at man differentierer med hensyn til x. $F'(g(x))$ betyder, at man differentierer med hensyn til $g(x)$.

Bevis 15 (revisited): I Bevis 15 kan man gøre pointen omkring skiftet fra Δx til Δg mere tydeligt med $\varepsilon\delta$-notation. For da f er differentiabel i $g(x_0)$, har man:

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\left|g(x_0+\Delta x)-g(x_0)\right|<\delta\Rightarrow\left|\frac{f(g(x_0+\Delta x))-f(g(x_0))}{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}-\left.\frac{d(f(g(x)))}{d(g(x))}\right|_{x=x_0}\right|<\varepsilon$$

Dvs. her fortælles det, hvordan man får differenskvotienten vilkårlig tæt på grænseværdien (differentialkvotienten) ved at bringe g's funktionsværdi tilpas tæt på $g(x_0)$.

Men vi skal se på grænseovergangen $\Delta x\to 0$, dvs. vi har brug for at kunne forbinde tilvækster i g-værdier med tilvækster i x-værdier. Og her udnyttes, at g er kontinuert i x_0, dvs. man har:

$$\forall\varepsilon_1>0\exists\delta_1>0:\left|\Delta x\right|<\delta_1\Rightarrow\left|g(x_0+\Delta x)-g(x_0)\right|<\varepsilon_1$$

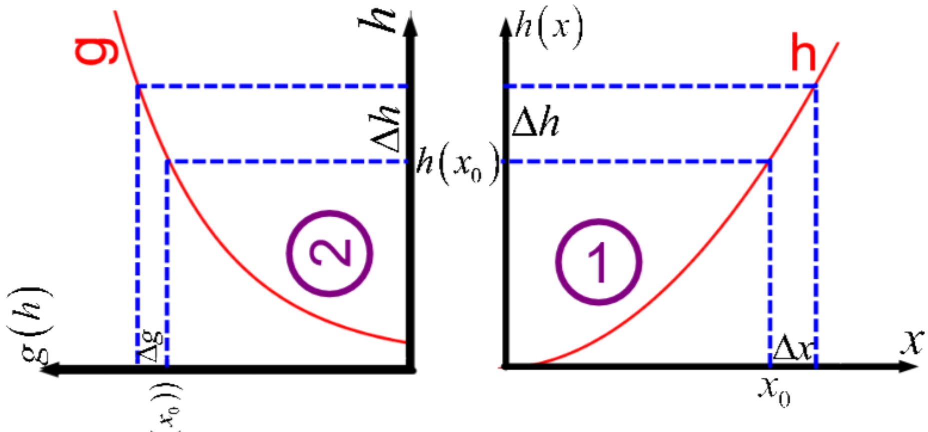
Og hermed er forbindelsen på plads, for nu kan vi vise, at

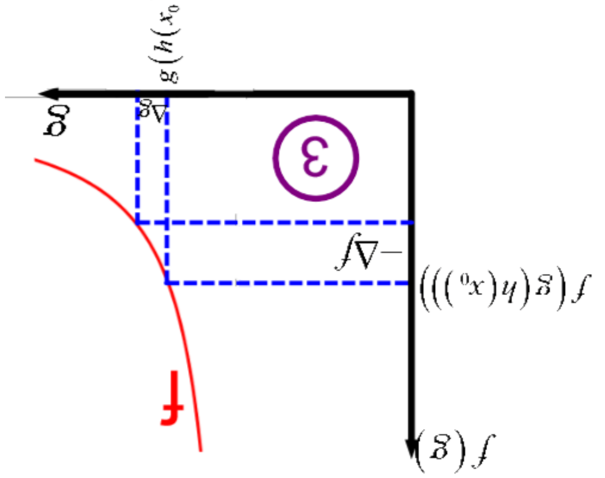
$$\frac{f(g(x_0+\Delta x))-f(g(x_0))}{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}\to\left.\frac{d(f(g(x)))}{d(g(x))}\right|_{x=x_0}\quad\text{for }\ \Delta x\to 0$$

For når fjenden kommer med sit ε, og vi i første omgang kan finde vores δ, så kan vi sætte $\delta=\varepsilon_1$ og finde et brugbart δ_1. For så har vi opnået, at når $\left|\Delta x\right|<\delta_1$, så vil

$\left|g(x_0+\Delta x)-g(x_0)\right|<\varepsilon_1=\delta$, og dermed vil $\left|\dfrac{f(g(x_0+\Delta x))-f(g(x_0))}{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}-\left.\dfrac{d(f(g(x)))}{d(g(x))}\right|_{x=x_0}\right|<\varepsilon$.

Man kan illustrere indholdet af kædereglen på følgende måde:





Vi har en sammensat funktion $f\circ g\circ h$.

Dvs. et argument x_0 indsættes i h (se ①) og giver $h(x_0)$.

Denne værdi indsættes i g (se ②) og giver værdien $g(h(x_0))$, der indsættes i f (se ③) og giver $f(g(h(x_0)))$.

En tilvækst Δx giver (se ①) en funktionstilvækst Δh, der pga. grafens krumning bliver lidt større end Δx). Men pga. g-grafens krumning fører Δh til en mindre Δg (se ②). Og da f er aftagende, fører den positive Δg til en negativ Δf (se ③).

Almindelige brøkregneregler giver os:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\Delta h}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta g}{\Delta h}\cdot\frac{\Delta f}{\Delta g}$$

Hvis vi lader Δx være et differential, dvs. dx, skal de andre tilvækster også erstattes af differentialer, og så har vi kædereglen:

$$\frac{df}{dx}=\frac{dh}{dx}\cdot\frac{dg}{dh}\cdot\frac{df}{dg}$$

Som nævnt er dette ikke et gyldigt bevis (det mangler en grænseovergang), men det er godt til at illustrere pointen med kædereglen, dvs. hvorfor man skal gange med funktionerne differentieret med hensyn til de indre funktioner. Det er jo ikke kun funktionsværdierne, der hele tiden indsættes i den funktion, der ligger et trin længere ude. Det er også tilvæksterne, og dermed opstår alle de forskellige differens- og differentialkvotienter.

Vi skal nu se nogle eksempler på anvendelsen af *Integration ved integrationsvariabelskift*, der normalt er kendt under navnet *Integration ved substitution*. Det normale navn skyldes den måde, man normalt anvender sætningen på i praksis, men som ikke ses i sætningens ordlyd.

Sætningen siger, at vi kan bruge reglen, hvis vi skal integrere produktet af en sammensat funktion og dens indre funktions afledede funktion. Umiddelbart kan det virke som en lidet anvendelig sætning, men skinnet bedrager. Det er nok vores stærkeste våben i forhold til at bestemme komplicerede integraler.

Eksempel 63: Vi ønsker at bestemme $\int\cos(x)\cdot\mathrm{e}^{\sin(x)}dx$.

Vi opdager, at integranden består af en sammensat funktion $\mathrm{e}^{\sin(x)}$, der ganges sammen med den indre funktions afledede funktion $(\sin(x))'=\cos(x)$.

$\int\cos(x)\cdot\mathrm{e}^{\sin(x)}dx$ **(metode 1: Substitution):** Ved denne metode skal man substituere den indre funktion i den sammensatte funktion med *t* og gøre følgende (se den violette boks):

$$t=\sin(x)$$
$$\frac{dt}{dx}=\cos(x)$$
$$dt=\cos(x)\cdot dx$$

Bemærk, at vi i sidste skridt foretager den ulovlige handling at opsplitte vores differentialkvotient. Dette er ulempen ved denne metode.

Men kig nu på vores integral. Vi kan få fjernet **alle x'er** ved at erstatte med udtryk indeholdende *t*. Vi får så:

$$\int\cos(x)\cdot\mathrm{e}^{\sin(x)}dx=\int\mathrm{e}^{t}dt=\mathrm{e}^{t}+c=\mathrm{e}^{\sin(x)}+c$$

Vi substituerer altså først den indre funktion af *x* med *t* for at kunne integrere udtrykket, og når integrationen er foretaget, substituerer vi tilbage til funktionen af *x*.

$\int\cos(x)\cdot\mathrm{e}^{\sin(x)}dx$ **(metode 2: Integration ved integrationsvariabelskift):** Denne metode er egentlig identisk med den anden metode, da man skal genkende den indre funktion, men den følger direkte vores sætning og er derfor matematisk korrekt. Pointen er, at når integrationsvariablen *x* udskiftes med $\sin(x)$, skal man samtidig fjerne $(\sin(x))'$ (se sætningen). Dermed får man:

$$\int\cos(x)\cdot\mathrm{e}^{\sin(x)}dx=\int\mathrm{e}^{\sin(x)}d(\sin(x))=\mathrm{e}^{\sin(x)}+c$$

Der kommer altså ingen *t*'er ind undervejs, men bemærk, at det er det samme, der foregår, da man enten erstatter $\cos(x)\cdot dx$ med dt eller $d(\sin(x))$.

Eksempel 64: Vi ønsker at bestemme det bestemte integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cdot e^{\sin(x)}dx$.

Det er samme integrand som i Eksempel 63, så vi skal lave samme substitution. Men forskellen er nu, at hvis man indfører *t*, skal grænserne også passe til disse *t*-værdier.

Metode 1: Vi substituerer $\sin(x)$ med *t* og udregner nye grænser (se den violette boks):

$$t=\sin(x)$$
$$\frac{dt}{dx}=\cos(x)$$
$$dt=\cos(x)\cdot dx$$
$$x=0: t=\sin(0)=0$$
$$x=\frac{\pi}{2}: t=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

Når vi nu ændrer integrationsvariablen til *t*, skal du bemærke, at vi også skal indsætte de grænser, der passer til *t*:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cdot e^{\sin(x)}dx=\int_0^1 e^t dt=\left[e^t\right]_0^1=e^1-e^0=e-1$$

Metode 2: Vi substituerer $\sin(x)$ med t, men beholder grænserne for *x* og gør så bare opmærksom på, at grænserne hører til *x*:

$$t=\sin(x)$$
$$\frac{dt}{dx}=\cos(x)$$
$$dt=\cos(x)\cdot dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cdot e^{\sin(x)}dx=\int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} e^t dt=\left[e^t\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}=\left[e^{\sin(x)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$
$$e^{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}-e^{\sin(0)}=e^1-e^0=e-1$$

Bemærk, at det kun er de steder, hvor der også indgår et *t*, og hvor der altså kunne være tvivl om grænserne, at det direkte angives, at grænserne hører til *x*.

Metode 3: Der indføres ikke noget *t*, men integrationsvariablen skiftes:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cdot e^{\sin(x)}dx=\int_{\sin(0)}^{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} e^{\sin(x)}d(\sin(x))=\left[e^{\sin(x)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=e^{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}-e^{\sin(0)}=e^1-e^0=e-1$$

Du har nu set to metoder til ubestemte integraler og tre til de bestemte. Prøv i starten alle metoder af og find dem, der passer dig bedst. Det er hurtigst at arbejde med integrationsvariabelskift, men det er også mere abstrakt end integration ved substitution, og man skal have styr på at få erstattet den afledede funktion rigtigt.

Nu følger lidt flere eksempler, hvor der anvendes forskellige metoder.

Eksempel 65: Vi vil bestemme $\int_{-1}^{2}\frac{4x-6}{x^2-3x+5}dx$. Det bemærkes, at vi har en sammensat funktion, hvor $\frac{1}{x}$ er den ydre funktion, og x^2-3x+5 er den indre. Da $\left(x^2-3x+5\right)'=2x-3$ ser det måske ved første øjekast ikke ud til at passe med tælleren, men hvis man faktoriserer, passer det:

$$t=x^2-3x+5$$
$$\frac{dt}{dx}=2x-3$$
$$dt=(2x-3)dx$$
$$x=-1: t=(-1)^2-3\cdot(-1)+5=9$$
$$x=2: t=2^2-3\cdot 2+5=3$$

Vi integrerer ved substitution. Bemærk, at vores integration "skifter retning", så vi pludselig har det største tal som nedre grænse:

$$\int_{-1}^{2}\frac{4x-6}{x^2-3x+5}dx=\int_{-1}^{2}\frac{2\cdot(2x-3)}{x^2-3x+5}dx=\int_9^3\frac{2}{t}dt=\left[2\cdot\ln|t|\right]_9^3=$$
$$2\cdot\ln|3|-2\cdot\ln|9|=2\cdot\ln(3)-2\cdot\ln\left(3^2\right)=2\cdot\ln(3)-2\cdot2\cdot\ln(3)=-2\cdot\ln(3)$$

Eksempel 66: Vi vil bestemme $\int 5\cdot\ln(7)\cdot 7^x\cdot\cos(7^x)\,dx$. Vi genkender 7^x som den indre funktion i en sammensat funktion, og da $(7^x)'=\ln(7)\cdot 7^x$, får vi ved integrationsvariabelskift:

$$\int 5\cdot\ln(7)\cdot 7^x\cdot\cos(7^x)\,dx=\int 5\cdot\cos(7^x)\,d(7^x)=5\cdot\sin(7^x)+c$$

Eksempel 67: Vi vil bestemme $\int_1^5 (6x+3)\cdot\ln(x^2+x+1)\,dx$. Vi identificerer (x^2+x+1) som den indre funktion i en sammensat funktion, og da $(x^2+x+1)'=2x+1$, får man:

$$\int_1^5 (6x+3)\cdot\ln(x^2+x+1)\,dx=3\cdot\int_1^5 (2x+1)\cdot\ln(x^2+x+1)\,dx=3\cdot\int_{x=1}^{x=5}\ln(x^2+x+1)\,d(x^2+x+1)=$$

$$3\cdot\left[(x^2+x+1)\cdot\ln(x^2+x+1)-(x^2+x+1)\right]_1^5=3\cdot\left((31\cdot\ln(31)-31)-(3\cdot\ln(3)-3)\right)=-84+93\cdot\ln(31)-9\cdot\ln(3)$$

Opgaverne 058*

I næste eksempel er det ikke så oplagt, hvilken substitution man skal vælge. Men dermed kan du også få en idé om, hvorfor integration er en kunst:

Eksempel 68: Vi vil bestemme $\int \sin^3(x)\,dx$. Vi vælger – måske lidt overraskende – at sætte *t* til:

$$\boxed{\begin{aligned} &t=\cos(x)\\ &\frac{dt}{dx}=-\sin(x)\\ &dt=-\sin(x)\,dx\end{aligned}}$$

Vi laver nogle omskrivninger og anvender grundrelationen:

$$\int \sin^3(x)\,dx=\int \sin(x)\cdot\sin^2(x)\,dx=-\int -\sin(x)\cdot(1-\cos^2(x))\,dx=$$

$$-\int (1-t^2)\,dt=\int (t^2-1)\,dt=\frac{1}{3}t^3-t+c=\frac{1}{3}\cos^3(x)-\cos(x)+c$$

Differentiation af omvendt funktion

Vi kan udnytte vores kendskab til differentiation af en sammensat funktion til at bestemme en sammenhæng mellem afledede funktioner for en funktion og dens omvendte funktion. For vi ved, at en funktion *f* og dens omvendte funktion f^{-1} er karakteriseret ved, at sammensætningen af dem giver en identitetsfunktion:

$$(f\circ f^{-1})(x)=x$$

Da vi ved, at $(x)'=1$, har vi altså:

$$\frac{d\left((f\circ f^{-1})(x)\right)}{dx}=1\Leftrightarrow\frac{d\left(f^{-1}(x)\right)}{dx}\cdot\frac{d\left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right)}{d\left(f^{-1}(x)\right)}=1\Leftrightarrow\frac{d\left(f^{-1}(x)\right)}{dx}=\frac{1}{\dfrac{d\left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right)}{d\left(f^{-1}(x)\right)}}$$

Da man også har $(f^{-1}\circ f)(x)=x$, gælder sætningen også ved ombytning af *f* og f^{-1}:

Sætning 16: For en funktion *f* og dens omvendte funktion f^{-1} gælder:

$$\frac{d\left(f^{-1}\right)}{dx}=\frac{1}{\dfrac{d\left(f\circ f^{-1}\right)}{d\left(f^{-1}\right)}}\quad\text{og}\quad\frac{df}{dx}=\frac{1}{\dfrac{d\left(f^{-1}\circ f\right)}{df}}$$

Eksempel 69: Vi afprøver sætningen på den naturlige eksponentialfunktion og *ln*, hvor vi kender de afledede funktioner. I første omgang antager vi, at vi ikke kender den afledede funktion af *ln*, men ønsker at bestemme den:

$$\frac{d\left(\ln(x)\right)}{dx}=\frac{1}{\frac{d\left(e^{\ln(x)}\right)}{d\left(\ln(x)\right)}}=\frac{1}{e^{\ln(x)}}=\frac{1}{x}$$

Hvis vi modsat antager, at vi kender den afledede funktion af *ln*: $\frac{d\left(e^{x}\right)}{dx}=\frac{1}{\frac{d\left(\ln\left(e^{x}\right)\right)}{d\left(e^{x}\right)}}=\frac{1}{\frac{1}{e^{x}}}=e^{x}$

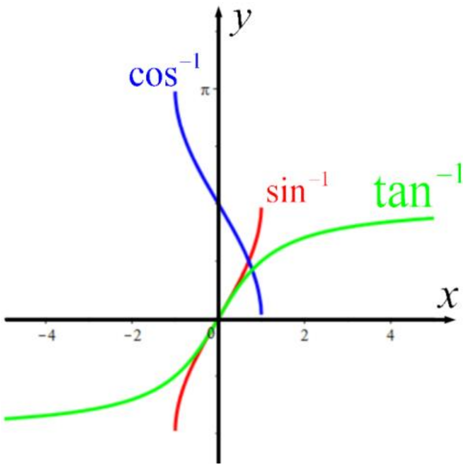
Eksempel 70: Vi ser på endnu et eksempel, hvor vi allerede kender svarene, nemlig kvadratrodsfunktionen og kvadratfunktionen, der er hinandens omvendte funktioner.

