

INFINITESIMALREGNING

del 3

Differentialligninger
Funktioner af flere variable
Differentialligningssystemer



x-klasserne
Gammel Hellerup Gymnasium

Marts 2024 ; Michael Szymanski ; mz@ghg.dk

Indholdsfortegnelse

| | |
|------------------------------------------------------|----|
| DIFFERENTIALLIGNINGER..... | 3 |
| Lineære 1.ordens differentiaalligninger | 4 |
| Polynomier som løsninger | 12 |
| Separation af de variable | 13 |
| Logistisk vækst..... | 16 |
| 2. ordens differentiaalligninger | 22 |
| Numerisk løsning af differentiaalligninger | 34 |
| FUNKTIONER AF FLERE VARIABLE..... | 41 |
| 3D-plot med Maples <i>plot3d</i> | 42 |
| Snitkurver og niveaukurver | 44 |
| Partielt afledede | 47 |
| Dobbeltafledede og blandede afledede..... | 49 |
| Stationære punkter, gradienter og tangentplaner..... | 50 |
| Regression | 63 |
| Integration af funktioner af flere variable | 67 |
| DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEMER..... | 69 |
| Radioaktiv henfaldskæde | 69 |
| SIR-modellen..... | 73 |
| Michaelis-Menten..... | 76 |
| Lotka-Volterra | 77 |

DIFFERENTIALLIGNINGER

Da vi nu er i stand til at differentiere og integrere mange funktionstyper og sammensætninger af disse, kan vi tage hul på at løse differentiallyigninger. Vi skal lære to metoder (hvoraf vi egentlig kender den første – se Sætning 24 - allerede), men oftest ”løser” man ikke differentiallyigninger med metoder. Det mest almindelige er, at man genkender differentiallyigningen som en bestemt type differentiallyigning, som man kender den fuldstændige løsning til. Det er udledningen af disse fuldstændige løsninger, der vil blive fokuseret mest på her.

Sætning 24: Den fuldstændige løsning til differentiallyigningen $\frac{dy}{dx} = g(x)$, hvor g er en kontinuert funktion, er funktionsfamilien $f_c : x \mapsto \int g(x) dx$

Bevis 24: Det følger direkte af Infinitesimalregningens Fundamentalsætning og Definition 17.

Dette er den simpleste form for differentiallyigning, og vi ser, at vi allerede kender metoden til at løse den, da vi bare skal integrere funktionen g (hvis vi kan). Det er også den differentiallyigning, hvor det nok er tydeligst at se sammenhængen mellem den konstant, vi introducerede i forbindelse med ubestemte integraler, og den konstant, vi hele tiden støder på i forbindelse med fuldstændige løsninger til 1.ordens differentiallyigninger. Det er ”den samme” konstant.

Eksempel 87: Vi ser på differentiallyigningen $y' = \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

Vi ønsker at bestemme den fuldstændige løsning til differentiallyigningen samt den partikulære løsning f , for hvilken det gælder, at $f(9) = 8$.

Den fuldstændige løsning består af alle funktionerne i funktionsfamilien f_c :

$$f_c(x) = \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c \quad ; \quad x \geq 0$$

Vi skal være opmærksomme på, at disse funktioner også er differentiable i 0 (med differentialkvotienten 0), så vi skal ikke indskrænke definitionsområdet.

For at bestemme den partikulære løsning f indsættes det kendte punkt.

$$8 = \frac{2}{3} \cdot 9^{\frac{3}{2}} + c \Leftrightarrow 8 = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{9^3} + c \Leftrightarrow 8 = \frac{2}{3} \cdot 3^3 + c \Leftrightarrow 8 = 18 + c \Leftrightarrow c = -10$$

Dvs. at: $f(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - 10 \quad ; \quad x \geq 0$

Vi kan tjekke med Maple:

Først den fuldstændige løsning:

$$y' = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{solve DE}} y(x) = \frac{2}{3} x^{3/2} + _C1$$

Så den partikulære løsning:

$$[y' = \sqrt{x}, y(9) = 8] \xrightarrow{\text{solve DE}} y(x) = \frac{2}{3} x^{3/2} - 10$$

Lineære 1.ordens differentiallyigninger

Den generelle form for en lineær 1.ordens differentiallyigning er:

$$\frac{dy}{dx} + h(x) \cdot y = g(x)$$

Dvs. eksempler, der falder ind under denne form, er:

$$y' + e^x \cdot y = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} + x \cdot y - \sin(x) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 7 - 5y$$

$$y' = 9y$$

Øvelse 8: Tjek, at du kan se, hvordan alle 4 differentiallyigninger ovenfor falder ind under den generelle form, dvs. tjek, at du kan se, hvad $h(x)$ og $g(x)$ svarer til.

Ordet *lineær* er et matematisk begreb, der anvendes inden for mange forskellige områder, og her henviser det til venstresiden i differentiallyigningen, der opfylder de to linearitetsbetingelser:

$$\frac{d(y_1 + y_2)}{dx} + h(x) \cdot (y_1 + y_2) = \left(\frac{dy_1}{dx} + h(x) \cdot y_1 \right) + \left(\frac{dy_2}{dx} + h(x) \cdot y_2 \right) \text{ og } \frac{d(k \cdot y)}{dx} + h(x) \cdot (k \cdot y) = k \cdot \left(\frac{dy}{dx} + h(x) \cdot y \right)$$

Hvis $g(x) = 0$, kaldes differentiallyigningen *homogen*, og ellers kaldes den *inhomogen*.

Øvelse 9: Er $y = 0$ en løsning til en homogen, lineær 1.ordens differentiallyigning?

Da nulfunktionen $x \mapsto 0$ er en løsning til alle homogene, lineære 1.ordens (og 2. ordens) differentiallyigninger samt en række andre differentiallyigninger, og da den som udgangspunkt er en dybt uinteressant løsning, kaldes den – **når den er en løsning** – for *den trivielle løsning*.

Sætning 25 (Lineære 1. ordens differentiallyigninger ; Panserformlen): Differentiallyigningen

$$\frac{dy}{dx} + h(x) \cdot y = g(x),$$

hvor h og g er kontinuerte funktioner, har den fuldstændige løsning

$$f : x \mapsto e^{-H(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{H(x)} dx \text{ eller } f : x \mapsto c \cdot e^{-H(x)} + p(x)$$

hvor H er en vilkårlig stamfunktion til h , c en reel konstant og p en vilkårlig, partikulær løsning.

Specialtilfælde:

$$g(x) = 0 \text{ og } h(x) = -k : \frac{dy}{dx} = k \cdot y \text{ har den fuldstændige løsning } f : x \mapsto c \cdot e^{k \cdot x} ; c \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = b \text{ og } h(x) = a : \frac{dy}{dx} = b - a \cdot y \text{ har den fuldstændige løsning: } f : x \mapsto \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x} ; c \in \mathbb{R}$$

I det sidste tilfælde skal $a \neq 0$. Hvis $a = 0$, har man et (simpelt) specialtilfælde af Sætning 24.

Der er mange kommentarer at knytte til indholdet af Sætning 25, men vi begynder med beviset:

Bevis 25: Vi ser på differentialligningen $\frac{dy}{dx} + h(x) \cdot y = g(x)$, hvor h og g er kontinuerte funktioner.

Vores mål er at få omskrevet venstresiden til én differentialkvotient, mens højresiden skal vedblive med at være en funktion af x , da vi så kan bruge Sætning 24. Der er to led på venstresiden, hvilket vi kender fra produktreglen. Men der mangler noget ...

Da h er kontinuert, har den en stamfunktion H , og vi kan forlænge ligningen med $e^{H(x)}$, så vi får:

$$\frac{dy}{dx} \cdot e^{H(x)} + h(x) \cdot e^{H(x)} \cdot y = g(x) \cdot e^{H(x)}$$

Husk, at man kan forlænge ligninger, så længe man ikke forlænger med 0. Og det er en meget vigtig pointe. Vi kan forlænge ligningen med $e^{H(x)}$, fordi eksponentialfunktioner aldrig antager værdien 0. Vi kunne ikke have forlænget med f.eks. $H(x)$ eller $g(x)^2$, da der **kunne** være x -værdier, hvor disse størrelser antog værdien 0.

Det er altså tilladt at forlænge med $e^{H(x)}$. Vi skal nu se, hvorfor det også er smart:

Vi er nemlig i stand til at omskrive venstresiden til differentiation af et produkt (tjek selv efter!):

$$\frac{d(y \cdot e^{H(x)})}{dx} = g(x) \cdot e^{H(x)}$$

Da højresiden er en funktion af x , er dette en differentialligning af typen fra Sætning 24, og vi har altså:

$$y \cdot e^{H(x)} = \int g(x) \cdot e^{H(x)} dx \text{ eller } y = \frac{1}{e^{H(x)}} \int g(x) \cdot e^{H(x)} dx = e^{-H(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{H(x)} dx$$

Vi har hermed fundet det første af de to angivne udtryk for den fuldstændige løsning. Det er dette udtryk, der kaldes "Panserformlen" (ingen ved hvorfor). Vi skal nu vise to ting:

- 1) At udtrykket består af summen af $c \cdot e^{-H(x)}$ og noget, der er en (partikulær) løsning.
- 2) At en sum af $c \cdot e^{-H(x)}$ og en partikulær løsning er en løsning til differentialligningen.

Hvis vi ikke viste 2), kunne man forestille sig, at der fandtes en sum af $c \cdot e^{-H(x)}$ og en partikulær løsning, der ikke var en løsning til differentialligningen, selvom vi i 1) havde vist, at alle løsninger var summen af $c \cdot e^{-H(x)}$ og en partikulær løsning. Tjek, at du kan se, at det er forskellige ting, der vises.

- 1) Vi husker integrationskonstanten, der her betegnes c , og omskriver vores løsningsudtryk til:

$$y = e^{-H(x)} \cdot \left(\int g(x) \cdot e^{H(x)} dx + c \right) = c \cdot e^{-H(x)} + e^{-H(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{H(x)} dx$$

Vi skal så vise, at leddet med integraltegnet er en løsning til differentialligningen. Dette gøres ved at indsætte i differentialligningen og tjekke, at vi får en identitet:

$$\frac{d(e^{-H(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{H(x)} dx)}{dx} + h(x) \cdot e^{-H(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{H(x)} dx = g(x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{d(e^{-H(x)})}{dx} \cdot \int g(x) \cdot e^{H(x)} dx + e^{-H(x)} \cdot \frac{d(\int g(x) \cdot e^{H(x)} dx)}{dx} + h(x) \cdot e^{-H(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{H(x)} dx = g(x) \Leftrightarrow$$

$$-h(x) \cdot e^{-H(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{H(x)} dx + e^{-H(x)} \cdot g(x) \cdot e^{H(x)} + h(x) \cdot e^{-H(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{H(x)} dx = g(x) \Leftrightarrow g(x) = g(x)$$

Da vi får en identitet, har vi vist, at leddet med integraltegnet er en løsning til differentialligningen.

2) Vi ser nu på $f : x \mapsto c \cdot e^{-H(x)} + p(x)$, hvor vi antager, at p er en (partikulær) løsning til differentialligningen. Vi skal så vise, at f også er en løsning til differentialligningen. Vi indsætter i differentialligningen:

$$\begin{aligned} \frac{d(c \cdot e^{-H(x)} + p(x))}{dx} + h(x) \cdot (c \cdot e^{-H(x)} + p(x)) &= g(x) \Leftrightarrow \\ c \cdot (-h(x)) \cdot e^{-H(x)} + p'(x) + h(x) \cdot c \cdot e^{-H(x)} + h(x) \cdot p(x) &= g(x) \Leftrightarrow \\ p'(x) + h(x) \cdot p(x) &= g(x) \Leftrightarrow g(x) = g(x) \end{aligned}$$

Det sidste skridt følger af, at da p er en løsning til differentialligningen, gælder $p'(x) + h(x) \cdot p(x) = g(x)$, og dermed har vi opnået den ønskede identitet, der viser, at f er en løsning til differentialligningen.

Vi har hermed vist de generelle løsningsudtryk og bruger nu dette til at vise specialtilfældene:

$\frac{dy}{dx} = k \cdot y$: Her gælder $g(x) = 0$ og $h(x) = -k$, dvs. $H(x) = -k \cdot x + c_1$, og vores generelle

løsningsudtryk giver:

$$y = e^{-(-k \cdot x + c_1)} \cdot \int 0 \cdot e^{-k \cdot x + c_1} dx = e^{k \cdot x - c_1} \cdot \int 0 dx = e^{k \cdot x} \cdot e^{-c_1} \cdot (c_2 + c_3) = e^{k \cdot x} \cdot c = c \cdot e^{k \cdot x}$$

$\frac{dy}{dx} = b - a \cdot y$: Her gælder $g(x) = b$ og $h(x) = a$, dvs. $H(x) = a \cdot x + c_1$, og det generelle

løsningsudtryk giver os så:

$$y = e^{-(a \cdot x + c_1)} \cdot \int b \cdot e^{a \cdot x + c_1} dx = e^{-a \cdot x} \cdot e^{-c_1} \cdot \left(\frac{b}{a} \cdot e^{a \cdot x + c_1} + c_2 \right) = \frac{b}{a} \cdot e^{-a \cdot x} \cdot e^{a \cdot x} \cdot e^{-c_1} \cdot e^{c_1} + c_2 \cdot e^{-a \cdot x} \cdot e^{-c_1} = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$$

$\frac{dy}{dx} = k \cdot y$ med den fuldstændige løsning $f : x \mapsto c \cdot e^{k \cdot x}$

Vi ser først på det simpleste af de to specialtilfælde.

Eksempel 88: Vi ser på differentialligningen $\frac{dy}{dx} = 8 \cdot y$. Vi vil gerne finde den fuldstændige løsning

samt den partikulære løsning, hvis graf går gennem punktet $P(0,12)$.

Vi genkender vores differentialligning som en ligning på formen $\frac{dy}{dx} = k \cdot y$, hvor $k = 8$.

Dermed er den fuldstændige løsning ifølge Sætning 25 funktionerne f_c med forskrifterne:

$$f_c(x) = c \cdot e^{8 \cdot x} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

c for den partikulære løsning findes ved at indsætte P 's koordinater i funktionsudtrykket:

$$12 = c \cdot e^{8 \cdot 0} \Leftrightarrow 12 = c \cdot 1 \Leftrightarrow c = 12$$

Dvs. den partikulære løsning er: $f(x) = 12 \cdot e^{8 \cdot x} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$

Eksempel 89: Vi ser på differentiaalligningen $y' + 3y = 0$. Vi vil gerne finde den fuldstændige løsning samt den partikulære løsning f , hvor $f(4) = 9$.

Vi genkender differentiaalligningen som en ligning på formen $\frac{dy}{dx} = k \cdot y$, hvor udtrykket på højresiden bare er flyttet over på venstresiden. Dvs. vi har $k = -3$ (husk fortegnsskiftet).

Hermed er den fuldstændige løsning ifølge Sætning 25: $f_c : x \mapsto c \cdot e^{-3 \cdot x}$; $x \in \mathbb{R}$

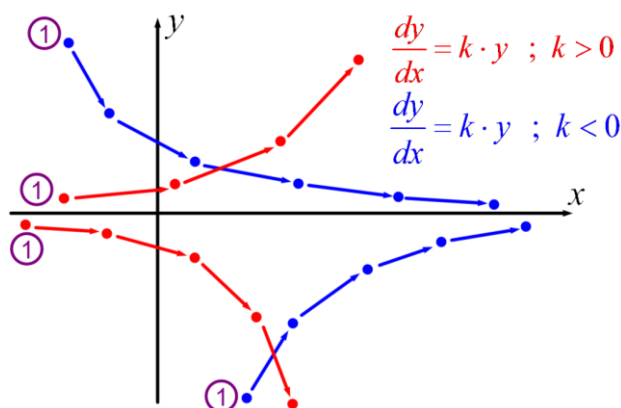
c for den partikulære løsning findes: $9 = c \cdot e^{-3 \cdot 4} \Leftrightarrow 9 = c \cdot e^{-12} \Leftrightarrow c = 9 \cdot e^{12}$

Dvs. forskriften for den partikulære løsning f er: $f(x) = 9 \cdot e^{12} \cdot e^{-3x} = 9 \cdot e^{-3x+12}$; $x \in \mathbb{R}$

Opgaverne 101*

Vi ved allerede, at løsningerne til $y' = k \cdot y$ er eksponentielle udviklinger, så vi kender løsningskurvernes udseende, men lad os se på, hvordan dette kan skitseres alene ud fra differentiaalligningen. Man kan kalde det en slags målrettet anvendelse af linjeelementer, hvor vi ikke bare finder linjeelementer i tilfældige punkter, men lader retningen fra et linjeelement føre os frem til et nyt punkt.

På figuren til højre er med ① markeret fire forskellige "startpunkter". De to røde punkter er knyttet til tilfælde, hvor $k > 0$, mens de to blå er knyttet til $k < 0$. Et "Startpunkt" skal ikke forstås på den måde, at grafen begynder her. Det er bare her, vi begynder analysen. Vi ser først på det blå startpunkt i 2. kvadrant.



- **Blå, start i 2. kvadrant:** Da k er negativ, og y -værdien er positiv, vil væksthastigheden – dvs. tangenthældningen – være negativ. Når vi bevæger os til højre, skal det næste punkt derfor placeres længere nede. Dermed bliver dette punkts y -værdi mindre end startpunktets, og dermed bliver den negative væksthastighed numerisk mindre, dvs. vi skal følge en mindre stejl linje hen til næste punkt. Og sådan fortsættes. Når vi nærmer os x -aksen, nærmer y -værdien sig 0, og dermed nærmer væksthastigheden sig også 0, dvs. grafen flader mere og mere ud og lægger sig tættere og tættere til x -aksen uden nogensinde at røre eller skære denne.
- **Rød, start i 2. kvadrant:** Da k og y -værdien begge er positive, er væksthastigheden (tangenthældningen) positiv, dvs. funktionen er voksende på dette stykke (faktisk er den voksende i hele \mathbb{R} , men det ses ikke endnu). I næste punkt til højre er y -værdien derfor større, og væksthastigheden er dermed også større, dvs. vores tangent er stejlere. Sådan fortsætter det med højere og højere væksthastighed.
- **Blå, start i 4. kvadrant:** Da både k og y -værdien er negative, er væksthastigheden positiv, dvs. funktionen er voksende her. I næste punkt til højre er y -værdien numerisk mindre, dvs. tangenthældningen bliver mindre stejl ved de næste punkter, og når man kommer tæt på x -aksen, vil væksthastigheden nærme sig 0, således at grafen lægger sig lige under x -aksen.
- **Rød, start i 3. kvadrant:** Tjek, om du kan argumentere for udseendet af denne graf.

De to sidste af ovenstående grafer svarer godt nok ikke til eksponentielle udviklinger, da vi har defineret disse til at have positive begyndelsesværdier. Men vi husker, at det var os selv – og ikke en matematisk nødvendighed – der lagde denne begrænsning på begyndelsesværdien.

Dette er en meget simpel differentialligning, men den kan faktisk beskrive mange fænomener, da det ikke er usædvanligt, at væksthastigheden for en størrelse er proportional med værdien af størrelsen. F.eks. vil antallet af radioaktive kerner, der henfalder inden for et vist tidsrum, være proportional med antallet af radioaktive kerner, da hver kerne har samme sandsynlighed for at henfalde. Dette giver differentialligningen $-\frac{dN}{dt} = k \cdot N$ med løsningen $N(t) = N_0 \cdot e^{-k \cdot t}$ ($c = N_0$).

Inden for reaktionskinetik er der situationer, hvor reaktionshastigheden er proportional med koncentrationen af reaktanten A, dvs. $-\frac{d[A]}{dt} = k \cdot [A]$ med løsningen $[A]_t = [A]_0 \cdot e^{-k \cdot t}$. Det kan forekomme, da antallet af molekylsammenstød, der kan føre til en reaktion, er proportional med antallet af molekyler.

Væksthastigheden af en befolkning vil også som udgangspunkt være proportional med befolkningens størrelse, for både antallet af fødsler og antallet af dødsfald vil – alt andet lige – være proportional med befolkningens størrelse. Nu er det dog med befolkninger ikke så tit, at alt andet er lige, og derfor er det kun i nogle af verdens lande og i nogle perioder, at befolkningstallet vokser (eller aftager) eksponentielt. Oftest anvender man kaniner på en ø uden rovdyr og med rigelig føde eller bakterier i en næringssuppe som eksempler på noget, hvor antallet af individer – indtil en vis grænse – vil vokse eksponentielt.

Man kan også vende det om og sige, at når vi – hvilket ofte hænder - oplever sammenhænge, der kan beskrives ved eksponentielle udviklinger, så er det ovenstående differentialligning, der ligger til grund for dette, dvs. man skal som forklaring finde begrundelser for proportionaliteten mellem væksthastigheden for størrelsen og værdien af størrelsen.

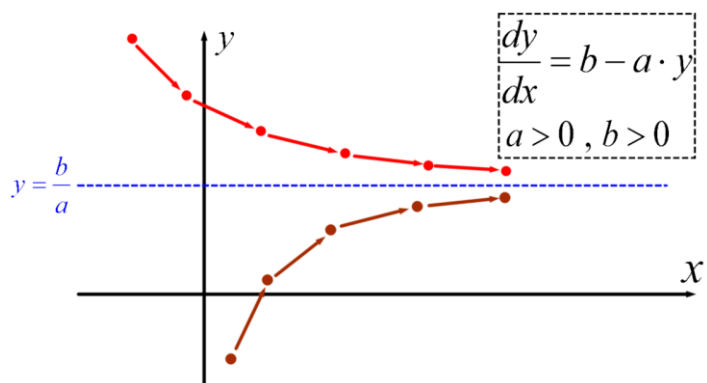
$$\frac{dy}{dx} = b - a \cdot y \text{ med den fuldstændige løsning } f : x \mapsto \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$$

Vi begynder med vores målrettede anvendelse af linjeelementer, så vi kan få en idé om, hvordan løsningskurverne ser ud. Vi ser på en situation, hvor både a og b er positive. Da fortegnet for væksthastigheden er vigtigt i vores analyse, ser vi først på højresiden i differentialligningen:

$$b - a \cdot y = 0 \Leftrightarrow b = a \cdot y \Leftrightarrow y = \frac{b}{a}$$

$$b - a \cdot y < 0 \Leftrightarrow b < a \cdot y \Leftrightarrow y > \frac{b}{a}$$

$$b - a \cdot y > 0 \Leftrightarrow b > a \cdot y \Leftrightarrow y < \frac{b}{a}$$



Vi ser altså, at når $y > \frac{b}{a}$, er væksthastigheden negativ. Dvs. når startpunktet ligger over linjen med ligningen $y = \frac{b}{a}$, er tangenthældningen negativ (se det røde startpunkt på figuren ovenfor). Når y-værdien bliver mindre, bliver det negative led i udtrykket $b - a \cdot y$ mindre, dvs. den negative væksthastighed bliver numerisk mindre, dvs. tangenten bliver mindre stejl ved næste punkt.

Når y -værdien kommer tæt på $\frac{b}{a}$, kommer væksthastigheden tæt på 0, og derfor flader grafen ud og lægger sig lige over linjen med ligningen $y = \frac{b}{a}$.

Øvelse 10: Tjek, at du kan analysere dig frem til forløbet af den brune graf på figuren.

Øvelse 11: Foretag analysen, når det antages, at $b > 0$ og $a < 0$.

Øvelse 12: Vis, at konstantfunktionen $f : x \mapsto \frac{b}{a}$ er en løsning til differentialligningen.

Vi ser nu på to konkrete eksempler. Et rent matematisk og et fra fysik.

Eksempel 90: Vi ser på differentialligningen $y' + 4y = 12$. Vi ønsker at bestemme den fuldstændige løsning samt de to partikulære løsninger, hvis grafer går igennem henholdsvis punkterne $P(0, 9)$ og $Q(0, -5)$.

Vores skarpe blik genkender differentialligningen som en ligning på formen $\frac{dy}{dx} = b - a \cdot y$, hvor $a = 4$ og $b = 12$, dvs. Sætning 25 fortæller os, at den fuldstændige løsning f_c er:

$$f_c(x) = \frac{12}{4} + c \cdot e^{-4x} = 3 + c \cdot e^{-4x} ; x \in \mathbb{R}$$

c for den partikulære løsning med løsningskurven gennem P bestemmes:

$$9 = 3 + c \cdot e^{-4 \cdot 0} \Leftrightarrow 9 - 3 = c \cdot 1 \Leftrightarrow c = 6$$

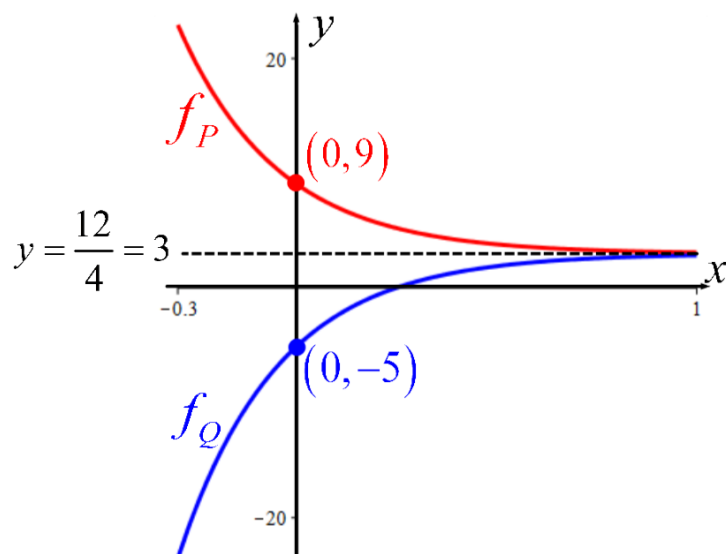
Dvs. at: $f_P(x) = 3 + 6 \cdot e^{-4x} ; x \in \mathbb{R}$

c for den partikulære løsning med løsningskurven gennem Q bestemmes:

$$-5 = 3 + c \cdot e^{-4 \cdot 0} \Leftrightarrow -5 - 3 = c \cdot 1 \Leftrightarrow c = -8$$

Dvs. at: $f_Q(x) = 3 - 8 \cdot e^{-4x} ; x \in \mathbb{R}$

De to løsningskurver er:



Eksempel 91 (Newtons afkølingslov): Hvis et glas vand med temperaturen T placeres i nogle omgivelser med den konstante temperatur T_o , kan man med god tilnærmelse regne med, at den hastighed $\frac{dT}{dt}$, hvormed vandets temperatur ændrer sig, er proportional med forskellen mellem omgivelsernes og vandets temperatur. Vi får altså differentilligningen:

$$\frac{dT}{dt} = k \cdot (T_o - T) ; k > 0$$

Vi ser, at hvis $T > T_o$, vil vandets temperatur falde $\left(\frac{dT}{dt} < 0\right)$.

Vi genkender dette som en differentilligning af typen $\frac{dy}{dx} = b - a \cdot y$, hvor $b = k \cdot T_o$ og $a = k$, dvs. Sætning 25 fortæller os, at den fuldstændige løsning er:

$$T : t \mapsto \frac{k \cdot T_o}{k} + c \cdot e^{-k \cdot t} = T_o + c \cdot e^{-k \cdot t} ; t \geq 0$$

Da $k > 0$, vil $c \cdot e^{-k \cdot t} \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$, uanset om c er positiv eller negativ. Dvs. temperaturen vil med tiden nærme sig omgivelsernes temperatur.

Vi ser også, at funktionen $T : t \mapsto T_o$ er en løsning til differentilligningen (tjek selv!)

Opgaverne 102*

$\frac{dy}{dx} + h(x) \cdot y = g(x)$ med den fuldstændige løsning $f : x \mapsto e^{-H(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{H(x)} dx$

Den fuldstændige løsning til den generelle lineære 1. ordens differentilligning adskiller sig væsentligt fra de to specialtilfælde, vi netop har gennemgået. For det er ikke et løsningsudtryk, vi bare kan sætte ind i. Det indeholder for det første stamfunktionen H til h , og selvom vi ved, at h – da den er kontinuert – har en stamfunktion, er det jo ikke sikkert, at vi kan finde denne eller angive den ved et simpelt funktionsudtryk. For det andet indeholder udtrykket et ubestemt integral, og her ser integranden som udgangspunkt endnu værre ud, da vi har et produkt af to funktioner, hvoraf den ene, $e^{H(x)}$, oftest vil være en sammensætning af mindst to funktioner.

Det er derfor langt fra sikkert, at man kan løse en konkret differentilligning på denne form. Hvis man kan finde H , men har problemer med integralet, kan man sommetider ”gætte” en partikulær løsning og anvende $f : x \mapsto c \cdot e^{-H(x)} + p(x)$. Men inden vi ser på dette, ser vi på selve det matematiske udtryk $e^{-H(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{H(x)} dx$:

I både H , der er en vilkårlig stamfunktion, og det ubestemte integral ligger en konstant gemt. Vi har bevist sætningen, så vi ved, at vi frit kan vælge H blandt h 's stamfunktioner, men lad os alligevel se, hvordan det også fremgår af udtrykket. Vi indsætter $H(x) + c$ i stedet for $H(x)$ for at se, hvad der sker, hvis vi vælger en anden stamfunktion end $H(x)$ (de afviger jo kun fra hinanden med en konstant):

$$e^{-(H(x)+c)} \cdot \int g(x) \cdot e^{H(x)+c} dx = e^{-H(x)-c} \cdot \int g(x) \cdot e^{H(x)} \cdot e^c dx = e^{-H(x)} \cdot e^{-c} \cdot e^c \int g(x) \cdot e^{H(x)} dx = e^{-H(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{H(x)} dx$$

Vi får også en konstant c_1 , når der integreres, og hvis den multipliceres med $e^{-(H(x)+c)}$, får vi $c_1 \cdot e^{-c} \cdot e^{-H(x)}$, hvor det med rødt markerede blot er en ny konstant. H kan altså vælges frit.

Lad os se på nogle – oplagt konstruerede – eksempler:

Eksempel 92: Vi ser på differentialligningen $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \sin(x)$; $x > 0$.

Vi ønsker at bestemme den fuldstændige løsning til differentialligningen samt den partikulære løsning, hvis løsningskurve indeholder punktet $P(\pi, 1)$.

Vi genkender straks differentialligningen som en generel 1. ordens differentialligning med $h(x) = \frac{1}{x}$ og $g(x) = \sin(x)$. Da $x > 0$, er $H(x) = \ln(x)$ uden numerisk tegn omkring x . Vi har valgt den simpleste stamfunktion – dvs. den uden konstant – for at gøre det nemmere for os selv. Hermed bliver den fuldstændige løsning f_c ifølge Sætning 25:

$$\begin{aligned} f_c(x) &= e^{-\ln(x)} \cdot \int \sin(x) \cdot e^{\ln(x)} dx = e^{-\ln(x)} \cdot \int \sin(x) \cdot x dx = \\ &= \left(e^{\ln(x)} \right)^{-1} \cdot (-\cos(x) \cdot x - \int -\cos(x) \cdot 1 dx) = \\ &= x^{-1} \cdot (-x \cdot \cos(x) + \sin(x) + c) = -\cos(x) + \frac{\sin(x) + c}{x} ; x > 0 \end{aligned}$$

c for den partikulære løsning bestemmes:

$$1 = -\cos(\pi) + \frac{\sin(\pi) + c}{\pi} \Leftrightarrow 1 = -(-1) + \frac{0 + c}{\pi} \Leftrightarrow 0 = \frac{c}{\pi} \Leftrightarrow c = 0$$

Dvs. den partikulære løsning er: $f : x \mapsto -\cos(x) + \frac{\sin(x)}{x}$; $x > 0$

Eksempel 93: Vi ser på differentialligningen $\frac{dy}{dx} - \cos(x) \cdot y = \cos(x)$.

Vi ønsker at bestemme den fuldstændige løsning til differentialligningen.

Vi genkender differentialligningen som en generel 1. ordens differentialligning med $h(x) = -\cos(x)$ og $g(x) = \cos(x)$. Vi vælger $H(x) = -\sin(x)$. Så er den fuldstændige løsning:

$$\begin{aligned} f_c : x \mapsto e^{-(-\sin(x))} \cdot \int \cos(x) \cdot e^{-\sin(x)} dx &= e^{\sin(x)} \cdot \int e^{-\sin(x)} d(\sin(x)) = e^{\sin(x)} \cdot (-e^{-\sin(x)} + c) = \\ -e^{\sin(x) - \sin(x)} + c \cdot e^{\sin(x)} &= -1 + c \cdot e^{\sin(x)} ; x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Opgaverne 103*

Eksempel 94: Vi ser på differentialligningen $\frac{dy}{dx} + x \cdot y = (x^2 + x + 1) \cdot e^x$.

Vi ønsker at bestemme den fuldstændige løsning.

Vi genkender straks dette som en generel 1. ordens lineær differentialligning, men højresiden gør os straks skeptiske med hensyn til, om vi kan bestemme det ubestemte integral.

Vi har $h(x) = x$, så vi kan uden problemer vælge $H(x) = \frac{1}{2}x^2$. Vi forsøger derefter at finde den fuldstændige løsning på sædvanlig vis:

$$f_c : x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \int (x^2 + x + 1) \cdot e^x \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} dx = e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \int (x^2 + x + 1) \cdot e^{\frac{1}{2}x^2 + x} dx$$

Men her går vi i stå. Vores integrand er for kompliceret, så dette er en blindgyde.

Vi er altså nødt til at forsøge os med metoden med at "gætte" en partikulær løsning. Når man inden for matematik taler om at "gætte" løsninger, er det underforstået, at man kommer med kvalificerede gæt, dvs. man gætter ikke bare ud i luften. Med differentialligninger består gæt altid af kombinationer af de funktionstyper, der indgår i differentialligningen. Dvs. hvis f.eks. sinusfunktionen indgår, vil man forsøge sig med forskellige kombinationer af sinusfunktionen og cosinusfunktionen (ikke tangensfunktionen, da den opfører sig helt anderledes, selvom det også er en trigonometrisk funktion). I vores tilfælde består et kvalificeret gæt af en kombination af den naturlige eksponentialfunktion og nogle polynomier.

Vi forsøger os først med $x^n \cdot e^x$ (hvis dette ikke virker, vil vi efterfølgende forsøge os med et førstegradspolynomium eller et andengradspolynomium multipliceret med e^x):

$$n \cdot x^{n-1} \cdot e^x + x^n \cdot e^x + x \cdot x^n \cdot e^x = (x^2 + x + 1) \cdot e^x \Leftrightarrow$$

$$n \cdot x^{n-1} + x^n + x \cdot x^n = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x^{n+1} + x^n + n \cdot x^{n-1} = x^2 + x + 1$$

Ih, hvor var vi heldige! Vi ser, at vi får en identitet, hvis $n = 1$, dvs. $x \cdot e^x$ er en partikulær løsning til differentialligningen, og dermed er den fuldstændige løsning ifølge Sætning 25:

$$f_c : x \mapsto c \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + x \cdot e^x ; x \in \mathbb{R}$$

Polynomier som løsninger

En variation af at gætte løsninger er, at man af opgavestilleren får oplyst, at f.eks. et polynomium er en løsning til en given differentialligning, hvorefter man skal bestemme hvilket polynomium, der er tale om. Det virker naturligvis meget kunstigt, men pointen er, at i nogle sammenhænge – nemlig hvis der kun optræder polynomier i differentialligningen – så ER polynomier det oplagte gæt.

Eksempel 95: Vi ønsker at bestemme den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y' - 2y = -4x^2 + 14x - 11$$

Vi kan godt se, at det er en lineær 1. ordens differentialligning, men vi kan også se, at vores integral i den generelle løsningsformel bliver ret grimt og ville kræve gentagen brug af partiel integration. Så vi vælger metoden med at gætte en partikulær løsning p , og vi vælger at se på et andengradspolynomium. Når vi ikke vælger f.eks. et tredjegradspolynomium, skyldes det, at vi kan se, at venstresiden i så fald ville komme til at indeholde et tredjegradsled, hvilket ikke optræder på højresiden. Dvs. vi har:

$$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$p'(x) = 2a \cdot x + b$$

Vi skal så se, om vi kan finde koefficienter a , b og c , så p er en løsning til differentialligningen: $2ax + b - 2 \cdot (ax^2 + bx + c) = -4x^2 + 14x - 11 \Leftrightarrow -2ax^2 + (2a - 2b)x + (b - 2c) = -4x^2 + 14x - 11$

Og nu skal vi huske på pointen med løsninger til differentialligninger. Udsagnet skal være en **identitet**, dvs. det skal være sandt for alle x -værdier, hvilket vil sige, at polynomierne på hver side af lighedstegnet skal være identiske, dvs. de skal have ens koefficienter.