Vi antager først, at vi ved, at $\left(x^2\right)'=2x$: $\frac{d\left(\sqrt{x}\right)}{dx}=\frac{1}{\frac{d\left(\sqrt{x}^2\right)}{d\left(\sqrt{x}\right)}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$

Hvis vi antager, at vi kender $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, får vi:

$$\frac{d\left(x^2\right)}{dx}=\frac{1}{\frac{d\left(\sqrt{x^2}\right)}{d\left(x^2\right)}}=\frac{1}{\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2}}}=\frac{1}{\frac{1}{2\cdot x}}=2x$$

Lad os nu bruge sætningen på funktioner, vi ikke kender den afledede af, nemlig de omvendte funktioner til de trigonometriske funktioner.



$Dm\left(\sin^{-1}\right)=\left[-1,1\right]$, men funktionen er ikke differentiabel i intervalendepunkterne (lodret tangent), så vi indskrænker os til $\left]-1,1\right[$ (se figuren til højre). Sætning 16 giver os så:

$$\frac{d\left(\sin^{-1}(x)\right)}{dx}=\frac{1}{\frac{d\left(\sin\left(\sin^{-1}(x)\right)\right)}{d\left(\sin^{-1}(x)\right)}}=\frac{1}{\cos\left(\sin^{-1}(x)\right)}$$

Når Dm for $\sin^{-1}$ er indskrænket til $\left]-1,1\right[$, er $Vm=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$,

og dermed giver $\cos\left(\sin^{-1}(x)\right)$ positive værdier. Vi kan derfor lave følgende omskrivninger, hvor vi også anvender grundrelationen:

$$\frac{d\left(\sin^{-1}(x)\right)}{dx}=\frac{1}{\cos\left(\sin^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{\sqrt{\left(\cos\left(\sin^{-1}(x)\right)\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sin\left(\sin^{-1}(x)\right)\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Med *arccos* indskrænker vi igen Dm til $\left]-1,1\right[$ og får dermed indskrænket værdimængden til $\left]0,\pi\right[$ (se figuren på forrige side). Dermed giver $\sin\left(\cos^{-1}(x)\right)$ positive værdier, og vi får:

$$\frac{d\left(\cos^{-1}(x)\right)}{dx}=\frac{1}{\frac{d\left(\cos\left(\cos^{-1}(x)\right)\right)}{d\left(\cos^{-1}(x)\right)}}=\frac{1}{-\sin\left(\cos^{-1}(x)\right)}=-\frac{1}{\sin\left(\cos^{-1}(x)\right)}=$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\left(\sin\left(\cos^{-1}(x)\right)\right)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\cos\left(\cos^{-1}(x)\right)\right)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Til sidst ser vi på *arctan*. Her skal vi ikke indskrænke Dm, og $Vm=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Vi ved, at $\left(\tan(x)\right)'=\frac{1}{\cos^2(x)}=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=1+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$.

Sætning 16 giver så:

$$\frac{d\left(\tan^{-1}(x)\right)}{dx}=\frac{1}{\frac{d\left(\tan\left(\tan^{-1}(x)\right)\right)}{d\left(\tan^{-1}(x)\right)}}=\frac{1}{1+\left(\tan\left(\tan^{-1}(x)\right)\right)^2}=\frac{1}{1+x^2}$$

Vi har altså vist:

$$\left(\sin^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\qquad\left(\cos^{-1}(x)\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\qquad\left(\tan^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{1+x^2}$$

Opgaverne 059*

Ovenstående udtryk er selvfølgelig baseret på, at vi har fået bevist udtrykkene for de afledede funktioner af de trigonometriske funktioner. Det sker i næste kapitel, hvor vi skal udlede udtryk for afledede funktioner af alle vores standardfunktionstyper (dvs. skemaet på side 9).

AFLEDEDE FUNKTIONER

Man må ikke lave cirkelslutninger i matematik, dvs. man må ikke bruge *A* til at bevise *B* og efterfølgende bevise *A* ved at bruge *B*.

Det er derfor meget vigtigt at bemærke, at vi i udledningen af regnereglerne ikke har benyttet en eneste konkret afledede funktion i beviserne – bortset fra i beviset for differentiation af omvendte funktioner, hvor vi udnyttede, at $(x)'=1$. Vi må derfor gerne benytte vores regneregler, når vi nu skal bestemme afledede funktioner for vores standardfunktioner – bortset altså fra $f:x\mapsto x$, som vi derfor beviser nu uden at anvende regnereglerne for differentiation.

Identitetsfunktioner

Vi skal for $f:x\mapsto x$ undersøge, om differenskvotienten for x_0 har en grænseværdi for $\Delta x\to 0$, og i så fald bestemme denne. Vi begynder derfor med at opskrive differenskvotienten:

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)-x_0}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1\to 1 \text{ for } \Delta x\to 0$$

Da differenskvotienten er 1, har den grænseværdien 1 for $\Delta x\to 0$.

Konstantfunktioner

Vi skal for $f:x\mapsto k$, hvor *k* er en konstant, undersøge, om differenskvotienten for x_0 har en grænseværdi for $\Delta x\to 0$, og i så fald bestemme denne. Vi begynder derfor med at opskrive differenskvotienten:

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{k-k}{\Delta x}=\frac{0}{\Delta x}=0\to 0 \text{ for } \Delta x\to 0$$

Da differenskvotienten er 0, har den grænseværdien 0 for $\Delta x\to 0$.

Vi ved altså nu, at en konstantfunktion differentieret giver 0 (nulfunktionen). Men kan vi også slutte modsat? Dvs. hvis vi har en funktion, der differentieret giver nulfunktionen, er det så (nødvendigvis) en konstantfunktion?

Svaret er "Ja" (med et "hvis"), og det kan også virke så indlysende, at man nemt kan overse, at der er noget at bevise (for hvis tangenthældningen er 0 overalt, må funktionen da være konstant!).

Men infinitesimalregning indeholder mange overraskelser, og snedige matematikere kan tit finde på specielle funktioner, der modbeviser noget, der virker indlysende (vi skal se sådan et eksempel senere), så vi er faktisk nødt til at gennemføre et bevis. Det bliver dog ikke helt gennemført, da vi skal udnytte en af nedenstående sætninger, som vi ikke beviser.

Sætning 17 (uden bevis): Middelværdisætningen. Lad funktionen *f* være kontinuert i $[a,b]$ og differentiabel i $]a,b[$. Så findes et sted $c\in\,]a,b[$, hvor:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Rolles sætning (specialtilfælde): Hvis $f(b)=f(a)$, findes et sted $c\in\,]a,b[$, hvor:

$$f'(c)=0$$

Middelværdisætningen siger, at uanset hvilke to punkter på en glat graf, man udvælger og tegner en sekant igennem, vil der mellem disse to steder findes (mindst) et sted, hvor tangenthældningen er den samme som sekantens hældning. Eller udtrykt med vækshastigheder: **I ethvert interval vil der være et sted, hvor vækshastigheden er lig den gennemsnitlige vækshastighed i intervallet**.
Rolles sætning siger, at der mellem to steder med ens *y*-værdier vil være et sted med vandret tangent. Vi anvendte Middelværdisætningen i beviset for Infinitesimalregningens Fundamentalsætning. Find selv ud af hvor.

Vi kan nu bevise, at en funktion, der differentieret giver nulfunktionen, er en konstantfunktion.
Vi skal dog være opmærksomme på, at dette kun gælder, når vi arbejder med intervaller (dvs. der må ikke være huller i definitionsmængden). F.eks. opfylder funktionen

$$f : x \mapsto \begin{cases} -1 \text{ for } x < 0 \\ 1 \text{ for } x > 0 \end{cases}$$

at den differentieret giver nulfunktionen (med begrænset Dm) uden selv at være en konstantfunktion, men det skyldes jo netop, at den er stykkevis konstant. Vi viser derfor:

Vi ser på en kontinuert funktion $f : I \mapsto \mathbb{R}$, der er differentiabel i det indre af intervallet *I*, og som ikke er en konstantfunktion. Dermed må der findes $a, b \in I \quad (a < b)$, hvor $f(a) \neq f(b)$. Hermed er $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \neq 0$, og middelværdisætningen fortæller os så, at der findes et $c \in \left]a, b\right[$, hvor $f'(c) \neq 0$, og dermed er den afledede funktion ikke nulfunktionen.

Vi har dermed vist følgende meget vigtige sætning:

Sætning 18: Lad funktionen $f : I \mapsto \mathbb{R}$, hvor *I* er et interval, være kontinuert i *I* og differentiabel i det indre af *I*. Så gælder:

$$f' : x \mapsto 0 \quad \Leftrightarrow \quad f : x \mapsto k \quad ; k \text{ er en konstant}$$

Eller

Den afledede funktion af *f* er nulfunktionen, netop hvis *f* er en konstantfunktion.

Du kommer til at anvende denne sætning en hel del gange, da mange beviser eller argumenter går ud på, at man viser, at den afledede af en funktion er nulfunktionen, hvorefter man kan konkludere, at den pågældende funktion er en konstantfunktion.

Af vores definition på begrebet *stamfunktion* (Definition 16) følger direkte første del af følgende sætning, så vi behøver kun at vise anden del:

Sætning 19: Lad *f* være kontinuert og *F* en stamfunktion til *f*. Så gælder:

1) Enhver funktion på formen $(F + k)$, hvor *k* er en konstant, er også en stamfunktion til *f*.
2) Samtlige stamfunktioner til *f* er på formen $(F + k)$.

Bevis 19 2): Vi antager, at *F* og *G* begge er stamfunktioner til *f*. Dvs. $F'(x) = f$ og $G'(x) = f$.

Vi trækker de to ligninger fra hinanden og udnytter sætningen om ledvis differentiation:

$$F'(x) - G'(x) = f - f \underset{\text{Ledvis diff.}}{\Leftrightarrow} (F - G)'(x) = 0 \underset{\text{Sætning 18}}{\Leftrightarrow} (F - G)(x) = k \Leftrightarrow F(x) = G(x) + k$$

Dvs. to stamfunktioner afviger kun fra hinanden med en konstant.

Bemærk, at vi med Sætning 19 har vist, hvorfor vi i vores ubestemte integraler altid tilføjer en konstant c. Vi har nu set, at vi dermed får angivet samtlige stamfunktioner til en given funktion.

Vi har samtidig fået en antydning af, hvorfor der i forbindelse med fuldstændige løsninger til differentialligninger optræder konstanter. Disse konstanter fremkommer, når vi på et tidspunkt på vores vej mod en løsning skal slippe af med vores afledede funktioner.

Opgaverne 060*

Både i forbindelse med differentialligninger og stamfunktioner er vi ofte ikke interesserede i samtlige løsninger/stamfunktioner, men kun en ganske bestemt, som regel angivet ved et punkt, dens graf skal gå igennem.

Eksempel 71: Vi søger til funktionen $f: x \mapsto x^2+4x-3$ den stamfunktion F, hvis graf går gennem punktet $P(3,17)$.

Vi bestemmer først samtlige stamfunktioner:

$$F_c(x)=\int f(x)\,dx=\int\left(x^2+4x-3\right)dx=\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x+c$$

Da grafen for den søgte stamfunktion F skal gå gennem P, skal der gælde $F(3)=17$:

$$17=\frac{1}{3}\cdot 3^3+2\cdot 3^2-3\cdot 3+c \Leftrightarrow 17=9+18-9+c \Leftrightarrow c=-1$$

Dermed er forskriften for den søgte stamfunktion:

$$F(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x-1$$

Opgaverne 061*

Eksponentialfunktioner og logaritmefunktioner

Vi har i Eksempel 69 set, hvordan vi med kendskab til enten $\left(\mathrm{e}^x\right)'$ eller $\left(\ln(x)\right)'$ kan bestemme den anden. Dvs. vi har kun brug for at vise én af ovenstående to differentialkvotienter. Vi har først indført eksponentialfunktioner og derefter indført logaritmefunktioner som de omvendte funktioner til eksponentialfunktioner (en indfaldsvinkel vi kan takke Leonhard Euler for). Derfor vil vi først vise $\left(\mathrm{e}^x\right)'$ og udlede de andre resultater ud fra den. Men bagefter skal vi også prøve at se, hvordan man kunne gribe det an med udgangspunkt i logaritmefunktioner.

Vores udgangspunkt er nu, at den naturlige eksponentialfunktion $x \mapsto \mathrm{e}^x$ er den eksponentialfunktion, hvis graf i punktet $P(0,1)$ har en tangent med hældningen 1.

Dette udgangspunkt fortæller os ikke, at $\mathrm{e}=2,718281828459045...$, og heller ikke at $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to \mathrm{e}^x$ for $n\to\infty$, men det er én blandt flere måder at definere e på, og andre mulige definitioner kan så udledes ud fra denne (ligesom definitionen af π som forholdet mellem en cirkels omkreds og dens diameter hverken direkte giver os cifrene i π eller oplyser os om alle de andre sammenhænge, hvor π dukker op).

Med det angivne udgangspunkt skal vi nu udlede en hel række differentialkvotienter:

Bevis: Da grafen for $x \mapsto \mathrm{e}^x$ i punktet $(0,1)$ har en tangent med hældningen 1, ved vi, at differenskvotienten for 0 har en grænseværdi for $\Delta x \to 0$, og at denne grænseværdi er 1, dvs.:

$$\frac{\mathrm{e}^{0+\Delta x}-\mathrm{e}^0}{\Delta x}=\frac{\mathrm{e}^{\Delta x}-1}{\Delta x}\to 1 \text{ for } \Delta x \to 0$$

Lad os nu se, hvad vi kan sige om differenskvotienten for x_0:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\mathrm{e}^{x_0+\Delta x}-\mathrm{e}^{x_0}}{\Delta x}=\frac{\mathrm{e}^{x_0}\cdot\mathrm{e}^{\Delta x}-\mathrm{e}^{x_0}}{\Delta x}=\frac{\mathrm{e}^{x_0}\cdot\left(\mathrm{e}^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=\mathrm{e}^{x_0}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\Delta x}-1}{\Delta x}\to \mathrm{e}^{x_0}\cdot 1=\mathrm{e}^{x_0} \text{ for } \Delta x\to 0$$

Vi konkluderer altså, at vores differenskvotient har en grænseværdi for $\Delta x \to 0$, fordi vi får omskrevet den til et produkt af to funktioner e^{x_0} og $\frac{\mathrm{e}^{\Delta x}-1}{\Delta x}$, der begge har en grænseværdi for $\Delta x \to 0$, og ifølge Sætning 1 er vores søgte grænseværdi så produktet af de to grænseværdier.

ln(x): Vi har hermed vist $\left(\mathrm{e}^x\right)'=\mathrm{e}^x$, og ifølge Eksempel 69 altså også $\left(\ln(x)\right)'=\frac{1}{x}$

a^x : Vi benytter kædereglen til at bevise $\left(a^x\right)'=\ln(a)\cdot a^x$. Først foretager vi dog en omskrivning af a ved hjælp af vores logaritmedefinition og den 5. potensregneregel (den røde del):

$$\left(a^x\right)'=\left(\left(\mathrm{e}^{\ln(a)}\right)^x\right)'=\left(\mathrm{e}^{\ln(a)\cdot x}\right)'=\frac{d\left(\ln(a)\cdot x\right)}{dx}\cdot\frac{d\left(\mathrm{e}^{\ln(a)\cdot x}\right)}{d\left(\ln(a)\cdot x\right)}=\ln(a)\cdot\mathrm{e}^{\ln(a)\cdot x}=\ln(a)\cdot\left(\mathrm{e}^{\ln(a)}\right)^x=\ln(a)\cdot a^x$$

$\log_a(x)$: Vi kan nu både bevise $\left(\log_a(x)\right)'=\frac{\log_a(\mathrm{e})}{x}$ ud fra a^x (reglen for differentiation af omvendt funktion) og $\ln(x)$ (differentiation af konstant ganget med en funktion). Her vælges det sidste:

Vi ved fra *Funktioner del 1 Sætning 11*, at $\log_a(x)\cdot\log_b(a)=\log_b(x)$, så hvis vi sætter *b* til *a* og *a* til e, har vi $\ln(x)\cdot\log_a(\mathrm{e})=\log_a(x)$. Da $\log_a(\mathrm{e})$ er en konstant, har vi:

$$\left(\log_a(x)\right)'=\left(\log_a(\mathrm{e})\cdot\ln(x)\right)'=\log_a(\mathrm{e})\cdot\left(\ln(x)\right)'=\log_a(\mathrm{e})\cdot\frac{1}{x}=\frac{\log_a(\mathrm{e})}{x}$$

Opgaverne 062*

I det følgende skitseres en anden indfaldsvinkel til ovenstående. Hensigten med dette er at vise, hvordan det ikke altid inden for matematik ligger fast, hvad der skal være definitioner, og hvad der skal være sætninger. I disse noter er Infinitesimalregningens Fundamentalsætning en sætning, mens det i de fleste andre gymnasiebøger er en definition, og inden for emnet Vektorgeometri defineres i disse noter prikprodukt og krydsprodukt på en måde, der oftest er sætninger. Der kan være forskellige fordele og ulemper ved de forskellige indfaldsvinkler, men det vigtigste er selvfølgelig, at det hele hænger sammen.