Derfor skal $-2a = -4 \Leftrightarrow a = 2$. Og så har man $2a - 2b = 14 \Leftrightarrow 2b = 2 \cdot 2 - 14 \Leftrightarrow b = -5$.

Og dette giver os: $b - 2c = -11 \Leftrightarrow 2c = -5 + 11 \Leftrightarrow c = 3$.

Vi har hermed bestemt p , og da $h(x) = -2$ og dermed $H(x) = -2x$, er den fuldstændige løsning:

$$f : x \mapsto c_1 \cdot e^{-H(x)} + p(x) = c_1 \cdot e^{2x} + 2x^2 - 5x + 3$$

Separation af de variable

Vi skal nu se på en metode til at løse visse 1. ordens differentiaalligninger. Begrænsningerne ved metoden er, at den kun kan benyttes på visse typer, samt at den (igen) kræver, at vi er i stand til at bestemme nogle stamfunktioner. Metoden kaldes *separation af de variable* og har navn efter den omskrivning, der optræder i følgende sætning:

Sætning 26 (Separation af de variable): Lad h være en funktion af x , der er kontinuert i intervallet I , og lad g være en funktion af y , der er kontinuert og forskellig fra 0 i intervallet J . Så gælder:

$$\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y) \Leftrightarrow \int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx,$$

hvor løsningskurverne for løsningerne $y = f(x)$ ligger i intervallet $I \times J$.

Sætningen fortæller os altså, at en funktion f er en løsning til differentiaalligningen, netop hvis den er en løsning til integralligningen.

Integralligningen indeholder to ubestemte integraler, og man kan altid ved at vælge ”upassende” konstanter sørge for, at udsagnet ikke er en identitet, men pointen er, at en funktion er en løsning, hvis man kan få en identitet ved at vælge passende konstanter (i praksis arbejder man kun med én konstant, da konstanterne på hver side af lighedstegnet kan sættes sammen til én).

Eksempel 96: Først ses på, hvornår sætningen kan anvendes:

$y' = x^2 \cdot \sin(y)$: Her kan sætningen anvendes med $h(x) = x^2$ og $g(y) = \sin(y)$ i et passende interval J , hvor $\sin(y) \neq 0$.

$y' = e^x + \ln(y)$: Her kan sætningen ikke anvendes, for vi kan ikke omskrive udtrykket på højresiden, så det bliver et produkt af funktioner af henholdsvis x og y .

Opgaverne 105*

Bevis 26: Vi ser på differentiaalligningen $\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$, hvor h og g opfylder betingelserne

angivet i sætningen, og vi arbejder herefter i området $I \times J$. Da g er forskellig fra 0 i J , kan vi omskrive differentiaalligningen:

$$\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{g(y)} = h(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{g(y)} - h(x) = 0$$

Vi husker på, at vi søger løsninger $y = f(x)$, der er funktioner af x , og ved at udnytte **Sætning 18 (rød)**, **ledvis integration (blå)** og **integration ved integrationsvariabelskift (violet)** fås

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{g(y)} - h(x) = 0 \Leftrightarrow \int \left(\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{g(y)} - h(x) \right) dx = k \Leftrightarrow \int \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{g(y)} dx - \int h(x) dx = k \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx$$

I sidste skridt er det også udnyttet, at konstanten k kan ”gemmes” i integraltegnet.

Da vi i det røde trin integrerede hele udtrykket med hensyn til x , udnyttede vi kommentaren til **Sætning 2** om sammensatte funktioner.

Bemærk, at det i Bevis 26 er et integrationsvariabelskift, der sker i det violette skridt, dvs. man har ikke behandlet $\frac{dy}{dx}$ som en brøk, hvor nævneren er gået ud med dx (selvom man kan bruge dette som huskeregel ved den slags integration, da vi jo har bevist, at det gælder).

Som første eksempel på metodens anvendelse ses på differentialligningen $\frac{dy}{dx} = k \cdot y$, hvor vi allerede kender den fuldstændige løsning.

Eksempel 97: Vi vil bestemme den fuldstændige løsning til differentialligningen $\frac{dy}{dx} = k \cdot y$.

Vi kan se, at dette er en differentialligning af typen $\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$, hvor $h(x) = k$ og

$g(y) = y$, så vi vil benytte metoden *Separation af de variable*. Vi ser, at h er kontinuert i \mathbb{R} .

Det er g også, men g skal desuden være forskellig fra 0 i det interval, vi løser inden for, så vi er nødt til at dele vores behandling op i de tre scenarier: $y > 0$, $y = 0$ og $y < 0$.

$y > 0$: Vi benytter Sætning 26 og separerer vores variable, så alle vores y 'er kommer på

$$\text{venstreside og alle } x\text{'er på højreside: } \frac{dy}{dx} = k \cdot y \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int k dx.$$

Vi udregner integralerne og udnytter ved fjernelsen af numerisktegnet, at $y > 0$:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int k dx \Leftrightarrow \ln|y| = k \cdot x + c_1 \Leftrightarrow \ln(y) = k \cdot x + c_1 \Leftrightarrow y = e^{k \cdot x + c_1} \Leftrightarrow$$

$$y = e^{c_1} \cdot e^{k \cdot x} \Leftrightarrow y = c \cdot e^{k \cdot x}, x \in \mathbb{R}, c > 0$$

c er positiv, da $c = e^{c_1}$. Der er ikke opstået begrænsninger i definitionsmængden undervejs.

$y = 0$: Her kan vi ikke benytte separation af de variable, da betingelsen for g ikke er opfyldt, men vi kan ved at indsætte i differentialligningen se, at $f: x \mapsto 0$ er en løsning til differentialligningen (den trivielle løsning).

$y < 0$: Vi benytter igen separation af de variable. Bemærk, hvad der pga. forudsætningen $y < 0$ sker ved fjernelsen af numerisktegnet:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int k dx \Leftrightarrow \ln|y| = k \cdot x + c_1 \Leftrightarrow \ln(-y) = k \cdot x + c_1 \Leftrightarrow -y = e^{k \cdot x + c_1} \Leftrightarrow$$

$$y = -e^{c_1} \cdot e^{k \cdot x} \Leftrightarrow y = c \cdot e^{k \cdot x}, x \in \mathbb{R}, c < 0$$

c er negativ, da $c = -e^{c_1}$.

Da vi kan fortolke $y = 0$ som $y = c \cdot e^{k \cdot x}$ med $c = 0$, har vi altså bestemt den fuldstændige løsning til:

$$f: x \mapsto c \cdot e^{k \cdot x}, Dm(f) = \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$$

Vi har nu fundet den fuldstændige løsning til en differentialligning. Hvis man "kun" skal finde en partikulær løsning, slipper man for at skulle igennem (næsten) den samme udregning flere gange, da man kun behøver at kigge på det område, hvor den konkrete løsningskurve ligger.

Eksempel 98: Vi ønsker at finde den løsning til differentialligningen $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, hvis løsningskurve går igennem punktet $P(3,4)$.

Vi genkender dette som en differentialligning af typen $\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$, hvor $h(x) = -x$ og $g(y) = \frac{1}{y}$, så vi vil benytte metoden *Separation af de variable*.

h er en kontinuert funktion og defineret for alle tal. g er godt nok også både kontinuert og forskellig fra 0, men ikke i et interval, da g ikke er defineret i 0 (et interval må ikke indeholde huller). Vi skal derfor finde et interval, hvor g er kontinuert, og her kan vi vælge mellem $y > 0$ og $y < 0$. Da punktet P ligger i førstnævnte, vælger vi dette:

$$y > 0: \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Leftrightarrow \int y \, dy = \int -x \, dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c_1 \Leftrightarrow y^2 = c - x^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{c - x^2}$$

Betingelsen $y > 0$ blev benyttet i sidste skridt, hvor vi ellers normalt skulle huske \pm .

Vi kan bestemme c for vores partikulære løsning ved at indsætte P 's koordinater i $y^2 = c - x^2$:

$$4^2 = c - 3^2 \Leftrightarrow c = 16 + 9 = 25$$

Dvs. den søgte løsning er: $f: x \mapsto \sqrt{25 - x^2}; -5 < x < 5$

Bemærk definitionsområdet. Vi havde ikke oprindeligt nogen begrænsning på vores x -værdier, men vi kan se på udtrykket, at hvis x ikke ligger inden for det angivne interval, vil vores kvadratrods enten ikke være defineret (for reelle tal) **eller** – hvis $x = -5$ eller $x = 5$ – føre til, at vores y -værdi bliver 0, og så kommer vi uden for vores område.

Eksempel 99: Vi skal finde den løsning til differentialligningen $y' = \frac{x \cdot y}{\ln(y)}$, $y > 0 \wedge y \neq 1$, hvis

løsningskurve indeholder punktet $P\left(5, \frac{1}{e}\right)$.

Betingelserne på y skyldes den naturlige logaritme, der kun er defineret for positive tal, og som i 1 antager værdien 0 (hvilket ikke er tilladt i nævneren).

Vi kigger på punktet og ser, at vi skal arbejde i $\mathbb{R} \times]0, 1[$ ($h: x \mapsto x$ er defineret i hele \mathbb{R}).

$$0 < y < 1: y' = \frac{x \cdot y}{\ln(y)} \Leftrightarrow \int \frac{\ln(y)}{y} \, dy = \int x \, dx \Leftrightarrow \int \ln(y) \, d(\ln(y)) = \int x \, dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot (\ln(y))^2 = \frac{1}{2}x^2 + c$$

Vi bestemmer c -værdien ved at indsætte punktets koordinater:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 5^2 + c \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot (-\ln(e))^2 = \frac{25}{2} + c \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 = \frac{25}{2} + c \Leftrightarrow c = -12$$

Vi isolerer nu y og husker undervejs, at $0 < y < 1$:

$$\frac{1}{2} \cdot (\ln(y))^2 = \frac{1}{2}x^2 - 12 \Leftrightarrow (\ln(y))^2 = x^2 - 24 \Leftrightarrow \ln(y) = -\sqrt{x^2 - 24} \Leftrightarrow y = e^{-\sqrt{x^2 - 24}}$$

Vi skal nu både sikre os, at kvadratroden er defineret, og at $0 < y < 1$. Det gør vi med:

$$f: x \mapsto e^{-\sqrt{x^2 - 24}}; \sqrt{24} < x \quad (\text{da } P \text{ ligger på grafen, kan } x < -\sqrt{24} \text{ ikke bruges})$$

Logistisk vækst

I 1845 navngav Pierre François Verhulst – i en artikel omhandlende vækst – en *logistisk* funktion, der var løsning til den type differentiallyigning, vi derfor nu kalder *den logistiske ligning*, og som vi i det danske gymnasium oftest skriver som:

$$\frac{dy}{dx} = a \cdot y \cdot (M - y) \quad , \quad a > 0 \quad , \quad M > 0$$

Man kunne også angive den som $y' = y \cdot (b - a \cdot y)$ eller på anden vis (Verhulst anvendte ingen af disse skrivemåder i sin artikel). Men alt sammen er blot omskrivninger af den samme ligning.

Vi skal senere bestemme den fuldstændige løsning til den logistiske ligning, men først skal vi se på, hvad man kan ræsonnere sig frem til alene ud fra differentiallyigningen – og det er ikke så lidt.

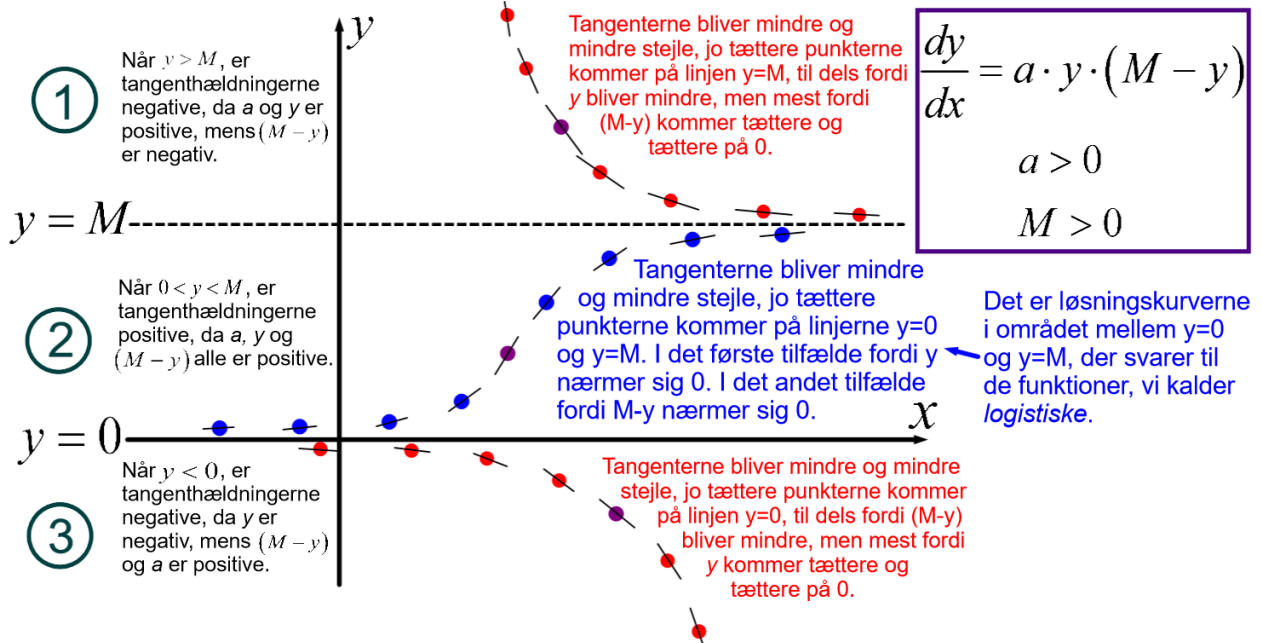
For det første er den logistiske ligning ikke en lineær differentiallyigning. Ligesom mange af de differentiallyigninger, vi har set på i forbindelse med *Separation af de variable*, opfylder den ikke de to betingelser, der blev angivet lige efter Øvelse 8 (side 4), og ligesom disse skal vi løse den ved separation af de variable.

Øvelse 13: Vis, at den logistiske ligning IKKE er lineær.

Vi kan ved indsættelse se, at $f_1 : x \mapsto 0$ og $f_2 : x \mapsto M$ begge er løsninger til den logistiske ligning. Den første er *den trivielle løsning*, mens begge er dybt uinteressante, når det kommer til vækst, da de som konstantfunktioner jo ikke leverer nogen form for vækst ("nul-vækst" er vist ikke et matematisk, men et – ikke særlig veldefineret - økonomisk begreb).

Øvelse 14: Vis, at $f_1 : x \mapsto 0$ og $f_2 : x \mapsto M$ begge er løsninger til den logistiske ligning.

Vi kan ved vores målrettede anvendelse af linjeelementer danne os et billede af, hvordan løsningskurverne vil se ud. På figuren nedenfor er med violette punkter vist tre forskellige "startpunkter". De er placeret i de tre områder dannet af linjerne med ligningerne $y = 0$ og $y = M$ og med god plads til linjerne. Med sorte linjestykker er linjeelementer angivet:



Argumentationen i ② kræver noget uddybning:

Når punkterne kommer tæt på og nærmer sig $y = 0$, flader tangenterne ud, for godt nok øges faktoren $(M - y)$, men faktoren y bliver mindre, og pointen er, at selvom de absolutte ændringer er lige store, er den relative ændring – som jo er det væsentlige, når man arbejder med produkter – større for y end for $(M - y)$.

Antag f.eks., at $M = 100$, og y -værdien for to punkter ændrer sig fra 2 til 1. Så vil $(M - y)$ ændre sig fra 98 til 99. Dvs. både y og $(M - y)$ ændrer sig med 1 (absolut ændring), men y mindskes med 50% og $(M - y)$ øges med godt 1% (relative ændringer). Og hvis vi ser på deres produkt, bliver det endnu tydeligere: $98 \cdot 2 = 196$ ændrer sig til $99 \cdot 1 = 99$.

Når punkterne nedefra kommer tæt på og nærmer sig $y = M$, sker der det samme, bortset fra at y og $(M - y)$ har byttet roller.

Som skrevet på figuren, er det i området ②, dvs. mellem linjerne $y = 0$ og $y = M$, at det, vi kalder *logistisk vækst*, optræder. Dvs. herefter ser vi kun på dette område.

Man kan se på figuren på foregående side, at der må være et eller andet sted, hvor væksthastigheden har et maksimum.

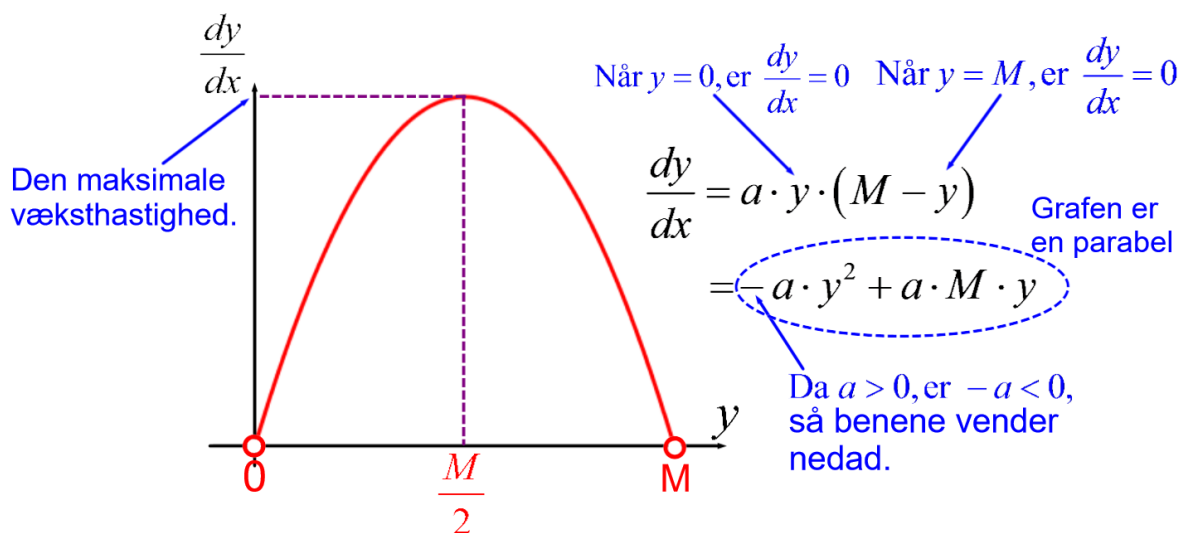
Når vi har fundet en partikulær løsning, kan vi altid bestemme et lokalt (og her det globale) maksimumssted for væksthastigheden ved at finde et sted, hvor den anden afledede er 0, og her tjekke, at den tredje afledede er negativ. Men netop med *logistisk vækst* kan vi gøre noget andet.

Se på differentiaalligningen $\frac{dy}{dx} = a \cdot y \cdot (M - y)$, $a > 0$, $M > 0$, hvor $0 < y < M$.

$\frac{dy}{dx}$ er væksthastigheden, og vi kan se, at den er en funktion af y , dvs. **x -værdierne har ikke**

direkte nogen indflydelse på væksthastigheden (de har selvfølgelig indirekte, da der til hver x -værdi vil svare en y -værdi). Vi kan derfor tegne en $\left(y, \frac{dy}{dx}\right)$ -graf, dvs. på figuren nedenfor ses

graf for $\frac{dy}{dx}$ som funktion af y . **Læg godt mærke til dette, dvs. bemærk, hvad der er ud af akserne:**



Højresiden i *den logistiske ligning* er et polynomium i variabelen y , og grafen er en parabel, hvor grenene vender nedad. Polynomiets rødder aflæses (**altid!**) nemmest på den faktorerede form, hvor vi ser, at de er $y = 0$ og $y = M$. Vi vil aldrig opnå disse y -værdier, med mindre vi arbejder med løsningerne $y = 0$ og $y = M$ (Øvelse 14), fordi væksthastigheden kommer tættere og tættere på 0, når y -værdien kommer tættere og tættere på 0 eller M .

Førstekoordinaten for parablens toppunkt er midt mellem de to rødder, dvs. i $\frac{M}{2}$.

Vi ser altså, at man i logistisk vækst har den største væksthastighed, når $y = \frac{M}{2}$.

Vi ved altså allerede en hel del om *den logistiske ligning*, og vi vil nu bestemme en del af den fuldstændige løsning ved *Separation af de variable*.

Sætning 27: Den logistiske ligning $\frac{dy}{dx} = a \cdot y \cdot (M - y)$, $a > 0$, $M > 0$ har for $0 < y < M$ løsningerne:

$$f_c : x \mapsto \frac{M}{1 + c \cdot e^{-a \cdot M \cdot x}} ; c > 0$$

f_c har en maksimal væksthastighed $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\max} = a \cdot \frac{M^2}{4}$, der antages i punktet $\left(\frac{\ln(c)}{a \cdot M}, \frac{M}{2}\right)$.

0 er infimum (nedre grænse) for $f_c(x)$, og M er supremum (øvre grænse) for $f_c(x)$.

$$f_c(x) \rightarrow M \text{ for } x \rightarrow \infty \quad \text{og} \quad f_c(x) \rightarrow 0 \text{ for } x \rightarrow -\infty$$

I beviset får vi undervejs brug for et par udregninger, som vi med fordel kan se på inden beviset, så de ikke fjerner fokus fra pointerne i beviset. Vi skal bl.a. bruge $\frac{1}{y \cdot (M - y)} = \frac{1}{M} \cdot \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{M - y}\right)$.

Øvelse 15: Vis ved at tage udgangspunkt i højresiden og reducere udtrykket, at udsagnet er sandt.

I beviset får vi brug for at integrere venstresiden i ovenstående ligning, men nævneren driller. Ideen er derfor at omskrive brøken til summen af to brøker med simple nævner. Denne idé opstår, da vi ved, at når to brøker lægges sammen, skal de have en fælles nævner, der altid kan dannes ved at multiplicere de to nævner med hinanden, og vores nævner er netop et produkt.

Man kan godt se, at udsagnet er sandt, men det er måske mere interessant at se på, hvordan man kunne være kommet frem til det, hvis venstresiden var udgangspunktet, da det er en matematisk tankegang, der kan bruges i andre sammenhænge.

Vores to brøker skal altså have nævnerne y og $M - y$, og vi har altså:

$$\frac{1}{y \cdot (M - y)} = \frac{\alpha}{y} + \frac{\beta}{M - y}$$

Vi skal finde α og β , så udsagnet bliver sandt. Vi skal være opmærksomme på, at der må være uendelig mange muligheder, da vi kan begynde med at vælge α og efterfølgende fastsætte β , så det passer. Men pointen er, at vi skal finde nogle simple α og β , så vores højreside bliver nemmere at arbejde med end venstresiden.

Vi griber nu sagen an ligesom i Øvelse 15, dvs. vi udregner højresiden:

$$\frac{\alpha}{y} + \frac{\beta}{M-y} = \frac{\alpha \cdot (M-y)}{y \cdot (M-y)} + \frac{\beta \cdot y}{y \cdot (M-y)} = \frac{\alpha \cdot M - \alpha \cdot y + \beta \cdot y}{y \cdot (M-y)} = \frac{\alpha \cdot M + (\beta - \alpha) \cdot y}{y \cdot (M-y)}$$

Der skal altså gælde:

$$\alpha \cdot M + (\beta - \alpha) \cdot y = 1$$

Vi kan undgå variabelen y i vores α og β , hvis vi vælger $\alpha = \beta$, for så forsvinder leddet $(\beta - \alpha) \cdot y$, og vi kan så sætte $\alpha = \frac{1}{M}$.

Den anden specielle udregning, vi får brug for undervejs i beviset, er (det er antaget, at $0 < y < M$):

$$\int \frac{1}{M-y} dy = \int \frac{-1}{M-y} d(M-y) = -\ln|M-y| = -\ln(M-y)$$

Numerisktegnene fjernes, da argumentet er positivt pga. antagelsen $0 < y < M$. Undervejs laves et integrationsvariabelskift (markedet med rødt), der fører til et fortegnsskift, fordi $\frac{d(M-y)}{dy} = -1$.

Bevis 27: Vi anvender separation af de variable og husker, at $0 < y < M$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= a \cdot y \cdot (M-y) \Leftrightarrow \int \frac{1}{y \cdot (M-y)} dy = \int a dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{M} \cdot \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{M-y} \right) dy = \int a dx \Leftrightarrow \\ \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{M-y} \right) dy &= \int a \cdot M dx \Leftrightarrow \ln|y| - \ln|M-y| = a \cdot M \cdot x + c_1 \Leftrightarrow \ln(y) - \ln(M-y) = a \cdot M \cdot x + c_1 \Leftrightarrow \\ \ln(M-y) - \ln(y) &= -a \cdot M \cdot x - c_1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{M-y}{y}\right) = -a \cdot M \cdot x - c_1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{M}{y} - 1\right) = -a \cdot M \cdot x - c_1 \Leftrightarrow \\ \frac{M}{y} - 1 &= e^{-a \cdot M \cdot x - c_1} \Leftrightarrow \frac{M}{y} = 1 + e^{-c_1} \cdot e^{-a \cdot M \cdot x} \Leftrightarrow y = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-a \cdot M \cdot x}}, \quad c > 0 \end{aligned}$$

Konstanten c er positiv, da den svarer til e^{-c_1} .

Vi har allerede vist, at væksthastigheden for funktionerne er størst, når $y = \frac{M}{2}$.

Derfor kan vi finde den største væksthastighed ved at indsætte i differentialligningen:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{\max} = a \cdot \frac{M}{2} \cdot \left(M - \frac{M}{2} \right) = a \cdot \frac{M}{2} \cdot \frac{M}{2} = a \cdot \frac{M^2}{4}$$

Og vi kan finde det sted, hvor den største væksthastighed antages, ved at indsætte i løsningen:

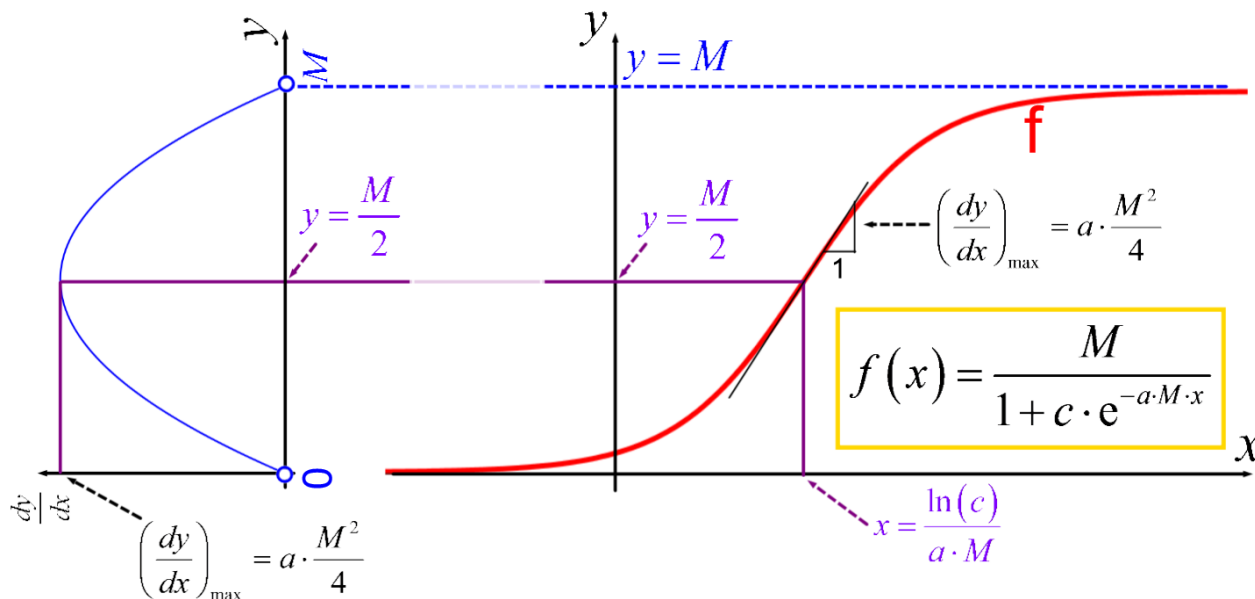
$$\begin{aligned} \frac{M}{2} &= \frac{M}{1 + c \cdot e^{-a \cdot M \cdot x}} \Leftrightarrow c \cdot e^{-a \cdot M \cdot x} = 1 \Leftrightarrow e^{-a \cdot M \cdot x} = \frac{1}{c} \Leftrightarrow \\ -a \cdot M \cdot x &= \ln\left(\frac{1}{c}\right) \Leftrightarrow a \cdot M \cdot x = \ln(c) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(c)}{a \cdot M} \end{aligned}$$

Da a , M og c er positive, har man for $x \rightarrow \infty$: $-a \cdot M \cdot x \rightarrow -\infty$, dvs. $e^{-a \cdot M \cdot x} \rightarrow 0$, dvs. $\frac{M}{1 + e^{-a \cdot M \cdot x}} \rightarrow M$

For $x \rightarrow -\infty$ har man: $-a \cdot M \cdot x \rightarrow \infty$, dvs. $e^{-a \cdot M \cdot x} \rightarrow \infty$, dvs. $\frac{M}{1 + e^{-a \cdot M \cdot x}} \rightarrow 0$

En oversigt over de centrale egenskaber ved logistisk vækst er vist på nedenstående figur bestående af to grafer, hvor den røde er grafen for en løsning, mens den blå er en graf over væksthastigheden som funktion af funktionsværdien:

$$\frac{dy}{dx} = a \cdot y \cdot (M - y)$$



Eksempel 100: En flok på 15 mus slår sig ned på en mark. Antallet N af mus på marken følger en udvikling beskrevet ved differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = 5 \cdot 10^{-6} \cdot N \cdot (6000 - N),$$

hvor t er tiden målt i uger efter indtagelsen af marken.

a) Bestem den løsning til differentialligningen, der beskriver antallet N af mus som funktion af t .

Vi bestemmer først den fuldstændige løsning ved at aflæse $a = 5 \cdot 10^{-6}$ og $M = 6000$ fra

differentialligningen, hvorved vi får funktionsforskriften $N(t) = \frac{6000}{1 + c \cdot e^{-5 \cdot 10^{-6} \cdot 6000 \cdot t}} = \frac{6000}{1 + c \cdot e^{-0,03 \cdot t}}$.

Vi udnytter så, at ifølge opgaveteksten er $N(0) = 15$. Det kan bruges til at bestemme c :

$$15 = \frac{6000}{1 + c \cdot e^{-0,03 \cdot 0}} \Leftrightarrow 15 = \frac{6000}{1 + c \cdot 1} \Leftrightarrow 1 + c = \frac{6000}{15} \Leftrightarrow 1 + c = 400 \Leftrightarrow c = 399$$

Dvs. at den søgte løsning er: $N(t) = \frac{6000}{1 + 399 \cdot e^{-0,03 \cdot t}} ; t \geq 0$

b) Bestem den øvre grænse for populationen.

Vi kan aflæse den øvre grænse til **6000 mus** i differentialligningen eller løsningens tæller.

c) Bestem den maksimale væksthastighed for populationen af mus.

Da vi kender a og M , har vi $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\max} = a \cdot \frac{M^2}{4} = 5 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{6000^2}{4} = 45$, dvs. **45 mus om ugen**.

d) Bestem, hvor mange mus der er i populationen, når væksthastigheden er størst.

Den maksimale væksthastighed opnås halvvejs til den øvre grænse, dvs. der er **3000 mus**.

Eksempel 100 (udvidet og med Maple): Vi ser nu på, hvordan man også kan løse opgaven i Maple med vores generelle viden om afledede funktioner, og desuden udregner vi nu nogle flere størrelser:

a) Vi løser differentialligningen med den angivne begyndelsesværdi:

$$\left[N'(t) = 5 \cdot 10^{-6} \cdot N(t) \cdot (6000 - N(t)), N(0) = 15 \right] \xrightarrow{\text{solve DE}} N(t) = \frac{6000}{1 + 399 e^{-\frac{3}{100} t}}$$

$$N(t) := \frac{6000}{1 + 399 e^{-\frac{3}{100} t}} :$$

c) Stedet for den maksimale væksthastighed findes som det sted, hvor den anden afledede er 0:

$$N''(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{ t = \frac{100}{3} \ln(399) \right\}$$

Det tjekkes ved hjælp af fortegnet for den tredje afledede, at det er et lokalt maksimumssted:

$$N''' \left(\frac{100}{3} \ln(399) \right) = -\frac{81}{4000} < 0 \text{ Dvs. lokalt maksimumssted.}$$

Den maksimale væksthastighed er så værdien af den afledede funktion dette sted:

$$N' \left(\frac{100}{3} \ln(399) \right) = 45$$

Dvs. populationen vokser med **45 mus om ugen**, når det går hurtigst.

e) Vi ønsker nu at bestemme hvor mange mus, der er i populationen efter 20 uger:

$$N(20.) = 27.27572230$$

Dvs. **20 uger efter indtagelsen af marken, er der 27 mus.**

f) Vi ønsker at bestemme, hvornår antallet af mus overstiger 5000:

$$N(t) > 5000. \xrightarrow{\text{solve}} \{ 253.2799776 < t \} \text{ Dvs. efter } \mathbf{254 \text{ uger}} \text{ er der mere end } \mathbf{5000 \text{ mus.}}$$

Opgaverne 107*

Advarsel:

Når du skal bestemme den øvre grænse, er det sikrest at aflæse direkte fra differentialligningen. Maple angiver nogle gange løsningen, så brøken er forkortet, og man derfor ikke kan aflæse M i tælleren. Man kan kun aflæse M i tælleren, hvis nævneren indeholder "1+".

Logistisk vækst er en form for vækst, hvor man tager hensyn til, at der også er begrænsninger for væksten – ofte i form af pladsmangel eller fødemangel, når det drejer sig om dyr.

Denne begrænsning er angivet i faktoren $(M - y)$. Det betyder, at logistisk vækst til at begynde med ligner eksponentiel vækst (se figuren over Eksempel 100), men på et tidspunkt aftager væksten, og til sidst flader den ud.

Opgaverne 109*

2. ordens differentiallyigninger

Vi indleder med en meget simpel form for 2. ordens differentiallyigning, der har stor betydning inden for fysik, nemlig følgende differentiallyigning, hvor g er en kontinuert funktion:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = g(x)$$

Dvs. den anden afledede af vores løsninger skal svare til funktionen g . Integrationsprøven fortæller os så, at den (første) afledede af funktionen skal være en stamfunktion til g , dvs.:

$$\frac{dy}{dx} = \int g(x) dx$$

Og integrationsprøven anvendt endnu engang giver os, at den fuldstændige løsning er:

$$f : x \mapsto \int \left(\int g(x) dx \right) dx$$

Det er værd at bemærke, at vores inderste integration giver os en konstant, og vores yderste integration giver os endnu en konstant, dvs. vi får to konstanter at arbejde med.

Inden for fysik optræder denne type differentiallyigning, når vi kender accelerationen a som funktion af tiden. For sammenhængen mellem accelerationen a , hastigheden v og stedet s er:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

Eksempel 101: Vi ser først på situationen, hvor accelerationen er 0, dvs. hvor den resulterende kraft

på det objekt, vi kigger på, er 0 (Newtons 2. lov): $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$.

Hermed er: $v(t) = s'(t) = \int 0 dt = k$, dvs. hastigheden er konstant.

Desuden er så: $s(t) = \int k dt = k \cdot t + k_1$, dvs. grafen for stedfunktionen er en ret linje.

Man vil typisk betegne den konstante hastighed v_0 , dvs. hastigheden fra start. Og man vil typisk anvende betegnelse s_0 om positionen fra start, dvs. $s_0 = s(0) = v_0 \cdot 0 + k_1 = k_1$. Altså er:

$$s(t) = v_0 \cdot t + s_0$$

Hvis accelerationen er konstant (konstant kraft), vil man typisk betegne den a_0 , og man får:

$v(t) = s'(t) = \int a_0 dt = a_0 \cdot t + k$, dvs. grafen for hastighedsfunktionen er en ret linje.

$s(t) = \int (a_0 \cdot t + k) dt = \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot t^2 + k \cdot t + k_1$, dvs. grafen for stedfunktionen er en parabel.