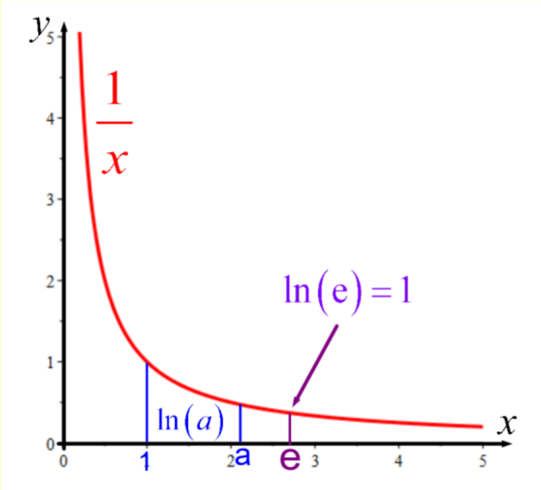
Man kan **definere** den naturlige logaritmefunktion som:

$$\ln(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

Ifølge Definition 16 er *ln* altså den stamfunktion til $x \mapsto \frac{1}{x}$, der svarer til $x_0=1$ og $k=0$.

Det betyder, at $\ln(1)=0$, og at $\ln(a)$ angiver arealet af punktmængden, der afgrænses af grafen for $x \mapsto \frac{1}{x}$, førsteaksen og linjerne med ligningerne $x=1$ og $x=a$ (se figuren til højre).

Eulers tal e kan så **defineres** som det tal, hvor $\ln(\mathrm{e})=1$.



De andre logaritmefunktioner svarer til stamfunktionerne $\log_a(x)=\int_1^x \frac{k}{t}\,dt$, hvor $a=\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}$.

Men hvordan kan man bare sådan hævde (som man gør med en definition), at logaritmefunktionerne svarer til disse stamfunktioner? Det kan man pga. følgende egenskab, der kan udledes ved hjælp af indskudsreglen og integration ved integrationsvariabelskift:

$$\log_a(p\cdot q)=\int_1^{p\cdot q}\frac{k}{x}\,dx=\int_1^{p}\frac{k}{x}\,dx+\int_p^{p\cdot q}\frac{k}{x}\,dx=\log_a(p)+\int_1^{q}\frac{k}{x}\cdot\frac{1}{p}\,d(p\cdot x)=\log_a(p)+\log_a(q)$$

Vi ser altså, at disse stamfunktioner opfylder den regneregel, som vi tidligere har udledt for logaritmefunktioner.

Vi viste disse regneregler for logaritmefunktioner, men man kan også gå den modsatte vej og sige, at den eneste monotone funktion $f:\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$, der opfylder denne regneregel og har $f(a)=1$ er $x \mapsto \log_a(x)$. Man kan også sige, at denne regneregel repræsenterer den karakteristiske egenskab for en logaritmefunktion.

Hvis man har anvendt denne indfaldsvinkel, kan man vise, at de omvendte funktioner til logaritmefunktioner viser sig at være funktioner, der opfylder vores potensregneregler, dvs. eksponentialfunktioner, og vi kan udlede differentialkvotienten $(\mathrm{e}^x)'$ ud fra $(\ln(x))'$.

Potensfunktioner

Vi kan bestemme differentialkvotienterne for potensfunktioner ved først at omskrive dem ved hjælp af definitionen på den naturlige logaritme og efterfølgende anvende kædereglen:

Bevis: $(x^a)'=\left(\left(\mathrm{e}^{\ln(x)}\right)^a\right)'=\left(\mathrm{e}^{a\cdot\ln(x)}\right)'=\frac{d(a\cdot\ln(x))}{dx}\cdot\frac{d\left(\mathrm{e}^{a\cdot\ln(x)}\right)}{d(a\cdot\ln(x))}=a\cdot\frac{1}{x}\cdot\mathrm{e}^{a\cdot\ln(x)}=\frac{a}{x}\cdot\left(\mathrm{e}^{\ln(x)}\right)^a=$

$$\frac{a}{x}\cdot x^a=a\cdot\frac{x^a}{x^1}=a\cdot x^{a-1}$$

Kvadratrodsfunktionen og reciprokfunktionen er specialtilfælde af denne regel (og vi har desuden også vist dem ved tretrinsreglen i Eksempel 19 og Eksempel 20).

Opgaverne 063*

Trigonometriske funktioner

Vi begynder med at vise $\left(\sin(x)\right)' = \cos(x)$, hvorefter differentialkvotienterne for cosinus- og tangensfunktionerne kan vises ved vores regneregler. I beviset benytter vi en af de såkaldte *logaritmiske formler* for trigonometriske funktioner (se evt. oversigten bagi i Geometri og Trigonometri del 2), som vi beviser sammen med additionsformlerne i forbindelse med Vektorgeometri. Den siger: $\sin(u) - \sin(v) = 2\cdot\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{u-v}{2}\right)$.

Bevis: Vi ser på $f : x \mapsto \sin(x)$ og opskriver differenskvotienten for x_0, hvorefter vi omskriver denne ved hjælp af ovenstående logaritmiske formel:

$$s_{x_0} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\sin(x_0+\Delta x) - \sin(x_0)}{\Delta x} =$$

$$\frac{2\cdot\cos\left(\frac{x_0+\Delta x+x_0}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x_0+\Delta x-x_0}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Da $\frac{\Delta x}{2} \to 0$ for $\Delta x \to 0$, og da $x \mapsto \cos(x)$ er kontinuert, har vi:

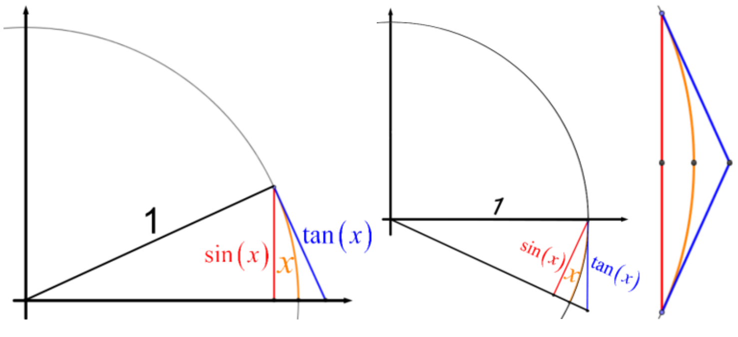
$$\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos(x_0) \text{ for } \Delta x \to 0$$

Spørgsmålet er derfor, om udtrykket $\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$ har en grænseværdi for $\Delta x \to 0$.

For at gøre det nemmere med notationen ser vi på, om $\frac{\sin(x)}{x}$ har en grænseværdi for $x \to 0$.

Egentlig kender vi allerede svaret, for i *Funktioner del 2 Sætning 26* har vi sagt, at for små værdier af x er $\sin(x) \approx x$, dvs. vi kan regne ud, at udtrykket vil have grænseværdien 1. Men det er jo ikke noget ordentlig bevis, så et sådant kommer her:

Vi ser på et udsnit af enhedscirklen, hvor vi har angivet en lille vinkel x i radianer (det orange stykke på den venstre figur). $\sin(x)$ er længden af det røde linjestykke, og $\tan(x)$ er længden af det blå stykke, der er en del af tangenten til cirklen i retningspunktet. For at indse, at længden af dette stykke svarer til $\tan(x)$, kan man rotere stykkerne med vinklen x med uret omkring origo (se den midterste figur). På figuren til højre er illustreret, at der gælder:



$$\sin(x) \le x \le \tan(x),$$

og da det er positive tal, gælder følgende (bemærk, hvad der sker med ulighedstegnene, og tænk over hvorfor):

$$\frac{\sin(x)}{\sin(x)} \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \frac{\sin(x)}{\tan(x)} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \frac{\sin(x)}{\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \cos(x)$$

Det er nemt at afgøre, hvad der sker med $\cos(x)$, når $x \to 0$, for cosinusfunktionen er kontinuert og har funktionsværdien 1 i 0, og dermed gælder $\cos(x) \to 1$ for $x \to 0$.

Dvs. vores udtryk $\frac{\sin(x)}{x}$ er klemt inde mellem to udtryk, der begge har grænseværdien 1 for $x \to 0$, og dermed gælder $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$ for $x \to 0$.

Vi kender nu grænseværdierne for begge faktorer i vores oprindelige differenskvotient s_{x_0}, og dermed fortæller vores Sætning 1 om grænseværdier os, at differenskvotienten har en grænseværdi, der er produktet af de to grænseværdier, dvs.:

$$s_{x_0} \to \cos(x_0) \cdot 1 = \cos(x_0) \text{ for } \Delta x \to 0$$

Vi har altså vist $(\sin(x))' = \cos(x)$.

Vi ønsker nu at bestemme $(\cos(x))'$ og udnytter en overgangsformel for komplementvinkler til at omskrive udtrykket, inden vi differentierer med kædereglen:

$$(\cos(x))' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{dx} \cdot \frac{d\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)}{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = (0-1) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -1 \cdot \sin(x) = -\sin(x)$$

Vi bestemmer den afledede funktion af tangensfunktionen ved hjælp af kvotientreglen:

$$(\tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{(\sin(x))' \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (\cos(x))'}{(\cos(x))^2} = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} =$$

$$\frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \rightarrow = \boxed{\frac{1}{\cos^2(x)}}$$

$$= \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \boxed{1 + \tan^2(x)}$$

Opgaverne 064*

Stamfunktioner

Vi har nu fundet differentialkvotienter for samtlige af vores standardfunktioner. Men vi har ikke set på stamfunktionerne. Disses funktionsudtryk kan bevises ved hjælp af integrationsprøven, dvs. ved at differentiere dem og vise, at man får det oprindelige funktionsudtryk.

Øvelse 7: Vis, at alle stamfunktionerne i vores oversigt (side 9) er rigtige.

Der er en enkelt stamfunktion, der kræver lidt ekstra forklaring.

Vi har vist, at $\left(\ln(x)\right)' = \frac{1}{x}$, men der gælder $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$. Så spørgsmålet er, hvor numerisktegnet kommer fra?

Forklaringen skal findes i definitionsmængderne. Når vi ser på funktionen $x \mapsto \ln(x)$, er den defineret for positive tal, og dens differentialkvotient er derfor også kun defineret for positive tal, dvs. selvom funktionen $x \mapsto \frac{1}{x}$ som udgangspunkt er defineret for alle tal bortset fra 0, vil den, når den er fremkommet som den afledede funktion af $x \mapsto \ln(x)$, kun være defineret for positive tal.

Men når udgangspunktet er funktionen $x \mapsto \frac{1}{x}$, er det som sagt kun 0, der ikke er tilladt som argument, og så ville $x \mapsto \ln(x)$ ikke kunne være en stamfunktion, for den er ikke defineret for negative værdier. Numerisktegnet sikrer, at $\ln|x|$ er defineret for alle reelle tal bortset fra 0.

Vi mangler dog stadig at vise, at udsagnet holder for negative *x*-værdier. Det gøres med integrationsprøven, hvor vi differentierer højresiden i $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$ og tjekker, at vi får integranden på venstresiden. Vi udnytter først definitionen på numerisk værdi:

Lad $x < 0$: $\left(\ln|x| + c\right)' = \left(\ln(-x) + c\right)' = \left(\ln(-x)\right)' + (c)' = \frac{d(-x)}{dx} \cdot \frac{d\left(\ln(-x)\right)}{d(-x)} + 0 = -1 \cdot \frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$

Vi har altså ved hjælp af kædereglen vist, at udsagnet også holder for negative *x*-værdier.

Specielle funktioner

$\boldsymbol{x^x}$ **:** Dette er en speciel funktion. Den er en slags blanding af en potensfunktion og en eksponentialfunktion, men den er jo ingen af delene, da vores variabel både optræder som rod og eksponent, og derfor kan vi hverken anvende reglerne for potenser eller eksponentialfunktioner, når den skal differentieres.
Men vi kan udnytte et lille trick, vi efterhånden har set en del gange, nemlig omskrivning ved hjælp af definitionen på *ln*. Det giver os et udtryk, hvor vi kan udnytte kædereglen:

$$\left(x^x\right)' = \left(\left(\mathrm{e}^{\ln(x)}\right)^x\right)' = \left(\mathrm{e}^{x\cdot\ln(x)}\right)' = \frac{d\left(x\cdot\ln(x)\right)}{dx} \cdot \frac{d\left(\mathrm{e}^{x\cdot\ln(x)}\right)}{d\left(x\cdot\ln(x)\right)} = \left(1\cdot\ln(x) + x\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot\mathrm{e}^{x\cdot\ln(x)} = \left(\ln(x)+1\right)\cdot x^x$$

$\boldsymbol{x^{\sin(x)}}$ **:** Dette eksempel er blot taget med for at vise, at man kan bruge samme fremgangsmåde som ovenfor:

$$\left(x^{\sin(x)}\right)' = \left(\left(\mathrm{e}^{\ln(x)}\right)^{\sin(x)}\right)' = \left(\mathrm{e}^{\ln(x)\cdot\sin(x)}\right)' = \frac{d\left(\ln(x)\cdot\sin(x)\right)}{dx} \cdot \frac{d\left(\mathrm{e}^{\ln(x)\cdot\sin(x)}\right)}{d\left(\ln(x)\cdot\sin(x)\right)} =$$

$$\left(\frac{1}{x}\cdot\sin(x) + \ln(x)\cdot\cos(x)\right)\cdot\mathrm{e}^{\ln(x)\cdot\sin(x)} = \left(\frac{\sin(x)}{x} + \ln(x)\cdot\cos(x)\right)\cdot x^{\sin(x)}$$

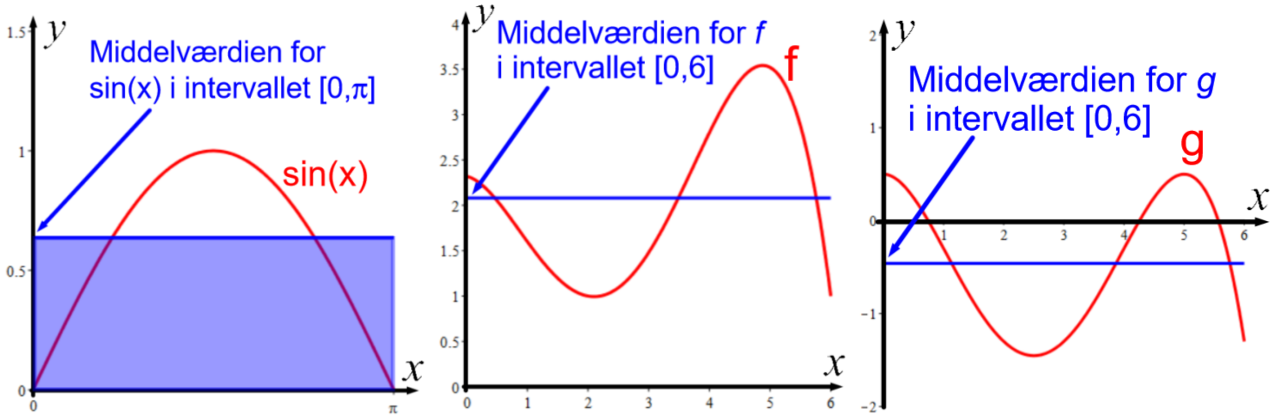
Middelværdi

Vi har allerede anvendt differentialregningens middelværdisætning (Sætning 17).
Der findes også en middelværdisætning inden for integralregning (som vi heller ikke beviser).
Den er baseret på følgende definition:

Definition 18: Lad funktionen *f* være kontinuert i intervallet $[a,b]$, så er *middelværdien* $\overline{f}$ *for f i intervallet* $[a,b]$ givet ved:

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Definitionen er baseret på, at det rektangel, der i intervallet $[a,b]$ tegnes med højden $\overline{f}$, har samme areal som punktmængden (eller punktmængderne) mellem grafen for *f* og førsteaksen i intervallet (**regnet med fortegn**) – se figurerne nedenfor, hvor middelværdien for *g* er negativ, da punktmængderne under grafen samlet set har større arealer end dem over.



Integralregningens middelværdisætning siger så (sammenlign med figurerne ovenfor):

Sætning 20 (Integralregningens middelværdisætning): Lad funktionen *f* være kontinuert i intervallet $[a,b]$. Så findes et $c \in \,]a,b[$, hvor:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Opgaverne 065*

Sætningen siger altså, at der i intervallet er mindst ét sted, hvor funktionen antager sin middelværdi i intervallet. På figurerne ovenfor ses det, at det sker to steder for $\sin(x)$ og tre steder for både *f* og *g*.

Riemann-integrable funktioner

Det er hele tiden blevet pointeret, at vi arbejder med kontinuerte funktioner, når der indgår stamfunktioner, fordi vi har bevist, at alle kontinuerte funktioner er integrable. Men gælder det også modsat, at hvis en funktion er integrabel, så er den også kontinuert? Her er svaret ”Nej”.
Som vores Definition 14 siger, er det afgørende kriterium, om middelsummen konvergerer, når $\Delta x \to 0$, og det gør den f.eks. for de ikke-kontinuerte trappediagrammer, vi skal arbejde med inden for statistik. Vores Definition 14 siges at definere de såkaldt *Riemann-integrable funktioner*.