Med betegnelserne $v_0 = v(0)$ og $s_0 = s(0)$ ender man op med:

$$s(t) = \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

Et eksempel, hvor accelerationen er et funktionsudtryk, er:

$a(t) = \cos(t)$, hvilket giver $v(t) = s'(t) = \int \cos(t) dt = \sin(t) + k$ og dermed

$$s(t) = \int (\sin(t) + k) dt = -\cos(t) + k \cdot t + k_1$$

Den generelle form for lineære 2. ordens differentialligninger er:

$$y'' + j(x) \cdot y' + h(x) \cdot y = g(x)$$

Øvelse 16: Vis, at dette er en lineær differentialligning.

Som udgangspunkt er det ikke muligt at finde (pæne) fuldstændige løsninger til denne form, så når man snakker om lineære 2. ordens differentialligninger, er det næsten altid med konstante koefficienter, hvor man beskæftiger sig med den homogene og den inhomogene ligning:

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0 \text{ (homogene)} \quad y'' + a \cdot y' + b \cdot y = g(x) \text{ (inhomogene)}$$

Vi skal snart finde den fuldstændige løsning til den homogene ligning (hvor vi – nok lidt overraskende – får brug for vores viden om andengrads-ligninger). Den inhomogene ser vi ikke på her. Den kunne evt. inddrages i et SRP.

Vi skal først se på det vigtige specialtilfælde $y'' + b \cdot y = 0$, som vi dog vælger at angive på formen:

$$y'' = m \cdot y, \quad m \in \mathbb{R}$$

Dette specialtilfælde er (en omskrivning af) en lineær, **homogen** 2. ordens differentialligning, og den følgende sætning gælder sådan set generelt for sådanne, men vi viser den kun i dette tilfælde.

Sætning 28: Enhver linearkombination af to løsninger f og g til differentialligningen $y'' = m \cdot y$ er selv en løsning til denne. Dvs. for ethvert sæt (c_1, c_2) af konstanter er $c_1 \cdot f + c_2 \cdot g$ en løsning til $y'' = m \cdot y$, når f og g er løsninger.

Bevis 28: Lad f og g være løsninger til $y'' = m \cdot y$. Så gælder $f'' = m \cdot f$ og $g'' = m \cdot g$.

Vi ser nu på en vilkårlig linearkombination af f og g og indsætter i differentialligningen for at se, om det er en løsning, dvs. om vi får en identitet:

$$\begin{aligned} (c_1 \cdot f + c_2 \cdot g)'' &= m \cdot (c_1 \cdot f + c_2 \cdot g) \Leftrightarrow c_1 \cdot f'' + c_2 \cdot g'' = c_1 \cdot m \cdot f + c_2 \cdot m \cdot g \\ &\Leftrightarrow c_1 \cdot m \cdot f + c_2 \cdot m \cdot g = c_1 \cdot m \cdot f + c_2 \cdot m \cdot g \end{aligned}$$

Vi får en identitet og kan altså konkludere, at vores linearkombination er en løsning til $y'' = m \cdot y$.

Øvelse 16.a: Vis, at Sætning 28 også gælder for $y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$, men ikke for $y'' + a \cdot y' + b \cdot y = g(x)$

Vi har hermed taget hul på vores søgen efter den fuldstændige løsning til differentialligningen $y'' = m \cdot y$, og undervejs får vi brug for følgende begreb:

Definition 25: Givet to funktioner f og g , er *Wronski-determinanten* $W(f, g)$ defineret som:

$$W(f, g) = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = f \cdot g' - f' \cdot g$$

Wronski-determinanten er opkaldt efter den polske matematiker og filosof Józef Maria Hoene-Wronski (ikke at forveksle med den polske quidditch-søger Josef Wronski, der har lagt navn til Wronski-finten).

Eksempel 102: Givet følgende par af funktioner udregnes Wroński-determinanten:

$$f : x \mapsto x^3 \text{ og } g : x \mapsto \ln(x)$$

$$W(f, g) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^3 & \ln(x) \\ 3x^2 & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = x^3 \cdot \frac{1}{x} - 3x^2 \cdot \ln(x) = x^2 \cdot (1 - 3 \cdot \ln(x))$$

$$f_1 : t \mapsto 3 \cdot \sin(k \cdot t) \quad g_1 : t \mapsto -6 \cdot \cos(k \cdot t)$$

$$W(f_1, g_1) = \begin{vmatrix} f_1(t) & g_1(t) \\ f_1'(t) & g_1'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \cdot \sin(k \cdot t) & -6 \cdot \cos(k \cdot t) \\ 3k \cdot \cos(k \cdot t) & 6k \cdot \sin(k \cdot t) \end{vmatrix} = 18k \cdot \sin^2(k \cdot t) + 18k \cdot \cos^2(k \cdot t) = 18k$$

$$f_2 : x \mapsto 2 \cdot e^{5 \cdot x} \quad g_2 : x \mapsto 5 \cdot e^{-5 \cdot x}$$

$$W(f_2, g_2) = \begin{vmatrix} 2 \cdot e^{5 \cdot x} & 5 \cdot e^{-5 \cdot x} \\ 10 \cdot e^{5 \cdot x} & -25 \cdot e^{-5 \cdot x} \end{vmatrix} = -50 \cdot e^{5 \cdot x} \cdot e^{-5 \cdot x} - 50 \cdot e^{5 \cdot x} \cdot e^{-5 \cdot x} = -50 \cdot e^0 - 50 \cdot e^0 = -100$$

$$f_3 : x \mapsto 2 \cdot e^{5 \cdot x} \quad g_3 : x \mapsto 5 \cdot e^{5 \cdot x}$$

$$W(f_3, g_3) = \begin{vmatrix} 2 \cdot e^{5 \cdot x} & 5 \cdot e^{5 \cdot x} \\ 10 \cdot e^{5 \cdot x} & 25 \cdot e^{5 \cdot x} \end{vmatrix} = 50 \cdot e^{5 \cdot x} \cdot e^{5 \cdot x} - 50 \cdot e^{5 \cdot x} \cdot e^{5 \cdot x} = 0$$

Opgaverne 110*

Når man har udregnet en Wroński-determinant, er det oplagte spørgsmål, hvad man skal bruge denne størrelse til, og hvad den har med vores differentilligning at gøre?

Det skal snart vise sig. Til at begynde med skal det blot bemærkes, at Wroński-determinanten kan blive 0, en konstant eller et funktionsudtryk, hvor variabelen indgår (se Eksempel 102). Prøv at tænke over, hvornår Wroński-determinanten giver 0.

Vi skal nu med to sætninger se, hvordan Wroński-determinanten kommer ind i billedet i forbindelse med løsning af differentilligningen $y'' = m \cdot y$:

Sætning 29: Hvis funktionerne f og g er løsninger til differentilligningen $y'' = m \cdot y$, $m \in \mathbb{R}$, er

$$W(f, g) = k, \text{ hvor } k \text{ er en konstant (evt. 0).}$$

Bevis 29: Antag, at f og g er løsninger til $y'' = m \cdot y$. Så gælder: $f'' = m \cdot f$ og $g'' = m \cdot g$.

Vi udregner nu den afledede af Wroński-determinanten:

$$\begin{aligned} W(f, g)' &= (f \cdot g' - f' \cdot g)' = (f \cdot g')' - (f' \cdot g)' = (f' \cdot g' + f \cdot g'') - (f'' \cdot g + f' \cdot g') = \\ &= f \cdot g'' - f'' \cdot g = f \cdot (m \cdot g) - (m \cdot f) \cdot g = 0 \end{aligned}$$

Da den afledede af Wroński-determinanten er 0, ved vi ifølge Sætning 18, at Wroński-determinanten i sig selv er en konstant, dvs. $W(f, g) = k$.

Sætning 30: Lad funktionerne f , g og h være løsninger til differentilligningen $y'' = m \cdot y$, hvor $W(g, h) \neq 0$. Så kan f skrives som en linearkombination af g og h , dvs. der findes konstanter c_1 og c_2 , så:

$$f = c_1 \cdot g + c_2 \cdot h$$

Bevis 30: Det antages, at funktionerne f , g og h er løsninger til $y'' = m \cdot y$, og at $W(g, h) \neq 0$.

Da alle tre funktioner er løsninger til $y'' = m \cdot y$, giver Sætning 29 os:

$$W(f, g) = k_1 \Leftrightarrow f \cdot g' - f' \cdot g = k_1 \Leftrightarrow g' \cdot f - g \cdot f' = k_1$$

$$W(f, h) = k_2 \Leftrightarrow f \cdot h' - f' \cdot h = k_2 \Leftrightarrow h' \cdot f - h \cdot f' = k_2$$

Vi bemærker, at vi har fået et ligningssystem, hvor vi kan betragte f og f' som vores variable.

Fra *Grundlæggende matematiske begreber del 3 Definition 15 og Sætning 22* ved vi, at da

$$d = \begin{vmatrix} g' & -g \\ h' & -h \end{vmatrix} = -g' \cdot h + h' \cdot g = g \cdot h' - g' \cdot h = \begin{vmatrix} g & h \\ g' & h' \end{vmatrix} = W(g, h) \neq 0,$$

så er vores funktion f givet ved:

$$f = \frac{d_x}{d} = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & -g \\ k_2 & -h \end{vmatrix}}{W(g, h)} = \frac{-k_1 \cdot h + k_2 \cdot g}{W(g, h)} = \frac{k_2}{W(g, h)} \cdot g + \frac{-k_1}{W(g, h)} \cdot h = c_1 \cdot g + c_2 \cdot h$$

Sætningerne 28, 29 og 30 gælder for $y'' = m \cdot y$ uanset fortegnet på m . Men i det følgende er vi nødt til at opdele efter fortegn, dvs. vi ser nu på følgende differentialligninger, hvor $k > 0$:

$$y'' = k^2 \cdot y \quad (m > 0) \qquad y'' = 0 \quad (m = 0) \qquad y'' = -k^2 \cdot y \quad (m < 0)$$

Vi kender sådan set allerede den fuldstændige løsning til $y'' = 0$, da vi behandlede den som en bevægelse med accelerationen 0, men vi tager den alligevel med i det følgende.

Sætning 30 lægger op til, at vi blot behøver at finde to løsninger til differentialligningen $y'' = m \cdot y$, hvis Wronski-determinant ikke er 0, før vi kan finde resten. Vi går derfor videre til følgende øvelse:

Øvelse 17: Vis, at $f_1 : x \mapsto e^{k \cdot x}$ og $f_2 : x \mapsto e^{-k \cdot x}$ begge er løsninger til differentialligningen $y'' = k^2 \cdot y$, og at $W(f_1, f_2) = -2 \cdot k$.

Vis, at $g_1 : x \mapsto \sin(k \cdot x)$ og $g_2 : x \mapsto \cos(k \cdot x)$ begge er løsninger til differentialligningen $y'' = -k^2 \cdot y$, og at $W(g_1, g_2) = -k$.

Vis, at $h_1 : x \mapsto x$ og $h_2 : x \mapsto 1$ begge er løsninger til differentialligningen $y'' = 0$, og at $W(h_1, h_2) = -1$.

Sætning 31: De fuldstændige løsninger f_{c_1, c_2} til følgende differentialligninger, hvor $k > 0$, er:

$$\begin{array}{lll} y'' = k^2 \cdot y & y'' = -k^2 \cdot y & y'' = 0 \\ f_{c_1, c_2} : x \mapsto c_1 \cdot e^{k \cdot x} + c_2 \cdot e^{-k \cdot x} & f_{c_1, c_2} : x \mapsto c_1 \cdot \sin(k \cdot x) + c_2 \cdot \cos(k \cdot x) & f_{c_1, c_2} : x \mapsto c_1 \cdot x + c_2 \end{array}$$

hvor c_1 og c_2 er vilkårlige, reelle konstanter.

Bevis 31: I Øvelse 17 er der fundet to løsninger til hver af de tre differentialligninger, og Sætning 28 fortæller os derfor, at samtlige tre linearkombinationer i Sætning 31 **også** er løsninger til deres respektive differentialligning.

Da vi i Øvelse 17 desuden har vist, at når $k > 0$, er Wronski-determinanterne konstante, så fortæller Sætning 30 os, at enhver løsning kan skrives som de angivne linearkombinationer.

Da vi nu arbejder med 2. ordens differentiaalligninger, hvor de fuldstændige løsninger indeholder to vilkårlige konstanter, vil det ikke være nok at kende ét punkt på en graf for at finde en partikulær løsning. Man skal kende to.

Eller også skal man på anden vis have to informationer, hvilket f.eks. kunne være et linjeelement, da det både angiver funktionsværdien og differentialkvotienten det pågældende sted.

Eksempel 103: Vi ønsker at bestemme den løsning til differentiaalligningen $y'' + 49 \cdot y = 0$, hvis løsningskurve går gennem punkterne $(0, 5)$ og $\left(\frac{\pi}{14}, -3\right)$.

Vi genkender differentiaalligningen som en omskrivning af $y'' = -k^2 \cdot y$, hvor $k = 7$, dvs. den fuldstændige løsning er:

$$f_{c_1, c_2} : x \mapsto c_1 \cdot \sin(7 \cdot x) + c_2 \cdot \cos(7 \cdot x)$$

For at bestemme værdierne af de to konstanter indsættes hvert af de to punkter:

$$5 = c_1 \cdot \sin(7 \cdot 0) + c_2 \cdot \cos(7 \cdot 0) \Leftrightarrow 5 = c_1 \cdot \sin(0) + c_2 \cdot \cos(0) \Leftrightarrow 5 = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 \Leftrightarrow c_2 = 5$$

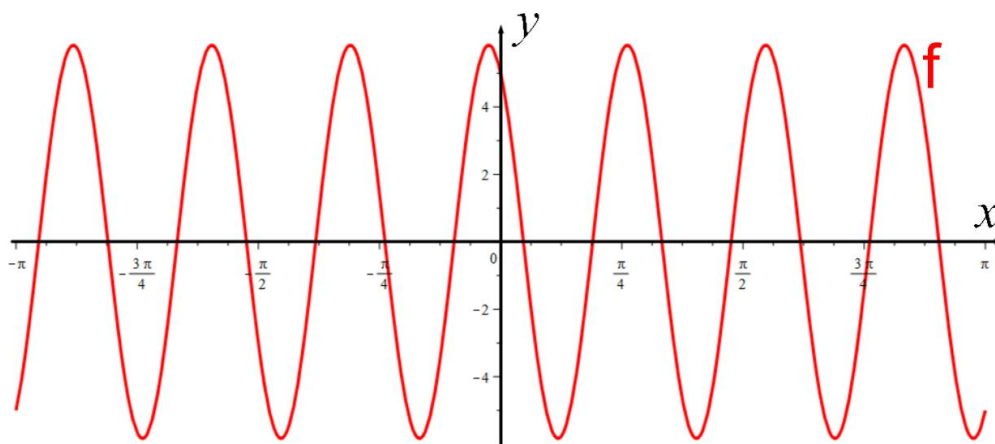
$$-3 = c_1 \cdot \sin\left(7 \cdot \frac{\pi}{14}\right) + c_2 \cdot \cos\left(7 \cdot \frac{\pi}{14}\right) \Leftrightarrow -3 = c_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + c_2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow c_1 = -3$$

Dvs. den søgte løsning er: $f : x \mapsto -3 \cdot \sin(7 \cdot x) + 5 \cdot \cos(7 \cdot x)$

I Maple indtastes følgende for at bestemme den partikulære løsning:

$$\left[y'' = -49 \cdot y, y(0) = 5, y\left(\frac{\pi}{14}\right) = -3 \right] \xrightarrow{\text{solve DE}} y(x) = -3 \sin(7x) + 5 \cos(7x)$$

Løsningskurven har følgende udseende:



Og her udbryder du jo: ”Hov, denne graf er da ikke anderledes end en ren sinusgraf, selvom udtrykket indeholder både sinus og cosinus!”

Det er korrekt set, og det vender vi tilbage til.

Bemærk, at vi i dette eksempel var så ”heldige”, at vores c_1 forsvandt, da vi satte vores første punkt ind, så vi fik c_2 direkte, og omvendt med det andet punkt. Så nemt går det ikke altid. Man kan også ende ud med to ligninger med to ubekendte.

Eksempel 104: Vi ønsker at bestemme den partikulære løsning til differentialligningen $\frac{d^2y}{dx^2} = 4 \cdot y$, der indeholder linjeelementet $(0,1;14)$.

Vi genkender differentialligningen som $y'' = k^2 \cdot y$, hvor $k = 2$, dvs. den fuldstændige løsning er:

$$f_{c_1, c_2} : x \mapsto c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{-2x}$$

Da vi har fået oplyst et linjeelement og dermed en tangenthældning, skal vi også kende forskriften for den afledede funktion af f :

$$f_{c_1, c_2}'(x) = 2c_1 \cdot e^{2x} - 2c_2 \cdot e^{-2x}$$

Linjeelementet fortæller os, at $f_{c_1, c_2}(0) = 1$, så vi får:

$$1 = c_1 \cdot e^{2 \cdot 0} + c_2 \cdot e^{-2 \cdot 0} \Leftrightarrow 1 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 \Leftrightarrow 1 = c_1 + c_2$$

Linjeelementet fortæller os også, at $f_{c_1, c_2}'(0) = 14$, så vi får:

$$14 = 2c_1 \cdot e^{2 \cdot 0} - 2c_2 \cdot e^{-2 \cdot 0} \Leftrightarrow 14 = 2 \cdot c_1 - 2 \cdot c_2 \Leftrightarrow 7 = c_1 - c_2$$

Lægges de to gule ligninger sammen, får man:

$$1 + 7 = (c_1 + c_2) + (c_1 - c_2) \Leftrightarrow 8 = 2 \cdot c_1 \Leftrightarrow c_1 = 4$$

Trækkes de fra hinanden, får man:

$$1 - 7 = (c_1 + c_2) - (c_1 - c_2) \Leftrightarrow -6 = 2 \cdot c_2 \Leftrightarrow c_2 = -3$$

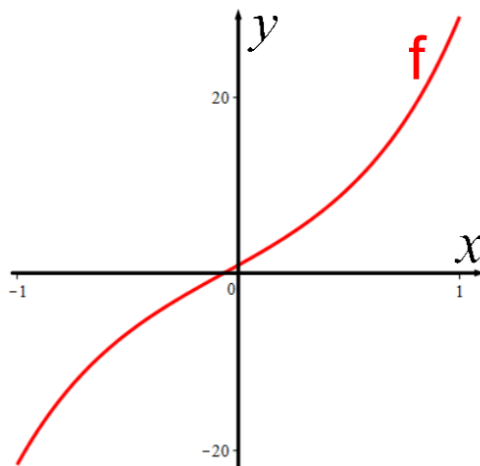
Dvs. at den søgte løsning er: $f : x \mapsto 4 \cdot e^{2x} - 3 \cdot e^{-2x}$

I Maple indtastes informationerne fra linjeelementet i to ligninger:

$$[y'' = 4 \cdot y, y(0) = 1, y'(0) = 14] \xrightarrow{\text{solve DE}} y(x) = 4 e^{2x} - 3 e^{-2x}$$

Bemærk, at her indtastes kendskabet til differentialkvotienten i 0.

Løsningskurven er:



Vi bemærker, at dette IKKE er løsningskurven for en enkelt eksponentiel udvikling.

Opgaverne 111*

I Eksempel 103 så vi, at grafen for løsningskurven lignede grafen for en sinusfunktion (eller cosinusfunktion). Vi skal nu se, at det helt generelt gælder, at vi til $y'' = -k^2 \cdot y$ kan angive den fuldstændige løsning og altså også enhver partikulær løsning med en enkelt sinusfunktion:

Sætning 32: Der gælder følgende sammenhæng:

$$c_1 \cdot \sin(k \cdot x) + c_2 \cdot \cos(k \cdot x) = A \cdot \sin(k \cdot x + \varphi) \quad , \text{ hvor } A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \text{ og } \text{ For } c_1 > 0: \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)$$

$$\text{For } c_1 < 0: \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{c_2}{c_1}\right) + \pi \quad \text{For } c_1 = 0 \text{ og } c_2 > 0: \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{For } c_1 = 0 \text{ og } c_2 < 0: \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

Bevis 32: Vi skal altså vise, at man ved at vælge A og φ som angivet i sætningen får en identitet.

Vi har brug for additionsformlen $\sin(v+u) = \sin(v) \cdot \cos(u) + \cos(v) \cdot \sin(u)$, der blev introduceret bagest i *Geometri og trigonometri del 2*, og som bliver bevist under emnet Vektorgeometri. Med denne formel kan vi nemlig omskrive højresiden:

$$\begin{aligned} A \cdot \sin(k \cdot x + \varphi) &= A \cdot (\sin(k \cdot x) \cdot \cos(\varphi) + \cos(k \cdot x) \cdot \sin(\varphi)) = \\ &= A \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(k \cdot x) + A \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(k \cdot x) \end{aligned}$$

For at få en identitet skal vi altså have valgt A og φ , så vi har:

$$\begin{aligned} A \cdot \cos(\varphi) &= c_1 & * \\ A \cdot \sin(\varphi) &= c_2 & * \end{aligned}$$

Hvis vi kvadrerer alle fire udtryk i de to ligninger, får vi:

$$\begin{aligned} A^2 \cdot \cos^2(\varphi) &= c_1^2 & ** \\ A^2 \cdot \sin^2(\varphi) &= c_2^2 & ** \end{aligned}$$

Problemet ved dette er, at vi hermed får øget løsningsmængden, for $A \cdot \cos(\varphi) = -c_1$ og $A \cdot \sin(\varphi) = -c_2$ ville også kunne omskrives til **. Men dette problem ser vi bort fra i første omgang, for vi kan senere få styr på fortegnene, når vi vender tilbage til *.

Vi lægger de to ligninger ** sammen:

$$\begin{aligned} A^2 \cdot \cos^2(\varphi) + A^2 \cdot \sin^2(\varphi) &= c_1^2 + c_2^2 \Leftrightarrow A^2 \cdot (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = c_1^2 + c_2^2 \Leftrightarrow A^2 \cdot 1 = c_1^2 + c_2^2 \\ A &= \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \end{aligned}$$

I sidste trin **vælger** vi at lade A være positiv. Vi kunne også have valgt at lade A være negativ. I så fald ville vi bare have fået nogle andre udtryk for φ i sidste ende.

Vi dividerer nu den nederste ligning i * med den øverste. Det er kun tilladt, hvis $c_1 \neq 0$, dvs. $\cos(\varphi) \neq 0$. Vi skal derfor være opmærksomme på, at vi også særskilt skal overveje tilfældet $c_1 = 0$, men i første omgang får vi altså:

$$\frac{A \cdot \sin(\varphi)}{A \cdot \cos(\varphi)} = \frac{c_2}{c_1} \Leftrightarrow \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{c_2}{c_1} \Leftrightarrow \tan(\varphi) = \frac{c_2}{c_1}$$

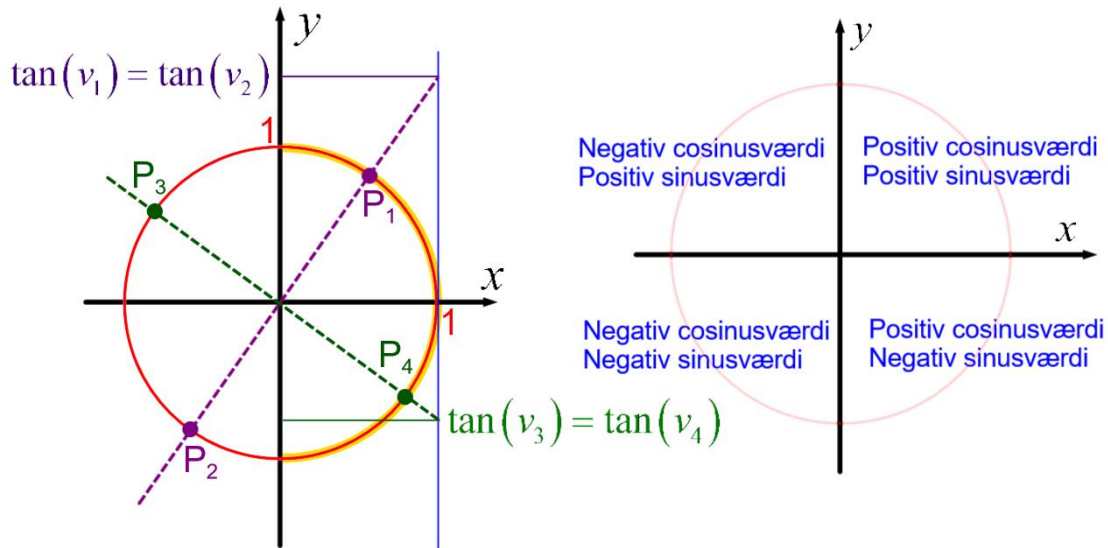
Vi ved nu, at hvis A og φ opfylder disse betingelser, så gælder:

$$|A \cdot \cos(\varphi)| = |c_1| \text{ og } |A \cdot \sin(\varphi)| = |c_2|.$$

Dvs. vi har de rigtige numeriske størrelser, men vi har endnu ikke styr på fortegnene, så det skal vi se på nu.

Vi husker, at tangens til en vinkel er defineret som andenkoordinaten til skæringspunktet mellem den lodrette linje med ligningen $x = 1$ og linjen gennem origo og retningspunktet for vinklen. Men dermed vil der være to forskellige retningspunkter med ens tangensværdi.

Dette gælder for punkterne P_1 og P_2 samt P_3 og P_4 (se figuren til venstre nedenfor).



Men disse retningspunkter med ens tangensværdi har kun numerisk ens cosinusværdier og numerisk ens sinusværdier. Som angivet på figuren ovenfor til højre afhænger fortegnene på cosinus- og sinusværdierne af, hvilken kvadrant retningspunktet ligger i. Når vi har $\tan(\varphi) = \frac{c_2}{c_1}$, er det altså væsentligt at vide, hvilken kvadrant retningspunktet for φ ligger i, for det fremgår ikke af udtrykket. Hvis vi skriver $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)$, får vi vinklerne svarende til retningspunkterne i 1.

eller 4. kvadrant (markeret med gult på figuren til venstre ovenfor). Hvis vi derimod er interesserede i vinklerne i 2. og 3. kvadrant, skal vi lægge π til vores vinkel ($v_2 = v_1 + \pi$ og $v_4 = v_3 + \pi$). Med disse overvejelser er vi klar til at få løst fortegnspørelset. Vi ser altså igen på:

$$A \cdot \cos(\varphi) = c_1, \quad A \cdot \sin(\varphi) = c_2 \quad \text{og} \quad \tan(\varphi) = \frac{c_2}{c_1}$$

$c_1 > 0$ og $c_2 > 0$: Så skal både $\cos(\varphi)$ og $\sin(\varphi)$ være positive, dvs. retningspunktet skal ligge i første kvadrant og vi skal altså anvende $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)$.

$c_1 > 0$ og $c_2 < 0$: Så skal $\cos(\varphi) > 0$ og $\sin(\varphi) < 0$, dvs. 4. kvadrant, dvs. $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)$.

$c_1 < 0$ og $c_2 > 0$: Så skal $\cos(\varphi) < 0$ og $\sin(\varphi) > 0$, dvs. 2. kvadrant, dvs. $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{c_2}{c_1}\right) + \pi$.

$c_1 < 0$ og $c_2 < 0$: Så skal $\cos(\varphi) < 0$ og $\sin(\varphi) < 0$, dvs. 3. kvadrant, dvs. $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{c_2}{c_1}\right) + \pi$.

Øvelse 18: Tjek selv, at de angivne udtryk for φ passer for tilfældene $(c_1 = 0 \text{ og } c_2 > 0)$ og $(c_1 = 0 \text{ og } c_2 < 0)$

Eksempel 105: Vi vil gerne omskrive udtrykket $-5 \cdot \sin(7 \cdot x) + 12 \cdot \cos(7 \cdot x)$ til formen

$$A \cdot \sin(k \cdot x + \varphi).$$

Vi aflæser $k = 7$, samt $c_1 = -5$ og $c_2 = 12$.

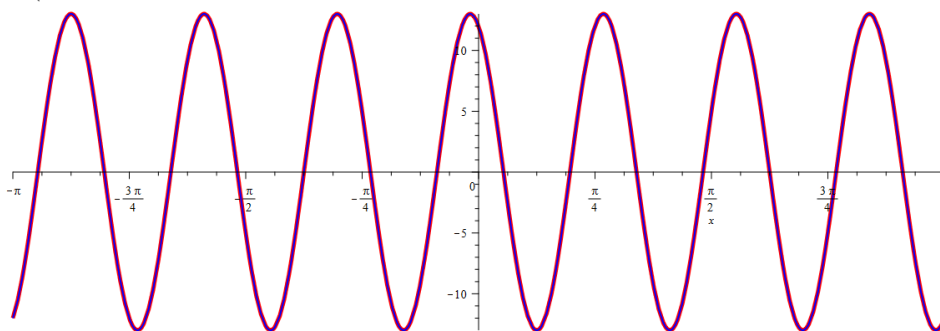
Vi kan så udregne: $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$

Da $c_1 < 0$, får vi: $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{c_2}{c_1}\right) + \pi = \tan^{-1}\left(-\frac{12}{5}\right) + \pi = 1,965587447$

Dvs. vores omskrivning bliver: $-5 \cdot \sin(7 \cdot x) + 12 \cdot \cos(7 \cdot x) = 13 \cdot \sin(7 \cdot x + 1,965587447)$

Vi kan tjekke vores resultat ved i Maple at plotte graferne oven i hinanden med forskellig tykkelse (den første tykke) og farve:

`plot([-5*sin(7*x) + 12*cos(7*x), 13*sin(7*x + 1.965587447)], x=-pi..pi, thickness=[5, 2], color=[red, blue])`



Opgaverne 112*

Omskrivningen til formen $A \cdot \sin(k \cdot x + \varphi)$ kan f.eks. være smart, hvis man har brug for at kende amplituden. Vi har jo i forbindelse med trigonometriske funktioner lært, at A står for amplituden (det halve af forskellen mellem maksimums- og minimumsværdien).

Eksempel 106: Et lod med massen $m = 200 \text{ g} = 0,200 \text{ kg}$ sættes til at svinge i en fjeder med

fjederkonstanten $k_{\text{fjeder}} = 5,0 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$. Man kan vise, at dette fører til

differentialligningen $s''(t) = -25 \cdot s(t)$, som stedfunktionen s skal opfylde.

Men der er uendelig mange løsninger (der jo udgør den fuldstændige løsning), for selve stedfunktionen afhænger af, hvornår vi sætter svingningen i gang (faseforskydning), og hvor kraftigt vi sætter den i gang (amplitude). Vi regner strækninger i meter og tider t i sekunder, og vi måler så to sammenhørende værdier af tid og sted: $(2.3, 0.74)$ og $(4.6, -0.21)$.

Vi ønsker nu at bestemme amplitude og svingningstid for bevægelsen og løser derfor først differentialligningen med de to betingelser i Maple:

$$[s''(t) = -25 \cdot s(t), s(2.3) = 0.74, s(4.6) = -0.21] \xrightarrow{\text{solve DE}} s(t) = \frac{1}{100} \frac{\left(74 \cos(23) + 21 \cos\left(\frac{23}{2}\right)\right) \sin(5t)}{\cos(23) \sin\left(\frac{23}{2}\right) - \cos\left(\frac{23}{2}\right) \sin(23)} - \frac{1}{100} \frac{\left(21 \sin\left(\frac{23}{2}\right) + 74 \sin(23)\right) \cos(5t)}{\cos(23) \sin\left(\frac{23}{2}\right) - \cos\left(\frac{23}{2}\right) \sin(23)} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} s(t) = -0.33446 \sin(5 \cdot t) + 0.92531 \cos(5 \cdot t)$$

Vi kan aflæse c_1 og c_2 og får: $A = \sqrt{(-0.33446)^2 + 0.92531^2} = 0.9839014624$

Da vinkelhastigheden aflæses til 5, er perioden: $T = \frac{2 \cdot \pi}{5} = 1.256637062$

Vi skal nu se på den generelle homogene, lineære andenordensdifferentialligning med konstante koefficienter:

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0 \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Hvis der skulle være en koefficient foran y'' , kan ligningen forkortes med denne, så man kan bringe den på ovenstående form.

I forhold til differentialligningen fra Sætning 31 ses det, at der er kommet et ekstra led med, nemlig leddet med den første afledede. Når vi skal finde den fuldstændige løsning til ovenstående differentialligning, skal vi i høj grad trække på Sætning 31. Men først skal vi have indført et nyt begreb:

Definition 25.a: Givet differentialligningen $y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0 \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R}$, kaldes

$\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0$ for karakterligningen og

$\lambda^2 + a \cdot \lambda + b$ for det karakteristiske polynomium.

Øvelse 18.a: 1) Vis, at karakterligningens diskriminant d er givet ved $d = a^2 - 4b$.

2) Vis, at $\frac{a^2}{4} - b > 0 \Leftrightarrow d > 0$, at $\frac{a^2}{4} - b < 0 \Leftrightarrow d < 0$ og at $\frac{a^2}{4} - b = 0 \Leftrightarrow d = 0$

3) Vis, at hvis $d > 0$, har det karakteristiske polynomium de to rødder $-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$

4) Vis, at hvis $d = 0$, har det karakteristiske polynomium én rod $-\frac{a}{2}$

5) Vis, at hvis $d < 0$, er $b - \frac{a^2}{4} > 0$

Ovenstående definition og øvelse får vi brug for, når vi skal bevise følgende sætning:

Sætning 32.a: Den fuldstændige løsning f til differentialligningen $y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0 \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R}$ afhænger af karakterligningens diskriminant d og er givet ved:

$d > 0$: $f(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$, hvor λ_1 og λ_2 er rødderne i det karakteristiske polynomium.

$d = 0$: $f(x) = c_1 \cdot x \cdot e^{\lambda_0 \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda_0 \cdot x}$, hvor λ_0 er (dobbel-)roden i det karakteristiske polynomium.

$d < 0$: $f(x) = e^{-\frac{a}{2} \cdot x} \cdot \left(c_1 \cdot \sin \left(\sqrt{b - \frac{a^2}{4}} \cdot x \right) + c_2 \cdot \cos \left(\sqrt{b - \frac{a^2}{4}} \cdot x \right) \right)$

En central ting at forstå: I beviset for ovenstående sætning skal vi anvende en metode, der tit tages i brug i forbindelse med differentialligninger (vi kunne have anvendt den i flere af vores beviser, men der gik vi andre veje), og som er baseret på noget, der gælder generelt.

Vi vil udnytte, at en hvilken som helst funktion f kan angives ved forskriften $f(x) = e^{\lambda \cdot x} \cdot g(x)$, hvor g er en passende funktion, og hvor $\lambda \in \mathbb{R}$ er en vilkårlig konstant.

Bemærk, at der ikke er noget som helst underligt i dette, for hvis f.eks. $f(x) = \cos(x)$, så skal g være givet ved $g(x) = \cos(x) \cdot e^{-\lambda \cdot x}$, og hvis $f(x) = x^2 + 5x - 7$, så skal $g(x) = (x^2 + 5x - 7) \cdot e^{-\lambda \cdot x}$.

Bemærk også, at det **kun** gælder, fordi $e^{\lambda \cdot x} \neq 0$ for alle x -værdier. Vi kunne f.eks. **ikke** generelt have angivet f ved $f(x) = x^2 \cdot g(x)$, for uanset hvad g er for en funktion, vil højresiden give 0, når $x = 0$, og hvis $f(0) \neq 0$, har man altså ikke $f(x) = x^2 \cdot g(x)$. Tænk grundigt over alt dette!

Bevis 32.a: Givet er differentialligningen $y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$; $a, b \in \mathbb{R}$ (1)

med tilhørende karakterligning $\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0$ (2).

Vi ønsker at bestemme den fuldstændige løsning til (1) og lader nu f være en løsning til (1). Vi angiver f ved forskriften $f(x) = e^{\lambda \cdot x} \cdot g(x)$, hvor λ til at begynde med er en vilkårlig konstant, som vi om lidt kan se, at vi kan vælge på en smart måde. For bemærk, at vi kan frit vælge λ , og vi skal så finde ud af, hvad g skal være for en funktion, hvis f er en løsning til (1).

Øvelse 18.b: 1) Bestem $f'(x)$.

2) Bestem $f''(x)$.