FUNKTIONSUNDERSØGELSE OG OPTIMERING

I Funktioner del 1 introduceredes begreberne *voksende, aftagende, konstant* og *monoton*. Og vi ræsonnerede os frem til sætningen:

Sætning 21: Lad f være en funktion og I et interval, hvori f er defineret.
Hvis f ikke er konstant i et eneste delinterval af I, gælder der:

$$f \text{ er (strengt) voksende i } I \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in I : f'(x) \geq 0$$

$$f \text{ er (strengt) aftagende i } I \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in I : f'(x) \leq 0$$

Det blev dengang pointeret, at hvis f skal være strengt voksende eller aftagende, må grafen for f ikke på noget tidspunkt være vandret, men der må gerne være en vandret tangent i enkelte **punkter**!

Vi kunne ikke komme videre dengang, da vi ikke havde lært at differentiere funktioner, men det har vi nu, og derfor kan vi tage fat på funktionsundersøgelser.

En fuldstændig funktionsundersøgelse består af:

1) Bestemmelse af nulpunkter for funktionen.
2) Bestemmelse af steder eller intervaller, hvor funktionen ikke er defineret (hvis det ikke allerede er angivet sammen med funktionsforskriften).
3) Bestemmelse af funktionens monotoniforhold (dvs. opdeling af hele funktionens definitionsmængde i intervaller, hvor funktionen er voksende eller aftagende).
4) Bestemmelse af lokale og globale ekstrema (maksima og minima).
5) Bestemmelse af vendetangenter.
6) Bestemmelse af asymptoter.
7) Bestemmelse af værdimængden.

Tidligere var en fuld funktionsundersøgelse en standardopgave i gymnasiet, da man ikke havde en computer (eller grafregner), der kunne tegne grafer, og hvor funktionsundersøgelsen så bl.a. blev brugt til at kunne skitsere grafens udseende.

Punkterne 1) og 2) har ikke noget med differentialregning at gøre og er allerede behandlet under emnet Funktioner.

I det nuværende gymnasium er det hovedsageligt punkterne 3), 4) og 5), vi beskæftiger os med, da de ofte er knyttet til praktisk anvendelse, hvilket vi skal se, når vi kommer til optimering.

Vi begynder med at se på punkt 3):

Monotoniforhold

Vi har i Funktioner del 1 defineret begreberne *voksende* og *aftagende*, men når man skal vise, at en funktion er voksende eller aftagende, eller opdele i intervaller, hvor den er det ene eller det andet, skal man **aldrig** anvende definitionerne. Man skal **altid** anvende Sætning 21. Dvs.

Når du skal undersøge, om en funktion er monoton, skal du kigge på fortegnet for den afledede funktion.

Det skyldes, at det oftest er **mindst** lige så nemt at afgøre fortegnet for en funktion som at skulle argumentere for, hvad der sker med funktionsværdierne, når argumenterne øges.

Eksempel 72: Vi vil undersøge, om funktionen $f: x \mapsto \frac{1}{1+e^{-x}}$ er voksende, aftagende eller ingen af delene.

Vi skal lige til at anvende definitionerne på *voksende* og *aftagende* og rode os ud i en lang, snørklet, sproglig forklaring, men så husker vi, at vi **aldrig** må benytte definitionerne og **altid** skal anvende Sætning 21. Så vi differentierer med kædereglen:

$$f'(x) = \frac{d(-x)}{dx} \cdot \frac{d\left(1+e^{-x}\right)}{d(-x)} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)}{d\left(1+e^{-x}\right)} = -1 \cdot e^{-x} \cdot \left(\frac{-1}{\left(1+e^{-x}\right)^2}\right) = \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2} > 0$$

Til sidst kan vi se, at udtrykket er positivt, da nævneren er et kvadrat og altså ikke negativt, og da tælleren er en eksponentialfunktion, og eksponentialfunktioner giver positive værdier uanset, hvilket argument, der sættes ind.

Da den afledede funktion er positiv for alle *x*-værdier, er *f* en voksende funktion.

Man kan også nogle gange se på en differentialligning, om løsningerne til den er voksende eller aftagende.

Eksempel 73: Vi ser på differentialligningen $\frac{dy}{dx} \cdot e^y = -x^2$.

Vi lader *f* være en løsning til differentialligningen. Kan vi sige noget om, hvorvidt *f* er voksende eller aftagende?

Ja, det kan vi godt.

For vi ved, at $e^y > 0$ for alle *y*-værdier, og da et kvadrat ikke kan blive negativt, er højresiden negativ for alle andre *x*-værdier end 0, hvor den er 0.

Dermed er $\frac{dy}{dx} \leq 0$ og kun 0 for $x = 0$, dvs. ***f* er en aftagende funktion**.

Opgaverne 070*

Hvis en funktion hverken er voksende eller aftagende, vil der ofte være nogle lokale ekstremumssteder, som vi tidligere har været inde på, men som vi nu er klar til at definere og arbejde videre med:

Definition 19: Lad $f: A \mapsto \mathbb{R}$, og lad $x_0 \in A$. Der gælder så:

x_0 kaldes et *lokalt maksimumssted for f*, hvis der findes en omegn $\omega(x_0)$ om x_0, så $f(x) \leq f(x_0)\ \forall x \in \omega(x_0) \cap A$. I så fald kaldes $f(x_0)$ for et *lokalt maksimum* eller en *lokal maksimumsværdi*, mens punktet $(x_0, f(x_0))$ kaldes et *lokalt maksimumspunkt.*

x_0 kaldes et *lokalt minimumssted for f*, hvis der findes en omegn $\omega(x_0)$ om x_0, så $f(x) \geq f(x_0)\ \forall x \in \omega(x_0) \cap A$. I så fald kaldes $f(x_0)$ for et *lokalt minimum* eller en *lokal minimumsværdi*, mens punktet $(x_0, f(x_0))$ kaldes et *lokalt minimumspunkt*.

Lokale maksimumssteder og minimumssteder kaldes under ét for *lokale ekstremumssteder*, og tilsvarende tales om *lokale ekstrema, lokale ekstremumsværdier* og *lokale ekstremumspunkter*.

Definition 20: Lad $f: A \mapsto \mathbb{R}$, og lad $x_0 \in A$. Der gælder så:

x_0 kaldes et *globalt maksimumssted for f*, hvis $f(x) \leq f(x_0)\ \forall x \in A$. I så fald kaldes $f(x_0)$ for **det** *globale maksimum* eller **den** *globale maksimumsværdi*, mens punktet $(x_0, f(x_0))$ kaldes et *globalt maksimumspunkt*.

x_0 kaldes et *globalt minimumssted for f*, hvis $f(x) \geq f(x_0)\ \forall x \in A$. I så fald kaldes $f(x_0)$ for **det** *globale minimum* eller **den** *globale minimumsværdi*, mens punktet $(x_0, f(x_0))$ kaldes et *globalt minimumspunkt*.

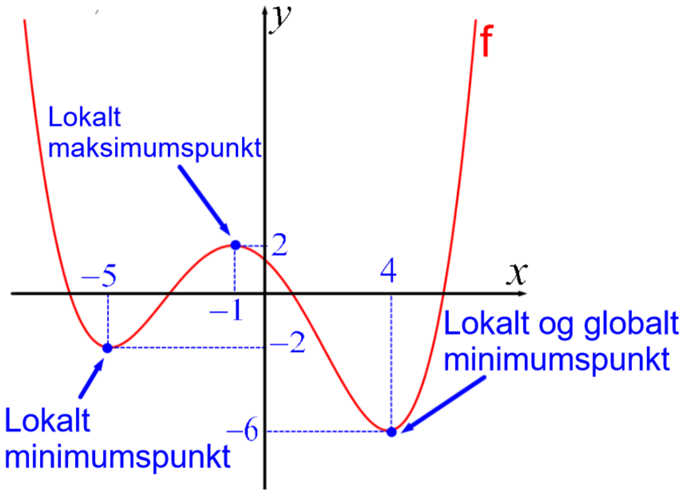
Samlebetegnelserne er igen *globale ekstremumssteder, globale ekstrema, …*

Definition 21: Lad $f: A \mapsto \mathbb{R}$, og lad $x_0 \in A$ og *f* være (mindst to gange) differentiabel i x_0.
Så gælder: Hvis x_0 er et lokalt ekstremumssted for den afledede funktion f', siges grafen for *f* at have en *vendetangent* i x_0.

Bemærk ud fra definitionerne, at et globalt ekstremumssted også er et lokalt ekstremumssted.

Man kan læse flere mere eller mindre væsentlige ting i disse definitioner. F.eks. kan man se, at en konstantfunktion består af punkter, der alle både er globale maksimumspunkter, globale minimumspunkter og punkter med vendetangent. Men en sådan funktionstype er dybt uinteressant i forbindelse med funktionsundersøgelse og optimering. Vi er kun interesserede i funktioner, ”hvor der sker noget”.

Definitionerne er derfor kun vigtige, når vi skal have afklaret tvivlsspørgsmål, som f.eks. ”Kan et punkt på A's rand være et lokalt ekstremumssted?” (svaret er ’Ja’) eller ”Har alle funktioner et globalt maksimum?” (svaret er ’Nej’). Normalt får du kun brug for den forståelse, du kan få i det følgende, hvor begreberne og nogle centrale pointer gennemgås med hjælp fra konkrete grafer:



Der er tre lokale ekstremumssteder på figuren til højre. Dvs. det er steder, hvor funktionsværdierne i et tilpas lille interval omkring stedet enten ikke er større (maksimum) eller ikke er mindre (minimum). Se f.eks. på det lokale maksimumssted -1, hvor funktionsværdien er 2. Man kan både helt ude til venstre og helt ude til højre finde steder, med højere funktionsværdier end 2, men lige omkring stedet -1, er der ingen steder med højere funktionsværdier. Og det er selve pointen med ordet *lokalt*.

I dette tilfælde siger vi:

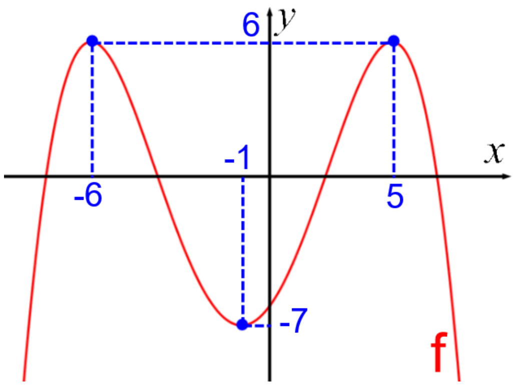
f har lokalt maksimum i -1 med værdien 2 (eller ”$(-1, 2)$ er lokalt maksimumspunkt for *f*”)

f har lokalt minimum i -5 med værdien -2 og globalt minimum i 4 med værdien -6.
f har ikke noget globalt maksimum.

Bemærk altså:
Vi bruger ordet *sted* om x-værdier (eller generelt: Om abscissen)
Vi bruger ordet *værdi* eller ingenting, dvs. *maksimum/minimum*, om y-værdien (ordinaten)
Vi bruger – ikke overraskende – ordet *punkt* om punkter (x, y)

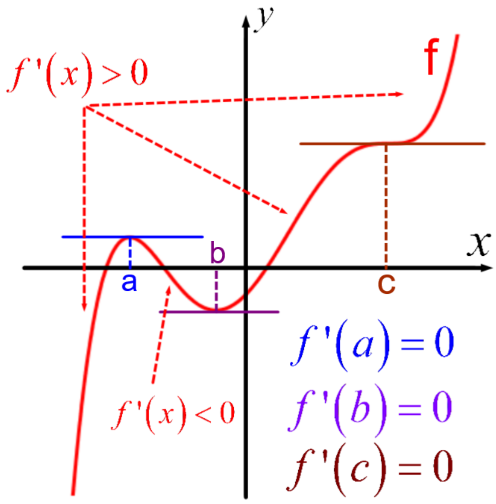
Hvis du altså bliver bedt om at finde et lokalt minimum, er det en funktionsværdi (en y-værdi), du skal angive som svar, og hvis du skal finde et globalt maksimumssted, skal du svare med en x-værdi.

Ofte vil det dog dreje sig om fysiske størrelser, og så skal man "bare" være opmærksom på, om der spørges efter f.eks. den radius, der giver det største rumfang (dvs. abscissen), eller om selve det største rumfang (ordinaten).



Der kan godt være mere end ét globalt maksimumssted (eller minimumssted), for det skal bare være et sted, hvor funktionsværdien ikke er mindre end nogen anden funktionsværdi (Bemærk, der står IKKE, at den skal være større). På figuren til højre er der to globale maksimumssteder, nemlig $x = -6$ og $x = 5$. Men der kan højst være én global maksimums**værdi**. På figuren er den 6.

Punktet $(-1, -7)$ er lokalt minimumspunkt for *f*.



Vi har set, hvordan fortegnet for den afledede funktion afgør, om funktionen er voksende eller aftagende i et interval (se figuren til højre).

Når vi skal finde lokale ekstremumssteder, skal vi først finde de steder, hvor den afledede funktion er 0. For differentiable funktioner (som vi altid arbejder med), er det de eneste steder, hvor der kan være et lokalt ekstremumssted. For hvis den afledede funktion f.eks. er positiv i x_0, vil funktionsværdierne lige til venstre for x_0 være mindre end $f(x_0)$, og funktionsværdierne til højre vil være større (og modsat hvis den afledede er negativ). Og dermed vil $f(x_0)$ være mindre end nogle og større end andre funktionsværdier i enhver omegn om x_0.

På figuren er der tre steder, hvor den afledede funktion antager værdien nul, dvs. hvor der er vandrette tangenter. I *a* er der lokalt maksimum, hvilket ses ved, at den afledede funktion er positiv til venstre for nulpunktet og negativ til højre. I *b* er der lokalt minimum, kendetegnet ved, at den afledede funktion er negativ til venstre for nulpunktet og positiv til højre for.

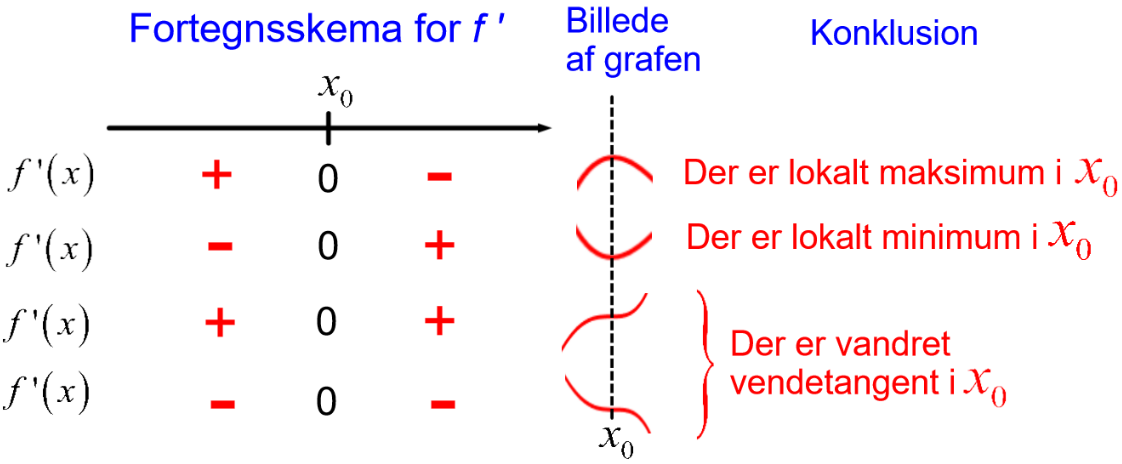
I *c* er der hverken lokalt maksimum eller minimum, selvom der er en vandret tangent. Her er den afledede funktion positiv på begge sider af nulpunktet. Men dermed må nulpunktet jo være et lokalt minimumssted **for den afledede funktion** og altså et sted med *vendetangent* for grafen. Da tangenten også er vandret, kalder vi den for en *vandret vendetangent*.

Vi kan hermed konkludere:

Monotoniforhold: f er voksende i intervallerne $]-\infty, a]$ og $[b, \infty[$ og aftagende i intervallet $[a, b]$.
Lokale ekstremumssteder: f har lokalt maksimum i a og lokalt minimum i b.
Vandrette vendetangenter: f har vandret vendetangent i c.

Bemærk specielt, at f er strengt voksende i hele intervallet $[b, \infty[$, for den afledede funktion må gerne være 0 enkelte steder i intervallet.

Vi er altså kommet frem til følgende oversigt:



I de følgende to eksempler ser vi på, hvordan man anvender ovennævnte i en funktionsanalyse:

Eksempel 74: Vi ser på funktionen $f : x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 72x + 13$ og ønsker både at bestemme monotoniforhold og lokale ekstremumssteder og lokale ekstrema.

Vi skal bruge den afledede funktion af f til dette, så den bestemmes som det første:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 72$$

Vi bestemmer nulpunkter for den afledede funktion ved at faktorisere og anvende nulreglen:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 72 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x+4)\cdot(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 3$$

Vi har hermed fundet de to steder, hvor den afledede funktion antager værdien 0.

Og her kommer så en væsentlig pointe: Den afledede funktion er kontinuert og kan derfor kun skifte fortegn steder, hvor den ikke er defineret (som f.eks. $x \mapsto \frac{1}{x}$ gør i 0), eller ved at passere et nulpunkt. Eller med andre ord: Da den afledede funktion er defineret for alle reelle tal, ved vi, at den har samme fortegn overalt i intervallet $]-\infty, -4[$, og den har samme fortegn overalt i $]-4, 3[$, og endelig har den samme fortegn overalt i $]3, \infty[$.