3) Vis, at hvis man indsætter f i (1), får man differentialligningen:

$$e^{\lambda \cdot x} \cdot \left(g''(x) + g'(x) \cdot (2 \cdot \lambda + a) + g(x) \cdot (\lambda^2 + a \cdot \lambda + b) \right) = 0$$

4) Begrund, at ovenstående svarer til $g''(x) + g'(x) \cdot (2 \cdot \lambda + a) + g(x) \cdot (\lambda^2 + a \cdot \lambda + b) = 0$

Vi kan nu se, at hvis vi vælger at arbejde med $\lambda = -\frac{a}{2}$, vil vi få en differentialligning på formen fra Sætning 31.

Øvelse 18.c: Vis, at hvis $\lambda = -\frac{a}{2}$, kan differentialligningen fra Øvelse 18.b.4) skrives som:

$$g''(x) = \left(\frac{a^2}{4} - b \right) \cdot g(x)$$

Fra Sætning 31 ved vi altså:

Hvis $\frac{a^2}{4} - b > 0$, er $g(x) = c_1 \cdot e^{\sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \cdot x} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \cdot x}$.

Hvis $\frac{a^2}{4} - b = 0$, er $g(x) = c_1 \cdot x + c_2$.

Hvis $\frac{a^2}{4} - b < 0$, er $b - \frac{a^2}{4} > 0$, og vi omskriver differentialligningen til $g''(x) = -\left(b - \frac{a^2}{4} \right) \cdot g(x)$,

hvor vi altså har $g(x) = c_1 \cdot \sin\left(\sqrt{b - \frac{a^2}{4}} \cdot x\right) + c_2 \cdot \cos\left(\sqrt{b - \frac{a^2}{4}} \cdot x\right)$.

I øvelse 18.a.2) er fortegnene for karakterligningens diskriminant d knyttet sammen med fortegnet for udtrykket $\frac{a^2}{4} - b$, og da vi med vores valg $\lambda = -\frac{a}{2}$ har $f(x) = e^{-\frac{a}{2} \cdot x} \cdot g(x)$, fremkommer Sætning 32.a, når vi udnytter det karakteristiske polynomiums rødder (Øvelse 18.a. 3) og 4)).

Eksempel 106.a: Vi ønsker at bestemme den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' + 3 \cdot y' - 10 \cdot y = 0$$

Denne differentialligning har karakterligningen $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$ med diskriminanten $d = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49 > 0$.

Det karakteristiske polynomium har altså to rødder, der er $\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 7}{2} = \begin{cases} 2 \\ -5 \end{cases}$

Dermed er den fuldstændige løsning til differentialligningen: $f(x) = c_1 \cdot e^{2 \cdot x} + c_2 \cdot e^{-5 \cdot x}$

Der tjekkes med Maple: $y'' + 3 \cdot y' - 10 \cdot y = 0 \xrightarrow{\text{solve DE}} y(x) = _C1 e^{-5x} + _C2 e^{2x}$

Eksempel 106.b: Vi skal bestemme den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' + 12 \cdot y' + 36 \cdot y = 0$$

Denne differentialligning har karakterligningen $\lambda^2 + 12\lambda + 36 = 0$ med diskriminanten $d = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 144 - 144 = 0$.

Det karakteristiske polynomium har altså én rod, der er $\lambda_0 = \frac{-12}{2 \cdot 1} = -6$

Dermed er den fuldstændige løsning til differentialligningen: $f(x) = c_1 \cdot x \cdot e^{-6 \cdot x} + c_2 \cdot e^{-6 \cdot x}$

Der tjekkes med Maple:

$$y'' + 12 \cdot y' + 36 \cdot y = 0 \xrightarrow{\text{solve DE}} y(x) = _C1 e^{-6x} + _C2 e^{-6x} x$$

Eksempel 106.c: Vi ønsker at bestemme den partikulære løsning til differentialligningen

$$y'' + 2 \cdot y' + 10 \cdot y = 0, \text{ der går gennem punkterne } (0, 7) \text{ og } \left(\frac{\pi}{6}, 5\right).$$

Denne differentialligning har karakterligningen $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$ med diskriminanten $d = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 4 - 40 = -36 < 0$.

Dermed er den fuldstændige løsning til differentialligningen:

$$f(x) = e^{-\frac{2}{2}x} \left(c_1 \cdot \sin\left(\sqrt{10 - \frac{2^2}{4}} \cdot x\right) + c_2 \cdot \cos\left(\sqrt{10 - \frac{2^2}{4}} \cdot x\right) \right) = e^{-x} (c_1 \cdot \sin(3 \cdot x) + c_2 \cdot \cos(3 \cdot x))$$

Da den partikulære løsning skal gå gennem $(0, 7)$, har man:

$$7 = e^{-0} (c_1 \cdot \sin(3 \cdot 0) + c_2 \cdot \cos(3 \cdot 0)) \Leftrightarrow 7 = 1 \cdot (c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1) \Leftrightarrow c_2 = 7$$

Da den partikulære løsning også skal gå gennem $\left(\frac{\pi}{6}, 5\right)$, har man:

$$5 = e^{-\frac{\pi}{6}} \left(c_1 \cdot \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + c_2 \cdot \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) \right) \Leftrightarrow 5 = e^{-\frac{\pi}{6}} (c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0) \Leftrightarrow c_1 = 5 \cdot e^{\frac{\pi}{6}}$$

Dvs. den søgte partikulære løsning er: $f(x) = e^{-x} \cdot \left(5 \cdot e^{\frac{\pi}{6}} \cdot \sin(3 \cdot x) + 7 \cdot \cos(3 \cdot x) \right)$

$$y'' + 2 \cdot y' + 10 \cdot y = 0, y(0) = 7, y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 5 \xrightarrow{\text{solve DE}} y(x) = \frac{5 e^{-x} \sin(3x)}{e^{-\frac{1}{6}\pi}} + 7 e^{-x} \cos(3x)$$

Numerisk løsning af differentialligninger

Vi har allerede beskæftiget os med numerisk løsning af differentialligninger i begyndelsen af emnet Infinitesimalregning, hvor vi anvendte differensligninger som tilnærmelser til differentialligninger. Den metode, der blev anvendt her, kaldes *Eulers metode* (Leonhard Euler, 1707-1783, endnu engang). Vi skal nu også se på *Heuns metode* (Karl Heun, 1859-1929) og *Den klassiske Runge-Kutta metode* alias *RK4* (Carl Runge, 1856-1927 og Martin Kutta, 1867-1944).

Der findes et hav af metoder til numerisk løsning af differentialligninger, herunder en hel del Runge-Kutta-metoder (f.eks. hører både Eulers og Heuns metoder ind under den generelle Runge-Kutta-metode), og der er forskellige fordele og ulemper ved de enkelte. Overordnet set drejer det sig om to ting: Beregningsmængden og præcisionen. Det gælder om at opnå så høj præcision som muligt med så lille beregningsmængde som muligt.

Numeriske metoder anvendes, når man ikke er i stand til at løse de pågældende differentialligninger analytisk (dvs. finde funktionsudtryk). Metoderne er IKKE eksakte, men det er som udgangspunkt ikke noget problem, når man anvender dem inden for fysik, kemi, datalogi, ingeniørarbejde eller andre områder. Her er det væsentlige, at de er **præcise nok**. Vi har i forbindelse med Taylorrækker set, at man kunne sætte tal på, hvor stor afvigelsen mellem den rigtige og den tilnærmede værdi højst kunne være. 4-tallet i *RK4* står for "fjerde orden", og det er netop et udtryk for afvigelsens såkaldte *størrelsesorden* i de enkelte skridt (hvilket vi ikke kommer mere ind på her).

Som nævnt skal vi se på tre metoder her (Euler, Heun, RK4). De to første er mest for at introducere tankegangen, så RK4 bliver nemmere at forstå, for det er RK4, der er den mest benyttede metode, da man med en given beregningsmængde opnår den største præcision, og den vil kunne indgå i SRP-opgaver inden for en del forskellige områder.

Numerisk løsning af 1. ordens differentialligninger

Vores udgangspunkt er, at vi har en differentialligning $\frac{dy}{dx} = g(x, y)$, hvor vi kender ét punkt på løsningskurven for den partikulære løsning f , som vi ønsker at finde en række tilnærmede funktionsværdier for.

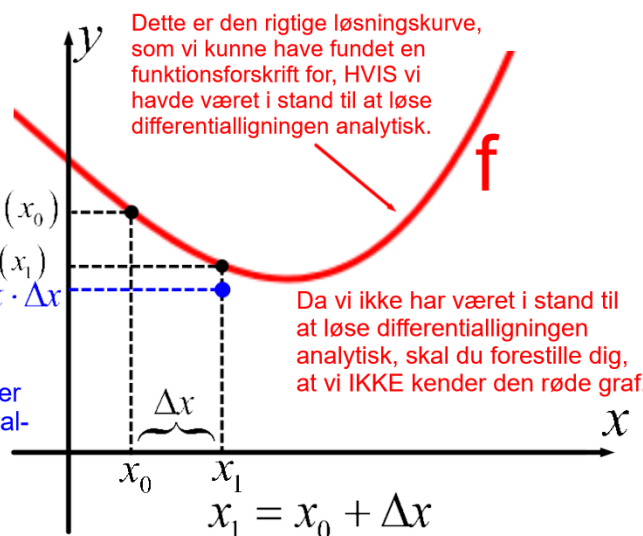
De to centrale størrelser inden for numerisk løsning af differentialligninger er *skridtlængden* Δx og parameteren k (se nedenstående figur).

Denne funktionsværdi kender vi, og det er vores udgangspunkt for vores numeriske løsning af differentialligningen.

Dette er den RIGTIGE funktionsværdi i x_1 , og den finder vi IKKE.

Vi bruger betegnelsen y_1 om vores TILNÆRMEDE værdi til funktionsværdien $f(x_1)$. Bemærk dette, da disse betegnelser "normalt" dækker over det samme.

Dette k bestemmer vi ud fra differentialligningen UDEN at løse denne.



Skridtlængden Δx fastsætter vi selv. Den fortæller os, hvor langt der skal være mellem de argumenter, hvor vi beregner tilnærmede funktionsværdier. Jo mindre skridtlængden er, jo mere præcise bliver vores tilnærmede funktionsværdier, men samtidig øges beregningsmængden.

Parameteren k beregnes ved hjælp af differentialligningen, men det kan gøres på flere måder, og det er her, de forskellige metoder afviger fra hinanden. Dvs. når vi taler om Eulers metode, Heuns metode, RK4, osv., er det metoder til at beregne k , vi taler om. Parameteren k er – i modsætning til skridtlængden – ikke den samme i hvert skridt. Den skal beregnes for hvert skridt.

Parameteren k er hældningen for det rette linjestykke, man skal følge, når man bevæger sig fra ét punkt til det næste (f.eks. fra $(x_0, f(x_0))$ til (x_1, y_1) som vist på figuren på forrige side). Vi ved, at man generelt finder hældningen k_n for en ret linje gennem punkterne (x_n, y_n) og (x_{n+1}, y_{n+1}) ved:

$$k_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$$

Da $\Delta x = x_{n+1} - x_n$, kan man omskrive ovenstående til:

$$y_{n+1} = y_n + k_n \cdot \Delta x$$

Og dette er altså måden, hvorpå man kommer fra ét beregnet punkt til det næste.

Lad os nu se på de enkelte metoder, der, som nævnt, fortæller os, hvordan vi skal beregne k .

De er alle baseret på differentialligningen $\frac{dy}{dx} = g(x, y)$:

Eulers metode

$$k_n = g(x_n, y_n)$$

Heuns metode

$$k_n = \frac{l_{n,1} + l_{n,2}}{2}, \text{ hvor}$$

$$l_{n,1} = g(x_n, y_n) \text{ og}$$

$$l_{n,2} = g(x_{n+1}, y_n + l_{n,1} \cdot \Delta x)$$

Klassisk Runge-Kutta

$$k_n = \frac{l_{n,1} + 2 \cdot l_{n,2} + 2 \cdot l_{n,3} + l_{n,4}}{6}, \text{ hvor}$$

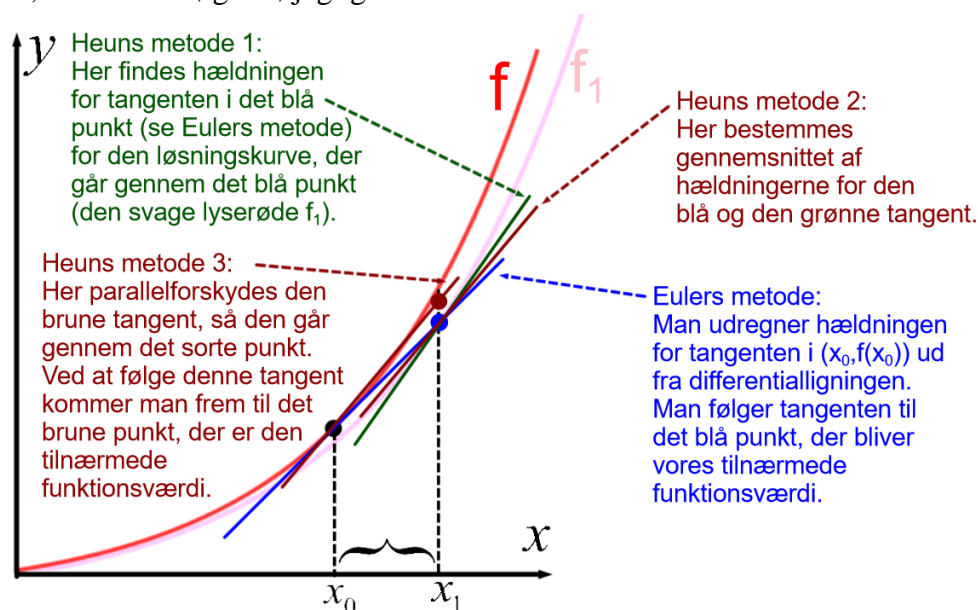
$$l_{n,1} = g(x_n, y_n)$$

$$l_{n,2} = g\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + l_{n,1} \cdot \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$l_{n,3} = g\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + l_{n,2} \cdot \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$l_{n,4} = g(x_{n+1}, y_n + l_{n,3} \cdot \Delta x)$$

På figuren nedenfor er en grafisk illustration af Eulers og Heuns metode. Bemærk, hvordan man i Heuns metode bygger videre på Eulers metode, og tænk over, hvorfor det øger nøjagtigheden.



Eksempel 107: Vi ser på differentiaalligningen $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. Her er altså $g(x, y) = -\frac{x}{y}$. Normalt vil

man ikke anvende numeriske metoder på denne differentiaalligning, da vi allerede ved, at den kan løses analytisk og har halvcirkler som løsningskurver, men netop derfor kan den bruges som eksempel, da vi kan sammenligne vores metoder med den rigtige løsning.

Vi anvender skridtlængden $\Delta x = 0,2$ og tager udgangspunkt i punktet $(x_0, f(x_0)) = (0,10)$.

Eulers metode: Vi har altså $(x_0, y_0) = (0,10)$.

1. skridt: $k_0 = g(x_0, y_0) = -\frac{0}{10} = 0$ $y_1 = y_0 + k_0 \cdot \Delta x = 10 + 0 \cdot 0,2 = 10$ $(x_1, y_1) = (0,2,10)$

2. skridt: $k_1 = g(x_1, y_1) = -\frac{0,2}{10} = -0,02$ $y_2 = y_1 + k_1 \cdot \Delta x = 10 - 0,02 \cdot 0,2 = 9,996$ $(x_2, y_2) = (0,4, 9,996)$

3. skridt: $k_2 = g(x_2, y_2) = -\frac{0,4}{9,996} = -0,040016$ $y_3 = y_2 + k_2 \cdot \Delta x = 9,996 - 0,040016 \cdot 0,2 = \dots$

Heuns metode: Vi har altså $(x_0, y_0) = (0,10)$.

1. skridt: $l_{0,1} = g(x_0, y_0) = -\frac{0}{10} = 0$ $l_{0,2} = g(x_1, y_0 + l_{0,1} \cdot \Delta x) = -\frac{0,2}{10 + 0 \cdot 0,2} = -0,02$

$k_0 = \frac{l_{0,1} + l_{0,2}}{2} = \frac{0 - 0,02}{2} = -0,01$ $y_1 = y_0 + k_0 \cdot \Delta x = 10 - 0,01 \cdot 0,2 = 9,998$ $(x_1, y_1) = (0,2, 9,998)$

2. skridt: $l_{1,1} = g(x_1, y_1) = -\frac{0,2}{9,998} = -0,020004$ $l_{1,2} = g(x_1, y_0 + l_{1,1} \cdot \Delta x) = -\frac{0,4}{9,998 - 0,020004 \cdot 0,2} = \dots$

Vi stopper her midt i en udregning, da systemet er vist, og da det ses, at vi får brug for flere og flere cifre, hvilket er besværligt at indtaste og gør opskrivningen uoverskuelig.

Da det er de samme udregninger, der skal foretages igen og igen, er det oplagt at programmere en algoritme til det eller anvende Excel. Vi skal gøre sidstnævnte.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|-----------|------------------|---------------|----------|---|--------------|----------|----------|----------|---|---|----------|
| 1 | | $\Delta x = 0,2$ | | | | | | | | | | |
| 2 | | | EULERS METODE | | | HEUNS METODE | | | | | | RIGTIG |
| 3 | punkt nr. | x | y | k | | y | l1 | l2 | k | | | |
| 4 | 0 | 0 | 10 | 0 | | 10 | 0 | -0,02 | -0,01 | | | 10 |
| 5 | 1 | 0,2 | 10 | -0,02 | | 9,998 | -0,02 | -0,04002 | -0,03001 | | | 9,998 |
| 6 | 2 | 0,4 | 9,996 | -0,04002 | | 9,991997 | -0,04003 | -0,0601 | -0,05006 | | | 9,991997 |
| 7 | 3 | 0,6 | 9,987997 | -0,06007 | | 9,981984 | -0,06011 | -0,08024 | -0,07017 | | | 9,981984 |
| 8 | 4 | 0,8 | 9,975982 | -0,08019 | | 9,967949 | -0,08026 | -0,10048 | -0,09037 | | | 9,967949 |

Her indtastes skridtlængden. Man må aldrig skrive dette tal inde i en formel. Man skal i stedet henvise til cellen med \$B\$1 (\$-symbolet holder det følgende bogstav eller tal fast, når formelen kopieres. Egentlig kunne man nøjes med B\$1 her, da man kopierer lodret, men ikke vandret).

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$= -B4/G4$$

$$\frac{dy}{dx} = g(x_{n+1}, y_n + l_{n,1} \cdot \Delta x)$$

$$= -B5/(G4+H4*\B1)$$

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|-----------|------------------|---------------|----------|---|--------------|----------|----------|----------|---|---|----------|
| 1 | | $\Delta x = 0,2$ | | | | | | | | | | |
| 2 | | | EULERS METODE | | | HEUNS METODE | | | | | | RIGTIG |
| 3 | punkt nr. | x | y | k | | y | l1 | l2 | k | | | |
| 4 | 0 | 0 | 10 | 0 | | 10 | 0 | -0,02 | -0,01 | | | 10 |
| 5 | 1 | 0,2 | 10 | -0,02 | | 9,998 | -0,02 | -0,04002 | -0,03001 | | | 9,998 |
| 6 | 2 | 0,4 | 9,996 | -0,04002 | | 9,991997 | -0,04003 | -0,0601 | -0,05006 | | | 9,991997 |
| 7 | 3 | 0,6 | 9,987997 | -0,06007 | | 9,981984 | -0,06011 | -0,08024 | -0,07017 | | | 9,981984 |
| 8 | 4 | 0,8 | 9,975982 | -0,08019 | | 9,967949 | -0,08026 | -0,10048 | -0,09037 | | | 9,967949 |

$$=B4+\B1$$

$$y_{n+1} = y_n + k_n \cdot \Delta x$$

$$=D4+E4*\B1$$

$$=D4$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$y_{n+1} = y_n + k_n \cdot \Delta x$$

$$=G4+J4*\B1$$

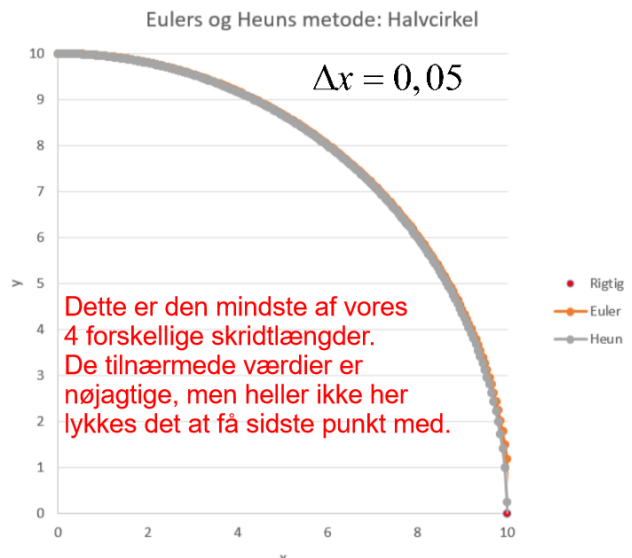
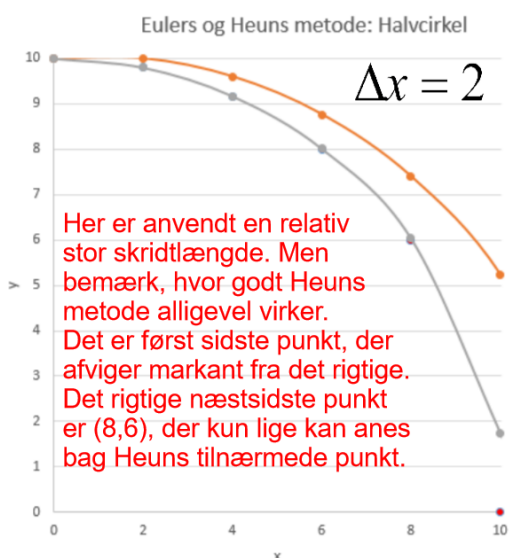
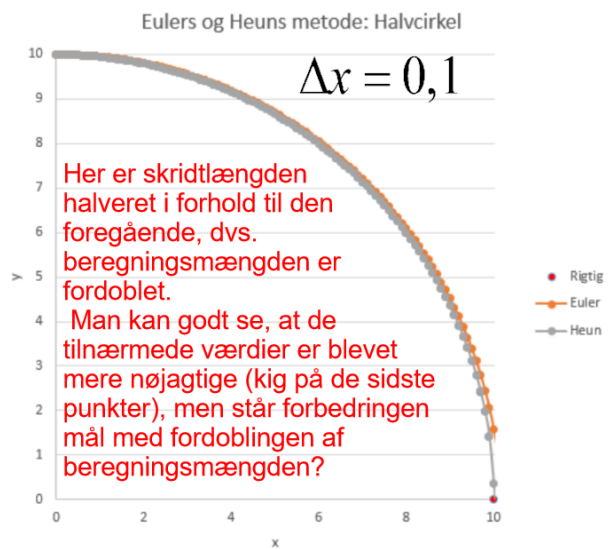
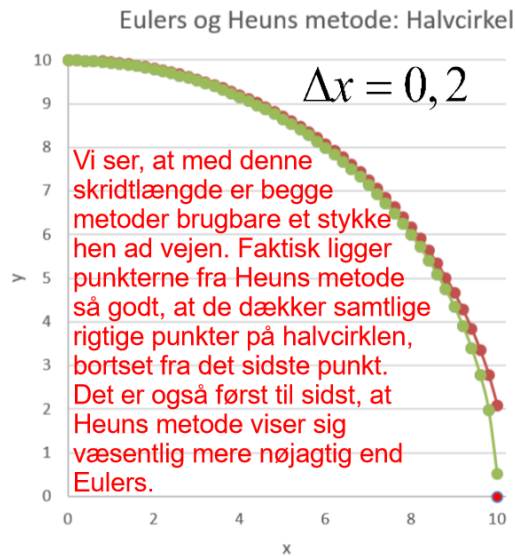
$$k_n = \frac{l_{n,1} + l_{n,2}}{2}$$

$$=(H4+I4)/2 \quad f(x) = \sqrt{100 - x^2}$$

$$=KVROD(100-B4*B4)$$

Man tager altså værdien i cellen ovenover og lægger skridtlængden til.

Hvis man laver et Excel-ark med formlerne som i Eksempel 107, kan man ved at ændre skridtlængden få følgende grafer, hvor nogle væsentlige pointer er angivet:



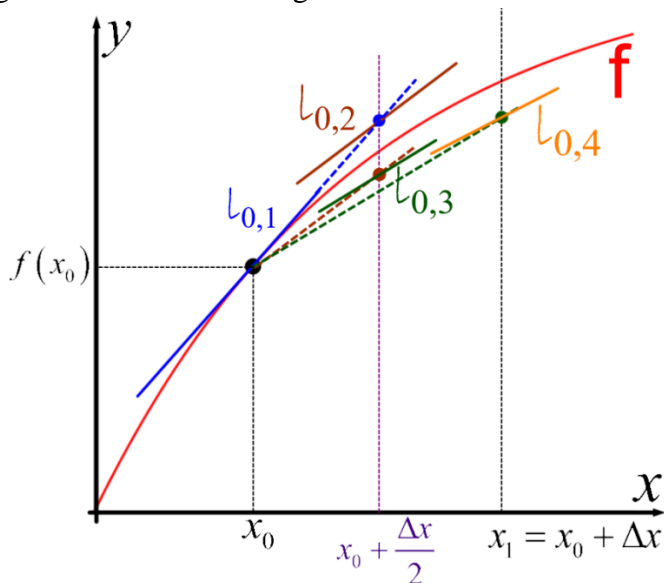
Som man kan få en fornemmelse for ud fra figurerne ovenfor, er det sværest at få gode tilnærmelser, når hældningerne bliver numerisk meget store.

Hvis man kigger på de fire figurer ovenfor samt resultaterne i opgaverne 1160 og 1162, kan man se, at Heuns metode er stærkere end Eulers metode. For godt nok kræver den pr. skridt dobbelt så mange udregninger (fire mod to), men hvis man – som i de nævnte opgaver – i Eulers metode gør skridtlængden ti gange mindre end i Heuns (og dermed øger antal beregninger med en faktor 10), så giver Eulers metode stadig mindre præcise resultater.

Vi kan altså se, at det godt kan betale sig at bruge nogle udregninger på at finde en god værdi for parameteren k . Og det er præcis det, man gør i den klassiske Runge-Kutta metode, som vi nu skal se på.

Den klassiske Runge-Kutta metode (RK4)

Vi har allerede set algoritmen til at bestemme parameteren k i RK4. På figuren nedenfor ses en grafisk illustration af algoritmen:



Klassisk Runge-Kutta

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y)$$

$$k_n = \frac{l_{n,1} + 2 \cdot l_{n,2} + 2 \cdot l_{n,3} + l_{n,4}}{6}, \text{ hvor}$$

$$l_{n,1} = g(x_n, y_n)$$

$$l_{n,2} = g\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + l_{n,1} \cdot \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$l_{n,3} = g\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + l_{n,2} \cdot \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$l_{n,4} = g(x_{n+1}, y_n + l_{n,3} \cdot \Delta x)$$

$l_{n,1}$: På figuren ovenfor ses, hvordan $l_{0,1}$ er hældningen for tangenten til grafen for f i punktet $(x_0, f(x_0))$. Det er denne blå rette linje, vi ville følge med Eulers metode.

$l_{n,2}$: Vi følger nu den blå rette linje en halv skridtlængde og kommer til det blå punkt

$\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, f(x_0) + l_{0,1} \cdot \frac{\Delta x}{2}\right)$. Dette punkt ligger ikke på grafen for f , men på grafen for en anden

partikulær løsning $f_{0,2}$, og når vi indsætter punktets koordinater i differentialligningen, er det

altså tangenthældningen $l_{0,2}$ for grafen for $f_{0,2}$ i $\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, f(x_0) + l_{0,1} \cdot \frac{\Delta x}{2}\right)$, vi finder. Men denne

løsning er ikke interessant for os. Det er kun selve tallet $l_{0,2}$, vi skal bruge til noget, og derfor

bliver der i det følgende snakket om *tangenthældningen i et punkt*, hvor det er underforstået, at det er tangenten til grafen for lige netop den partikulære løsning til differentialligningen, hvis løsningskurve indeholder det pågældende punkt.

$l_{n,3}$: Den brune rette linje gennem det blå punkt og med hældningen $l_{0,2}$ parallelforskydes nu, så den i stedet går gennem det sorte punkt (se den stiplede brune linje). Denne linje følges nu en halv skridtlængde frem til det brune punkt. I dette punkt bestemmes tangenthældningen $l_{0,3}$.

$l_{n,4}$: Den grønne rette linje gennem det brune punkt og med hældningen $l_{0,3}$ parallelforskydes nu til den stiplede grønne linje, der går gennem det sorte punkt. Man følger den stiplede grønne linje en hel skridtlængde til det grønne punkt, hvor man bestemmer tangenthældningen $l_{0,4}$.

Vi har nu fire væksthastigheder $l_{0,1}, l_{0,2}, l_{0,3}$ og $l_{0,4}$, og når vi skal bestemme vores parameter k ,

vægtes de to midterste dobbelt så meget som den første og den sidste, dvs. $l_{0,1}$ og $l_{0,4}$ vægtes med $\frac{1}{6}$,

mens $l_{0,2}$ og $l_{0,3}$ vægtes med $\frac{1}{3}$. Lad os se på nogle eksempler, der viser styrken i denne metode:

Eksempel 108 (halvcirklen igen): Vi ser igen på $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ med $(x_0, f(x_0)) = (0,10)$ og $\Delta x = 0,2$.

Klassisk Runge-Kutta: $(x_0, y_0) = (0,10)$.

$$l_{0,1} = g(x_0, y_0) = -\frac{0}{10} = 0$$

$$l_{0,2} = g\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + l_{0,1} \cdot \frac{\Delta x}{2}\right) = -\frac{0,1}{10+0 \cdot 0,1} = -0,01$$

$$l_{0,3} = g\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + l_{0,2} \cdot \frac{\Delta x}{2}\right) = -\frac{0,1}{10-0,01 \cdot 0,1} = -0,0100010001$$

$$l_{0,4} = g(x_0 + \Delta x, y_0 + l_{0,3} \cdot \Delta x) = -\frac{0,2}{10-0,0100010001 \cdot 0,2} = -0,0200040012$$

$$k_0 = \frac{l_{0,1} + 2 \cdot l_{0,2} + 2 \cdot l_{0,3} + l_{0,4}}{6} = \frac{0 + 2 \cdot (-0,01) + 2 \cdot (-0,010001) - 0,020004}{6} = -0,01000100023$$

$$y_1 = y_0 + k_0 \cdot \Delta x = 10 - 0,01000100023 \cdot 0,2 = 9,9979998$$

$$(x_1, y_1) = (0,2, 9,9979998)$$

Hvis du sammenligner dette med 1. skridt i Heuns metode i Eksempel 107, kan du se, at der er en meget lille forskel i y-værdierne. Vi er gået fra fire til seks beregninger pr. skridt, så spørgsmålet er, om det kan betale sig? Vi undersøger dette ved igen at kigge på Excel-grafer.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|------------------------------------|-----|-----------|-----------|----------|----------|----------|----------|---|
| 1 | Δx= 0,2 | | | | | | | | |
| 2 | KLASSISK RUNGE-KUTTA METODE | | | | | | | | |
| 3 | punkt nr. | x | y | l1 | l2 | l3 | l4 | k | |
| 4 | 0 | 0 | 10 | 0 | -0,01 | -0,01 | -0,02 | -0,01 | |
| 5 | 1 | 0,2 | 9,9979998 | -0,020004 | -0,03001 | -0,03002 | -0,04003 | -0,03002 | |
| 6 | 2 | 0,4 | 9,9919968 | -0,040032 | -0,05006 | -0,05007 | -0,06011 | -0,05007 | |
| 7 | 3 | 0,6 | 9,9810828 | -0,060108 | -0,07017 | -0,07018 | -0,08026 | -0,07018 | |

$=D4+I4*\$B\1

$=-B4/D4$

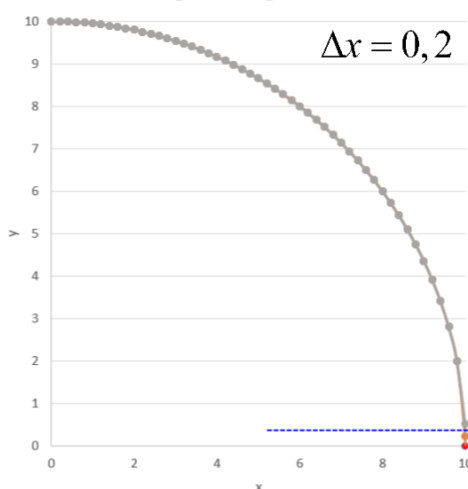
$=(B4+\$B\$1*0,5)/(D4+F4*0,5*\$B\$1)$

$=(E4+2*F4+2*G4+H4)/6$

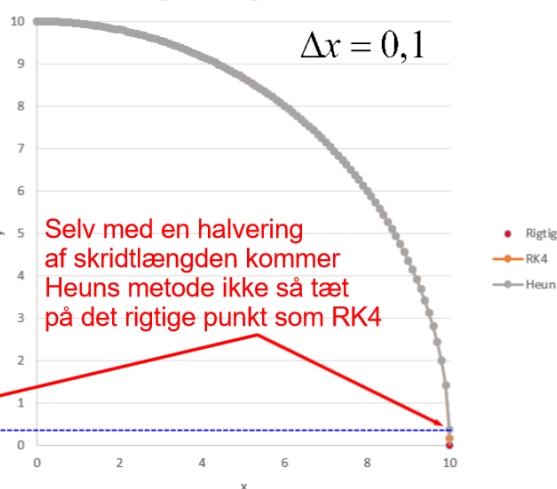
$=(B4+0,5*\$B\$1)/(D4+E4*0,5*\$B\$1)$

$=-B5/(D4+\$B\$1*G4)$

Klassisk Runge-Kutta og Heuns metode: Halvcirkel

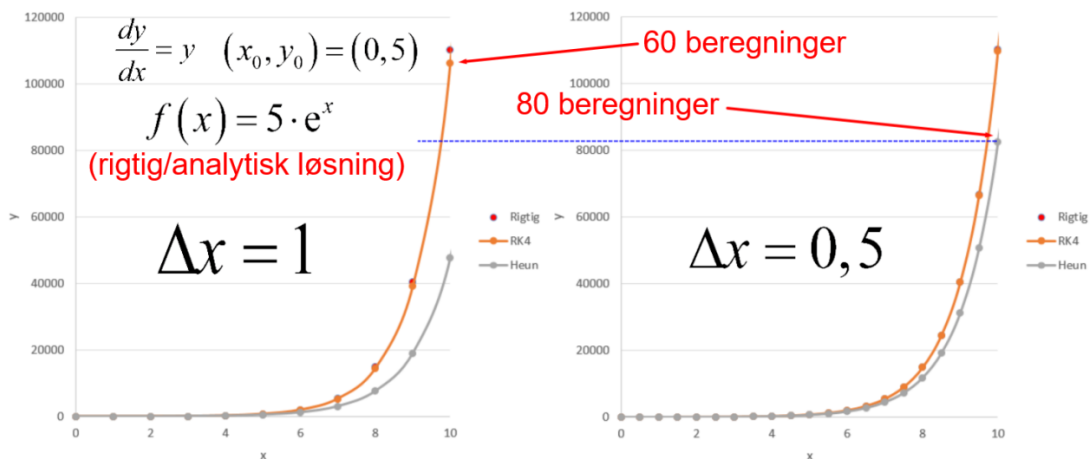


Klassisk Runge-Kutta og Heuns metode: Halvcirkel



Eksempel 108 illustrerer endnu engang, at det godt kan betale sig at bruge ekstra udregninger på at finde gode værdier for parameteren k . Lad os se på nogle flere eksempler med differentialligninger, som vi har løst analytisk og derfor kender den rigtige løsning til:

Ekspontiel vækst: Klassisk Runge-Kutta og Heun

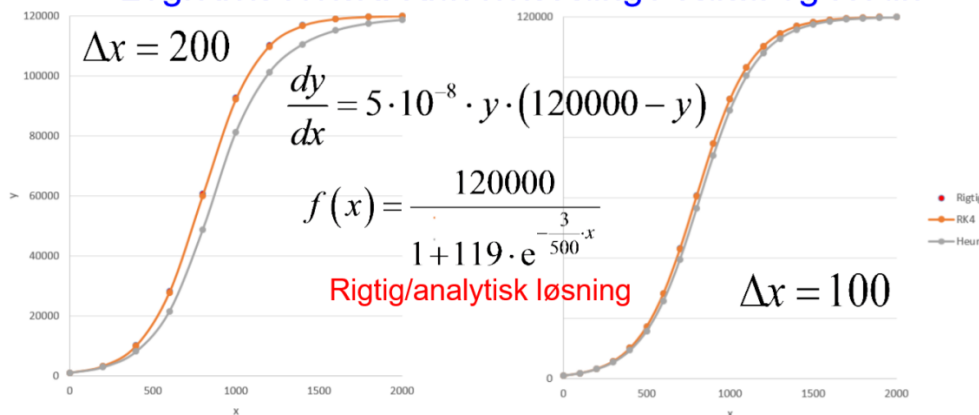


Vi ser igen, at RK4 er mere nøjagtig end Heuns metode, og igen ser vi, at selvom vi halverer skridtlængden, kommer Heuns metode ikke tættere på den rigtige værdi end RK4.

Bemærk, at disse eksempler er konstrueret for at vise afvigelser mellem metoderne indbyrdes og metoderne vs. den analytiske (rigtige) løsning. Det har derfor været nødvendigt at anvende relativt store skridtlængder. Normalt arbejder man med mindre skridtlængder, og så er begge metoder så gode, at vi ville have svært ved at skelne dem fra den rigtige løsning.

Også i næste eksempel har det været nødvendigt med store skridtlængder for at opnå nogle afvigelser, der viser nogle pointer.

Logistisk vækst: Klassisk Runge-Kutta og Heun



På ovenstående figur ser vi, at selv med den store skridtlængde $\Delta x = 200$ (der kun giver os ca. 5 punkter i det område mellem y -værdierne 10000 og 110000, hvor væksten er markant) skal man kigge godt efter for at se forskel på de rigtige punkter og RK4-punkterne. Og vi ser igen, at Heuns metode ikke kommer lige så tæt på den rigtige løsning, selvom man halverer skridtlængden.

Bemærk også på den venstre figur, at Heuns metode lægger sig under den rigtige graf på det første, konvekse stykke, mens den kommer tættere på igen på det sidste konkave stykke.

Med skridtlængden $\Delta x = 1$ er den største absolutte afvigelse mellem den rigtige løsning og RK4-løsningen på 0,00000009 (hvor y -værdien er lige godt 60000), og den største relative afvigelse findes, hvor y -værdien er knap 20000, og er på 0,000000002%. Dette skulle gerne give en idé om, **hvor** stærk en metode RK4 er, og samtidig vise, at numeriske metoder kan anvendes til praktiske formål.

FUNKTIONER AF FLERE VARIABLE

Med 'funktioner af flere variable' menes funktioner med mere end én variabel, og dem er du allerede stødt på mange gange. I forrige afsnit så vi på en differentiaalligning $\frac{dy}{dx} = g(x, y)$, hvor g er en funktion af de to variable x og y . Og fra fysik kender vi f.eks. **den kinetiske energi**, der er en funktion af de to variable masse m og fart v ($E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$), **accelerationen** a , der i Newtons 2. lov ($a = \frac{F_{res}}{m}$) er en funktion af den resulterende kraft F_{res} og massen m , og **temperaturtilvæksten** ΔT , der, når vi opvarmer uden faseovergang, er en funktion af de tre variable Q (tilført varme), m (masse) og c (specifik varmekapacitet) ($\Delta T = \frac{Q}{m \cdot c}$). Fra kemi kender vi tilsvarende sammenhænge (formler). Og også i matematik er vi stødt på funktioner af flere variable. Rumfanget V af en kasse er en funktion af de tre variable højde h , bredde b og længde l , og overfladearealet af en cylinder er en funktion af variablerne højde h og radius r .

Men hvorfor kommer der så først en teoretisk behandling nu, og hvorfor er det overhovedet nødvendigt med en sådan?

Pointen er, at vi enten blot har behandlet sammenhængene som ligninger med flere variable, hvor vi har kunnet indsætte nogle kendte værdier og udregne en ukendt, eller også har vi inden for naturvidenskaberne sørget for at holde alle variable bortset fra én konstante (variabelkontrol), så vi har kunnet betragte sammenhængen som en funktion af én variabel. Når vi f.eks. har opvarmet en bestemt mængde vand, har vi ved at holde os til vand gjort den specifikke varmekapacitet til en konstant, og ved at holde vandmængden fast er massen gjort til en konstant, og således er temperaturtilvæksten ΔT blevet til en funktion af én variabel Q , og vi har måske tegnet en graf for denne funktion.

Og inden for matematik har vi i forbindelse med optimering også sørget for at få omdannet funktioner af flere variable til funktioner af én variabel ved at sætte nogle betingelser på situationen eller angive nogle sammenhænge mellem variablerne. F.eks. bliver rumfanget af en kasse $V = h \cdot b \cdot l$ til en funktion af én variabel h , hvis vi siger, at $b = 2 \cdot h$ og $l = 3 \cdot h + 1$, og hvis vi for en cylinder angiver det rumfang, den skal have, kan vi gøre overfladearealet til en funktion af én variabel, hvor vi kan finde et globalt minimum.

Vi skal snart se, hvordan man også kan finde lokale og globale ekstremumssteder for funktioner af flere variable. Men først skal vi se på noget notation – herunder hvordan man differentierer.

Definition 26: En (reel) funktion f af n (reelle) variable $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ kan angives ved:

$f : X \mapsto \mathbb{R}$, hvor $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Hermed fortælles, at argumenterne kan betragtes som punkter eller vektorer med n koordinater, og værdimængden $f(X)$ er en del af de reelle tal.

$f : (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. Her angives funktionsforskriften, der fortæller, hvad vi skal gøre med argumenterne.

$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \dots$. En anden måde at angive det udtryk, der fortæller, hvad f skal gøre ved argumenterne.

Eksempel 109: I udregningerne nedenfor ser vi bort fra enheder (alt regnes i SI-enheder):

$$E_{kin} : (m, v) \mapsto \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad \text{eller} \quad E_{kin}(m, v) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

$$\text{Og vi kan udregne: } E_{kin}(4, 5) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5^2 = 50.$$

Rumfanget V af en kasse kan angives ved: $V : (h, b, l) \mapsto h \cdot b \cdot l$ eller $V(h, b, l) = h \cdot b \cdot l$.

$$\text{Og vi kan udregne: } V(2, 7, 3) = 2 \cdot 7 \cdot 3 = 42$$

En funktion f er givet ved: $f : (x, y, z) \mapsto \frac{x^2}{y} \cdot \sin(z)$ eller $f(x, y, z) = \frac{x^2}{y} \cdot \sin(z)$

$$\text{Og vi kan udregne: } f\left(4, -3, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{4^2}{-3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{16}{-3} \cdot 1 = -\frac{16}{3}$$

I Maple kan funktioner af flere variable defineres og anvendes ligesom funktioner af én variabel:

$$V(h, b, l) := h \cdot b \cdot l:$$

$$V(2, 7, 3) = 42$$

$$f := (x, y, z) \rightarrow \frac{x^2}{y} \cdot \sin(z) :$$

$$f\left(4, -3, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{16}{3}$$

Opgaverne 118*

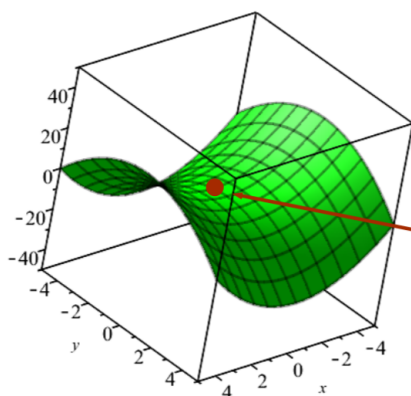
Man kan ikke generelt tegne grafer for funktioner af flere variable, men hvis der kun er to uafhængige variable, kan man tegne grafen i et tredimensionalt koordinatsystem. Punkternes to første koordinater svarer så til argumenternes værdier, mens den tredje koordinat svarer til funktionsværdien.

3D-plot med Maples *plot3d*

Eksempel 110a): Vi vil tegne fladen, der er graf for funktionen $f(x, y) = x^2 - y^2$:

Bemærk, det er som altid kun funktionsudtrykket - og ikke funktionsforskriften - der skal angives.

`plot3d(x2 - y2, view = [-5 ..5, -5 ..5, -50 ..50], color = green, thickness = 3)`



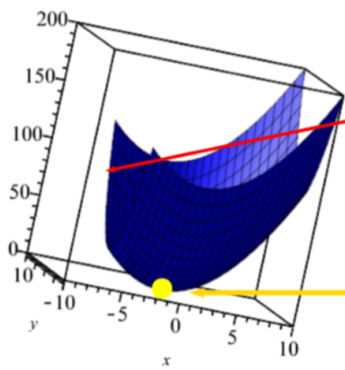
Man kan som sædvanlig vælge farve og tykkelse på stregerne.

Med *view* angives det vindue, hvor fladen skal tegnes.

Dette punkt, som Maple ikke selv har tegnet, kaldes et *saddelpunkt* (overvej selv hvorfor). Vi skal snart lære at finde sådan et punkt.

Eksempel 110b: Vi vil tegne fladen, der er graf for funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$:

```
plot3d(x2 + y2, x = -5 ..10, y = -10 ..10, view = [ -10 ..10, -10 ..10, 0 ..200], color = blue)
```



dvs. **SKAL**

Bemærk, at du både kan angive, hvilke x-værdier, der skal regnes på (her fra -5 til 10), og hvilket område, man skal kunne se (her fra -10 til 10). Så en del af vinduet står tomt.

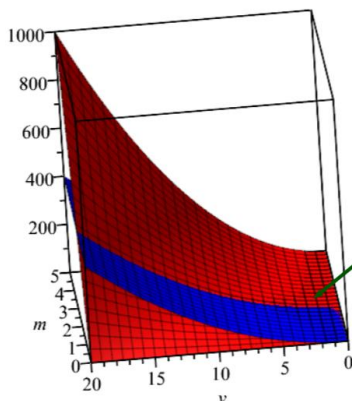
(Og man skal selvfølgelig ikke lade et område være tomt, så man bruger samme intervaller de to steder)

Her er et lokalt (og globalt) minimumspunkt

Eksempel 110c: $E_{kin}(m, v) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$

Massen, farten og den kinetiske energi er alle ikke-negative størrelser, så når man skal tegne fladen, skal man sørge for kun at udregne og vise ikke-negative værdier (se nedenfor):

```
plot3d([ [ 1/2 * m * v2, 1/2 * 2 * v2 ], m = 0 ..5, v = 0 ..20, view = [ 0 ..5, 0 ..20, 0 ..1000 ], color = [red, blue])
```



Som sædvanlig kan man anvende en kommando på to eller flere udtryk. Og man kan også med farver skelne de to flader fra hinanden.

Skæringskurven mellem de to flader svarer til grafen for den kinetiske energi som funktion af farten, når massen er fastsat til 2.

Man genkender den ene gren af en parabel.

Øvelse 19: Lav et 3-D-plot af $f : (x, y) \mapsto \sin(x) \cdot \sin(y)$. Tjek, at du kan genkende saddelpunkterne, de globale minimumspunkter og de globale maksimumspunkter.

Gør det samme med $g : (x, y) \mapsto 7 \cdot \sin(x) + y^2$ (bortset fra maksimumspunkter).

Find saddelpunktet for $h : (x, y) \mapsto x^2 - 2 \cdot x \cdot y - y^2$.

Snitkurver og niveaukurver

Vi ved, at en plan i rummet kan angives med ligningen $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$; $G = \mathbb{R}^3$

Dette kan generaliseres til n -dimensionale rum, hvor en *hyperplan* kan angives med ligningen

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 + \dots + a_n \cdot x_n + k = 0; G = \mathbb{R}^n$$

Her er a_i 'erne er koefficienter (svarende til a, b, c) og x_i 'erne variable (svarende til x, y, z), og k er en konstant.

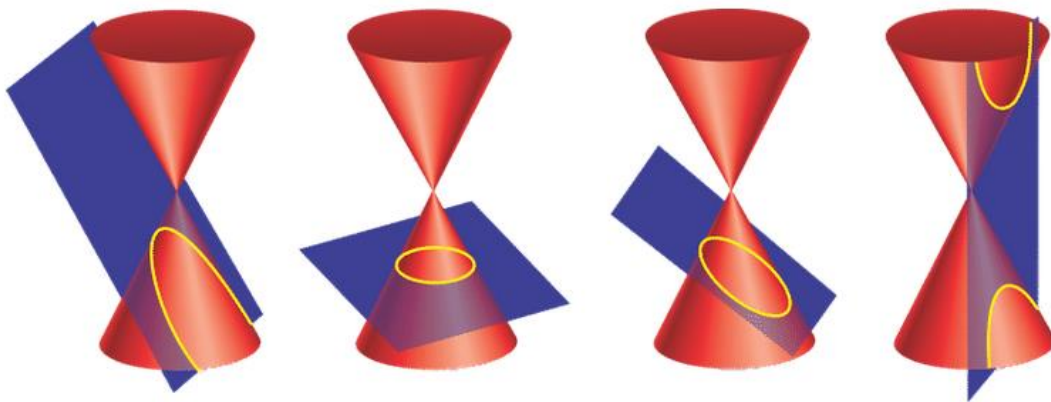
For en funktion f af $n - 1$ variable er *snitkurven* mellem funktionen og en given hyperplan det geometriske sted for punkterne $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}))$, der opfylder ligningen

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 + \dots + a_{n-1} \cdot x_{n-1} + a_n \cdot f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}) + k = 0; G = \mathbb{R}^n$$

Hvis vi holder os til funktioner af to variable, hvis grafer kan tegnes i tredimensionale koordinatsystemer, kommer *snitkurverne* altså til at bestå af skæringspunkterne mellem grafen for en funktion og en given plan, og vores definition bliver:

Definition 27: For en funktion $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ af to variable er *snitkurven* med en given plan $\alpha : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$; $G = \mathbb{R}^3$ det geometriske sted for de punkter (x, y, z) , der ligger i planen α og opfylder betingelsen $z = f(x, y)$.

Klassiske eksempler på snitkurver er *keglesnit*:

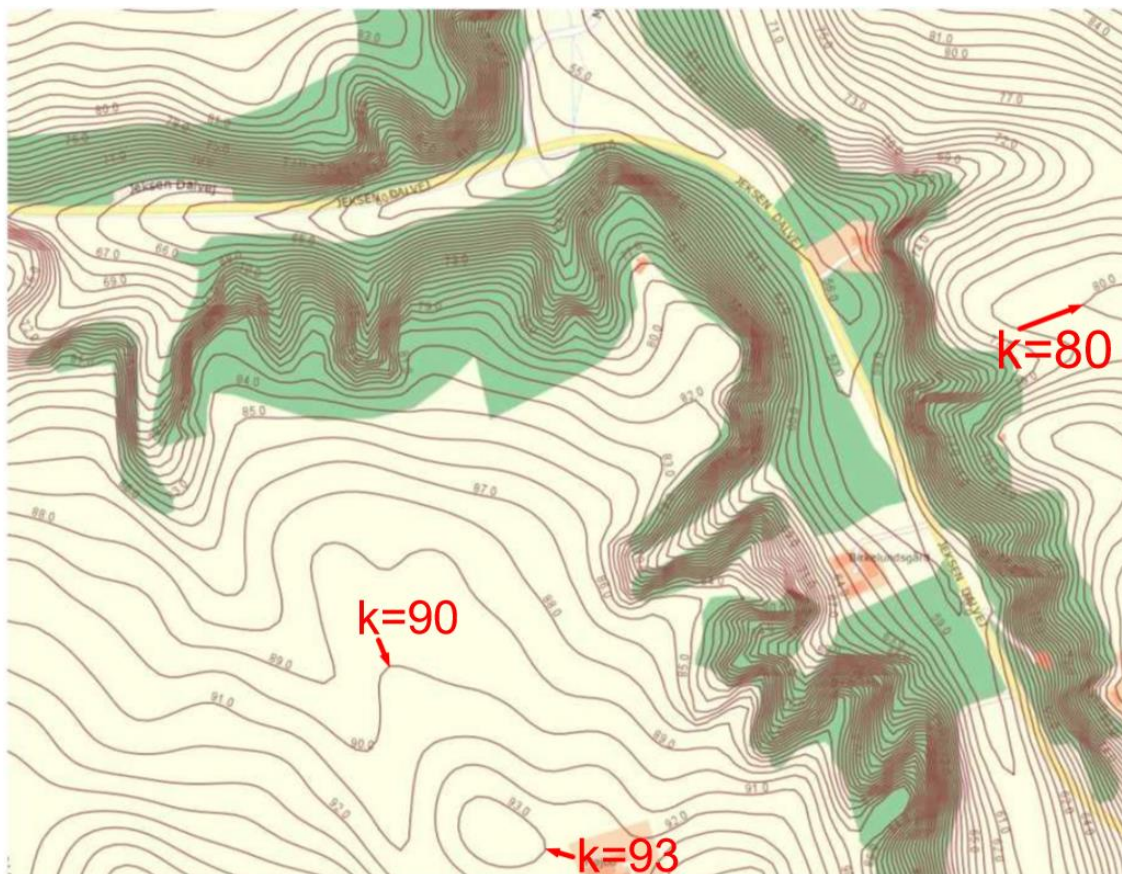


Her er de gule snitkurver mellem den røde omdrejningskegleflade og de blå planer henholdsvis en parabel, en cirkel, en ellipse og en hyperbel.

Hvis man snitter med en vandret plan, dvs. en plan parallel med xy -planen, kaldes snitkurven for en *konturkurve*, og hvis denne konturkurve projiceres ned i xy -planen får man en *niveaukurve*:

Definition 28: For en funktion $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ af to variable er en *niveaukurve* det geometriske sted for de punkter (x, y) , der opfylder $f(x, y) = k$, hvor k er en konstant.

Niveaukurver kendes fra landkort, hvor de kaldes højdekurver:

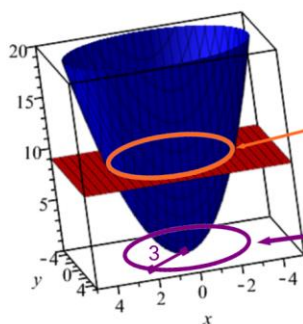


Her er tegnet en masse niveaukurver, hvor konstanten svarer til højden over havet (målt i meter). Der, hvor niveaukurverne ligger tættest, er bakkerne stejlest.

Eksempel 111a: Vi ser på funktionen $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$:

Vi ser på *niveaukurven* bestemt ved $f(x, y) = 9$. Det er altså det geometriske sted for de punkter, der opfylder $9 = x^2 + y^2$. Vi genkender dette som en cirkel med centrum i origo og radius 3.

```
plot3d([x^2 + y^2, 9], x=-5..5, y=-5..5, view = [-5..5, -5..5, 0..20], color = [blue, red])
```



Grafen for f tegnes sammen med den vandrette plan med ligningen $z=9$.

Snitkurven er denne cirkel med radius 3 og centrum i $(0,0,9)$, der hænger 9 enheder over xy -planen og er parallel med denne.

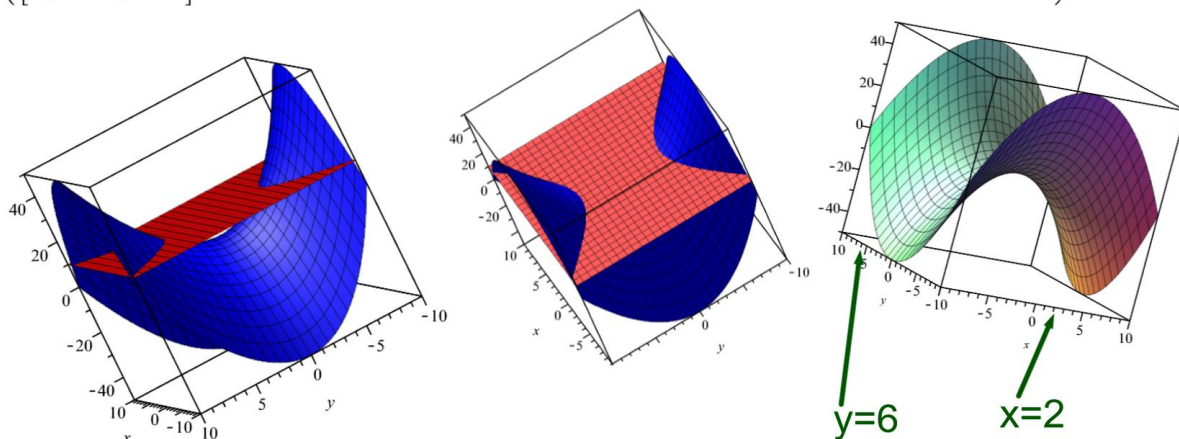
Niveaukurven er denne cirkel med radius 3 og centrum i $(0,0,0)$, der ligger i xy -planen.

Hvis vi snitter med planen givet ved $x = 4$ (en plan parallel med yz -planen), bliver vores *snitkurve* det geometriske sted for de punkter $(4, y, z)$, der opfylder ligningen $z = 4^2 + y^2$. Dette genkendes som en parabel (ikke vist på figuren).

Eksempel 111b: Vi ser på funktionen $f : (x, y) \mapsto \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}$.

Vi ser på niveaukurven bestemt ved $f(x, y) = 10$. Det er det geometriske sted for de punkter (x, y) , der opfylder $10 = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}$. I Grundlæggende matematiske begreber del 3 Eksempel 24 så vi, at dette er ligningen for en hyperbel (graferne til venstre og i midten nedenfor).

```
plot3d\left(\left[\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}, 10\right], x=-10..10, y=-10..10, view = [-10..10, -10..10, -50..50], color = [blue, red]\right)
```



Hvis vi snitter med planen givet ved ligningen $x = 2$ (en plan parallel med yz -planen), får vi snitkurven bestemt ved ligningen $z = \frac{y^2}{2} - \frac{2^2}{2} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \cdot y^2 - 2$. Dvs. vi får en parabel med grenene opad. Hvis vi snitter med planen givet ved ligningen $y = 6$ (en plan parallel med xz -planen), får vi snitkurven bestemt ved ligningen $z = \frac{6^2}{2} - \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + 18$. Dvs. vi får en parabel med grenene nedad. (ikke vist på figuren, men prøv selv at forestille dig disse snitkurver på grafen til højre).

Partielt afledede

Vi ved fra funktioner af én variabel, at den afledede funktion i x_0 angiver væksthastigheden (tangenthældningen) for funktionen i punktet. Vi kan også finde afledede funktioner og dermed væksthastigheder for funktioner af flere variable, men her er vi nødt til at beslutte, hvilken retning vi skal bevæge os i.

Se på figuren nedenfor. Hvis vi befinder os i det røde punkt $(4, 3, 27)$ og bevæger os (i positiv retning) parallelt med y -aksen – angivet med en grøn pil – er væksthastigheden negativ. Men hvis vi bevæger os parallelt med x -aksen – angivet med en brun pil – er væksthastigheden positiv (du skal følge den bløde kurve på grafen – dvs. den femte kurve fra bunden – som ses at bue opad).

I det blå punkt $(-2, -3, 15)$ vil vi parallelt med x -aksen (igen den brune pil) have en negativ væksthastighed, mens vi parallelt med y -aksen (grøn pil) har væksthastigheden 0. At den præcis er 0, kan selvfølgelig ikke ses på figuren. Det skal beregnes.

Lad os se på, hvordan vi beregner disse væksthastigheder i forskellige retninger:

Definition 29: Lad f være en funktion af de n variable $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Den *partielt afledede af f med hensyn til x_i* skrives $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ eller $\frac{\partial f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}{\partial x_i}$ og svarer til

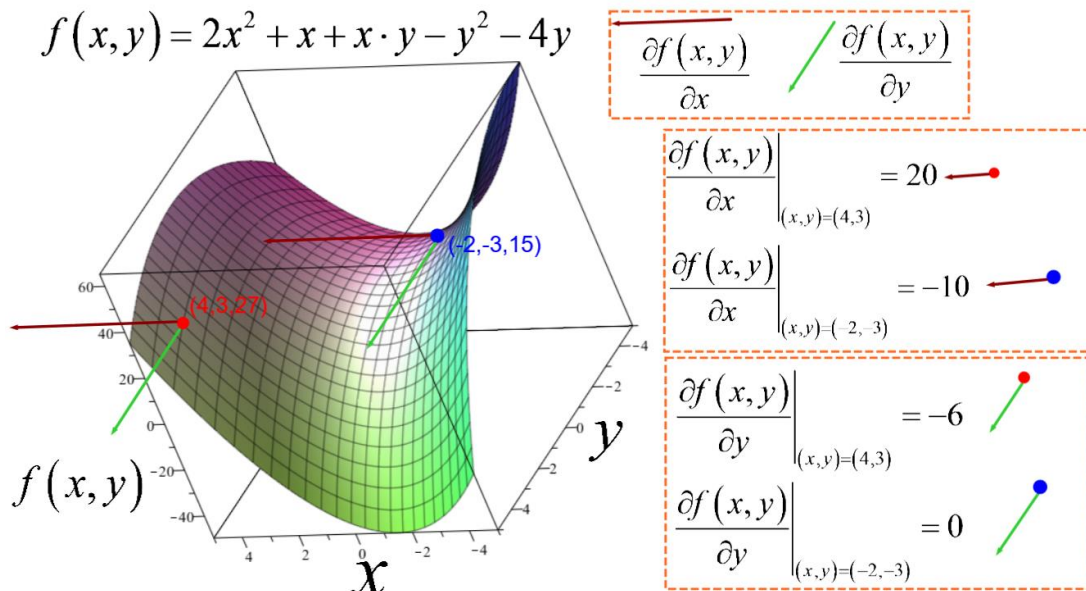
$\frac{df(x_i)}{dx_i}$, hvor man har betragtet alle variable bortset fra x_i som konstanter og derfor set på en

funktion f af én variabel x_i . En anden skrivemåde for $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ er f_x' og f_y' .

Når man finder afledede for funktioner af flere variable anvendes altså ”bløde d’er” ∂ . Symbolet findes i Maple under ’Calculus’:

På nedenstående figur angiver den brune og den grønne pil **retningerne**, der differentieres efter.

Længderne af pilene har altså ingen betydning.



Bemærk altså, at pointen er, at man holder alle variable konstant bortset fra den ene variabel, man differentierer med hensyn til. På den måde sikrer man sig, at man med differentialkvotienten i det pågældende punkt får angivet funktionens væksthastighed i forhold til en ændring af denne ene variabel.

Vi ser på nogle eksempler. Husk, at når man betragter variable som konstanter, så gælder reglerne for differentiation af konstanter og funktioner ganget med en konstant.

Eksempel 112a: Vi ser på funktionen $f : (x, y, z) \mapsto \sin(z) \cdot x^2 \cdot e^y$. Vi udregner:

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial (\sin(z) \cdot x^2 \cdot e^y)}{\partial x} = \sin(z) \cdot e^y \cdot \frac{d(x^2)}{dx} = \sin(z) \cdot e^y \cdot 2x$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial (\sin(z) \cdot x^2 \cdot e^y)}{\partial y} = \sin(z) \cdot x^2 \cdot \frac{d(e^y)}{dy} = \sin(z) \cdot x^2 \cdot e^y$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial (\sin(z) \cdot x^2 \cdot e^y)}{\partial z} = x^2 \cdot e^y \cdot \frac{d(\sin(z))}{dz} = x^2 \cdot e^y \cdot \cos(z)$$

$$\left. \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \right|_{(x,y,z)=(3,0,-\frac{\pi}{2})} = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot e^0 \cdot 2 \cdot 3 = -1 \cdot 1 \cdot 6 = -6$$

$$\left. \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \right|_{(x,y,z)=(3,0,-\frac{\pi}{2})} = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot 3^2 \cdot e^0 = -1 \cdot 9 \cdot 1 = -9$$

$$\left. \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \right|_{(x,y,z)=(3,0,-\frac{\pi}{2})} = 3^2 \cdot e^0 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 9 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

Ovenstående tre udtryk kan også skrives $f_x' \left(3, 0, -\frac{\pi}{2}\right)$, $f_y' \left(3, 0, -\frac{\pi}{2}\right)$ og $f_z' \left(3, 0, -\frac{\pi}{2}\right)$.

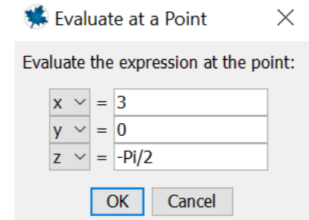
I Maple skal du bruge 'Evaluate at a Point', når du skal bestemme værdier for de partielt afledede i bestemte punkter:

$f(x, y, z) := \sin(z) \cdot x^2 \cdot e^y$: Når f er defineret, henviser man til den med $f(x,y,z)$.

$\frac{\partial}{\partial x} (f(x, y, z)) = 2 \sin(z) x e^y$: Man kan også bruge selve funktionsudtrykket.

$\frac{\partial}{\partial y} (\sin(z) \cdot x^2 \cdot e^y) = \sin(z) x^2 e^y$

$\frac{d}{dz} (f(x, y, z)) = \cos(z) x^2 e^y$: Faktisk virker det også i Maple med almindelige d'er, men brug de rigtige bløde d'er.



Jeg bestemmer $f_x' \left(3, 0, -\frac{\pi}{2}\right)$ ved hjælp af 'Evaluate at a Point'

$$\frac{\partial}{\partial x} (f(x, y, z)) \xrightarrow{\text{evaluate at point}} -6$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(f \left(3, 0, -\frac{\pi}{2} \right) \right) = 0$$

ADVARSEL Den typiske fejl er denne opskrivning, hvor Maple først udregner funktionsværdien og derfor efterfølgende differentierer en konstant, hvilket altid vil give 0.

Tryk på udtrykket og vælg 'Evaluate at a Point' i menuen. π skal skrives som 'Pi'. Da man efterfølgende ikke kan se indtastningen, skal du fortælle læseren, hvad du har gjort.

Eksempel 112b: For $f : (x, y) \mapsto x^y + y$, $x > 0$ fås:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \ln(x) \cdot x^y + 1$$

Tjek selv med Maple.

Eksempel 113: Vi ser på en gas, der opfører sig som en idealgas. Så er trykket p en funktion af temperaturen T , stofmængden n og rumfanget V :

$$p(n, T, V) = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} ; R = 8,3145 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \text{ (} R \text{ er gaskonstanten)}$$

Man har så:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{R \cdot T}{V} \quad \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{n \cdot R}{V} \quad \frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{n \cdot R \cdot T}{V^2}$$

Hvis $n = 2,3 \text{ mol}$, $T = 295 \text{ K}$ og $V = 0,050 \text{ m}^3$, og vi indsætter alt i SI-enheder og således regner med rene tal, får vi:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 49056 \quad \frac{\partial p}{\partial T} = 382 \quad \frac{\partial p}{\partial V} = -2,3 \cdot 10^6$$

Dette fortæller os, at i dette punkt (dvs. med disse værdier for n , T og V), vil trykket p stige, hvis stofmængden eller temperaturen øges, mens det vil falde, hvis rumfanget øges (den afledede funktion har negativt fortegn her). Vi kan også se, at vi får en mindre ændring ved at øge temperaturen med én grad end ved at øge stofmængden med ét mol eller rumfanget med én kubikmeter. Dette er dog ikke så overraskende, da 295 er et langt større tal end 2,3 og 0,05, og derfor vil en ændring af T med én enhed ikke svare til en så stor procentvis ændring som det vil for n og V .

Med andre værdier for n , T og V kan billedet være et andet.

Dobbeltafledede og blandede afledede

Vi kan også aflede funktioner af flere variable to (eller flere) gange, f.eks. $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$

eller generelt $\frac{\partial^m f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}{\partial x_i^m}$. Men vi har jo også den mulighed at aflede med hensyn til

forskellige variable (*blandede afledede*). Dvs. vi kunne f.eks. aflede med hensyn til x første gang og

med hensyn til y anden gang, hvilket skrives $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$ (eller mere tydeligt: $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)$).

Eksempel 114: Vi ser på $f : (x, y) \mapsto e^{5y} \cdot x^4 + 7 \cdot x \cdot y$, og vi udregner nu:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial (e^{5y} \cdot x^4 + 7 \cdot x \cdot y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (4 \cdot e^{5y} \cdot x^3 + 7y) = 12 \cdot e^{5y} \cdot x^2 \text{ (dobbeltafledede)}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial (e^{5y} \cdot x^4 + 7 \cdot x \cdot y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (5 \cdot e^{5y} \cdot x^4 + 7x) = 25 \cdot e^{5y} \cdot x^4 \text{ (dobbeltafledede)}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial (e^{5y} \cdot x^4 + 7 \cdot x \cdot y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (5 \cdot e^{5y} \cdot x^4 + 7x) = 20 \cdot e^{5y} \cdot x^3 + 7 \text{ (blandede afledede)}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial (e^{5y} \cdot x^4 + 7 \cdot x \cdot y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (4 \cdot e^{5y} \cdot x^3 + 7y) = 20 \cdot e^{5y} \cdot x^3 + 7 \text{ (blandede afledede)}$$

I Maple findes symbolerne for dobbelt partiel afledning under 'Calculus', og beregningerne i Eksempel 114 kan altså tjekkes ved:

$$f := (x, y) \rightarrow e^{5 \cdot y} \cdot x^4 + 7 \cdot x \cdot y:$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) = 12 e^{5y} x^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = 25 e^{5y} x^4$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = 20 e^{5y} x^3 + 7$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) = 20 e^{5y} x^3 + 7$$

Det er ikke tilfældigt, at vi i Eksempel 114 og opgaverne får $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$:

Sætning 33 (Schwarz' sætning – uden bevis): Hvis funktionen f af de n variable $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ har

kontinuerte partielt anden afledede, gælder: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$

Stationære punkter, gradienter og tangentplaner

For funktioner af én variabel har vi set, hvordan man kan bruge 1. og 2. afledede til at bestemme lokale ekstremumssteder og steder med vandret vendetangent. Vi skal nu udvide dette til funktioner af flere variable (vi holder os dog i eksemplerne til to variable). Vi indleder med en definition:

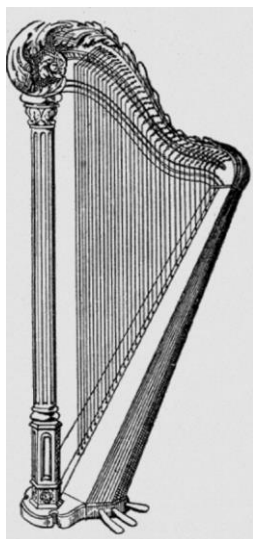
Definition 30a: For en funktion $f : X \mapsto \mathbb{R}$ af de n variable $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ er et *stationært punkt* et punkt $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \in X$, hvor samtlige partielle afledede har værdien 0, dvs. $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$

er en løsning til ligningssystemet $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \wedge \dots \wedge \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$.

Den n -dimensionelle vektor $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ kaldes *gradienten* i punktet og skrives ∇f

eller $\vec{\nabla} f$, dvs. **et punkt er et stationært punkt, netop hvis gradienten i punktet er nulvektoren.**

Symbolet ∇ kaldes pga. dets form for "nabla", der er det græske navn for en 'fønisk harpe'. Det blev indført i 1837 af William Rowan Hamilton (1805-1865) og senere navngivet af William Smith.



Bemærkning: I Definition 30a anvendes 'punkt', som vi normalt anvender ordet 'sted', dvs. i denne definition indgår funktionsværdien ikke i det stationære punkt. Det er vist det mest almindelige, men i det danske gymnasium anvendes en anden – og nok lige så gyldig definition – hvor funktionsværdien er en del af punktet, og for en funktion af to variable siger vi derfor:

Definition 30b (eksamensopgavevarianten): For en funktion $f : X \mapsto \mathbb{R}$ af to variable x og y er et *stationært punkt* et punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, hvor begge partielle afledede er 0, dvs. (x_0, y_0) er en løsning til ligningssystemet $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Vektoren $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ kaldes *gradienten* i punktet og skrives ∇f eller $\vec{\nabla} f$.

Opgaverne 122*

Når vi arbejder med funktioner af to (eller flere) variable, har vi brug for at udvide vores omegn-begreb, så vi nu – for funktioner af to variable – siger:

Definition 31: En *omegn* omkring et punkt (x_0, y_0) er en punktmængde bestående af alle de punkter (x, y) , for hvilket det gælder, at $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$, hvor r er et positivt tal.

Vi ser først på gradienten og derefter på bestemmelsen af *arten* af stationære punkter.