Vi kan derfor bestemme den afledede funktions fortegn i ovenstående tre intervaller ved blot at bestemme fortegnet et vilkårligt sted i intervallet (og i praksis vælger man selvfølgelig de tal i intervallerne, der giver de nemmeste udregninger):

$$f'(-10) = 6\cdot(-10)^2 + 6\cdot(-10) - 72 = 468 > 0$$
$$f'(0) = 6\cdot 0^2 + 6\cdot 0 - 72 = -72 < 0$$
$$f'(10) = 6\cdot 10^2 + 6\cdot 10 - 72 = 588 > 0$$

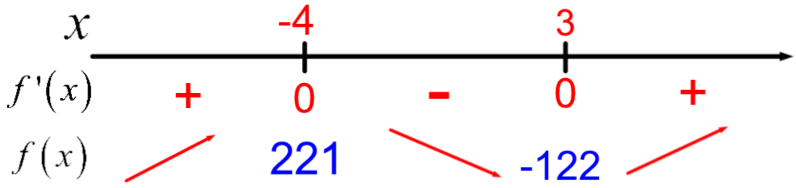
Vigtigt: Her viser vi, at det ikke er selve tallet, men dets fortegn, der interesserer os.

Da vi også skal bestemme de lokale ekstrema, udregner vi funktionsværdier de to steder, hvor den afledede funktion har nulpunkter:

$$f(-4) = 2\cdot(-4)^3 + 3\cdot(-4)^2 - 72\cdot(-4) + 13 = -128 + 48 + 288 + 13 = 221$$

$$f(3) = 2\cdot 3^3 + 3\cdot 3^2 - 72\cdot 3 + 13 = 54 + 27 - 216 + 13 = -122$$

Vi kan så konstruere et såkaldt fortegnsskema (for den afledede funktion):



Og vi konkluderer så:

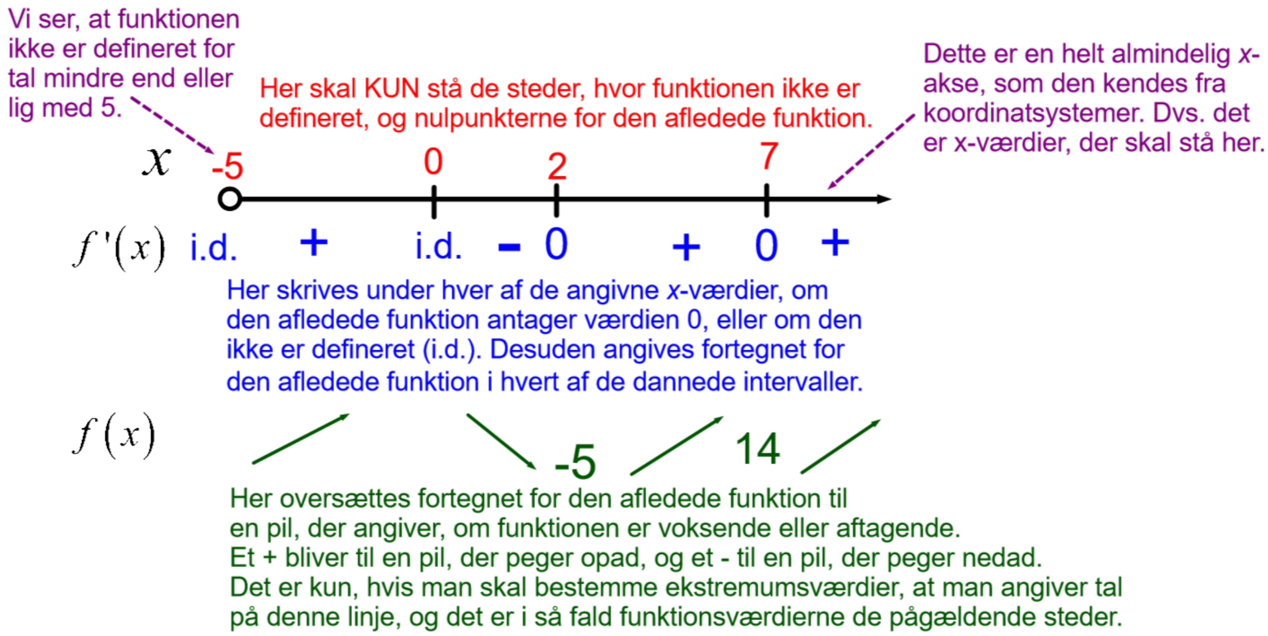
f er voksende i intervallerne $]-\infty, -4]$ og $[3, \infty[$ og aftagende i intervallet $[-4, 3]$.

f har lokalt maksimum 221 i -4 og lokalt minimum -122 i 3.

Bemærk, at navnet *fortegnsskema* henviser til fortegnet for den afledede funktion.

Et fortegnsskema er en hjælp til at danne sig et overblik over funktionen. Det skal se ud som vist i eksemplet ovenfor, bortset fra at de blå tal ofte kan udelades, da de kun er relevante, hvis man skal bestemme lokale ekstremumsværdier.

Der er helt klare regler for, hvad der skal stå i et fortegnsskema. Så læs nedenstående beskrivelse grundigt og tænk over indholdet (den hyppigst forekommende fejl er, at man også på *x*-aksen angiver de tre vilkårlige tal, der blev anvendt til at bestemme fortegnene i intervallerne):



Bemærk, at et fortegnsskema IKKE er en konklusion, dvs. det må ikke afleveres som et facit. Man skal altså efterfølgende med ord angive monotoniforhold eller lokale ekstremumssteder.

Vi ser på endnu et eksempel. Og denne gang et, hvor funktionen ikke er defineret overalt på talaksen, og hvor vi får brug for Maple:

Eksempel 75: Vi ser på $f: x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x-3} \cdot (x^2 - 7x + 10)$, $Dm(f) = \mathbb{R}_+ \setminus \{3\}$

Definitionsmængden følger af, at logaritmefunktioner kun er defineret for positive tal, og at nævneren i brøken er 0, når $x = 3$.

Vi ønsker at bestemme monotoniforhold og lokale ekstremumssteder, og udregningerne foretages i Maple:

restart

with(*Gym*) :

Funktionen defineres: $f := x \rightarrow \dfrac{\ln(x)}{x-3} \cdot (x^2 - 7x + 10)$:

Først bestemmes nulpunkterne for den afledede funktion (der regnes numerisk med *fsolve*):

$fsolve(f'(x) = 0) = 1.503382565$

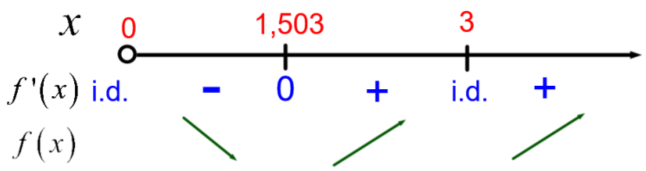
Da *f* ikke er defineret i 3, har vi hermed fået opdelt *x*-aksen i tre intervaller, og vi bestemmer nu fortegnet for den afledede funktion i disse intervaller:

$f'(1) = -2 < 0$

$f'(2) = 3\ln(2) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 2.0794 \; > 0$

$f'(4) = -\dfrac{1}{2} + 6\ln(2) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 3.6589 \; > 0$

Hermed kan fortegnsskemaet tegnes:



Dvs. at:

f er aftagende i intervallet $]0;1,50338]$ og voksende i intervallerne $[1,50338;3[$ og $]3,\infty[$

f har lokalt minimum i 1,50338.

Bemærk, at hvis man havde overset stedet 3, hvor *f* ikke er defineret, var man kommet til at slå de to intervaller, hvor *f* er voksende, sammen til ét. Tegn grafen i Maple og se, hvorfor dette ville være en fejl.

Opgaverne 071*

Anvendelse af differentialregning i forbindelse med parabler

Hvis man har problemer med at huske toppunktsformlen for parabler $T = \left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{d}{4a}\right)$, kan man altid anvende differentialregning til at finde toppunktet. For toppunktet er jo et lokalt (og globalt) ekstremumspunkt, og derfor kan vi bestemme førstekoordinaten ved at finde nulpunktet for den afledede funktion:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2ax + b = 0 \Leftrightarrow 2ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

Når førstekoordinaten er fundet, kan man finde andenkoordinaten ved at indsætte i funktionsforskriften:

Eksempel 76: Vi vil bestemme toppunktet for parablen angivet ved ligningen $y = 2x^2 - 3x - 7$.

Det gør ikke nogen forskel, om parablen er angivet ved en ligning eller en funktionsforskrift. I begge tilfælde differentieres polynomiet:

$$\left(2x^2 - 3x - 7\right)' = 4x - 3$$

Udtrykkes sættes lig 0 for at bestemme nulpunkter for den afledede funktion:

$$4x - 3 = 0 \Leftrightarrow 4x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$

Denne værdi indsættes i ligningen for at finde *y*-værdien:

$$y = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{4} - 7 = 2 \cdot \frac{9}{16} - \frac{9}{4} - 7 = \frac{18}{16} - \frac{36}{16} - \frac{112}{16} = -\frac{130}{16} = -\frac{65}{8}$$

Dvs. toppunktet er: $T = \left(\frac{3}{4}, -\frac{65}{8}\right)$

Opgaverne 072*

Vi kan desuden nu vise, hvad vi påstod i forbindelse med parabler, nemlig at *b*-værdien i $f(x) = ax^2 + bx + c$ kan aflæses som hældningen for tangenten i 0 for den pågældende parabel:

$$f'(x) = 2ax + b$$
$$f'(0) = 2 \cdot a \cdot 0 + b = b$$

En sjov og nok også overraskende funktion

Vi har set på fire forskellige situationer i forbindelse med et nulpunkt for den afledede funktion (lokalt maksimum, lokalt minimum og to slags vandrette vendetangenter). Og umiddelbart vil man nok tro, at det er de eneste fire muligheder for en differentiabel og ikke konstant funktion, da der jo ikke er flere måder at placere + og – på i fortegnsskemaet. Men der er faktisk endnu en mulighed: Se på funktionen *f* givet ved forskriften:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x = 0 \\ x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{for } x \neq 0 \end{cases}$$

Den er defineret for alle reelle tal, for det nederste udtryk er defineret for alle tal bortset fra 0, og her har man tildelt funktionen værdien 0. Og det er netop stedet $x = 0$, vi er interesserede i. Er *f* differentiabel her (*f* er tydeligvis differentiabel alle andre steder)?

Vi kan kun finde ud af dette ved at opskrive differenskvotienten for 0 og se, om den har en grænseværdi for $\Delta x \to 0$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right) - 0}{\Delta x} = \Delta x \cdot \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)$$

Da $\sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right) \in [-1, 1]$, vil differenskvotienten være klemt inde mellem $-\Delta x$ og Δx (uanset om Δx er negativ eller positiv), og da både $-\Delta x \to 0$ og $\Delta x \to 0$ for $\Delta x \to 0$, har differenskvotienten en grænseværdi for $\Delta x \to 0$, og den er 0. Dvs. *f* er differentiabel i 0 med differentialkvotienten 0 (der er vandret tangent).

Og nu kommer så det overraskende:

For når vi prøver at bestemme fortegnene for den afledede funktion på hver side af 0, går det galt.

$$f'(x)=\left(x^2\right)'\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\cdot\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)=2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Vi lægger en (meget lille) udprikket omegn om 0, $\overline{\omega_\delta}(0)$, og ser i første omgang på de positive *x*-værdier i denne. Da *x* er meget lille, kan vi se bort fra første led i udtrykket for den afledede funktion, dvs. vi kigger kun på $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$, når vi skal bestemme fortegnet for den afledede funktion.

Vi ser på *x*-værdier med $0<x<\delta$. Her gælder $\frac{1}{x}>\frac{1}{\delta}$. Dvs. med de *x*-værdier, vi har til rådighed, kan vi som argument i vores cosinusfunktion vælge samtlige tal større end $\frac{1}{\delta}$. Og da cosinusfunktionen skifter fortegn, hver gang argumentet øges med π, vil cosinusfunktionen skifte fortegn uendelig mange gange inden i den omegn, vi har valgt (og det gælder på begge sider af 0). Og bemærk, at dette gælder uanset omegnens størrelse. Dvs. vi kan ikke fastsætte fortegnene for den afledede funktion i nogen udprikket omegn om 0, og dette er altså den femte mulighed.

Hvis du tegner grafen for funktionen i Maple eller Geogebra og prøver at zoome ind, kan du se, hvordan grafen svinger hurtigere og hurtigere, jo tættere man kommer på 0.

Værdimængder

Når man skal bestemme værdimængder for funktioner, skal man kigge på:

1) Lokale ekstremumspunkter.
2) Funktionens opførsel omkring intervaller eller punkter, hvor funktionen ikke er defineret.
3) Diskontinuitetspunkter.
4) Funktionens opførsel for $x\to-\infty$ og $x\to\infty$.

Punkt 1) giver sig selv, og punkt 2) så vi i Eksempel 75. Punkt 3) følger af, at funktionen jo kan ”springe værdier over” i diskontinuitetspunkter, og punkt 4) følger af, at det kan være afgørende for værdimængden, om funktionsværdierne vokser ud over alle grænser eller nærmer sig en grænseværdi.

I det følgende eksempel skal du forestille dig, at man har lavet en funktionsanalyse og er kommet frem til de pågældende resultater:

Eksempel 77: Nedenstående gælder om funktionen *f* , der er differentiabel i alle punkter i sin definitionsmængde:

x		-5		0		9		21	
$f'(x)$	-	0	+	i.d	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	7	↗	i.d	↘	-3	↗	13	↘

$f(x)\to 19$ for $x\to-\infty$

$f(x)\to\infty$ for $x\to 0$

$f(x)\to -1$ for $x\to\infty$

Ud fra dette skal vi bestemme værdimængden.

Vi bemærker, hvad der sker omkring 0. I intervallet]0,9] antager *f* alle værdier fra -3 til ∞. Spørgsmålet er så, om værdierne kommer under -3?

Her skal vi udover de to lokale minimumssteder -5 og 9 se på, hvad der sker for $x\to\infty$, for da *f* er aftagende efter 21, kan der ske noget her. Men vi får oplyst, at $f(x)\to-1$ for $x\to\infty$, dvs. vi kommer ikke under -3. Altså er $Vm(f)=[-3,\infty[$.

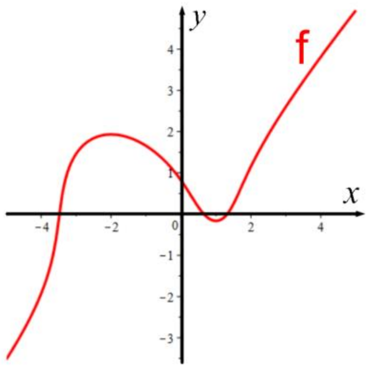
Opgaverne 073*

Fortegnsskemaer ud fra differentialligninger

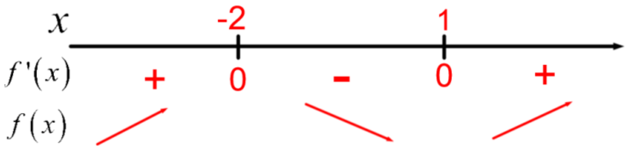
I nogle tilfælde kan man ud fra differentialligninger bestemme et fortegnsskema for de afledede af de funktioner, der er løsninger til differentialligningen, og dermed få viden om nogle egenskaber ved funktionerne:

Eksempel 78: Vi ser på differentialligningen $\frac{dy}{dx}\cdot\left(y^2+1\right)=x^2+x-2$. Hvis du løser den i Maple, kan du se, at det er nogle temmelig komplicerede funktioner, der er løsninger (de er i hvert fald lange).

Men vi kan se på differentialligningen, at da $\left(y^2+1\right)>0$, vil fortegnet for differentialkvotienten være det samme som fortegnet for polynomiet på højresiden. Og det kan faktoriseres til $x^2+x-2=(x+2)\cdot(x-1)$.



Grafen for polynomiet er en parabel med benene pegende opad (positiv *a*-værdi), og faktoriseringen fortæller os, at nulpunkterne er -2 og 1. Så vi får:



Dvs. *f* er voksende i intervallerne $]-\infty,-2]$ og $[1,\infty[$ og aftagende i $[-2,1]$.

Vi ser på grafen til højre, der er grafen for en partikulær løsning, at det stemmer.

Opgaverne 074*

Om at tegne skitser og grafer

I forbindelse med funktionsundersøgelser og optimering skal man sommetider tegne en graf. Her stilles samme krav som altid til grafer, dvs. man skal ikke regne med at få point for bare at skrive *plot*. Og disse krav er så vigtige, at de her indrammes som sætning og angives med blåt:

Når man skal tegne en graf for en funktion, hvor man kender forskriften, gælder følgende krav:

- Hvis definitionsmængden er et interval, skal plottets grænser svare præcis til intervallets, dvs. hvis $Dm=[0,365[$, skrives der $plot\left(f(x), x=0..365, \ldots\ \right)$.
- Hvis definitionsmængden er begrænset i en retning (f.eks. $x>0$), er det her grafen skal begynde, dvs. der må ikke forekomme negative *x*-værdier på grafen.
- Man skal kunne se hele grafen i et interval og som udgangspunkt også altid *x*-aksen, dvs. med f.eks. $plot\left(f(x), x=0..365,\ y=0..20\right)$ skal *y*-vinduet fastsættes.
- Alt væsentligt skal kunne ses på grafen, og med væsentligt menes:
  - ❖ Samtlige nulpunkter (med mindre der er uendelig mange).
  - ❖ Samtlige lokale ekstremumspunkter (med mindre der er uendelig mange).
  - ❖ Samtlige vendetangenter (med mindre der er uendelig mange).