Sætning 34: Gradienter og tangentplaner (for funktioner af to variable):

a) $\nabla f = \vec{\nabla} f = \text{grad}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ i et punkt er en to-dimensionel vektor.

b) Et punkt er et stationært punkt, netop hvis gradienten i punktet er nulvektoren.

c) Hvis gradienten ikke er nulvektoren, angiver gradienten den retning i xy -planen, man skal bevæge sig for på kort sigt at få den største funktionstilvækst, dvs. det er den retning, hvor fladen er stejlest opad.

d) Længden af gradienten svarer til hældningen af tangentplanen i gradientens retning.

e) Ligningen for *tangentplanen* i punktet (x_0, y_0, z_0) er:

$$\nabla f \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = z - z_0$$

eller

$$f_x'(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y'(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = z - z_0$$

f) Et punkt er et stationært punkt, netop hvis tangentplanen i punktet er vandret, dvs. netop hvis tangentplanen har ligningen $z = k$, hvor k er en konstant.

Bevis 34: Sætning 34 a) og b) kender vi allerede fra definition 30. Punkterne c) , d), e) og f) hænger sammen, og de følger af en udvidelse af noget velkendt fra funktioner af én variabel:

For funktioner af én variabel husker vi, at vi kan bestemme hældningen a for en ret linje gennem to

angivne punkter ved $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, dvs. $\Delta y = a \cdot \Delta x$. Når vi arbejder med grafer, der ikke i sig

selv er rette linjer, kan vi omkring et punkt tilnærme graferne med de rette linjer kaldet *tangenter*,

og hældningen a for tangenten til grafen i punktet $(x_0, f(x_0))$ er så $a = f'(x_0) = \frac{df}{dx}$. Hermed får

vi $\Delta y = \frac{df}{dx} \cdot \Delta x$, når vi følger tangenten, dvs. vores tilvækst i y -værdien er produktet af

tangenthældningen og tilvæksten af x -værdien.

Når vi arbejder med funktioner af to variable, ser vi på tangentplaner i stedet for tangenter. Vi ser på $f(x, y)$ og punktet $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (x_0, y_0, z_0)$, dvs. et punkt på grafen for f .

Vi ved, at i P angiver $\frac{\partial f}{\partial x}$ væksthastigheden for funktionen, hvis vi bevæger os i x -aksens retning,

mens $\frac{\partial f}{\partial y}$ angiver væksthastigheden for funktionen, hvis vi bevæger os i y -aksens retning.

Hvis vi ikke bevæger os direkte i en af aksernes retning, men bevæger os stykket angivet ved

vektoren $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$ og **følger tangentplanen**, der er vores bedste lineære approksimation til

fladen i punktet, får vi

$$z - z_0 = \Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = |\nabla f| \cdot \left| \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \right| \cdot \cos(\nu),$$

hvor første led i det røde udtryk giver det bidrag til z -værdien, der kommer fra tilvæksten i x -aksens retning, mens andet led er bidraget fra tilvæksten i y -aksens retning. Dvs. her har vi

ligningen for tangentplanen. Heraf ses også, at $z = z_0 = k$, netop når gradienten er nulvektoren.

Vi kan desuden se, at Δz bliver størst, når vinklen ν mellem gradienten og $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$ er 0° , dvs. når vi bevæger os i gradientens retning, dvs. i denne retning går det stejlest opad.

Hvis vi lader $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$ være en enhedsvektor ensrettet med gradienten, dvs. vi bevæger os ét skridt i gradientens retning, får vi $\Delta z = |\nabla f| \cdot 1 \cdot \cos(0^\circ) = |\nabla f|$, dvs. længden af gradienten angiver hældningen af tangentplanen, når vi bevæger os i gradientens retning.

Man kan på kort sigt tilnærmelsesvis få funktionstilvæksterne ved at følge tangentplanen:

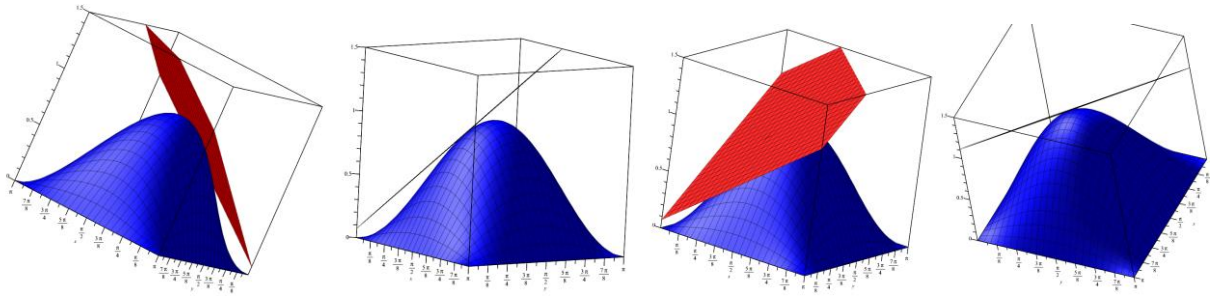
Bliver størst, når man følger gradienten

$$z - z_0 = \Delta z \approx \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y$$

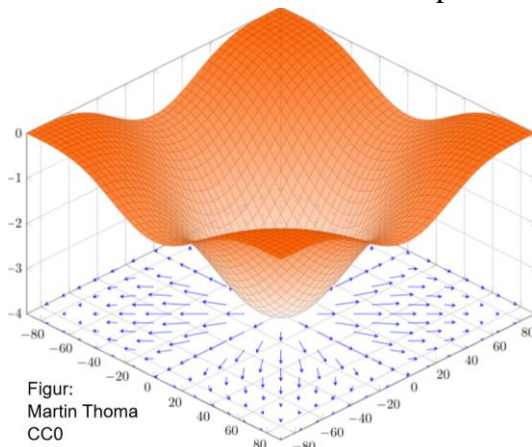
Tangentplan

De tilnærmelsesvis bidrag til funktionstilvæksten, når man bevæger sig i henholdsvis x -aksen og y -aksens retning.

Nedenfor ses – fra forskellige vinkler – en blå graf og en rød tangentplan til grafen i et punkt (på to af billederne er den røde tangentplan blot en sort streg):



Nedenstående billede hentet fra Wikipedia illustrerer pointerne:



Gradienter er vektorer og kan placeres hvor som helst. Her er de placeret i xy -planen, så de begynder lodret under det punkt, hvor de er udregnet.

Kig både på retning og længde af vektorerne og tjek, at du kan se sammenhængen mellem fladen og gradienterne.

Eksempel 115a: Vi ser på funktionen givet ved $f(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}$ og vil bestemme gradienter og tangentplaner i punkterne $A(0, 0, f(0, 0))$, $B(0, 3, f(0, 3))$ og $C(-2, 3, f(-2, 3))$.

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \quad (0, 0, 0): \nabla f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left(0, 3, \frac{9}{2}\right): \nabla f = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \left(-2, 3, \frac{5}{2}\right): \nabla f = \begin{pmatrix} -(-2) \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Tangentplanerne kan bestemmes:

$$A: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} = z-0 \Leftrightarrow 0 = z$$

$$B: \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-0 \\ y-3 \end{pmatrix} = z - \frac{9}{2} \Leftrightarrow 3y - 9 = z - \frac{9}{2} \Leftrightarrow z - 3y + \frac{9}{2} = 0$$

$$C: \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-(-2) \\ y-3 \end{pmatrix} = z - \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x + 4 + 3y - 9 = z - \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x + 3y - z - \frac{5}{2} = 0$$

Dvs. A er et stationært punkt, og xy -planen er tangentplanen i punktet.

I B er fladen stejlest opad, hvis man bevæger sig i y -aksens positive retning, og i denne retning har tangentplanen hældningen 3.

I C er fladen stejlest opad, når man bevæger sig ensrettet med vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, og i denne retning er tangentplanens hældning $\sqrt{13}$.

Eksempel 115b: Resultaterne i Eksempel 115a kan også findes med kommandoer i Gym-pakken:

$$f(x, y) := \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} :$$

$$\text{gradient}(f, [x, y]) = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\text{gradient}(f, [x, y] = [0, 0]) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{gradient}(f, [x, y] = [0, 3]) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{gradient}(f, [x, y] = [-2, 3]) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{tangentplan}(f, [x, y, z] = [0, 0, 0]) = z = 0$$

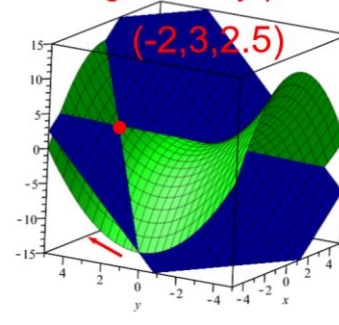
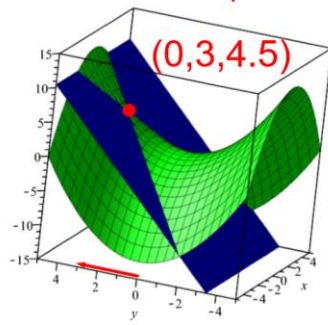
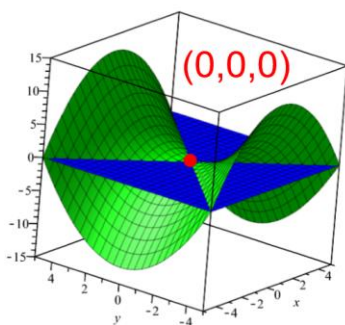
$$\text{tangentplan}(f, [x, y, z] = [0, 3]) = z = 3y - \frac{9}{2}$$

$$\text{tangentplan}(f, [x, y, z] = [-2, 3, f(-2, 3)]) = z = 2x - \frac{5}{2} + 3y$$

Bemærk forskellen i notation, når man skal bestemme gradienten generelt og i et konkret punkt.

Man kan angive punktet på forskellige måder. De første to koordinater er nok.

Gradienterne er placeret et tilfældigt sted i xy-planen.



Sammenlign figurerne ovenfor med konklusionerne i Eksempel 115a.

Opgaverne 123*

Vi har defineret stationære punkter som de punkter, hvor gradienten er nulvektoren. Vi skal nu have opdelt stationære punkter i forskellige *typer* eller *arter*.

Definition 32: Lad $f : X \mapsto \mathbb{R}$ være en funktion af to variable, og lad $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ være et stationært punkt for f . Der gælder så:

- Hvis der findes en omegn om P , hvor $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ for alle punkter (x, y) i omegnen, er P et lokalt minimumspunkt for f .
- Hvis der findes en omegn om P , hvor $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ for alle punkter (x, y) i omegnen, er P et lokalt maksimumspunkt for f .
- Hvis der ikke findes nogen omegn om P , der opfylder en af ovenstående to betingelser, er P et *saddelpunkt* for f .

Lokale minimumspunkter og lokale maksimumspunkter betegnes under ét som *lokale ekstremumpunkter*.

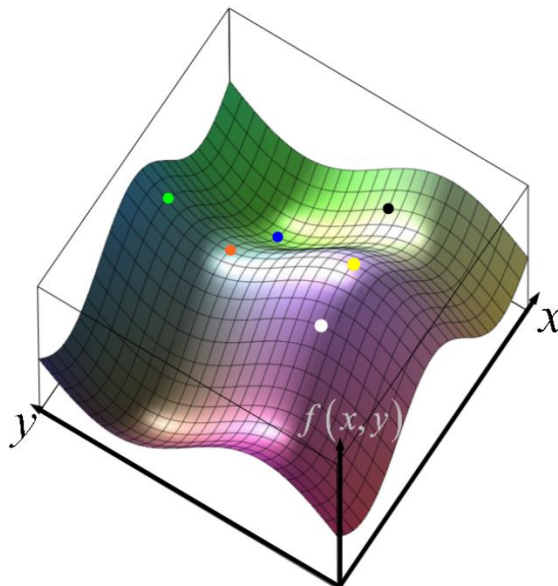
Vi kan se, at *saddelpunkter* svarer til steder med vandret vendetangent, når vi arbejder med funktioner af én variabel.

Eksempel 115c:

- Det gule, det blå og det orange punkt er hver især et stationært punkt. Uanset hvilken retning (angivet som en pil i xy -planen), vi bevæger os i, vil hældningen for tangentplanen i punktet i denne retning være 0, dvs.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{\text{Gult punkt} \\ \text{Blåt punkt} \\ \text{Orange punkt}}} = 0 \quad \text{og} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{\text{Gult punkt} \\ \text{Blåt punkt} \\ \text{Orange punkt}}} = 0$$

- Det gule punkt er et lokalt maksimumspunkt. Ingen punkter i en tilpas lille omegn om dette punkt har større funktionsværdier.
- Det blå punkt er et lokalt minimumspunkt.
- Det orange punkt er et *saddelpunkt*. Hvis vi bevæger os parallelt med y -aksen, vil vi opleve punktet som et lokalt minimumspunkt, mens det vil opleves som et lokalt maksimumspunkt, hvis vi bevæger os parallelt med x -aksen.
- Det hvide punkt er ikke et stationært punkt. Godt nok vil vi, hvis vi bevæger os parallelt med y -aksen, opleve det som et lokalt maksimumspunkt, dvs. $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\text{Hvidt punkt}} = 0$, men hvis vi bevæger os parallelt med x -aksen, vil det hvide punkt blot være et punkt på et stykke, hvor funktionen er voksende, dvs. $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\text{Hvidt punkt}} > 0$.
- Det grønne punkt er heller ikke et stationært punkt. Det vil godt nok opleves som et lokalt maksimumspunkt, når vi bevæger os parallelt med x -aksen, men parallelt med y -aksen ligger punktet på et voksende stykke.
- Det sorte punkt ligger parallelt med x -aksen på et voksende stykke og parallelt med y -aksen på et aftagende stykke og er altså ikke et stationært punkt.



Vi ved fra funktioner af én variabel, at vi kan skelne mellem minimumssteder, maksimumssteder og steder med vandret vendetangent ved at kigge på den anden afledede. Vi skal også bruge dobbeltafledede for funktioner af flere variable, men her bliver det lidt mere kompliceret, og vi skal først have introduceret den såkaldte Hesse-matrix. Matricer anvendes til en masse forskellige ting inden for matematik, men vi kommer ikke til at beskæftige os med dem, bortset fra nogle få anvendelser.

En *matrix* er en tabel med rækker og søjler, hvor der på hver plads i tabellen står en matematisk størrelse (f.eks. et tal, et polynomium eller en funktion). En $n \times m$ -matrix består af n rækker og m søjler. Et eksempel på en 3×5 -matrix med tal på alle pladser er:

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 18 & 9 \\ -3 & \frac{1}{2} & \pi & 1 & 7 \\ 2 & 7 & -5 & \sqrt{2} & -6 \end{bmatrix}$$

Generelt for funktioner af n variable er en Hesse-matrix en $n \times n$ -matrix, hvor pladserne indeholder dobbeltafledede af den pågældende funktion. Vi skal kun regne på funktioner af to variable, så vores Hesse-matrix bliver for vores sædvanlige $f(x, y)$ en 2×2 -matrix:

$$2 \times 2\text{-Hesse-matrix: } \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Det er determinanten $\det(H)$ af denne matrix, vi skal bruge, og determinanten for en 2×2 -matrix udregnes på samme måde, som vi kender det fra andre sammenhænge, nemlig ved:

Definition 33: Determinanten af 2×2 -Hesse-matricen er givet ved:

$$\det(H) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)^2$$

Sætning 35: Metode til at bestemme lokale ekstremumpunkter og saddelpunkter for $f(x, y)$:

- 1) Bestem de stationære punkter ved at løse ligningssystemet $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$.
- 2) Udregn determinanten $\det(H)$ af Hesse-matricen i hvert stationært punkt.
- 3) Der gælder nu følgende:
 - a) Hvis $\det(H) < 0$, er punktet et saddelpunkt.
 - b) Hvis $\det(H) > 0$, er punktet et lokalt ekstremumpunkt. Og så gælder:
 - I. Hvis $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} < 0$, er det et lokalt maksimumspunkt.
 - II. Hvis $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} > 0$, er det et lokalt minimumspunkt.
 - c) Hvis $\det(H) = 0$, kan der ikke konkluderes noget uden videre undersøgelser (se Eksempel 119 og jf. vores behandling af funktioner af én variabel). Der er mulighed for, at det er et saddelpunkt eller et lokalt ekstremumpunkt (hvilket inkluderer, at f er konstant i en omegn omkring punktet, da det så både er et lokalt minimumspunkt og et lokalt maksimumspunkt).

Punkt 1) i metoden kender vi allerede fra tidligere, og punkt 2) er blot en udregning. Det er punkt 3), der skal bevises, og her ser vi kun på a) og b).

Bevis 35: Fra Sætning 34 har vi ligningen for tangentplanen i punktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y$$

Heraf følger, at hvis vores vektor $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$, der angiver den retning, vi ser på, er en enhedsvektor,

dvs. $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$, hvor v angiver vinklen mellem vektoren og x -aksen i xy -planen, så vil

højresiden i udtrykket angive hældningen for tangentplanen i denne retning, da hældningen netop er defineret som tilvæksten i funktionsværdien, når man bevæger sig længden 1 i den angivne retning.

Hvis vi altså lader $a_v(x, y)$ være den funktion af x og y , der angiver hældningen for tangentplanen i punktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ i retningen angivet ved vinklen v , har vi:

$$a_v(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos(v) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin(v)$$

Da vi kigger på et stationært punkt (x_0, y_0) , ved vi allerede, at $a_v(x_0, y_0) = 0$. Det afgørende for arten af det stationære punkt er, hvad man kan sige om $a_v(x, y)$ **omkring** punktet

$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Vi betragter derfor nu $a_v(x, y)$ som vores "nye" funktion af to variable, hvor vi vil finde hældningen $b_v(x, y)$ for tangentplanen i punktet $(x_0, y_0, 0)$ i retningen angivet ved v :

$$\begin{aligned} b_v(x, y) &= \frac{\partial a_v(x, y)}{\partial x} \cdot \cos(v) + \frac{\partial a_v(x, y)}{\partial y} \cdot \sin(v) \\ &= \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos(v) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin(v) \right)}{\partial x} \cdot \cos(v) + \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos(v) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin(v) \right)}{\partial y} \cdot \sin(v) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \cos^2(v) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \sin(v) \cdot \cos(v) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \cos(v) \cdot \sin(v) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \sin^2(v) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \cos^2(v) + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \sin(v) \cdot \cos(v) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \sin^2(v) \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\cos^2(v)}{\cos^2(v)} + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\sin(v) \cdot \cos(v)}{\cos^2(v)} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\sin^2(v)}{\cos^2(v)} \right) \cdot \cos^2(v) \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \tan(v) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \tan^2(v) \right) \cdot \cos^2(v) \end{aligned}$$

I de to sidste udtryk, hvor $\cos^2(v)$ er sat uden for parenteser, har vi skabt det problem, at udtrykket inden i parenteser ikke er defineret, når $\cos(v) = 0$. Det vender vi tilbage til.

$$b_v(x, y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \tan(v) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \tan^2(v) \right) \cdot \cos^2(v)$$

Vi er interesseret i fortegnet for $b_v(x, y)$ i alle retninger ud fra punktet $(x_0, y_0, 0)$, dvs. vinklen v målt i radianer ligger i intervallet $[0, 2\pi[$, og $\tan(v)$ kan derfor antage alle reelle tal.

$\cos^2(\nu)$ kan ikke blive negativ, og det er altså udtrykket inden i parenteser, der afgør fortegnet for $b_\nu(x, y)$. Udtrykket inden i parenteser er et andengradspolynomium i variabelen $\tan(\nu)$ - der som nævnt kan antage alle reelle tal - og det vil derfor antage samme værdi hele tiden, hvis diskriminanten er negativ, mens det vil antage både negative og positive værdier, hvis diskriminanten er positiv. Vi ser derfor på fortegnet for diskriminanten d :

$$\begin{aligned} d < 0 &\Leftrightarrow \left(2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - 4 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \\ &\Leftrightarrow 4 \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - 4 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \det(H) > 0 \end{aligned}$$

Tilsvarende kan vises: $d > 0 \Leftrightarrow \det(H) < 0$

Vi ser altså, at hvis $\det(H) > 0$, så er diskriminanten negativ, og andengradspolynomiet vil have samme fortegn for alle værdier af variabelen $\tan(\nu)$, dvs. $b_\nu(x, y)$ vil have samme fortegn i alle retninger. $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ er koefficienten i andengradsleddet, så hvis $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$, vender grenene nedad på parabeln svarende til andengradspolynomiet, og dermed vil fortegnet for $b_\nu(x, y)$ være negativt overalt. Da $b_\nu(x, y)$ angiver hældningerne for tangentplanerne for grafen for $a_\nu(x, y)$, vil $a_\nu(x, y)$ - der angiver hældningen for tangentplanen til grafen for f og antager værdien 0 i det stationære punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ - blive negativ i alle punkter i en tilpas lille udprykket omegn omkring $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, og dermed bliver funktionsværdierne $f(x, y)$ i denne tilpas lille udprykkede omegn mindre end $f(x_0, y_0)$, dvs. $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ er et lokalt maksimumspunkt.

Hvis $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$, vender parablens grene opad, og fortegnet for $b_\nu(x, y)$ vil derfor være positivt overalt. Dette fører til $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ i en tilpas lille udprykket omegn og dermed et lokalt minimumspunkt.

Når $\det(H) > 0$, har $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ samme fortegn, da første led i $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$ nødvendigvis må være positivt, da man trækker noget ikke-negativt fra første led og får noget positivt. Dermed kan man i ovenstående argumentation erstatte $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ med $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, og 3b) er dermed vist.

Hvis $\det(H) < 0$, antager andengradspolynomiet både negative og positive værdier, og enhver omegn omkring $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ vil derfor indeholde både punkter med større og punkter med mindre funktionsværdier, dvs. det stationære punkt er et saddepunkt.

Angående problemet med $\cos(v) = 0$.

Når $\cos(v) = 0$, kan vi finde fortegnet for $b_v(x, y)$ ved at kigge på udtrykket lige inden $\cos^2(v)$ blev sat ud foran parentesens:

$$b_v(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \cos^2(v) + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \sin(v) \cdot \cos(v) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \sin^2(v)$$

Når $\cos(v) = 0$, er $\sin^2(v) = 1$ (grundrelationen), og dermed er $b_v(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, dvs. fortegnene for $b_v(x, y)$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ er ens, hvilket passer med fortegnene i alle de andre retninger.

Eksempel 116: Vi ser på funktionen $f : (x, y) \mapsto -x^2 - y^2 + 2x - 4y + 35$, hvor vi ønsker at bestemme lokale ekstremumssteder og/eller saddepunkter. Vi anvender vores metode:

- 1) Vi bestemmer de partielle afledede og løser det angivne ligningssystem:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -2x + 2 \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -2y - 4$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow -2x + 2 = 0 \wedge -2y - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \wedge y = -2$$

Funktionsværdien bestemmes: $f(1, -2) = -1^2 - (-2)^2 + 2 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) + 35 = 40$

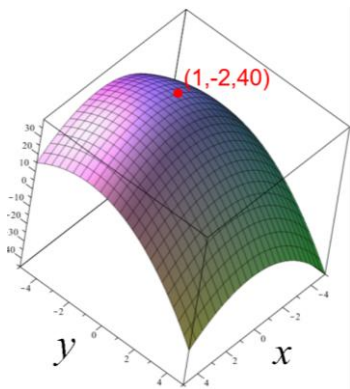
Dvs. punktet $(1, -2, 40)$ er et stationært punkt.

- 2) Vi bestemmer de dobbeltafledede for at kunne beregne Hesse-matricen:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\text{Så får vi: } \det(H) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)^2 = -2 \cdot (-2) - 0^2 = 4 > 0$$

- 3) Da $\det(H) > 0$, og $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} < 0$, er $(1, -2, 40)$ et **lokalt maksimumspunkt**.



Udregningerne i Maple er:

$$\begin{aligned} f(x, y) &:= -x^2 - y^2 + 2x - 4y + 35 : \\ \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0, \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 0 \right] &\xrightarrow{\text{solve (specified)}} \{x = 1, y = -2\} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) &= -2 < 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) \right)^2 &= 4 > 0 \end{aligned}$$

Eksempel 117: Vi ser på funktionen $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$, hvor vi ønsker at bestemme lokale ekstremumssteder og/eller saddelpunkter. Vi anvender vores metode:

- 1) Vi bestemmer de partielle afledede og løser det angivne ligningssystem:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \wedge -2y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0$$

Dvs. punktet $(0, 0, 0)$ er et stationært punkt.

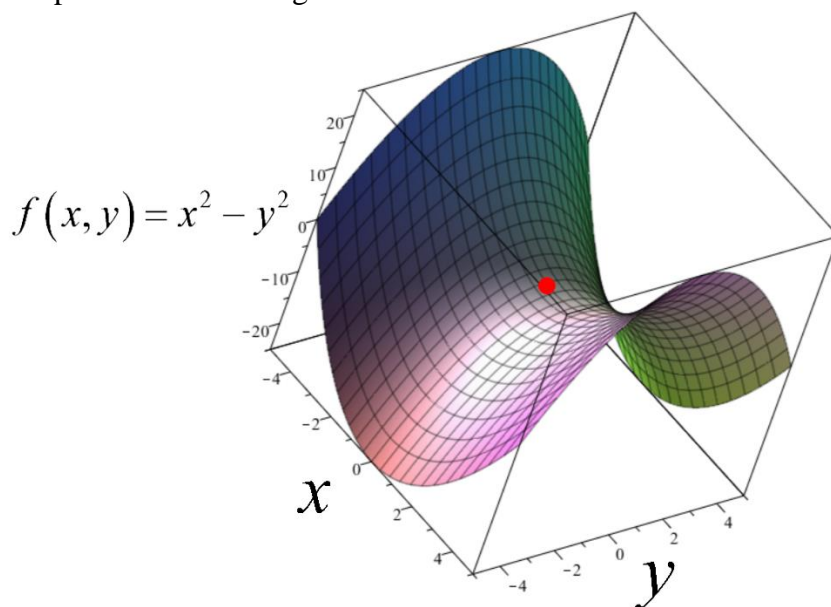
- 2) Vi bestemmer de dobbeltafledede for at kunne beregne Hesse-matricen:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\text{Så får vi: } \det(H) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)^2 = 2 \cdot (-2) - 0^2 = -4 < 0$$

- 3) Da $\det(H) < 0$, er $(0, 0, 0)$ et **saddelpunkt**.

Vi ser det grafisk på nedenstående figur:



I både Eksempel 116 og Eksempel 117 fik vi $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = 0$, så man kunne måske få det indtryk, at denne dobbelte afledede altid giver 0, og at al besværet med Hesse-matricen er unødvendigt, og at man blot kan klare sig med de dobbelte afledede $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$ og $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$ og anvende vores fortolkninger af dobbeltafledede fra funktioner af én variabel. Men, nej. Resultatet $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = 0$ skyldes, at vores grafer "følger" x- og y-aksen. Vi skal nu se, hvordan vi ved at rotere ovenstående graf kan opnå $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \neq 0$ og dermed vise, at metoden med Hesse-matricen er nødvendig.

Fra vores behandling af isometrier ved vi, at vi kan rotere med 30° omkring origo ved alle steder at erstatte x med $x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + y \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ og y med $y \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Når vi gør dette med $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ og reducerer funktionsudtrykket, får vi funktionen i næste eksempel (bemærk leddet med $x \cdot y$, der straks fortæller os, at vi kan få $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \neq 0$):

Eksempel 118: Vi ser på funktionen $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3} \cdot x \cdot y - \frac{1}{2}y^2$, hvor vi ønsker at bestemme

lokale ekstremumssteder og/eller saddelepunkter. Vi anvender vores metode:

- 1) Vi bestemmer de partielle afledede og løser det angivne ligningssystem:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = x + \sqrt{3} \cdot y \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \sqrt{3} \cdot x - y$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{3} \cdot y = 0 \wedge \sqrt{3} \cdot x - y = 0$$

Den sidste ligning forlænges med $\sqrt{3}$, så man får numerisk lige store koefficienter foran y , og når ligningerne lægges sammen, fås: $x + \sqrt{3} \cdot y + (3 \cdot x - \sqrt{3} \cdot y) = 0 + 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Indsat i en af ligningerne giver dette: $y = 0$.

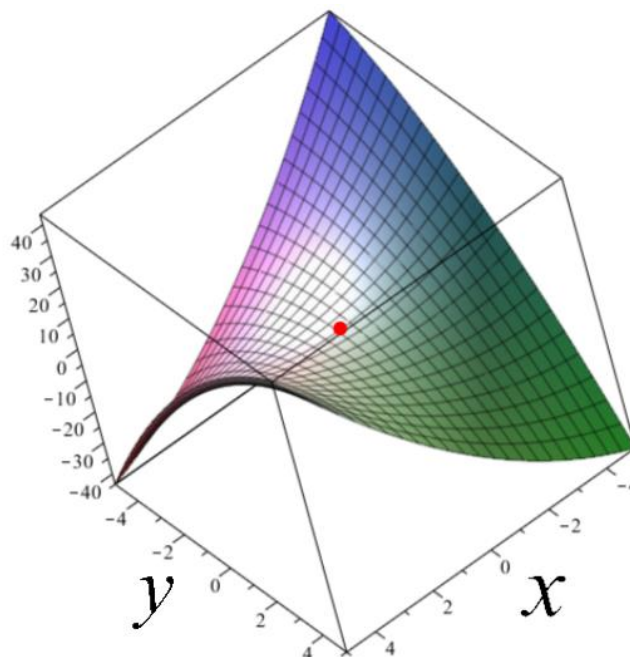
Dvs. punktet $(0, 0, 0)$ er et stationært punkt.

- 2) Vi bestemmer de dobbeltafledede for at kunne beregne Hesse-matricen:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 1 \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = -1 \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \sqrt{3}$$

Så får vi: $\det(H) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)^2 = 1 \cdot (-1) - \sqrt{3}^2 = -4 < 0$

- 3) Da $\det(H) < 0$, er $(0, 0, 0)$ et **saddelpunkt**.



Eksempel 119 ("Abe-sadlen"): Vi ser på funktionen $f : (x, y) \mapsto x^3 - 3 \cdot x \cdot y^2$, hvor vi ønsker at bestemme lokale ekstremumssteder og/eller saddelpunkter. Vi anvender vores metode:

- 1) Vi bestemmer de partielle afledede og løser det angivne ligningssystem:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 6x \cdot y$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3y^2 = 0 \wedge 6 \cdot x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \wedge x \cdot y = 0$$

Den sidste af de to ligninger fortæller os, at x , y eller begge skal være 0 (nulreglen). Og da den første af ligningerne fortæller os, at hvis den ene af x og y er 0, så er den anden også, kan vi konkludere, at løsningen på ligningssystemet er $x = 0 \wedge y = 0$.

Dvs. punktet $(0, 0, 0)$ er et stationært punkt.

- 2) Vi bestemmer de dobbeltafledede for at kunne beregne Hesse-matricen:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 6x \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 6x \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = 6y$$

Dvs. at i punktet $(0, 0, 0)$ har vi $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = 0$, og dermed er også

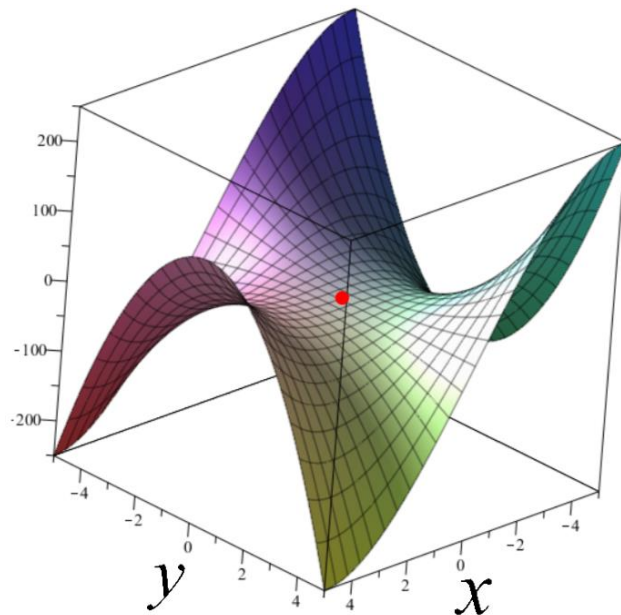
determinanten for Hesse-matricen 0.

- 3) Dermed har vores undersøgelse ikke givet noget svar. Når vi kigger på grafen, kan vi se hvorfor:

Dette er en "abe-sadel", hvor der er plads til både ben og hale, dvs. vi kan se på grafen, at der er tale om et saddelpunkt (det røde punkt). Men hvordan ses det på de afledede funktioner? Hvis vi kigger på nogle tredjeafledede, ser vi, at

$$\frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^3} = 6, \text{ og fra vores arbejde med}$$

funktioner af én variabel ved vi, at det betyder, at når vi bevæger os langs x -aksen, vil det røde punkt optræde som et punkt med vandret vendetangent. Og dette er jo nok til at sikre, at punktet er et saddelpunkt, for så vil der være funktionsværdier over og under 0 i enhver



omegn om $(0, 0, 0)$. Men lad os se på en detalje mere: Vi har $\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial y^n} = 0$ for $n > 2$, og dermed

vil vi opleve en vandret linje (alle funktionsværdier er 0), når vi bevæger os langs y -aksen. Det ses både på grafen og ud fra funktionsudtrykket. Også langs linjerne med ligningerne

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot x \text{ og } y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot x \text{ vil man opleve vandrette linjer (det ses ud fra funktionsudtrykket, og når}$$

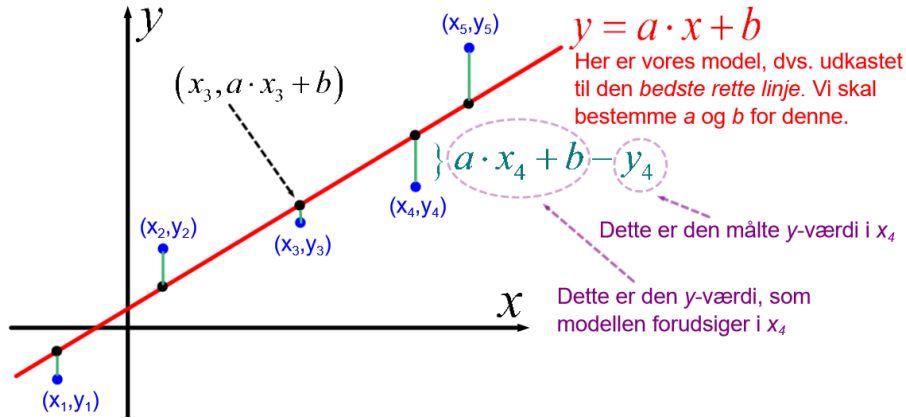
man ved det, kan man måske også se det på grafen).

Regression

Vi skal nu anvende vores viden om funktioner af flere variable til at forstå lineær regression.

Situationen er, at vi har indsamlet noget data (de **blå** punkter på figuren nedenfor). Vi ønsker at finde den lineære model, der passer "bedst" til disse data. Vi skal derfor først have defineret, hvad vi mener med "bedst". På figuren er med rødt tegnet en ret linje med ligningen $y = a \cdot x + b$.

Bemærk, at vi egentlig ikke kan tegne *den bedste rette linje* fra start, for det er netop a og b for denne, vi skal ende med at bestemme, men pointen med metoden illustreres nemmest, når man tager udgangspunkt i en linje, så du skal tænke på den røde linje som et udkast til vores søgte linje:



For hvert blå punkt kan vi ved at indsætte x -værdien i ligningen for vores model finde de punkter $(x_i, a \cdot x_i + b)$, vi ifølge modellen burde have fået (de sorte punkter på figuren). Vi tager nu de lodrette afstande mellem de blå og sorte punkter (svarende til størrelsen af residualerne - angivet med grønt på figuren) og kvadrerer dem, dvs. $(a \cdot x_i + b - y_i)^2$. På denne måde sikrer vi os, at vi kommer til at regne med positive størrelser. Men det kunne vi også have gjort med numerisk tegn, så det er altså et **valg**, vi træffer. Vi siger nu:

Definition 34: Vi ser på punkterne $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$, som vi ønsker at tilnærme med en lineær model. Den *bedste rette linje* er linjen med ligningen $y = a_0 \cdot x + b_0$, hvor (a_0, b_0) er det globale minimumspunkt for funktionen f med forskriften:

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^n (a \cdot x_i + b - y_i)^2$$

Denne metode til at finde den bedste rette linje kaldes *mindste kvadraters metode*, fordi vi ser på de kvadrerede afstande (kvadraterne på residualerne) og sørger for at gøre summen af dem så lille som muligt. Som nævnt kunne vi også have valgt en metode uden kvadrater, men med numeriske værdier. I vores metode med kvadrater vil store afstande mellem målte punkter og modellens punkter komme til at vægte højt, dvs. vores bedste rette linje vil for at undgå en stor afvigelse acceptere flere små afvigelser.

Vi skal nu have fundet det globale minimumspunkt (a_0, b_0) for $f : (a, b) \mapsto \sum_{i=1}^n (a \cdot x_i + b - y_i)^2$.

Vi husker, at vi differentierer ledvist, så sumtegnene beholdes:

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial a} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot 2 \cdot (a \cdot x_i + b - y_i) = 2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot (a \cdot x_i + b - y_i)$$

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial b} = \sum_{i=1}^n 2 \cdot (a \cdot x_i + b - y_i) = 2 \cdot \sum_{i=1}^n (a \cdot x_i + b - y_i)$$

Vi skal have løst ligningssystemet $\frac{\partial f(a,b)}{\partial a} = 0 \wedge \frac{\partial f(a,b)}{\partial b} = 0$ for at finde stationære punkter:

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial a} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot (a \cdot x_i + b - y_i) = 0 \Leftrightarrow a \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = 0$$

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial b} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \sum_{i=1}^n (a \cdot x_i + b - y_i) = 0 \Leftrightarrow a \cdot \sum_{i=1}^n x_i + b \cdot n - \sum_{i=1}^n y_i = 0$$

Dette er et lineært ligningssystem bestående af to ligninger med to ubekendte. For at gøre det mere overskueligt indføres følgende betegnelser:

$$S_x = \sum_{i=1}^n x_i, \quad S_y = \sum_{i=1}^n y_i, \quad S_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad \text{og} \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$$

Hermed kan vi skrive ligningssystemet som:

$$S_{xx} \cdot a + S_x \cdot b = S_{xy}$$

$$S_x \cdot a + n \cdot b = S_y$$

Fra vores viden om lineære ligningssystemer løst med determinantmetoden ved vi altså:

$$(a_0, b_0) = \left(\frac{\begin{vmatrix} S_{xy} & S_x \\ S_y & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{xx} & S_x \\ S_x & n \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_x & S_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{xx} & S_x \\ S_x & n \end{vmatrix}} \right) = \left(\frac{S_{xy} \cdot n - S_y \cdot S_x}{S_{xx} \cdot n - S_x \cdot S_x}, \frac{S_{xx} \cdot S_y - S_x \cdot S_{xy}}{S_{xx} \cdot n - S_x \cdot S_x} \right)$$

Dette gælder dog kun under forudsætning af, at $S_{xx} \cdot n - S_x \cdot S_x \neq 0$. Men her ville en fysiker sige, at den problemstilling, vi har stillet op, har netop én løsning, og derfor **har** ligningssystemet netop én løsning, og det stationære punkt må nødvendigvis være et globalt minimumspunkt.

Vi kan dog godt vise, både at $S_{xx} \cdot n - S_x \cdot S_x \neq 0$, og at vi har at gøre med et lokalt minimumspunkt.

For det viser sig at komme ud på ét, da det samme udtryk dukker op, når vi anvender vores metode til at afgøre, om det stationære punkt er et lokalt ekstremumspunkt eller saddelpunkt:

Vi finder de dobbeltafledede og udregner determinanten for Hesse-matricen.

$$\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial a^2} = 2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 = 2 \cdot S_{xx} \quad \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial b^2} = 2 \cdot n \quad \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial a \partial b} = 2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i = 2 \cdot S_x$$

$$\det(H) = \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial a \partial b} \right)^2 = 2 \cdot S_{xx} \cdot 2 \cdot n - (2 \cdot S_x)^2 = 4 \cdot (S_{xx} \cdot n - S_x^2)$$

Da $x_i^2 \geq 0$ for alle i og kun 0 for $x_i = 0$, er $\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial a^2} > 0$, og hvis vi kan vise, at $S_{xx} \cdot n - S_x^2 > 0$,

har vi både vist, at vores ligningssystem har netop én løsning

$(a_0, b_0) = \left(\frac{S_{xy} \cdot n - S_y \cdot S_x}{S_{xx} \cdot n - S_x \cdot S_x}, \frac{S_{xx} \cdot S_y - S_x \cdot S_{xy}}{S_{xx} \cdot n - S_x \cdot S_x} \right)$, der er et stationært punkt, samt at det er et lokalt

minimumspunkt. Det vises ved følgende omskrivning:

$$S_{xx} \cdot n - S_x \cdot S_x = n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i (x_i - x_j)^2 > 0$$

Når man ikke er vant til sumtegn, kan det være meget svært at se, hvordan den sidste omskrivning fremkommer. Man kan kontrollere det ved at tjekke, at det er de samme led, der optræder i begge udtryk.

Eksempel 120: Vi har indsamlet dataene $(-3, 8), (-1, 3), (0, 1), (2, -4)$ og $(5, -12)$. Vi viser de udregninger, der foretages i en lineær regression, og tjekker efterfølgende med Maple.

$$S_x = \sum_{i=1}^5 x_i = -3 - 1 + 0 + 2 + 5 = 3$$

$$S_y = \sum_{i=1}^5 y_i = 8 + 3 + 1 - 4 - 12 = -4$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^5 x_i^2 = (-3)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 2^2 + 5^2 = 9 + 1 + 0 + 4 + 25 = 39$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^5 x_i \cdot y_i = -3 \cdot 8 + (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-4) + 5 \cdot (-12) = -24 - 3 + 0 - 8 - 60 = -95$$

Og så er:

$$(a_0, b_0) = \left(\frac{S_{xy} \cdot n - S_y \cdot S_x}{S_{xx} \cdot n - S_x \cdot S_x}, \frac{S_{xx} \cdot S_y - S_x \cdot S_{xy}}{S_{xx} \cdot n - S_x \cdot S_x} \right) = \left(\frac{-95 \cdot 5 - (-4) \cdot 3}{39 \cdot 5 - 3 \cdot 3}, \frac{39 \cdot (-4) - 3 \cdot (-95)}{39 \cdot 5 - 3 \cdot 3} \right) = \left(\frac{-463}{186}, \frac{129}{186} \right) = (-2.48925, 0.693548)$$

Maple giver:

with(Gym) :

$A := [-3, -1, 0, 2, 5] :$

$B := [8, 3, 1, -4, -12] :$

$f(x) := \text{LinReg}(A, B, x) :$

$f(x) = -2.48924731182796x + 0.693548387096773$

Eksempel 120 (revisited): Når vi har Maple til rådighed, kan vi selvfølgelig også blot anvende den generelle Hesse-matrix-metode på funktionen, der angiver summen af kvadraterne på afstandene:

$$f := (a, b) \rightarrow (a \cdot (-3) + b - 8)^2 + (a \cdot (-1) + b - 3)^2 + (a \cdot 0 + b - 1)^2 + (a \cdot 2 + b - (-4))^2 + (a \cdot 5 + b - (-12))^2 :$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial a} f(a, b) = 0, \frac{\partial}{\partial b} f(a, b) = 0 \right] \xrightarrow{\text{solve}} \{a = -2.489247312, b = 0.6935483871\}$$

Det tjekkes, om det er lokalt ekstremumspunkt eller saddelpunkt:

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} f(a, b) \cdot \frac{\partial^2}{\partial b^2} f(a, b) - \left(\frac{\partial^2}{\partial a \partial b} f(a, b) \right)^2 = 744 > 0 \text{ dvs. lokalt ekstremumssted.}$$

Det undersøges, om det er lokalt maksimumspunkt eller minimumspunkt:

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} f(a, b) = 78 > 0 \text{ dvs. lokalt minimumspunkt.}$$

Opgaverne 125*

Når Maple-Gym-pakken, Geogebra, Excel og Texas Instruments lommeregner og programmer skal lave eksponentiel- eller potensregression, udnyttes de grafiske egenskaber, vi så i forbindelse med Funktioner, hvor vi kom frem til, at grafen for en eksponentiel udvikling er en ret linje i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem, fordi vi kan omskrive $y = b \cdot a^x$ til $\log(y) = \log(a) \cdot x + \log(b)$, mens grafen for en potensvækst giver en ret linje i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem, fordi vi kan omskrive $y = b \cdot x^a$ til $\log(y) = a \cdot \log(x) + \log(b)$. Programmerne gør altså det, at de ved hjælp af logaritmer (der er frit valg på alle hylder blandt logaritmefunktionerne) omskriver til udtryk, der opfører sig lineært, hvorefter metoden fra lineær regression anvendes.

Metoderne illustreres med eksempler:

Eksempel 121 (Eksponentiel regression): Vi vil lave eksponentiel regression på dataene:

| x | 0 | 3 | 5 | 6 |
|---|---|----|----|-----|
| y | 2 | 17 | 62 | 131 |

Vi omskriver $y = b \cdot a^x$ til $\log(y) = \log(a) \cdot x + \log(b)$, dvs. det er $\log(y)$ og ikke y , vi skal arbejde med. Vi kan nu vælge at benytte metoden fra Eksempel 120 og udregne $S_x, S_{\log(y)}, S_{xx}$ og $S_{x\log(y)}$. Dette vil give os $\log(a)$ og $\log(b)$, der så kan omregnes til a og b .

Men vi benytter metoden fra Eksempel 120 (revisited):

Her indsættes x-værdierne

Her indsættes logaritmen til y-værdierne

$$f := (a, b) \rightarrow (\log_{10}(a) \cdot 0 + \log_{10}(b) - \log_{10}(2))^2 + (\log_{10}(a) \cdot 3 + \log_{10}(b) - \log_{10}(17))^2 + (\log_{10}(a) \cdot 5 + \log_{10}(b) - \log_{10}(62))^2 + (\log_{10}(a) \cdot 6 + \log_{10}(b) - \log_{10}(131))^2 :$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial a} f(a, b) = 0., \frac{\partial}{\partial b} f(a, b) = 0. \right] \xrightarrow{\text{solve}} \{a = 1.998094460, b = 2.032962749\}$$

Vi tjekker med Gym-pakken:

`with(Gym) :`

`A := [0, 3, 5, 6] : B := [2, 17, 62, 131] :`

`g(x) := ExpReg(A, B, x) :`

`g(x) = 2.03296274904620 1.99809445969475x`

Eksempel 122 (Potensregression): Vi vil lave potensregression på følgende data:

| x | 2 | 5 | 7 | 11 |
|---|----|----|----|-----|
| y | 14 | 53 | 96 | 177 |

Vi omskriver $y = b \cdot x^a$ til $\ln(y) = a \cdot \ln(x) + \ln(b)$. Vi anvender her den naturlige logaritme for afvekslingens skyld og ikke fordi, det har nogen betydning. Det er altså $\ln(x)$ og $\ln(y)$ og ikke x og y , vi skal arbejde med:

$$f := (a, b) \rightarrow (\ln(b) + a \cdot \ln(2) - \ln(14))^2 + (\ln(b) + a \cdot \ln(5) - \ln(53))^2 + (\ln(b) + a \cdot \ln(7) - \ln(96))^2 + (\ln(b) + a \cdot \ln(11) - \ln(177))^2 :$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial a} f(a, b) = 0., \frac{\partial}{\partial b} f(a, b) = 0. \right] \xrightarrow{\text{solve}} \{a = 1.500400064, b = 4.925375935\}$$

Vi tjekker med Gym-pakken til Maple:

`with(Gym) :`

`A := [2, 5, 7, 11] : B := [14, 53, 96, 177] :`

`g(x) := PowReg(A, B, x) :`

`g(x) = 4.92537593860137 x1.50040006352425`

Opgaverne 126*

Hvis du forsøger at lave de samme regressioner i Logger Pro (under "Kurvetilpasning"), opdager du, at du får nogle andre resultater. Det skyldes, at Logger Pro ikke først omskriver til en lineær form og anvender lineær regression, men arbejder direkte med funktionsudtrykkene, f.eks. med

$$\text{potensvækst: } f : (a, b) \mapsto \sum_{i=1}^n (b \cdot x_i^a - y_i)^2 .$$

Dette giver nogle andre værdier for konstanterne. Styrken ved ikke at omskrive til en lineær form, men at arbejde direkte med funktionsudtrykkene, er, at man kan anvende alle mulige forskellige funktionsudtryk (og Logger Pro lader dig vælge mellem en masse forskellige udtryk eller endda selv definere udtryk).

Integration af funktioner af flere variable

Man kan også integrere funktioner af flere variable med hensyn til en variabel ved at betragte alle andre variable som konstanter og dermed integrere, som om det var en funktion af én variabel. Ved integration bruger man ikke bløde d'er, men vores almindelige d'er.

Der er altså som sådan ikke noget nyt i at integrere en funktion én gang. Det er først, når vi efterfølgende differentierer med hensyn til en anden variabel, at det bliver interessant. Vi skal se på sådanne dobbeltintegraler og også tripleintegraler (og derefter kan du selv fortsætte tankegangen og integrere en funktion af n variable n gange). Man læser dobbelt- og triple-integralerne på den måde, at man integrerer ”indefra og ud”. Ligesom med funktioner af én variabel begynder vi med bestemte integraler, da de kan defineres som grænseværdier for summer. Men med funktioner af flere variable går vi ikke videre til ubestemte integraler (integrationskonstanten generer).

Eksempel 123: Vi udregner forskellige integraler:

$$\int_0^{\pi} \int_2^3 x^2 \cdot \sin(y) dx dy = \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{3} x^3 \cdot \sin(y) \right]_2^3 dy = \int_0^{\pi} \left(9 - \frac{8}{3} \right) \cdot \sin(y) dy = \frac{19}{3} \cdot [-\cos(y)]_0^{\pi} = \frac{19}{3} \cdot (1 - (-1)) = \frac{38}{3}$$

$$\int_2^3 \int_0^{\pi} x^2 \cdot \sin(y) dy dx = \int_2^3 [-x^2 \cdot \cos(y)]_0^{\pi} dx = \int_2^3 (x^2 + x^2) dx = 2 \cdot \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_2^3 = 2 \cdot \left(9 - \frac{8}{3} \right) = \frac{38}{3}$$

$$\int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_3^7 x \cdot \cos(y) \cdot e^z dx dy dz = \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} x^2 \cdot \cos(y) \cdot e^z \right]_3^7 dy dz = \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 20 \cdot \cos(y) \cdot e^z dy dz =$$

$$\int_0^1 [20 \cdot \sin(y) \cdot e^z]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dz = \int_0^1 40 \cdot e^z dz = [40 \cdot e^z]_0^1 = 40 \cdot e^1 - 40 \cdot e^0 = 40 \cdot e - 40 = 40 \cdot (e - 1)$$

I Maple under 'Calculus' findes også dobbelt- og tripleintegraler, og nogle af ovenstående udregninger samt nogle ekstra ses her udført i Maple:

$$\int_0^{\pi} \int_2^3 x^2 \cdot \sin(y) dx dy = \frac{38}{3}$$

$$\int_2^3 \int_0^{\pi} x^2 \cdot \sin(y) dy dx = \frac{38}{3}$$

$$\int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_3^7 x \cdot \cos(y) \cdot e^z dx dy dz = -40 + 40e$$

$$\int_3^7 \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos(y) \cdot e^z dy dz dx = -40 + 40e$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_3^7 \int_0^1 x \cdot \cos(y) \cdot e^z dz dx dy = -40 + 40e$$

Opgaverne 127*

Det er ikke tilfældigt, at vi får det samme uanset rækkefølgen af integrationerne. Det gælder for alle funktioner, der ikke opfører sig ekstremt i det område, der integreres inden for (Fubinis sætning, Guido Fubini 1879-1943). Vi indfører derfor nogle nye notationer, der udnytter, at integrationsrækkefølgen er ligegyldig:

Definition 35: Lad $M = [a, b] \times [c, d]$ og $N = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$. Så gælder:

$$\iint_M f(x, y) dA = \iint_M f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \quad \text{og}$$

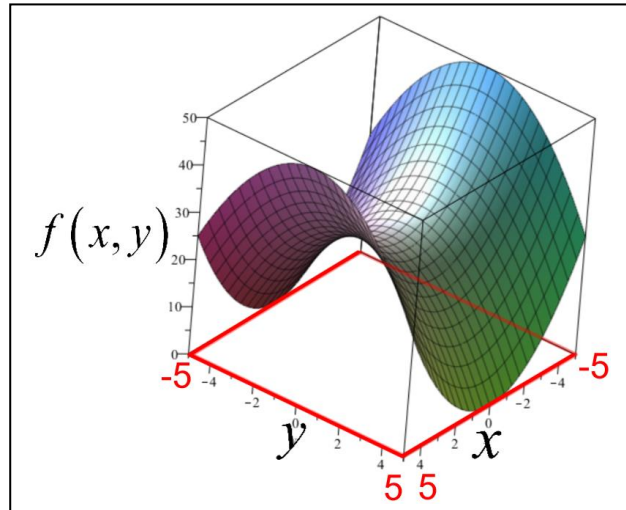
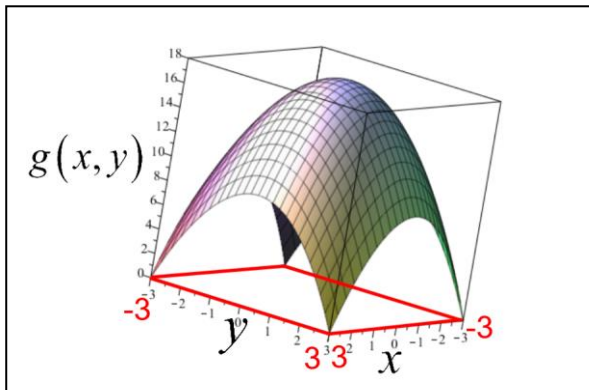
$$\iiint_N g(x, y, z) dV = \iiint_N g(x, y, z) d(x, y, z) = \int_e^f \int_c^d \int_a^b g(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dy dz dx$$

Det er de to første udtryk på hver linje, der defineres. Man kalder $\iint_M f(x, y) dA$ for et *planintegral* og $\iiint_N g(x, y, z) dV$ for et *rumintegral*.

Vi kan bruge planintegraler til at bestemme rumfang (regnet med fortegn) mellem grafer for funktioner af to variable og den plan, der integreres over:

Eksempel 124: Vi vil finde rumfanget under grafen for $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2 + 25$ i området $[-5, 5] \times [-5, 5]$. Vi udregner i Maple:

$$V = \int_{-5}^5 \int_{-5}^5 (x^2 - y^2 + 25) dx dy = 2500$$



Og vi finder også rumfanget under grafen for $g : (x, y) \mapsto 18 - (x^2 + y^2)$ i $[-3, 3] \times [-3, 3]$:

$$V = \int_{-3}^3 \int_{-3}^3 (18 - (x^2 + y^2)) dx dy = 432$$

Man kan også anvende rumintegralet til at finde rumfang:

Eksempel 125: Vi vil bestemme rumfanget af en kasse med højden 4, bredden 7 og længden 5. Vi gør det på følgende måde:

$$V_{\text{kasse}} = \int_0^5 \int_0^7 \int_0^4 1 dh db dl = \int_0^5 \int_0^7 [h]_0^4 db dl = \int_0^5 \int_0^7 4 db dl = \int_0^5 [4b]_0^7 dl = \int_0^5 28 dl = [28l]_0^5 = 140$$

Opgaverne 128*

Ovenstående er nok ikke en hensigtsmæssig måde at bestemme rumfanget af en kasse. Jeg kan i hvert fald finde mindst én metode, der er væsentlig simplere.

Men hvis man f.eks. har en kasse med ujævn massefordeling, hvor man kender densiteten ρ som

funktion af koordinaterne, kan man finde massen af kassen ved $m = \int_0^l \int_0^b \int_0^h \rho(x, y, z) dx dy dz$. Og ved

at skifte til såkaldte polære koordinater, cylindriske koordinater eller sfæriske koordinater, kan man få meget ud af disse dobbelt- og triple-integraler. Men det kommer vi ikke ind på her. Det er metoder, der kan inddrages i et SRP.

DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEMER

Vi har lært om ligninger og ligningssystemer, hvor løsningerne til sidstnævnte er sæt af variabelværdier, der gør samtlige ligninger til sande udsagn.

Vi har også lært om differentiallyigninger, hvor den fuldstændige løsning er mængden af funktioner, der indsat i differentiallyigningen giver en identitet, og hvor en partikulær løsning er en funktion, der desuden opfylder én eller flere begyndelsesbetingelser. Vi skal nu se på *differentiallyigningssystemer* eller *koblede differentiallyigninger*, hvorom det gælder:

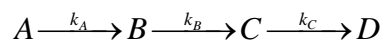
- Der er mindst to differentiallyigninger, og der indgår mindst to forskellige funktioner, der skal bestemmes.
- Den fuldstændige løsning til systemet er mængden af sæt af funktioner, der indsat gør samtlige af systemets differentiallyigninger til identiteter.
- Der kan være knyttet en eller flere betingelser til systemet (begyndelsesværdier, bestemte punkter som løsningskurverne skal indeholde, væksthastigheder bestemte steder, osv.), således at man kan bestemme den partikulære løsning, der er det sæt af funktioner, der indsat gør samtlige differentiallyigninger til identiteter, og som opfylder alle de fastsatte betingelser.
- **Differentiallyigningerne er ”koblede” ved, at samtlige differentiallyigninger indeholder en funktion, der også optræder i en anden differentiallyigning.**

Det sidste punkt er ikke helt dækkende. Pointen er, at man fra den første differentiallyigning skal kunne komme hen til alle de andre differentiallyigninger ved hele tiden at gå hen til en ny differentiallyigning, der indeholder en af de funktioner, der indgår i den differentiallyigning, man går fra (se evt. eksemplet nederst på siden).

Men vi skal ikke gå op i det formelle her. Det, som det gælder om i dette kapitel, er at få en fornemmelse og forståelse for, hvordan differentiallyigningssystemer fungerer, og det gør vi gennem en række eksempler. Vi kommer til at se et eksempel på et system, der kan løses analytisk, og systemer, som vi er nødt til at løse med numeriske metoder, og vi får set eksempler, der bevæger sig fremad, og eksempler, der bevæger sig i ring.

Radioaktiv henfaldskæde

Vi forestiller os en simpel henfaldskæde, hvor den radioaktive isotop A henfalder til den radioaktive isotop B (med henfaldskonstant k_A), der igen henfalder til den radioaktive isotop C (med henfaldskonstant k_B), der igen henfalder til den stabile isotop D (med henfaldskonstant k_C):



Vi anvender N om antallet af kerner af en isotop, og da $-\frac{dN}{dt} = k \cdot N$ gælder for alle henfald af én type isotop, giver dette os følgende differentiallyigningssystem:

$$\begin{aligned} \frac{dN_A}{dt} &= -k_A \cdot N_A && \text{Dette er den sædvanlige differentiallyigning, hvor hastigheden, hvormed kernerne forsvinder, er proportional med antallet af kerner.} \\ \frac{dN_B}{dt} &= k_A \cdot N_A - k_B \cdot N_B && \text{Her DANNES en kerne B, hver gang en kerne A henfalder, men samtidig henfalder kernerne B med en hastighed proportional med antallet.} \\ \frac{dN_C}{dt} &= k_B \cdot N_B - k_C \cdot N_C && \text{Dette er præcis samme situation som ovenfor, bare med nye kerner.} \\ \frac{dN_D}{dt} &= k_C \cdot N_C && \text{Da kerne D er stabil, vil der ikke forsvinde nogle af disse. De vil dannes, når kerne C henfalder.} \end{aligned}$$

Dette er et simpelt differentiallygningsystem i den henseende, at vi kan begynde fra oven og arbejde os nedad. Hvis f.eks. der havde været et N_D , der optrådte i sidste og første ligning, så alle fire ligninger havde haft identisk opbygning (hvilket selvfølgelig ikke giver mening rent fysisk), ville vi ikke have haft et sted at begynde, da det hele i så fald kørte i ring.

Vi kan godt finde den fuldstændige løsning til dette differentiallygningsystem, men vi er interesseret i den situation, hvor vi fra start udelukkende har kerner af typen A. Vi siger, at vi har N kerner, og vores begyndelsesbetingelser er altså:

$$N_A(0) = N, N_B(0) = 0, N_C(0) = 0, N_D(0) = 0$$

Vi begynder altså med den øverste ligning, som vi genkender fra Sætning 25 (specialtilfælde), og med begyndelsesbetingelsen $N_A(0) = N$ får vi:

$$N_A(t) = N \cdot e^{-k_A t}$$

Hertil er der jo intet nyt, for vi har blot løst en enkelt differentiallygning, vi kender. Men dette funktionsudtryk kan vi jo så indsætte i den næst øverste differentiallygning i systemet, der dermed bliver til:

$$\frac{dN_B}{dt} = k_A \cdot N \cdot e^{-k_A t} - k_B \cdot N_B$$

Hvis vi kigger godt på denne differentiallygning, kan vi se, at det er en generel lineær 1. ordens differentiallygning (Sætning 25; Panserformlen), hvor den fuldstændige løsning er:

$$N_B(t) = e^{-k_B t} \cdot \int k_A \cdot N \cdot e^{-k_A t} \cdot e^{k_B t} dt = e^{-k_B t} \cdot \int k_A \cdot N \cdot e^{(k_B - k_A)t} dt = e^{-k_B t} \cdot \left(\frac{k_A \cdot N \cdot e^{(k_B - k_A)t}}{k_B - k_A} + c \right) =$$

$$e^{-k_B t} \cdot \frac{k_A \cdot N \cdot e^{(k_B - k_A)t}}{k_B - k_A} + e^{-k_B t} \cdot c = \frac{k_A \cdot N \cdot e^{-k_A t}}{k_B - k_A} + c \cdot e^{-k_B t}$$

Udnyttes begyndelsesbetingelsen $N_B(0) = 0$, får man $c = -\frac{k_A \cdot N}{k_B - k_A}$, og dermed bliver:

$$N_B(t) = \frac{k_A \cdot N}{k_B - k_A} \cdot (e^{-k_A t} - e^{-k_B t})$$

Dette funktionsudtryk indsættes nu i den tredje differentiallygning, så vi får:

$$\frac{dN_C}{dt} = k_B \cdot \frac{k_A \cdot N}{k_B - k_A} \cdot (e^{-k_A t} - e^{-k_B t}) - k_C \cdot N_C$$

Det ser efterhånden ret voldsomt ud, men ved at kigge nøje efter, kan vi se, at vi igen har at gøre med ligningen fra Sætning 25 (Panserformlen), så den partikulære løsning bliver:

$$N_C(t) = e^{-k_C t} \cdot \int k_B \cdot \frac{k_A \cdot N}{k_B - k_A} \cdot (e^{-k_A t} - e^{-k_B t}) \cdot e^{k_C t} dt = e^{-k_C t} \cdot \int k_B \cdot \frac{k_A \cdot N}{k_B - k_A} \cdot (e^{-k_A t} \cdot e^{k_C t} - e^{-k_B t} \cdot e^{k_C t}) dt =$$

$$e^{-k_C t} \cdot \int k_B \cdot \frac{k_A \cdot N}{k_B - k_A} \cdot (e^{(k_C - k_A)t} - e^{(k_C - k_B)t}) dt =$$

$$\frac{k_B \cdot k_A \cdot N}{(k_B - k_A) \cdot (k_C - k_A)} \cdot e^{-k_A t} - \frac{k_B \cdot k_A \cdot N}{(k_B - k_A) \cdot (k_C - k_B)} \cdot e^{-k_B t} + \frac{k_B \cdot k_A \cdot N}{(k_C - k_A) \cdot (k_C - k_B)} \cdot e^{-k_C t}$$

Det røde udtryk er konstanten, der er fremkommet ud fra begyndelsesbetingelsen (en del mellemregninger er sprunget over).

Dette udtryk kan nu indsættes i den sidste differentiallygning, der således er den simpleste type differentiallygning (Sætning 24), der løses ved integration af udtrykket.

Det skulle gerne fremgå af udregningerne, at vi også kunne have set på flere end 4 kernetyper og stadig været i stand til at løse ligningssystemet analytisk (selvom udtrykkene bliver længere og længere).

Maple kan også løse differentialligningssystemer (med eller uden betingelser). Alle ligninger og betingelser opskrives adskilt af kommaer. Lad os se på Maples løsning af vores differentialligningssystem med fire ligninger:

$$\begin{aligned}
 N_A'(t) &= -k_A \cdot N_A(t), N_A(0) = N, N_B'(t) = k_A \cdot N_A(t) - k_B \cdot N_B(t), N_B(0) = 0, N_C'(t) = k_B \cdot N_B(t) - k_C \cdot N_C(t), N_C(0) = 0, N_D'(t) = k_C \cdot N_C(t), N_D(0) = 0 \xrightarrow{\text{solve DE}} \\
 \left\{ \begin{aligned}
 N_A(t) &= N e^{-k_A t}, N_B(t) = \left(-\frac{k_A N e^{-k_A t + k_B t}}{k_A - k_B} + \frac{k_A N}{k_A - k_B} \right) e^{-k_B t}, N_C(t) = \left(-\frac{k_B \left(\frac{k_A N e^{-k_A t + k_C t}}{-k_A + k_C} - \frac{k_A^2 N e^{-k_B t + k_C t}}{(k_A - k_B)(-k_B + k_C)} + \frac{k_A N k_B e^{-k_B t + k_C t}}{(k_A - k_B)(-k_B + k_C)} \right)}{k_A - k_B} \right. \\
 &+ \left. \frac{N k_A k_B}{k_A k_B - k_A k_C - k_B k_C + k_C^2} \right) e^{-k_C t}, N_D(t) = -\frac{1}{(k_A - k_B)(k_A - k_C)(k_B - k_C)} \left(\left(-\frac{e^{-k_C t} N k_A k_B}{k_A k_B - k_A k_C - k_B k_C + k_C^2} - \frac{e^{-k_B t} k_A N}{k_A - k_B} - N e^{-k_A t} + N \right) k_B \right. \\
 &+ \left(\frac{e^{-k_C t} N k_A k_B}{k_A k_B - k_A k_C - k_B k_C + k_C^2} + \frac{e^{-k_B t} k_A N}{k_A - k_B} - N \right) k_C^2 + \left(\frac{e^{-k_C t} N k_A k_B}{k_A k_B - k_A k_C - k_B k_C + k_C^2} + N e^{-k_A t} - N \right) k_B^2 + \frac{e^{-k_B t} k_A^2 N k_B}{k_A - k_B} + \left(\frac{e^{-k_C t} N k_A k_B}{k_A k_B - k_A k_C - k_B k_C + k_C^2} - \frac{e^{-k_B t} k_A N}{k_A - k_B} + N \right) k_A^2 \\
 &\left. \left. - \frac{e^{-k_C t} N k_A k_B}{k_A k_B - k_A k_C - k_B k_C + k_C^2} - \frac{e^{-k_B t} k_A N}{k_A - k_B} + N \right) k_C + \left(-\frac{e^{-k_C t} N k_A k_B}{k_A k_B - k_A k_C - k_B k_C + k_C^2} + N \right) k_A k_B^2 + \left(\frac{e^{-k_C t} N k_A k_B}{k_A k_B - k_A k_C - k_B k_C + k_C^2} - N \right) k_A^2 k_B \right)
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

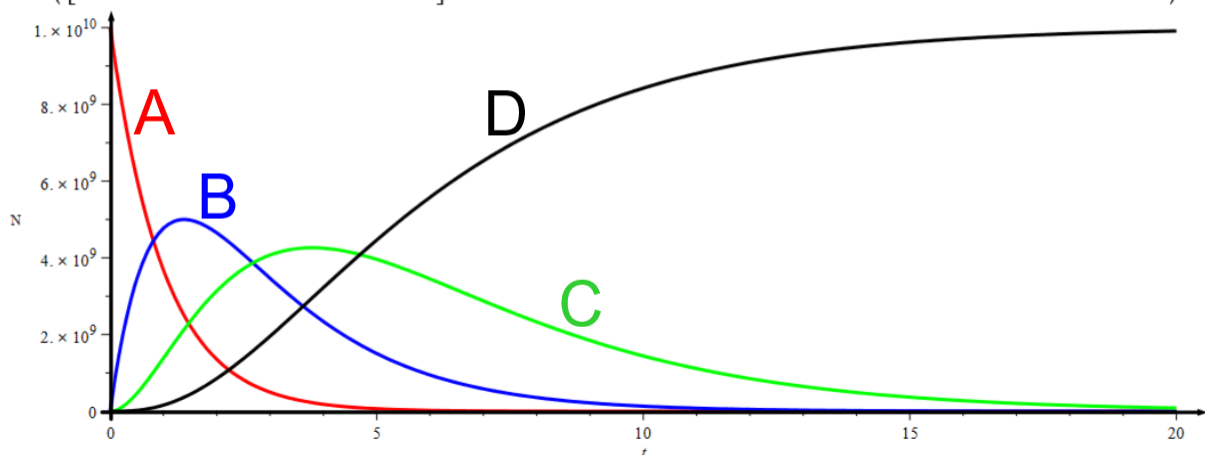
Udtrykkene kopieres, og der tilføjes et kolon foran lighedstegnet, så vi har 4 funktioner, vi kan arbejde videre med.

$$\begin{aligned}
 N_A(t) &:= N e^{-k_A t}; \\
 N_B(t) &:= \left(-\frac{k_A N e^{-k_A t + k_B t}}{k_A - k_B} + \frac{k_A N}{k_A - k_B} \right) e^{-k_B t}; \\
 N_C(t) &:= \left(-\frac{k_B \left(\frac{k_A N e^{-k_A t + k_C t}}{-k_A + k_C} - \frac{k_A^2 N e^{-k_B t + k_C t}}{(k_A - k_B)(-k_B + k_C)} + \frac{k_A N k_B e^{-k_B t + k_C t}}{(k_A - k_B)(-k_B + k_C)} \right)}{k_A - k_B} + \frac{N k_A k_B}{k_A k_B - k_A k_C - k_B k_C + k_C^2} \right) e^{-k_C t}; \\
 N_D(t) &:= -\frac{1}{(k_A - k_B)(k_A - k_C)(k_B - k_C)} \left(\left(-\frac{e^{-k_C t} N k_A k_B}{k_A k_B - k_A k_C - k_B k_C + k_C^2} - \frac{e^{-k_B t} k_A N}{k_A - k_B} - N e^{-k_A t} + N \right) k_B + \left(\frac{e^{-k_C t} N k_A k_B}{k_A k_B - k_A k_C - k_B k_C + k_C^2} + \frac{e^{-k_B t} k_A N}{k_A - k_B} - N \right) k_C^2 + \left(\frac{e^{-k_C t} N k_A k_B}{k_A k_B - k_A k_C - k_B k_C + k_C^2} + N e^{-k_A t} - N \right) k_B^2 + \frac{e^{-k_B t} k_A^2 N k_B}{k_A - k_B} + \left(\frac{e^{-k_C t} N k_A k_B}{k_A k_B - k_A k_C - k_B k_C + k_C^2} - \frac{e^{-k_B t} k_A N}{k_A - k_B} + N \right) k_A^2 - \frac{e^{-k_C t} N k_A k_B}{k_A k_B - k_A k_C - k_B k_C + k_C^2} - \frac{e^{-k_B t} k_A N}{k_A - k_B} + N \right) k_C + \left(-\frac{e^{-k_C t} N k_A k_B}{k_A k_B - k_A k_C - k_B k_C + k_C^2} + N \right) k_A k_B^2 + \left(\frac{e^{-k_C t} N k_A k_B}{k_A k_B - k_A k_C - k_B k_C + k_C^2} - N \right) k_A^2 k_B \right);
 \end{aligned}$$

Vi kan nu med forskellige værdier for N og de tre henfaldskonstanter få tegnet grafer:

$$N := 10^{10} : k_A := 1 : k_B := 0.5 : k_C := 0.3 :$$

$$\text{plot}([N_A(t), N_B(t), N_C(t), N_D(t)], t = 0..20, \text{thickness} = 3, \text{color} = [\text{red}, \text{blue}, \text{green}, \text{black}])$$

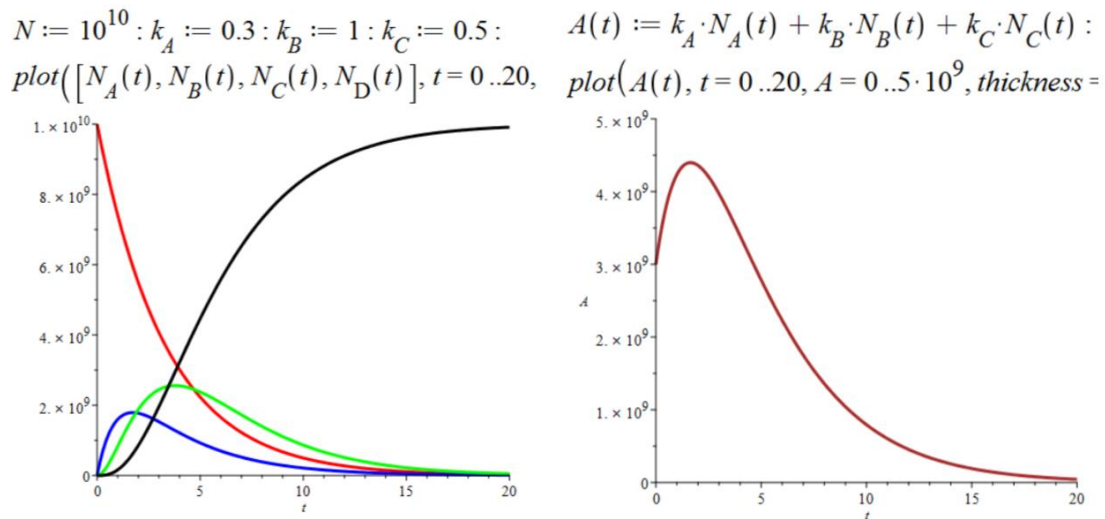


Kig på graferne og se, at de giver mening i forhold til situationen (henfaldskæde).