Vendetangenter

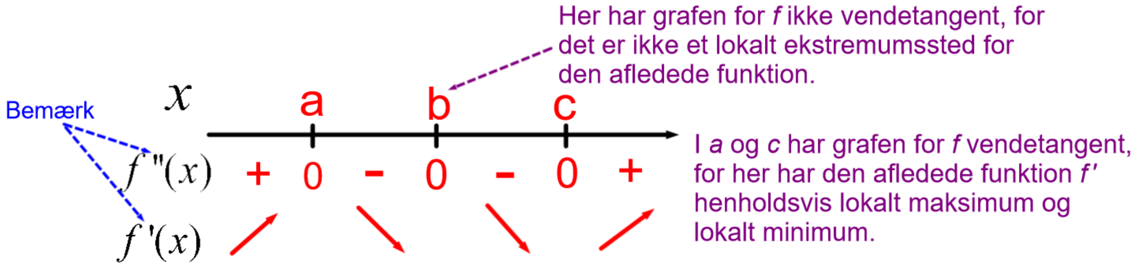
Lokale ekstremumssteder er interessante, fordi de – som vi så i afsnittet om værdimængder – er blandt de steder, vi skal kigge, hvis vi vil finde en funktions største og mindste værdier.

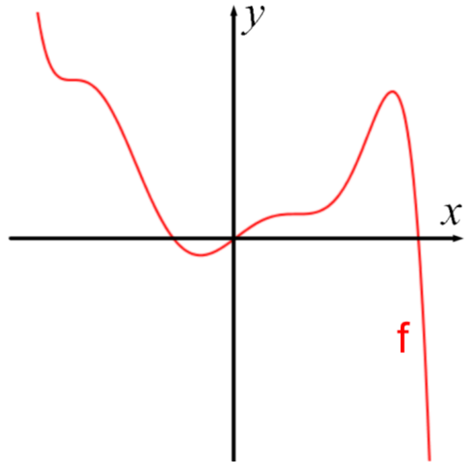
Vendetangenter er interessante, fordi stederne med vendetangenter pr. definition er steder med lokale ekstrema for den afledede funktion, dvs. det er blandt de steder, man skal kigge, hvis man skal finde den afledede funktions største og mindste værdier.

Og da den afledede funktion angiver væksthastigheder, har vi altså:

Steder med vendetangent er de steder, hvor væksthastigheden er lokalt størst eller mindst. Vendetangenters hældninger angiver de lokale ekstremumsværdier for væksthastigheden.

Du kan bestemme steder med vendetangent ved at behandle den afledede funktion $f\,'$, som vi har behandlet f ved hjælp af et fortegnsskema. Det skal i så fald bare være fortegn og nulpunkter for den anden afledede (se nedenstående fortegnsskema):

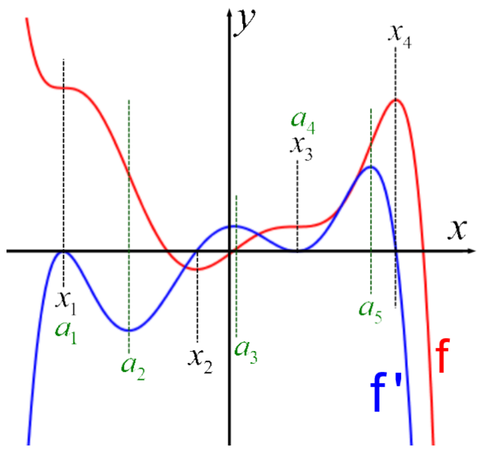




Men vi skal snart lære et hurtigere alternativ til fortegnsskemaer, og derfor gør vi ikke mere ud af ovenstående og går i stedet i gang med at se på, hvordan man grafisk genkender vendetangenter.

Vi ser på grafen for en funktion f (se den røde kurve på figuren til højre).

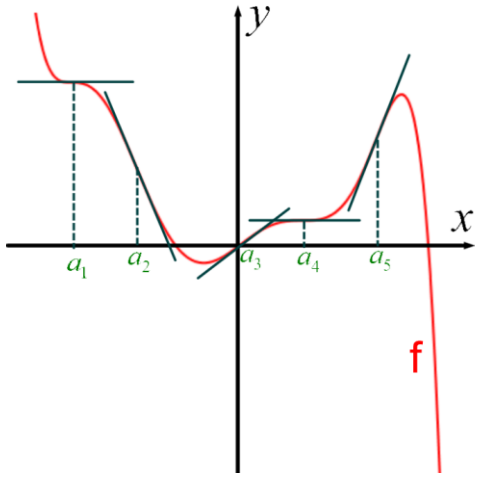
Der er 5 steder, hvor der er vendetangent, og dem skal vi finde.



Du er allerede i stand til at finde de fire steder, hvor der er vandret tangent (lokale ekstremumssteder og steder med vandret vendetangent). De er angivet med x'er på figuren til højre, hvor vi nu også har indtegnet grafen for den afledede funktion med blåt. Bemærk, hvordan den røde graf for f har vandret tangent netop de 4 steder, hvor den blå graf for $f\,'$ har nulpunkter.

Når vi skal finde steder med vendetangent, skal vi kigge efter steder med vandret tangent **for den blå afledede funktion**. De er markeret med a'er på figuren.

Vi har (selvfølgelig) de to vandrette vendetangenter, så $a_1 = x_1$ og $a_4 = x_3$, men der er også tre "nye" steder.



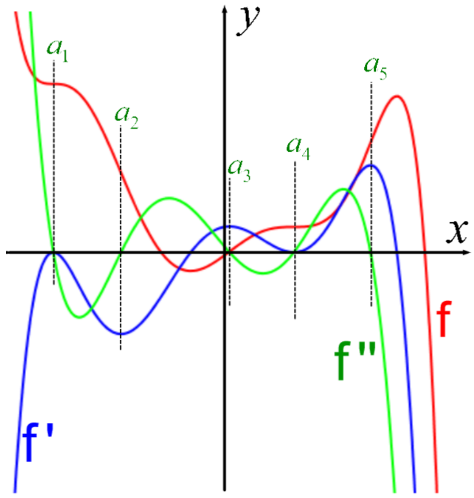
På figuren til højre er de fem vendetangenter tegnet.

Det karakteristiske ved disse tangenter er, at grafen løber på forskellige sider af tangenten lige før og lige efter røringspunktet.

Husk, at tangenthældningen svarer til væksthastigheden:

I a_1 er væksthastigheden 0, og det er den lokalt maksimale væksthastighed, da væksthastighederne omkring a_1 er negative.

I a_2 er der lokalt minimum for væksthastigheden, for væksthastighederne i området er alle negative, og dette er den numerisk største væksthastighed i området. I a_3 er der lokalt maksimum for væksthastigheden, for i området er alle væksthastigheder positive, og i a_3 findes den (numerisk) største væksthastighed. Tjek, at du kan se, at der i a_4 er lokalt minimum og i a_5 lokalt maksimum for væksthastigheden.



På figuren til højre er nu også med grønt tilføjet grafen for den anden afledede funktion f''.

Vi ser her, at da stederne med vendetangent for grafen for f er de lokale ekstremumssteder for den afledede funktion f', så vil det være stederne, hvor **den anden afledede** f'' har nulpunkter (se den grønne graf).

Og vi bemærker også en anden ting: De to steder, hvor f har lokale ekstrema (tidligere markeret med x_2 og x_4), har den anden afledede f'' IKKE nulpunkter. Dvs. vi har her en ny metode til at skelne lokale ekstremumssteder fra steder med vandret vendetangent, hvor vi ikke har brug for at kigge på fortegnet for f' i intervallerne mellem nulpunkterne, men alene kan kigge på værdierne for f' og f'' de pågældende steder.

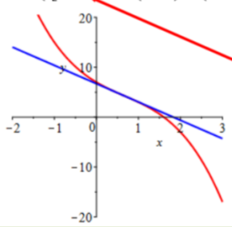
Dvs. at fortegnet for f'' (herunder om værdien er 0) **i selve** x_0 kan erstatte undersøgelsen af fortegnet for f' **omkring** x_0.

Eksempel 79: Vi ønsker at bestemme det sted, hvor grafen for $f: x \mapsto -x^3 + 2x^2 - 5x + 7$ har vendetangent (vi skal senere vise, hvorfor vi ved, at der er netop ét sted).

$f := x \to -x^3 + 2x^2 - 5x + 7:$

$f''(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{x = \frac{2}{3}\right\}$ Her findes det sted, hvor den anden afledede er 0, dvs. hvor vi har vendetangent.

$plot\left(\left[f(x), f'\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)\right], x=-2..3, y=-20..20, thickness=2, color=[red, blue]\right)$



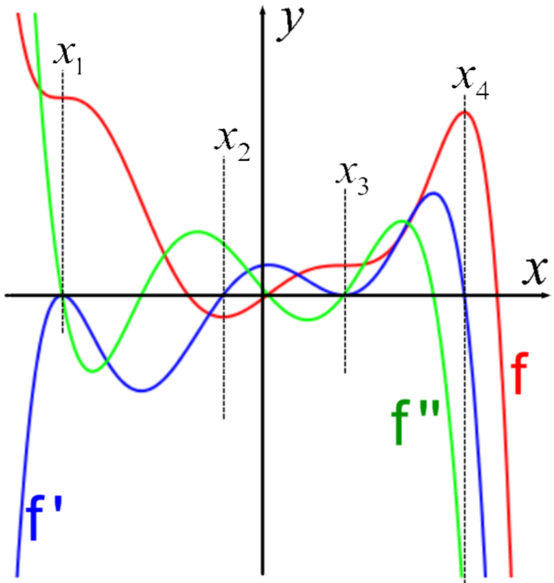
Her tegnes grafen for f sammen med vendetangenten.

Opgaverne 075*

Analyse med højere ordens afledede

Behandlingen af vendetangenter har vist, at vi kan bruge mere end blot den afledede af en funktion til at sige noget om funktionens opførsel. Vi skal nu se, hvordan man kan anvende højere ordens afledede, når man undersøger en funktion, og vi kommer frem til en metode, der er mere abstrakt, men også nemmere, hurtigere og mere generelt anvendelig end fortegnsskemaer.

Vi ser på grafen for samme funktion *f* som tidligere (se figuren til højre), og vi har igen indtegnet graferne for første og anden afledede af *f*. Denne gang ser vi på de fire steder, hvor den afledede har nulpunkt (dvs. grafen for *f* har vandret tangent).



x_1 : Sted med vandret vendetangent.

x_2 : Lokalt minimumssted.

x_3 : Sted med vandret vendetangent.

x_4 : Lokalt maksimumssted.

Det er som nævnt de fire nulpunkter for den afledede funktion, så vi skal kigge på **den anden afledededes** værdi det pågældende sted for at kende forskel på stederne.

x_2 : Ved et lokalt minimum er funktionen aftagende til venstre for stedet og voksende til højre for. Derfor er den afledede funktion negativ til venstre for stedet og positiv til højre for (se den blå graf). Men hermed må $f\,'$ være voksende i en tilpas lille omegn om x_2, dvs. $f\,''(x_2) > 0$.

Vi kan altså kende et lokalt minimumssted x_0 **på, at** $f\,'(x_0) = 0$ **og** $f\,''(x_0) > 0$.

x_4 : Ved et lokalt maksimum er funktionen voksende til venstre for stedet og aftagende til højre for. Derfor er den afledede funktion positiv til venstre for stedet og negativ til højre for (se den blå graf). Men hermed må $f\,'$ være aftagende i en tilpas lille omegn om x_4, dvs. $f\,''(x_4) < 0$.

Vi kan altså kende et lokalt maksimumssted x_0 **på, at** $f\,'(x_0) = 0$ **og** $f\,''(x_0) < 0$.

x_1 og x_3 : Vi har allerede set, at da vendetangenter findes ved lokale ekstremumssteder for den afledede funktion, har den anden afledede nulpunkter disse steder.

Vi kan altså kende steder x_0 **med vandrette vendetangenter på, at** $f\,'(x_0) = 0$ **og** $f\,''(x_0) = 0$ (hvilket dog ikke er helt nok, hvilket vi snart vender tilbage til).

Men der er jo forskel på den vandrette vendetangenter i x_1 og x_3. For den første findes i et interval, hvor *f* er aftagende, mens *f* er voksende i det interval, hvor den anden findes.

Dette kan afsløres med værdien af den tredje afledede. For se på den grønne graf på figuren. Her ses det, at $f\,''$ er aftagende i en tilpas lille omegn om x_1, og dermed er $f^{(3)}(x_1) < 0$. Tilsvarende ses, at $f^{(3)}(x_3) > 0$.

Vi skal nu se nogle eksempler på anvendelsen af højere ordens afledede til funktionsundersøgelse.

Bemærk, at man med fortegnsskemaer benytter monotoniforholdene til at bestemme de lokale ekstremumssteder, mens man med højere-ordens-afledede-metoden først bestemmer de lokale ekstremumssteder og efterfølgende ud fra disse kan angive monotoniforholdene.

Eksempel 80: Vi ønsker at bestemme monotoniforholdene for funktionen *f* givet ved forskriften

$$f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x - 3.$$

Først defineres funktionen i Maple: $f := x \to x^4 - 14\,x^2 + 24\,x - 3$:

For at bestemme lokale ekstremumssteder findes nulpunkter for den afledede funktion:

$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = -3\},\ \{x = 1\},\ \{x = 2\}$

Fortegnet for den anden afledede disse steder bestemmes for at afgøre, om det er maks eller min:

$f''(-3) = 80 > 0$ dvs. -3 er lokalt minimumssted.

$f''(1) = -16 < 0$ dvs. 1 er lokalt maksimumssted.

$f''(2) = 20 > 0$ dvs. 2 er lokalt minimumssted.

Her er din opskrivning meget vigtig. Du skal både med > eller < angive, at det er fortegnet, du kigger på, og du skal skrive konklusionen.

Dermed gælder:

***f* er aftagende i intervallerne** $]-\infty, -3]$ **og** $[1, 2]$**, og *f* er voksende i intervallerne** $[-3, 1]$ **og** $[2, \infty[$.

Når du har fået placeret de lokale ekstremumssteder, kan du angive monotoniforholdene, for du ved, at funktionen er aftagende hen mod et lokalt minimumssted og voksende væk fra det, og tilsvarende er funktionen voksende hen mod et lokalt maksimum og aftagende væk fra det.

Vi har nu set, hvordan man med f', f'' og f''' er i stand til at identificere lokale ekstremumssteder og vandrette vendetangenter, samt at skelne de to slags vandrette vendetangenter fra hinanden. Men der er lige en enkelt gren i vores analyse, som vi ikke har fulgt.

Hvad hvis $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$?

Denne gren viser sig at indeholde rigtig mange ekstra forgreninger, men her kommer en vigtig pointe, som du skal tage med dig:

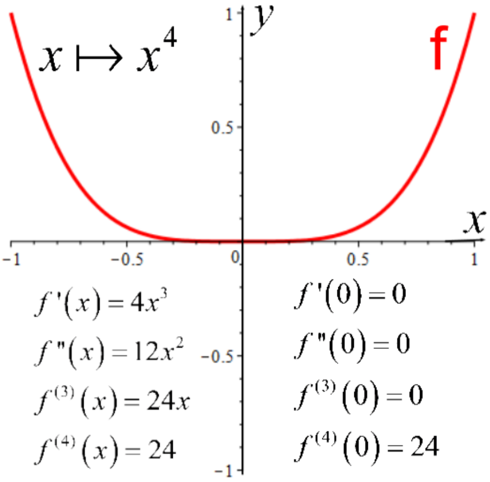
Du kan ikke konkludere noget om et sted ved hjælp af de afledede funktioners værdier, så længe du ikke har fået en værdi forskellig fra 0. Hvis man aldrig får andet end nul, er funktionen enten konstant eller ”ekstremt” flad i en omegn omkring punktet.

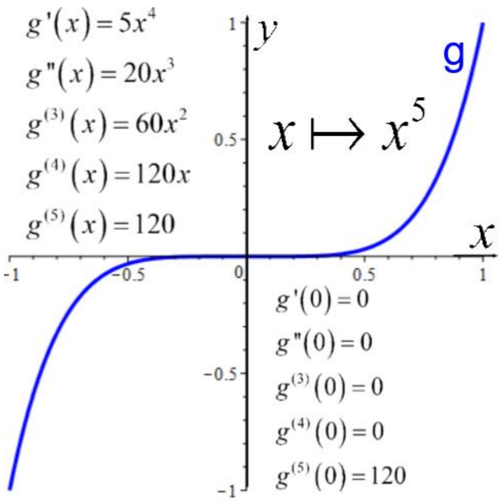
Eller med andre ord:

Fortsæt altid med højere ordens afledede, indtil du har fået en værdi, der ikke er 0.

Pointen illustreres ved nogle eksempler:

Vi ser på funktionerne $x \mapsto x^4$ og $x \mapsto x^5$:





For *f* viser det lokale minimumssted sig først i fortegnet for den fjerde afledede, og den vandrette vendetangent for grafen for *g* viser sig først i værdien af den femte afledede.

Man kan løst sige, at jo fladere et stykke er, jo flere afledede giver 0. For værdien af en afledet funktion fortæller, hvordan den foregående afledede er ved at ændre sig.

Bemærk også, at det har betydning hvilket nummer afledede, der som den første afviger fra 0. Uden bevis kan det nævnes, at hvis det er en afledet af ulige orden over 1 (dvs. $f^{(3)}, f^{(5)}, f^{(7)}, \ldots$), er der vandret vendetangent, mens der er lokalt ekstremumspunkt, hvis det er en afledet af lige orden (dvs. $f^{(2)}, f^{(4)}, f^{(6)}, \ldots$). Dette illustreres med følgende eksempel:

Eksempel 81:

Vi ser på følgende funktion:

$f := x \rightarrow \frac{1}{6}x^6 - \frac{7}{5}x^5 + \frac{9}{2}x^4 - \frac{22}{3}x^3 + \frac{13}{2}x^2 - 3x + 1 :$

Grafen for f er tegnet til højre, og vi kan se, at området omkring 1 er usædvanlig fladt. Vi ser på nulpunkter for den afledede funktion:

$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 1\}, \{x = 1\}, \{x = 1\}, \{x = 1\}, \{x = 3\}$

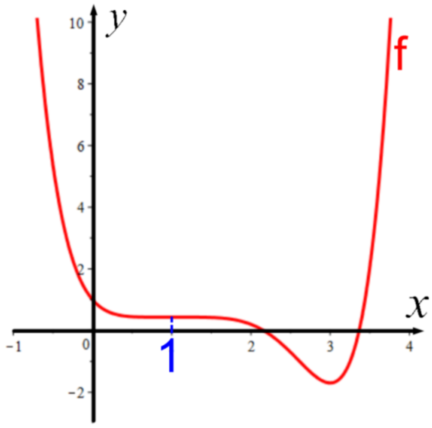
Der er ikke noget specielt ved $x = 3$, så vi fokuserer på $x = 1$.

$f''(1) = 0$ Dvs. det tyder på en vandret vendetangent, men det kan også være et lokalt ekstremumssted eller at funktionen er konstant i intervallet. Så vi er nødt til at tjekke højere ordens afledede:

$f^{(3)}(1) = 0$ Stadig ingen afklaring

$f^{(4)}(1) = 0$ Ingen afklaring. Hvis værdien ikke havde været 0, ville vi have identificeret stedet som et lokalt ekstremumssted.

$f^{(5)}(1) = -48 < 0$ Afklaring! Vi har vandret vendetangent på et aftagende stykke.



Opgaverne 076*

Der gælder præcis det samme, når man vil afsløre ikke-vandrette vendetangenter, hvor vi dog tager udgangspunkt i steder, hvor vores første afledede IKKE er 0 (der er ikke vandret tangent), men den anden afledede er 0. Her skal vi huske på, at en vendetangent svarer til et lokalt ekstremumssted for den afledede funktion. Vi har lige fået at vide, at lokale ekstremumssteder for funktioner afslører sig ved afledede af lige orden, og dermed må lokale ekstremumssteder for **den afledede funktion** afsløre sig ved **ulige** orden. Dvs. vi er så ”heldige”, at vi kan formulere følgende tommelfingerregel:

Både vandrette og ikke-vandrette vendetangenter viser sig ved, at den mindste højere ordens afledede over 1, der ikke er 0, er af ulige orden.

Eksempel 82: Vi ser på nedenstående funktion med grafen angivet til højre:

$g := x \rightarrow \frac{1}{42}x^7 - \frac{7}{30}x^6 + \frac{4}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 8x^2 + 1 :$

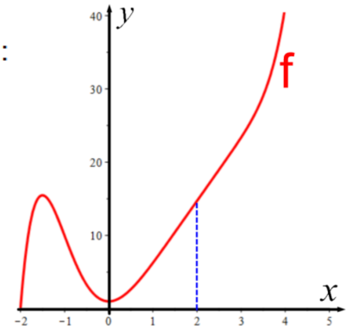
$g''(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 2\}, \{x = 2\}, \{x = 2\}, \{x = 2\}, \{x = -1\}$

$g^{(3)}(2) = 0$ Her kunne en vendetangent have afsløret sig.

$g^{(4)}(2) = 0$ Her kunne en vendetangent være afvist.

$g^{(5)}(2) = 0$ Her kunne en vendetangent have afsløret sig.

$g^{(6)}(2) = 72$ Her afvises vendetangenten.



Opgaverne 077*

Vi samler de væsentligste overvejelser fra dette afsnit i følgende simple oversigt, der altså ikke indeholder alle særtilfælde, men som sandsynligvis dækker nok:

Oversigt over anvendelse af afledede af højere orden

Vi ser på en funktion *f*, der er mindst tre gange differentiabel:

$$f'(x_0)=0 \wedge f''(x_0)<0 \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ har lokalt maksimum i } x_0$$

$$f'(x_0)=0 \wedge f''(x_0)>0 \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ har lokalt minimum i } x_0$$

$$f'(x_0)=0 \wedge f''(x_0)=0 \wedge f'''(x_0)\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Grafen for } f \text{ har vandret vendetangent i } x_0$$

$$f'(x_0)\neq 0 \wedge f''(x_0)=0 \wedge f'''(x_0)\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Grafen for } f \text{ har vendetangent i } x_0$$

En anden sjov og nok lige så overraskende funktion

Vi har set, at jo fladere en funktions graf er i x_0, jo højere skal man op i ordnerne af afledede funktioner, før de ikke giver 0 i x_0. Men faktisk kan en graf være **for** flad i x_0. Se f.eks. nedenstående funktion:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{for } x=0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{for } x\neq 0 \end{cases}$$

Den er uendelig mange gange differentiabel i 0, og alle afledede funktioner antager her værdien 0.

Tredjegradspolynomier

Vi kan nu se på en egenskab ved tredjegradspolynomier, som blev nævnt i Eksempel 79.

Et tredjegradspolynomium $p(x)$ kan generelt angives ved forskriften:

$$p(x)=a_3\cdot x^3+a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_0 \ \ ; \ \ a_3\neq 0$$

Vi bestemmer første, anden og tredje afledede af polynomiet:

$$p'(x)=3\cdot a_3\cdot x^2+2\cdot a_2\cdot x+a_1$$

$$p''(x)=6\cdot a_3\cdot x+2\cdot a_2$$

$$p'''(x)=6\cdot a_3$$

Vi er interesserede i at kunne sige noget om vendetangenter.

Den første afledede er et andengradspolynomium, og det kan have 0, 1 eller 2 rødder, så vi ved ikke, om der findes steder, hvor den første afledede er 0, men det er heller ikke vigtigt, for det ville kun have betydning for, om vores søgte vendetangent ville være vandret eller ikke-vandret.

Den anden afledede er et førstegradspolynomium, hvor grafen er en ret linje, og da $a_3\neq 0$, er det en skrå ret linje, der derfor har netop ét nulpunkt. Dvs. der findes netop ét nulpunkt for den anden afledede funktion. Da den tredje afledede ikke er nul ($a_3\neq 0$) nogen steder og dermed heller ikke i nulpunktet for den anden afledede funktion, kan vi i vores oversigt se, at vi har opfyldt betingelserne for en vendetangent, dvs. vi kan konkludere:

Sætning 22: Grafen for et tredjegradspolynomium har netop én vendetangent.

Den fjerde afledede og harmonisk svingning

Vi har endnu ikke for alvor fået brugt den fjerde afledede til noget. Men det råder vi bod på nu, for den kan faktisk bruges til noget i praksis.

Hvis vi har en bevægelse beskrevet ved stedfunktionen $s(t)$, ved vi, at hastigheden *v* er givet ved $v(t)=s'(t)$, og accelerationen *a* er givet ved $a(t)=v'(t)=s''(t)$.

Hvis vi skal finde det sted, hvor hastigheden er størst eller mindst, vil vi søge de steder, hvor accelerationen er 0, dvs. steder hvor $s''(t)=0$, og hvis t_0 er sådan et sted, vil vi undersøge, om det er et lokalt maksimums- eller minimumssted ved fortegnet på $s^{(3)}(t_0)$.

Men hvis vi skal finde det sted, hvor accelerationen er størst eller mindst, vil vi søge de steder, hvor $s^{(3)}(t)=0$, og hvis t_0 er sådan et sted, vi vil så med fortegnet for $s^{(4)}(t_0)$ afgøre, om det er et lokalt maksimums- eller minimumssted. Og det kan ofte være en vigtig undersøgelse, for accelerationen er proportional med kraften (Newtons 2. lov), og derfor vil vi på den måde kunne finde de tider og steder, hvor kraftpåvirkningen er størst eller mindst.

Eksempel 83: Et lod hængende i en fjeder svinger op og ned, og dets stedfunktion er givet ved

$$s : t \mapsto 4\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{3,7}\cdot t+1.2\right)$$

Vi måler tiden *t* i sekunder og strækningen *s* i meter (positiv retning er opad), og nulpunktet for strækningen er ligevægtspositionen, dvs. positionen, da loddet var i hvile. Vi ser kun på én periode, dvs. tidsrummet $[0,3.7]$.

Vi ønsker at bestemme det sted, hvor loddet har den højeste hastighed, samt den højeste hastighed, og vi ønsker at bestemme det sted, hvor loddet har den højeste acceleration, samt størrelsen af denne acceleration.

$s := t \rightarrow 4\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{3.7}\cdot t+1.2\right)$:

Lokale ekstremumssteder for hastigheden findes ved:

$intervalsolve(s''(t)=0, t=0..3.7) = [1.143352053, 2.993352053]$

Det undersøges med den tredje afledede, om det er maks eller min:

$s'''(1.143352053) = 19.58819525 > 0$ dvs. lokalt minimum.

$s'''(2.993352053) = -19.58819525 < 0$ dvs. lokalt maksimum.

Da vi fra start bevæger os mod et lokalt minimum, kunne vi komme fra en højere hastighed end i det lokale maksimum, så vi udregner både hastigheden i det lokale maksimum og i 0.

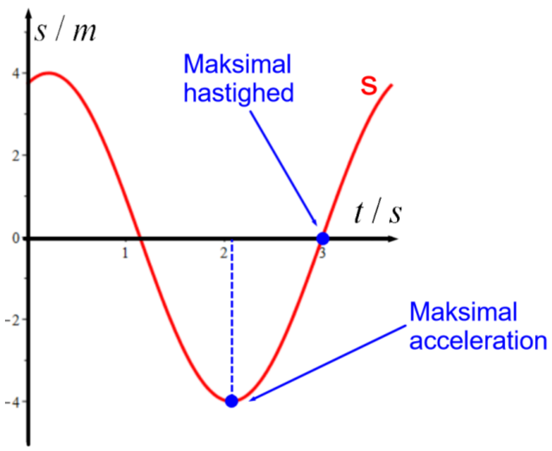
$s'(2.993352053) = 6.792632764$

$s'(0) = 2.461363156$

Positionen med den højeste hastighed er altså:

$s(2.993352053) = 7.281654092\ 10^{-9}$ hvilket vi fortolker som 0 m.

Dvs. at når loddet passerer ligevægtspositionen på vej opad, har det størst hastighed, og denne er 6,8 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$



Acceleration:

Lokale ekstremumssteder for accelerationen findes ved:

$intervalsolve(s'''(t)=0, t=0..3.7) = [0.2183520527, 2.068352053]$

Det undersøges med den fjerde afledede, om det er maks eller min:

$s^{(4)}(0.2183520527) = 33.26385421 > 0$ dvs. lokalt minimum.

$s^{(4)}(2.068352053) = -33.26385421 < 0$ dvs. lokalt maksimum.

Da vi fra start bevæger os mod et lokalt minimum, kunne vi komme fra en højere acceleration end i det lokale maksimum, så vi udregner både acceleration i det lokale maksimum og i 0.

$s''(2.068352053) = 11.53496497$

$s''(0) = -10.75103821$

Positionen med den højeste acceleration er altså:

$s(2.068352053) = -4.$, dvs. i bunden af svingningen.

Dvs. at når loddet er i bunden, har det den største acceleration, og denne er 11,5 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Da vi nu har styr på anvendelsen af de afledede funktioner, kan vi tage fat på en af de vigtigste ting, som funktionsundersøgelser kan anvendes til i praksis, nemlig optimering.

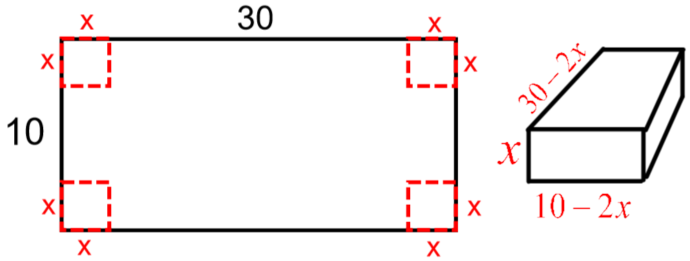
Optimering

Man kan med noget, der vist nærmest er en tautologi, sige, at optimering handler om at finde den optimale løsning på et problem.

Det optimale kan være mange forskellige ting. Det kan være den korteste rute, den hurtigste rute, det størst mulige rumfang med givet overfladeareal, det mindste overfladeareal med givet rumfang, den største fortjeneste, det mindste forbrug, …

Fælles for alle disse ting er, at de drejer sig om lokale eller globale ekstrema for funktioner. Det har vi allerede styr på med vores metode baseret på højere ordens afledede. Det nye, som optimering bringer på banen, er, at man som udgangspunkt selv skal analysere sig frem til de funktionsudtryk, man skal arbejde videre med. Vi ser på nogle eksempler:

Eksempel 84: Vi skal bygge en kasse uden låg af et stykke pap. Alle længdemål angives i cm. Papstykket måler 10×30, og vi klipper 4 kvadratiske hjørner af, så vi kan folde den resterende del af papstykket til en kasse.
Vores opgave er at få en kasse, der kan rumme mest muligt. Dvs. hvordan skal hjørnerne klippes, så rumfanget bliver størst muligt?



Ovenfor er tegnet en skitse af situationen. Vi kan se, at bredden af kassen bliver $10-2x$, fordi vi klipper 2 stykker med sidelængden *x* fra de 10, og tilsvarende bliver længden $30-2x$. Vi kan samtidig se, at der skal gælde $0 < x < 5$, for hvis *x* ikke er over 0, kan man ikke folde en kasse, og det kan man heller ikke, hvis *x* ikke er mindre end 5, da vi ellers ikke har nogen bredde på kassen. Højden af kassen bliver *x*, når vi folder stykkerne op.

Vi er derfor nu i stand til at angive rumfanget som funktion af *x*, dvs. vi kan finde forskriften for den funktion, som vi skal arbejde videre med:

$$V_{kasse} = h \cdot l \cdot b \qquad V(x) = x \cdot (30-2x) \cdot (10-2x) \;\; ; 0 < x < 5$$

Vi skal nu finde den *x*-værdi, der giver størst muligt rumfang, dvs. vi skal finde nulpunkter for den afledede funktion:

$V := x \rightarrow x \cdot (30 - 2x) \cdot (10 - 2x)$:

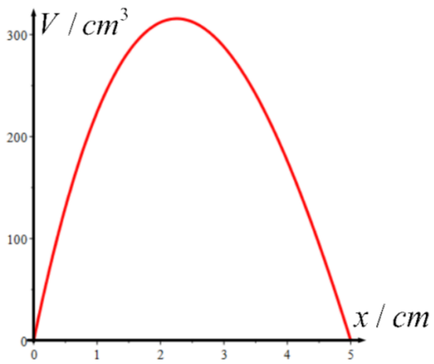
$V'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} 2.257081148,\ 11.07625219$

Vi bemærker, at den anden løsning ligger uden for vores definitionsmængde og tjekker kun den første for, om det er et lokalt maksimums- eller minimumssted:

$V''(2.257081148) = -105.8300524 < 0$ dvs. lokalt maksimumssted.

Da der ikke er andre lokale ekstremumssteder inden for definitionsmængden, er det også globalt maksimumssted.

Dvs. kassen får størst rumfang, når hjørnernes sider er 2,3 cm.



Bemærk: Grafen SKAL tegnes i præcis det rigtige interval (definitionsmængden).
Konklusionen SKAL angives med ord og enheder, der passer til den konkrete opgave.

Eksempel 85: Med hvilke mål skal en cylinderformet dåse med både bund og låg laves, når den skal indeholde 400 cm^3 og have mindst muligt overfladeareal?

Dette er en standardoptimeringsopgave, hvor der indgår to størrelser, der skal opstilles funktionsudtryk for, nemlig rumfanget og overfladearealet.

Du skal i disse tilfælde opskrive formlerne for begge størrelser.

Når r er cylinderens radius, h dens højde, V dens rumfang og A dens overfladeareal, har man:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$A = A_{bund} + A_{låg} + A_{cylinderfladen} = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Vores problem er nu, at vores overfladeareal afhænger af to størrelser r og h. Men det er her, vores betingelse med de 400 cm^3 kommer ind i billedet. Vi regner alle længder i cm og udnytter nu, at rumfanget skal være 400. Det giver os en sammenhæng mellem h og r:

$$400 = \pi \cdot r^2 \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{400}{\pi \cdot r^2}$$

Når vi nu indsætter h i udtrykket for A, opnår vi, at A udelukkende bliver en funktion af r, og så kan vi anvende vores viden om funktionsundersøgelser:

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{400}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{800}{r} \quad ; r > 0$$

$A := r \rightarrow 2 \cdot \pi \cdot r^2 + \dfrac{800}{r}$:

Vi bestemmer steder med vandret tangent:

$A'(r) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} 3.992945425$

Det undersøges, hvad det er for et sted:

$A''(3.992945425) = 37.69911184 > 0$ dvs. lokalt minimumssted.

Vi har altså fundet $r = 4.0$. Den tilsvarende højde beregnes:

$h = \dfrac{400}{\pi \cdot 3.992945425^2} = 7.985890846$

Dvs. dåsen får mindst muligt overfladeareal, når radius er 4,0 cm og højden er 8,0 cm.

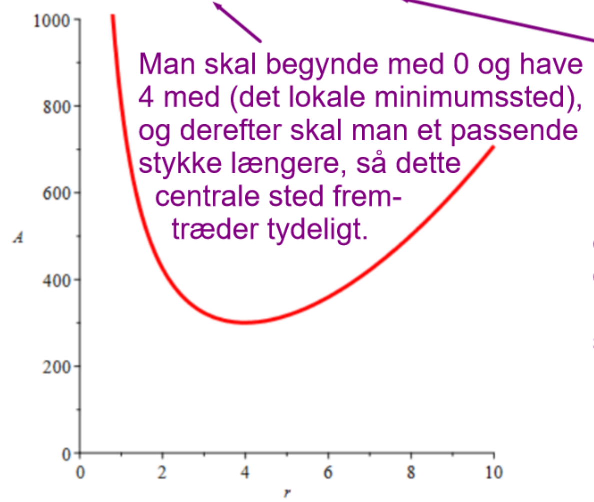
Hvis grafen for A skal tegnes, kan man ikke få hele grafen med, for definitionsmængden er ubegrænset til højre. Men der skal gælde følgende:

Førsteaksen skal begynde ved 0, da r > 0.
Man skal kunne se grafens forløb og det centrale punkt (det lokale minimumspunkt).

$A(4.) = 300.5309649$

$plot(A(r), r = 0..10, A = 0..1000, thickness = 3, color = red)$

Ved at finde funktionsværdien i det lokale minimumssted kan man få en idé om, hvilket interval (begyndende med 0), der skal bruges til 2.aksen.



Man skal (med mindre der er en god grund til at lade være) begynde i 0, og vi har regnet ud, at 300 er den mindste værdi, så vi skal et passende stykke op over denne værdi.

Opgaverne 078*

TAYLORRÆKKER

Vi skal nu se på det, der kunne betegnes som den ultimative udnyttelse af højere ordens afledede.

Vi har i eksemplerne 81 og 82 set, hvordan man kunne lave en analyse, hvor man skulle helt ud til 5. og 6. afledede, før der kunne drages en konklusion. Med uendelige *taylorrækker* får vi brug for afledede af uendeligt mange ordner.

Vi har lært at lave lineære approksimationer til funktioner med udgangspunkt i konkrete punkter på grafen. Vi har kaldt det *tangentens ligning* eller *det approksimerende førstegradspolynomium* $p(x)$. Sidstnævnte blev angivet ved:

$$p(x) = f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

Dette er som bekendt den bedst mulige lineære tilnærmelse til funktionen, og tangenten vil følge grafen fint inden for et tilpas lille område omkring x_0. Men de fleste grafer krummer, og derfor vil den lineære tilnærmelse efterhånden afvige mere og mere fra grafen.

Ideen er så, at man udnytter polynomier af højere grad end 1 til at lave en bedre tilnærmelse, for vi ved jo, hvordan graferne for $x^2, x^3, x^4, \ldots$ krummer på forskellig vis. Spørgsmålet er så bare, hvordan de enkelte polynomier skal vægtes, dvs. hvilken koefficient skal anvendes i de enkelte led?

Og det er her, afledede af højere orden kommer ind i billedet.

Den 6. afledede af en funktion *f* fortæller, hvordan den 5. afledede er ved at ændre sig, og dennes værdi fortæller, hvordan den 4. afledede er ved at ændre sig, og dennes værdi fortæller, hvordan den 3. afledede er ved at ændre sig, og dennes værdi fortæller – og nu er vi ved accelerationen – hvordan den 2. afledede er ved at ændre sig, og dennes værdi (accelerationen) fortæller, hvordan den 1. afledede (hastigheden) er ved at ændre sig, og hastigheden fortæller, hvordan funktionens værdier er ved at ændre sig.

På denne måde har værdien af de afledede funktioner af enhver orden i x_0 betydning for, hvad der sker med funktionen omkring x_0, men denne betydning ses som udgangspunkt længere og længere fra x_0, jo højere ordenen er (fordi virkningen skal "arbejde sig igennem" de afledede af lavere orden).

Når vi omkring x_0 skal finde et polynomium, der er den bedst mulige tilnærmelse til et funktionsudtryk, vælger vi derfor et polynomium, hvor alle afledede op til en vis orden i x_0 har samme værdi for funktionen og for polynomiet – og hermed har vi vores *taylorpolynomium*. På denne måde sikrer vi os, at funktionsudtrykket og polynomiet opfører sig tilnærmelsesvis ens omkring x_0, og som udgangspunkt vil tilnærmelsen række længere, jo højere ordner man inddrager:

Definition 22: Lad funktionen *f* være *n* gange differentiabel i et åbent interval *I*, og lad $x_0 \in I$.

Det n'te taylorpolynomium med udviklingspunkt x_0 er så det polynomium $p(x)$ af højst n'te grad, for hvilket det gælder

$$p(x_0) = f(x_0), \quad p'(x_0) = f'(x_0), \quad p''(x_0) = f''(x_0), \ \ldots, \quad p^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

Vi skal nu finde koefficienterne til et sådant polynomium. Her får vi brug for begrebet *fakultet*, som vi kommer til at arbejde meget med i forbindelse med kombinatorik.

Definition: Lad $n \in \mathbb{N}$. Med skrivemåden $n!$, der læses "*n fakultet*", forstås:

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \qquad \text{Desuden fastsættes det, at } 0! = 1$$

Vi undersøger først differentiation af potensfunktioner med naturlige tal som eksponenter:

$$\begin{aligned}
&(x^1)' = 1\\
&(x^2)'' = (2x)' = 2\cdot 1 = 2!\\
&(x^3)''' = (3x^2)'' = (3\cdot 2x)' = 3\cdot 2\cdot 1 = 3!\\
&(x^4)^{(4)} = (4x^3)''' = (4\cdot 3x^2)'' = (4\cdot 3\cdot 2x)' = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 4!\\
&\vdots\\
&(x^n)^{(n)} = \ldots = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = n!
\end{aligned}$$

Da alle resultaterne er tal, får man 0, hvis man afleder flere gange end polynomiets grad, f.eks. $(x^5)^{(6)} = 0$ og $(x^9)^{(23)} = 0$. Hvis polynomiet er af n'te grad, og vi kun afleder i gange ($i < n$), fås:

$$(x^n)^{(i)} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-i+1)\cdot x^{n-i}$$

Og tilsvarende får vi, når vi differentierer $(x-x_0)^n$:

$$\left((x-x_0)^n\right)^{(i)} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-i+1)\cdot(x-x_0)^{n-i} \qquad (*)$$

$$\left((x-x_0)^n\right)^{(n)} = \left(n\cdot(x-x_0)^{n-1}\right)^{(n-1)} = \left(n\cdot(n-1)\cdot(x-x_0)^{n-2}\right)^{(n-2)} = \ldots = n!$$

Ovennævnte skal vi bruge, når vi skal bevise følgende sætning:

Sætning 23: Lad funktionen *f* være *n* gange differentiabel i et åbent interval *I*, og lad $x_0 \in I$.

Så er det n'te taylorpolynomium med udviklingspunkt x_0 givet ved:

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}\cdot(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$$

Definition 23: Lader vi $n \to \infty$ i Sætning 23, får vi *taylorrækken* $r(x)$ *med udviklingspunkt* x_0:

$$r(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}\cdot(x-x_0)^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$$

Bemærk ved sumtegnet, at $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$, dvs. den nulte afledede af funktionen er bare funktionen selv (pr. definition).

Bevis 23: Vi beviser Sætning 23 ved at vise, at $p^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0) \ \ \forall i \in \{0,1,2,\ldots,n\}$ (Definition 22). Vi har vist, at $\left((x-x_0)^m\right)^{(i)} = 0$, hvis $i > m$, og i (*) ses det, at hvis $i < m$, vil leddet indeholde faktoren $(x-x_0)^{m-i}$, og da det er $p^{(i)}(x_0)$, vi skal finde, bliver denne faktor 0. Det eneste led, der altså bidrager til $p^{(i)}(x_0)$, er leddet, hvor $i = m$, så vi får:

$$p^{(i)}(x_0) = \left(\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}\cdot(x-x_0)^i\right)^{(i)} = \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}\cdot\left((x-x_0)^i\right)^{(i)} = \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}\cdot i! = f^{(i)}(x_0)$$

Vi har nu vist, hvordan det bedst tilnærmende polynomium skal se ud, men vi har ikke set på, **hvor** god tilnærmelsen er. Det kan bevises – hvilket vi ikke gør her – at den øvre grænse for afvigelsen mellem funktionsværdien og værdien af det $(n-1)$'te taylorpolynomium i stedet $a \in I$ er:

$$\left|f(a)-p_{n-1}(a)\right| \leq \left|\frac{f^{(n)}(x_{\max})}{n!}\cdot(a-x_0)^n\right|,$$

hvor $x_{\max}$ er det sted (skarpt) mellem x_0 og a, hvor den n'te afledede af f antager sin numerisk største værdi. Vi ved hermed, hvor stor vores afvigelse højst kan være et givet sted, når vi anvender et taylorpolynomium udviklet i x_0:

- $(a-x_0)^n$ bliver numerisk større, jo længere a ligger fra x_0, dvs. afvigelsen må – ikke overraskende - som udgangspunkt forventes at øges med afstanden fra x_0.
- $n!$ er et matematisk udtryk, der vokser voldsom hurtigt (som funktion er det stærkere end eksponentialfunktioner). Så ved at lade n være tilpas stor, kan man få dette udtryk til at dominere over $(a-x_0)^n$, dvs. man kan få afvigelsen til at blive meget lille, selvom a ligger langt fra x_0.
- $f^{(n)}(x_{\max})$ er lidt en "dark horse", som man ikke kan sige noget generelt om.

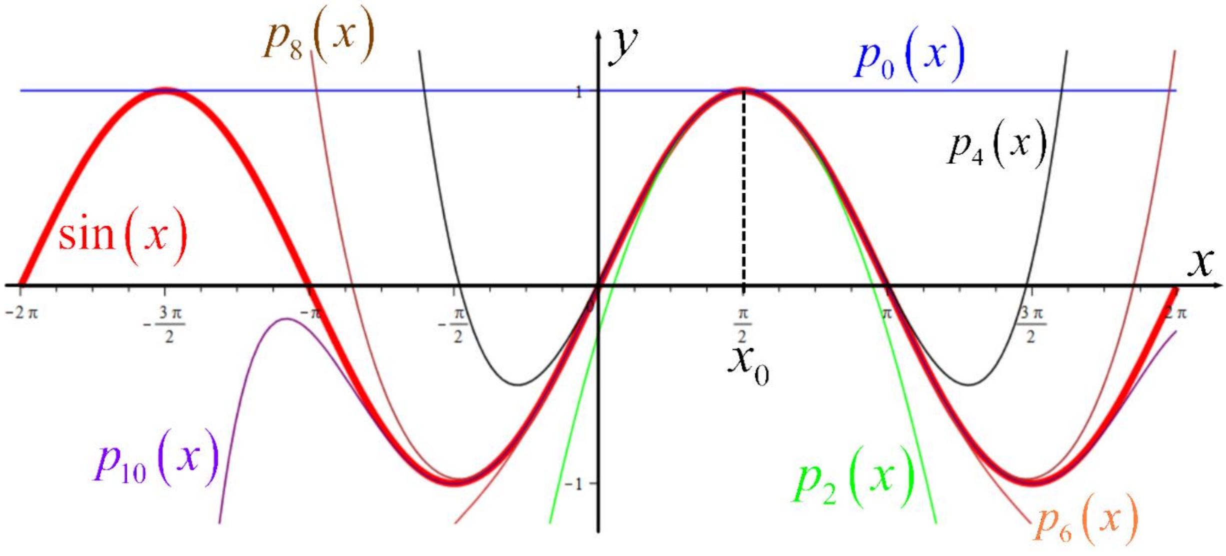
Eksempel 86: Vi ser på $f: x \mapsto \sin(x)$ og ønsker at taylorudvikle i $x_0 = \frac{\pi}{2}$:

Vi udnytter Definition 23, samt at $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ og $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$:

$$p(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2!}\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3!}\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{4!}\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{5!}\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5-\ldots$$

$$1+0-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!}-0+\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4}{4!}+0-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^6}{6!}-0+\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^8}{8!}+0-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{10}}{10!}-0+\ldots$$

På figuren nedenfor er tegnet taylorpolynomier med forskellige værdier af n.



Bemærk, hvordan afvigelserne mellem grafen for sinusfunktionen og polynomierne bliver større, jo længere vi kommer fra x_0, samt hvordan vi får bedre tilnærmelser ved at øge n.

Opgaverne 080*

I Eksempel 86 kan man få fornemmelsen af, at hvis bare man tilføjer tilpas mange led i sit taylorpolynomium, kan man få tilnærmelsen til at blive lige så god, det skulle være, uanset hvor langt fra udviklingspunktet man har bevæget sig. Og det er faktisk rigtigt for sinusfunktionen. Denne egenskab har fået et navn:

Definition 24: En funktion f defineret på et åbent interval I kaldes en *analytisk funktion*, hvis det for ethvert $x_0 \in I$ gælder, at der findes en omegn om x_0, hvor taylorrækken med udviklingspunkt x_0 konvergerer mod f 's funktionsværdi alle steder i omegnen.

Sinus-, cosinus-, eksponential- og logaritme-funktioner er ligesom (selvfølgelig) samtlige polynomier analytiske funktioner.
Numerisk værdi og vores anden sjove og overraskende funktion fra side 52 er eksempler på ikke-analytiske funktioner (prøv at taylorudvikle i 0).

Det har stor betydning, for vi kan dermed sige, at disse analytiske funktioner er lig deres taylorrækker.
Så hvis vi vælger 0 som udviklingspunkt, får vi:

$$e^x = e^0 + e^0 \cdot (x-0) + \frac{e^0}{2!} \cdot (x-0)^2 + \frac{e^0}{3!} \cdot (x-0)^3 + \frac{e^0}{4!} \cdot (x-0)^4 + \frac{e^0}{5!} \cdot (x-0)^5 + \frac{e^0}{6!} \cdot (x-0)^6 + \ldots \Leftrightarrow$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Og dette fortæller os også, at selve tallet **e** svarer til rækkesummen for den konvergerende række:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \ldots$$

$$\sin(x) = \sin(0) + \cos(0) \cdot (x-0) - \frac{\sin(0)}{2!} \cdot (x-0)^2 - \frac{\cos(0)}{3!} \cdot (x-0)^3 + \frac{\sin(0)}{4!} \cdot (x-0)^4 + \frac{\cos(0)}{5!} \cdot (x-0)^5 - \ldots \Leftrightarrow$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots$$

Opgaverne 081*

Disse taylorrækker kan bruges til at definere den naturlige eksponentialfunktion, sinusfunktionen og cosinusfunktionen som komplekse funktioner, dvs. hvor vi arbejder med komplekse tal. For vi siger blot, at x også kan være et komplekst tal. Disse definitioner fører – meget overraskende – til en sammenhæng mellem eksponentialfunktionen og de trigonometriske funktioner.

Med elektriske kredsløb kan man rent fysisk (med spændingsfald) regne med polynomier, men ikke med f.eks. trigonometriske funktioner og eksponentialfunktioner. Derfor anvender lommeregnere og computere polynomiske tilnærmelser til disse, når de ikke regner eksakt.

Perspektivering

Hvis du har indsamlet datamateriale, der kan indtegnes som punkter i et koordinatsystem, kan du lave en polynomisk tilnærmelse til punkterne. Hvis vi antager, at der ligger en eller anden ukendt funktion til grund for dataene, bliver denne funktion altså tilnærmet med et polynomium, og som vi har set ovenfor, kan denne tilnærmelse være ret god, og den kan endda som udgangspunkt også anvendes til at bestemme væksthastigheder og accelerationer.

Stamfunktioner	Funktion	Afledede funktion
$k\cdot x+c$	k	0
$\frac{1}{a+1}\cdot x^{a+1}+c$	x^a	$a\cdot x^{a-1}$
$\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}+c$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln\lvert x\rvert+c$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{a^x}{\ln(a)}+c$	a^x	$\ln(a)\cdot a^x$
e^x+c	e^x	e^x
$x\cdot\ln(x)-x+c$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$-\cos(x)+c$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)+c$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$-\ln\lvert\cos(x)\rvert+c$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$

Integrationsprøven: $F(x)=\int f(x)dx \quad\Leftrightarrow\quad F'(x)=f(x)$

$$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

$$(k\cdot f)'(x)=k\cdot f'(x) \qquad \int k\cdot f(x)dx=k\cdot\int f(x)dx \qquad \int_a^b k\cdot f(x)dx=k\cdot\int_a^b f(x)dx$$

$$(f\pm g)'(x)=f'(x)\pm g'(x)$$

$$\int (f\pm g)(x)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$$

$$\int_a^b (f\pm g)(x)dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$$

$$(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

$$\int (f\cdot g)(x)dx=F(x)\cdot g(x)-\int F(x)\cdot g'(x)dx$$

$$\int_a^b (f\cdot g)(x)dx=\left[F(x)\cdot g(x)\right]_a^b-\int_a^b F(x)\cdot g'(x)dx$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

$(f\circ g)'(x)=g'(x)\cdot f'(g(x))$ eller $\frac{d(f(g(x)))}{dx}=\frac{d(g(x))}{dx}\cdot\frac{d(f(g(x)))}{d(g(x))}$ eller $\frac{df}{dx}=\frac{dg}{dx}\cdot\frac{df}{dg}$

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)dx=\int f(g(x))d(g(x))=F(g(x))+c$$

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(g(x))d(g(x))=\left[F(g(x))\right]_a^b=F(g(b))-F(g(a))$$