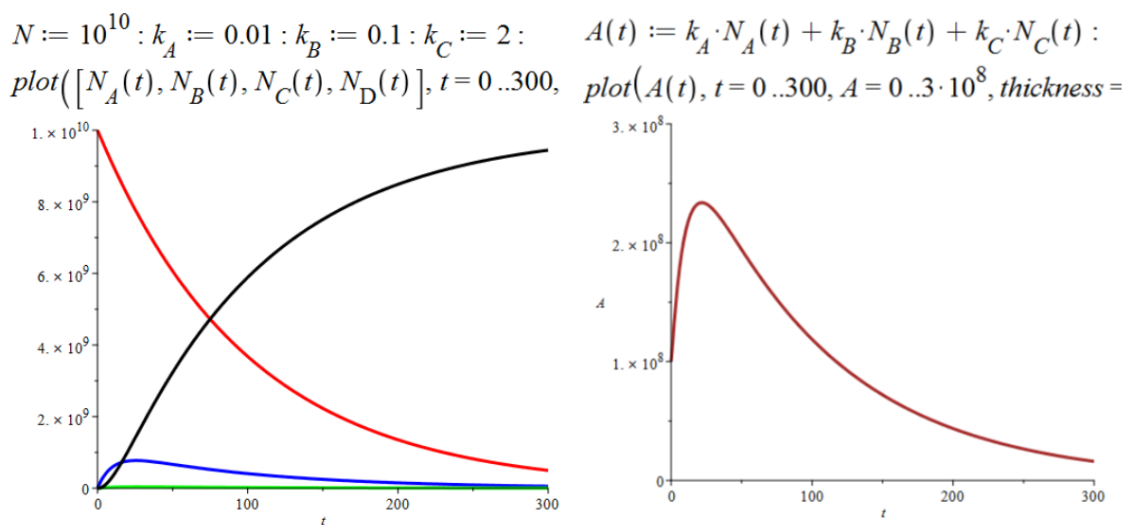
Det kan være interessant at se på aktiviteten fra den radioaktive klump:

$$A = k_A \cdot N_A + k_B \cdot N_B + k_C \cdot N_C$$

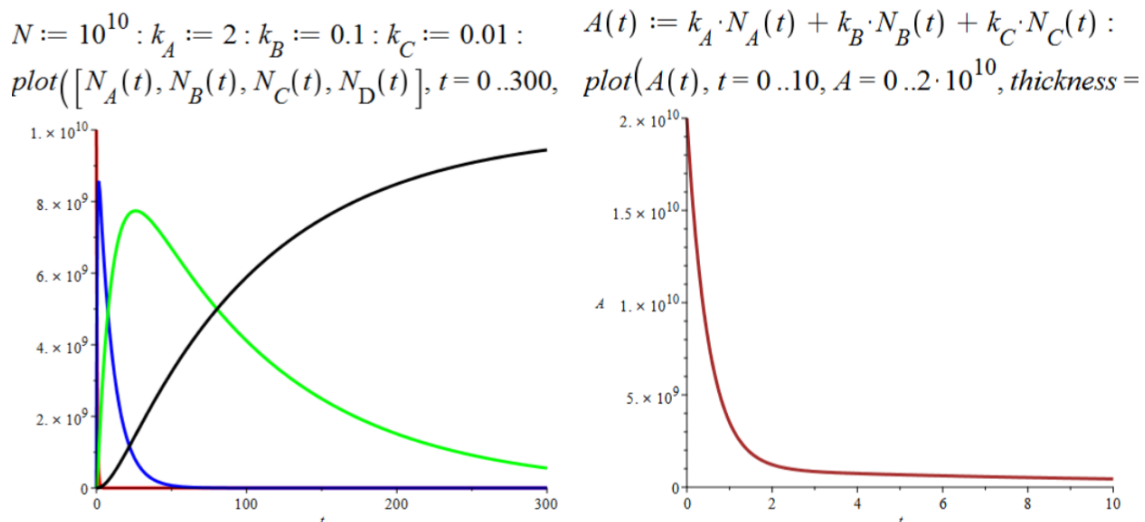
Vi ser nogle eksempler:



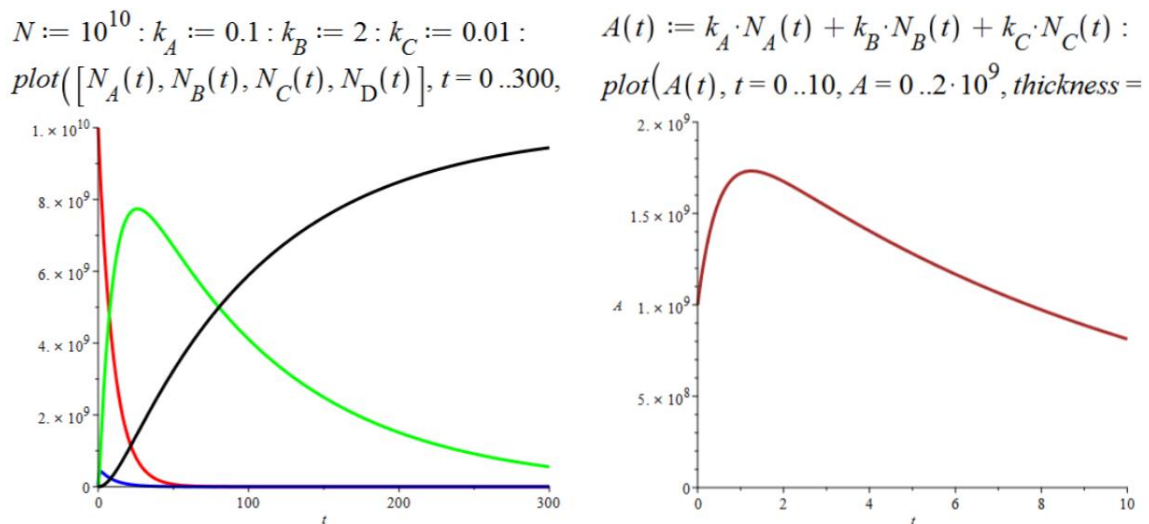
Se på graferne ovenfor. Bemærk, at aktiviteten ikke er størst fra start. Kig på forholdene mellem henfaldskonstanterne og tjek, at du kan få det til at passe med grafernes udseende.



Kig på graferne ovenfor. Igen er aktiviteten voksende i det første interval. Kan du se, hvorfor den grønne graf (stof C) er så flad?



Kig på graferne ovenfor. Hvorfor er stof C dominerende i en periode? Bemærk også aktiviteten. Den er aftagende hele tiden, men det er ikke en eksponentiel vækst.



Kig på graferne ovenfor. Kan du forklare udseendet af den blå graf?

Opgaverne 130*

SIR-modellen

SIR-modellen anvendes til at beskrive forskellige epidemier (af sygdomme). Det er en såkaldt *compartment*-model, hvilket vil sige, at den er baseret på, at man opdeler den undersøgte population i forskellige grupper. I SIR-modellen opdeler man i *modtagelige (Susceptible)*, *Inficerede* og *fjernede (Removed/Recovered/Resistant)*. Sidstnævnte er en lidt speciel kategori, da den indeholder både raske, der har overlevet sygdommen og nu er immune, og dem, der er døde af sygdommen.

Det antages, at der under epidemien ikke sker til- eller fraflytning, ingen børn fødes og ingen mennesker dør af andet end den pågældende sygdom. I den konkrete situation – f.eks. hvis det indgår i et SRP om pest, mæslinger, corona eller en anden sygdom – er det selvfølgelig antagelser, man skal forholde sig til, men vi skal kun se på matematikken, og vores antagelser fortæller så, at hvis populationen fra start er på N individer, gælder $S(t) + I(t) + R(t) = N$, og dermed behøver man kun at finde to af de tre funktionsværdier, da den sidste så kan beregnes ud fra denne sammenhæng. Vores situation giver os følgende differentialligningssystem:

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\alpha \cdot I(t) \cdot S(t)$$

Den hastighed, hvormed individerne forsvinder fra gruppen af modtagelige (dvs. bliver syge), er proportional med både antallet af syge og modtagelige (dobbel så mange syge fører til dobbelt så mange sygdomsoverførser, og dobbelt så mange modtagelige fører til dobbelt så mange modtagelige, der møder en syg).

$$\frac{dI(t)}{dt} = \alpha \cdot I(t) \cdot S(t) - \beta \cdot I(t)$$

Første led følger direkte af ligningen ovenfor, da et individ, der fjernes fra S , placeres i I . Det andet led skyldes, at der hele tiden er en vis del af de syge, der enten dør eller bliver raske igen.

$$\frac{dR(t)}{dt} = \beta \cdot I(t)$$

Dette følger direkte af ligningen ovenfor, da et individ, der fjernes fra I , placeres i R .

Der er altså to konstanter, α og β . Den første har noget at gøre med, hvor smitsom sygdommen er, og hvor meget folk mødes (befolkningstæthed og vaner), mens den anden afhænger af sygdommen og hvor hurtigt og effektivt de syge isoleres. Det er noget, man skal prøve at forholde sig til i den konkrete situation. I **modellen** er α og β konstanter, men i praksis vil det næppe forekomme. Under Covid-19-pandemien ændrede α sig, både når virussen muterede (f.eks. førte den britiske variant til et større α), og når samfundene blev lukket ned og mennesker ændrede adfærd (mindre α), og da man begyndte at massetestede for at opdage sygdommen hurtigt, var det for at gøre β større.

Vi kan ikke komme i gang med ligningssystemet, da ingen af de tre differentialligninger udelukkende beskæftiger sig med én af funktionerne. Og faktisk har vi her et differentialligningssystem, der ikke kan løses analytisk.

Hvis vi prøver at anvende Maple, får vi:

$$S'(t) = -\alpha \cdot I(t) \cdot S(t), I'(t) = \alpha \cdot I(t) \cdot S(t) - \beta \cdot I(t), R'(t) = \beta \cdot I(t) \xrightarrow{\text{solve DE}}$$

Der er altså ingen anden udvej end at løse det numerisk.

Vi har set, at det godt kan betale sig at bruge nogle udregninger på at bestemme en god værdi for parameteren k (hældningen for det rette linjestykke, man vil bruge for at komme fra et punkt til det næste), da man dermed kan tillade sig at anvende større skridtlængder. Vi anvender derfor den klassiske Runge-Kutta-metode.

Når vi skal anvende den på dette differentialligningssystem, skal vi være opmærksomme på, at der indgår to funktionsudtryk i hver af de to differentialligninger, vi skal arbejde med. Vi er derfor nødt til at "flette" vores parameterudregninger sammen. Vi skal nu se, hvordan det foregår:

De to differentialligninger, vi skal arbejde med, er:

$$S'(t) = -\alpha \cdot I(t) \cdot S(t)$$

$$I'(t) = \alpha \cdot I(t) \cdot S(t) - \beta \cdot I(t)$$

Den sidste differentialligning skal vi ikke bruge, da vi udregner $R(t)$ med $S(t) + I(t) + R(t) = N$.

Vi kalder skridtlængden for Δt og får så følgende algoritme til udregning af parametrene og de næste S - og I -værdier:

$$l_{s1} = -\alpha \cdot I(t_n) \cdot S(t_n)$$

$$l_{I1} = \alpha \cdot I(t_n) \cdot S(t_n) - \beta \cdot I(t_n)$$

$$l_{s2} = -\alpha \cdot \left(I(t_n) + \frac{\Delta t}{2} \cdot l_{I1} \right) \cdot \left(S(t_n) + \frac{\Delta t}{2} \cdot l_{s1} \right)$$

$$l_{I2} = \alpha \cdot \left(I(t_n) + \frac{\Delta t}{2} \cdot l_{I1} \right) \cdot \left(S(t_n) + \frac{\Delta t}{2} \cdot l_{s1} \right) - \beta \cdot \left(I(t_n) + \frac{\Delta t}{2} \cdot l_{I1} \right)$$

$$l_{s3} = -\alpha \cdot \left(I(t_n) + \frac{\Delta t}{2} \cdot l_{I2} \right) \cdot \left(S(t_n) + \frac{\Delta t}{2} \cdot l_{s2} \right)$$

$$l_{I3} = \alpha \cdot \left(I(t_n) + \frac{\Delta t}{2} \cdot l_{I2} \right) \cdot \left(S(t_n) + \frac{\Delta t}{2} \cdot l_{s2} \right) - \beta \cdot \left(I(t_n) + \frac{\Delta t}{2} \cdot l_{I2} \right)$$

$$l_{s4} = -\alpha \cdot \left(I(t_n) + \Delta t \cdot l_{I3} \right) \cdot \left(S(t_n) + \Delta t \cdot l_{s3} \right)$$

$$l_{I4} = \alpha \cdot \left(I(t_n) + \Delta t \cdot l_{I3} \right) \cdot \left(S(t_n) + \Delta t \cdot l_{s3} \right) - \beta \cdot \left(I(t_n) + \Delta t \cdot l_{I3} \right)$$

$$k_S = \frac{l_{s1} + 2 \cdot l_{s2} + 2 \cdot l_{s3} + l_{s4}}{6}$$

$$k_I = \frac{l_{I1} + 2 \cdot l_{I2} + 2 \cdot l_{I3} + l_{I4}}{6}$$

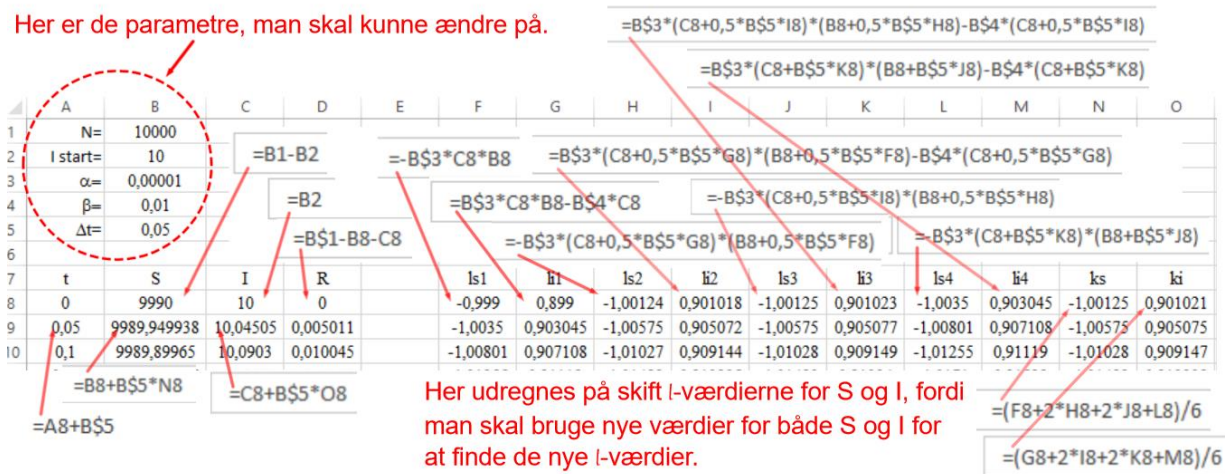
$$S(t_{n+1}) = S(t_n) + k_S \cdot \Delta t$$

$$I(t_{n+1}) = I(t_n) + k_I \cdot \Delta t$$

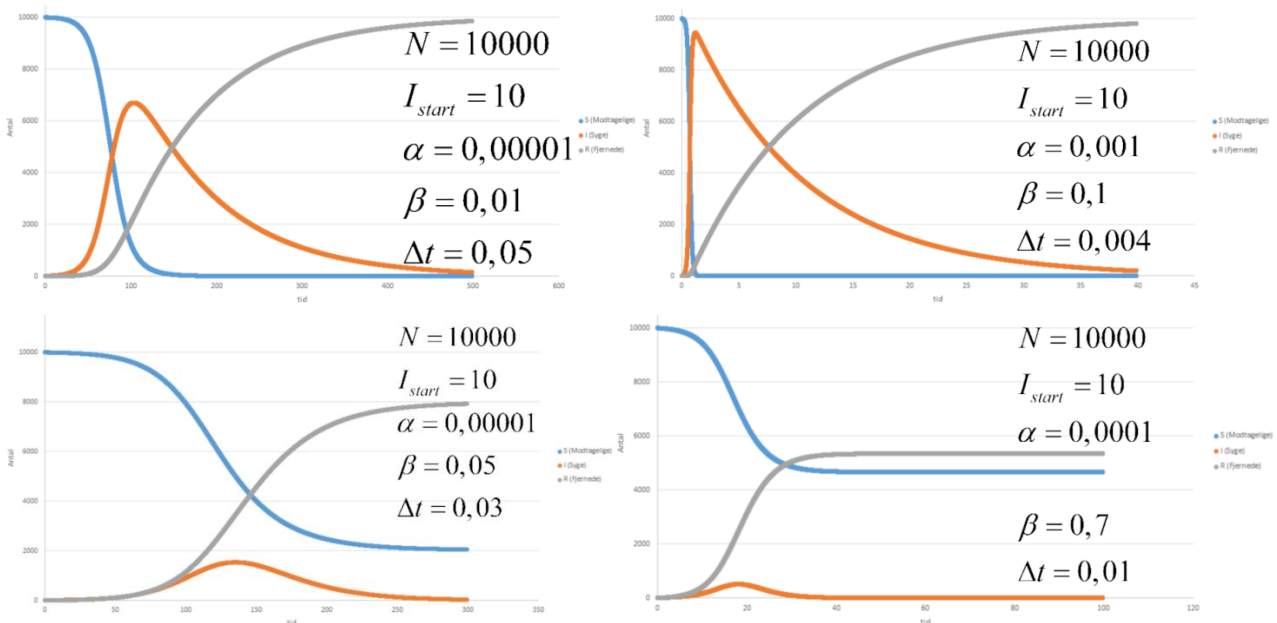
Denne algoritme er anvendt i Excel:

Her ses, hvorfor vi er nødt til at "flette" beregningerne af l -værdierne. Vi skal bruge den første l -værdi for både S og I til at udregne de næste.

Her er de parametre, man skal kunne ændre på.



Her ses fire forskellige forløb for epidemien baseret på forskellige værdi for α og β . I alle situationerne begynder man med en population på 10000 og 10 inficerede. Der er anvendt forskellige Δt -værdier, men det er blot for at få hele forløbet af epidemien med. Dvs. du skal ikke bruge denne værdi til noget, når du kigger på graferne.



På de to øverste figurer ses det, at alle i populationen bliver ramt af sygdommen. På den øverste højre figur sker det endda meget hurtigt, og derfor er den orange graf (de syge) omtrent grafen for en eksponentielt aftagende funktion (andet led i differentilligningen med $I'(t)$ dominerer totalt).

På de to nederste figurer når epidemien at tage af, inden alle i populationen har fået sygdommen. Forholdet mellem α og β er afgørende for de tre kurvers udseende. Dvs. hvis man i den øverste graf til venstre havde valgt $\alpha = 0,0001$ og $\beta = 0,1$ (dvs. begge parametre ti gange større og dermed deres forhold $\frac{\alpha}{\beta}$ det samme), ville man have fået præcis samme udvikling – bare 10 gange så hurtigt, dvs. der ville stå 50 i stedet for 500 på tidsaksen.

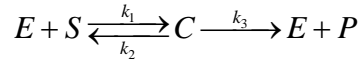
En sygdom, hvor man enten dør eller kommer sig tilpas hurtigt (eller isoleres), vil altså kunne forsvinde fra en population, uden at alle i populationen har været ramt af sygdommen.

SIR-modellen kan udbygges og justeres på mange måder. Det kan evt. ske i et SRP.

Michaelis-Menten

Michaelis-Menten modellen er en model inden for biokemi, der beskriver en reaktionsproces, hvor der indgår et enzym. Den er opkaldt efter Leonor Michaelis (1875-1949) og Maud Menten (1879-1960).

Den beskæftiger sig med et enzym (E), der binder sig til et substrat (S) og dermed danner et kompleks (C). Komplekset kan enten spaltes tilbage til E og S , eller det kan spaltes til E og et produkt P . Dvs. samlet har man fået omdannet S til P uden at forbruge E (hvilket jo er enzyms karakteristiske egenskab). Reaktionsskemaet er:



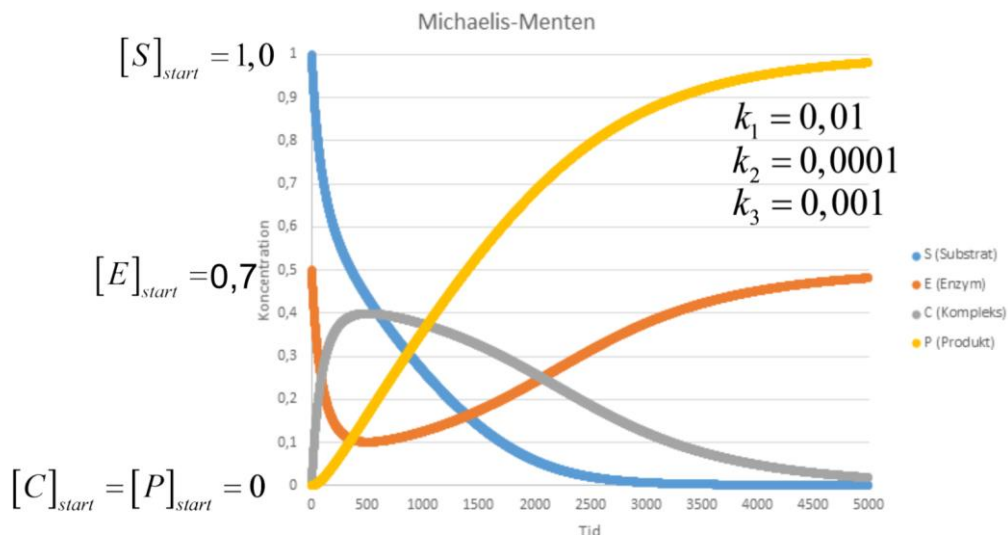
Det giver følgende differentiaalligningssystem (der anvendes den kemiske notation $[E]$ i stedet for $[E](t)$ for den aktuelle koncentration, dvs. det er underforstået, at den er en funktion af tiden):

$$\begin{aligned}\frac{d[E]}{dt} &= -k_1 \cdot [E] \cdot [S] + k_2 \cdot [C] + k_3 \cdot [C] \\ \frac{d[S]}{dt} &= -k_1 \cdot [E] \cdot [S] + k_2 \cdot [C] \\ \frac{d[C]}{dt} &= k_1 \cdot [E] \cdot [S] - k_2 \cdot [C] - k_3 \cdot [C] \\ \frac{d[P]}{dt} &= k_3 \cdot [C]\end{aligned}$$

Igen har vi et differentiaalligningssystem, der ikke kan løses analytisk. Og i praksis er der problemer med at bestemme værdier for k_1 , k_2 og k_3 . Hvis Michaelis-Menten er involveret i et SRP, vil der derfor være masser at arbejde med. Her ser vi kun på selve den numeriske løsning ved hjælp af RK4. Igen skal man flette udregningerne af parametrene sammen, og denne gang er der fire differentiaalligninger, man skal have fat i. Så i Excel får skemaet følgende udseende:

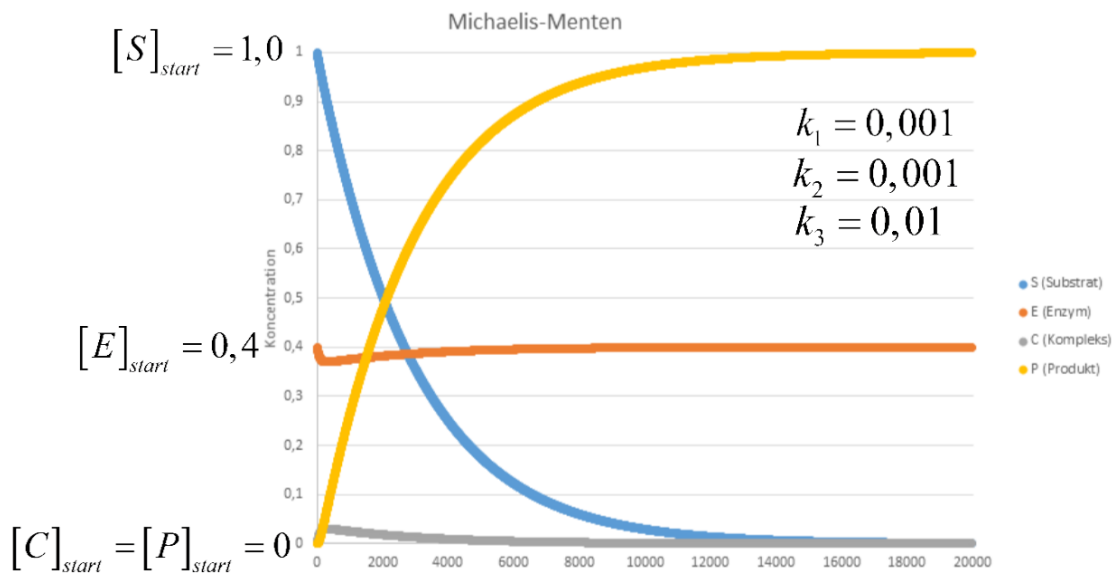
| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | X | Y | Z |
|----|-----|--------|--------|----------|-----------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|----------|--------|--------|--------|----------|--------|--------|--------|-----------|
| 1 | E= | 0,7 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | S= | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | C= | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | P= | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | k1= | 0,01 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | k2= | 0,0001 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | k3= | 0,001 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | Δt= | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | t | S | E | C | P | le1 | ls1 | lc1 | lp1 | le2 | ls2 | lc2 | lp2 | le3 | ls3 | lc3 | lp3 | le4 | ls4 | lc4 | lp4 | ke | ks | ko | kp |
| 11 | 0 | 1 | 0,7 | 0 | 0 | -0,007 | -0,007 | 0,007 | 0 | -0,007 | -0,007 | 0,0069 | 4E-06 | -0,007 | -0,007 | 0,0069 | 3,47E-06 | -0,007 | -0,007 | 0,0069 | 6,94E-06 | -0,007 | -0,007 | 0,0069 | 3,479E-06 |
| 12 | 1 | 0,9931 | 0,6931 | 0,006937 | 3,479E-06 | -0,007 | -0,007 | 0,0069 | 7E-06 | -0,007 | -0,007 | 0,0068 | 1E-05 | -0,007 | -0,007 | 0,0068 | 1,03E-05 | -0,007 | -0,007 | 0,0068 | 1,38E-05 | -0,007 | -0,007 | 0,0068 | 1,035E-05 |

På figuren nedenfor ses et eksempel på en omdannelse af substrat til produkt:



Man ser, at S forsvinder, og P dannes. Men man ser også, at E først forsvinder, samtidig med at C dannes (de to grafer er hinandens spejlbilleder i den vandrette linje med koncentrationen 0,25 – overvej selv hvorfor ved at kigge på differentiaalligningssystemet!), men efter et stykke tid gendannes E , og C forsvinder igen.

Det samme gør sig gældende på figuren nedenfor, men her er k_3 så meget større end k_1 , at enzymet gendannes næsten i samme øjeblik, det forsvinder, hvilket passer med, at der hele tiden er meget lidt af komplekset.



Øvelse 20: Anvend RK4 på differentiaalligningssystemet og tjek, at du kan få ovenstående grafer, når du anvender de angivne værdier for størrelserne.

Lotka-Volterra

Det sidste differentiaalligningssystem, vi skal se på, er et system, hvor løsningerne er periodiske funktioner, dvs. man kan sige, at systemet kører i ring. Sådanne systemer kendes inden for kemi i forbindelse med oscillerende reaktioner som f.eks. iodklokken og BZ-reaktionen (mulige emner til SRP). Oscillerende reaktioner er noget mere komplicerede end vores eksempel. Vi skal se på et differentiaalligningssystem med to differentiaalligninger, der angiver en såkaldt *Rovdyr-byttedyr*-model, dvs. det er et – ret simpelt – forsøg på at beskrive et økosystem. Det er baseret på, at rovdyr (næsten) udelukkende lever af det pågældende byttedyr.

Modellen kaldes Lotka-Volterra-modellen efter Alfred J. Lotka (1880-1949) og Vito Volterra (1860-1940), der uafhængigt af hinanden kom frem til den omkring 1925.

Vi lader $B : t \mapsto B(t)$ være funktionen, der angiver antallet af byttedyr (selvom et sådant antal i praksis selvfølgelig kun kan være et heltal), mens antallet af rovdyr bliver angivet ved $R : t \mapsto R(t)$.

Modellen bliver bygget op af dele, vi kender i forvejen, nemlig delen $\frac{dN}{dt} = k \cdot N$, som vi kender fra udviklingen af en bakteriekultur eller en dyrepopulation, hvor der er plads og føde til alle, og delen $\frac{dN}{dt} = k \cdot N \cdot M$ fra SIR-modellen, hvor antallet af møder mellem to populationer eller grupper er proportionalt med begge populationers størrelse. Det giver os følgende model:

Alle koefficienterne α, β, γ og δ er positive, og funktionsværdierne er ikke-negative, så fortegnene på leddene i differentialligningerne svarer til det fortegn, der er angivet.

$$\frac{dB(t)}{dt} = \alpha \cdot B(t) - \beta \cdot B(t) \cdot R(t)$$

Første led er vores sædvanlige beskrivelse af udviklingen af en population, hvor der er føde og plads nok. Men andet led fortæller os, at vi nu også tager hensyn til, at der er et rovdyr, der spiser byttedyret, og antallet af møder - og dermed også sandsynligheden for, at et byttedyr dræbes - kan med god tilnærmelse regnes for proportional med både antallet af byttedyr og antallet af rovdyr.

$$\frac{dR(t)}{dt} = -\gamma \cdot R(t) + \delta \cdot B(t) \cdot R(t)$$

Første led fortæller os, at i modsætning til hos byttedyrene er det ikke en fordel for rovdyrene at være mange med hensyn til førogelse af populationen. For de er i indbyrdes konkurrence om maden, og denne konkurrence vægter højere end det at få afkom. Til gengæld bidrager møderne med byttedyrene positivt til væksten. Den enes bød, den andens brød.

Vi kan ikke løse systemet analytisk, men vi kan godt finde nogle mere eller mindre interessante løsninger. F.eks. kan vi se (tjek selv!), at følgende er løsninger til differentialligningssystemet:

$$(B(t) = 0, R(t) = 0), (B(t) = 0, R(t) = R_0 \cdot e^{-\gamma t}) \text{ og } (B(t) = B_0 \cdot e^{\alpha t}, R(t) = 0)$$

Vi er ikke interesserede i disse løsninger, da ingen af dem beskriver en situation med individer af begge dyrearter. Men den første af de tre er interessant på den måde, at den repræsenterer en stationær løsning, dvs. en løsning hvor populationerne ikke ændrer sig over tid. Og spørgsmålet er så, om der findes andre stationære løsninger?

Lad os se på det. Stationære løsninger skal opfylde betingelserne $\frac{dB(t)}{dt} = 0$ og $\frac{dR(t)}{dt} = 0$, dvs. det giver os ligningerne:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot B(t) - \beta \cdot B(t) \cdot R(t) = 0 &\Leftrightarrow B(t) \cdot (\alpha - \beta \cdot R(t)) = 0 \Leftrightarrow B(t) = 0 \vee \alpha - \beta \cdot R(t) = 0 \\ -\gamma \cdot R(t) + \delta \cdot B(t) \cdot R(t) = 0 &\Leftrightarrow R(t) \cdot (-\gamma + \delta \cdot B(t)) = 0 \Leftrightarrow R(t) = 0 \vee -\gamma + \delta \cdot B(t) = 0 \end{aligned}$$

De to ligninger yderst til højre fortæller os altså, at $\left(B(t) = \frac{\gamma}{\delta}, R(t) = \frac{\alpha}{\beta} \right)$ er en stationær løsning.

Dvs. ifølge modellen ville man kunne have en stabil situation med konstante antal byttedyr og rovdyr, hvis de antog disse værdier. Det fortæller os, at når vi skal vælge værdierne for vores koefficienter, skal de vælges, så de to brøker $\frac{\gamma}{\delta}$ og $\frac{\alpha}{\beta}$ giver tilpas store værdier.

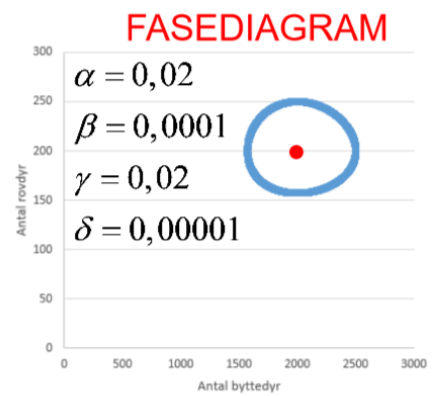
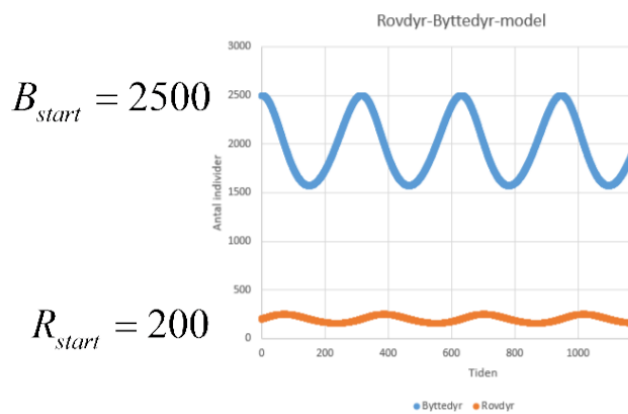
Vi løser igen differentialligningssystemet numerisk med den klassiske Runge-Kutta-metode:

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N |
|----|-----|--------------|----------|---|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | | $\alpha =$ | 0,04 | | | | | | | | | | | |
| 2 | | $\beta =$ | 0,0001 | | | | | | | | | | | |
| 3 | | $\gamma =$ | 0,01 | | | | | | | | | | | |
| 4 | | $\delta =$ | 0,00001 | | | | | | | | | | | |
| 5 | | Bstart= | 2500 | | | | | | | | | | | |
| 6 | | Rstart= | 200 | | | | | | | | | | | |
| 7 | | $\Delta t =$ | 0,3 | | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | t | B | R | | lb1 | lr1 | lb2 | lr2 | lb3 | lr3 | lb4 | lr4 | kb | kr |
| 10 | 0 | 2500 | 200 | | 50 | 3 | 50,03716 | 3,021784 | 50,03645 | 3,021844 | 50,07222 | 3,043756 | 50,03658 | 3,021835 |
| 11 | 0,3 | 2515,011 | 200,9066 | | 50,07222 | 3,043756 | 50,10659 | 3,065797 | 50,10586 | 3,065858 | 50,13879 | 3,088029 | 50,10598 | 3,065849 |

I vores sædvanlige grafer for funktionerne afbildes B og R som funktion af t. Vi kan lave et fase-diagram ved at afbilde antallet af rovdyr som funktion af antallet af byttedyr.

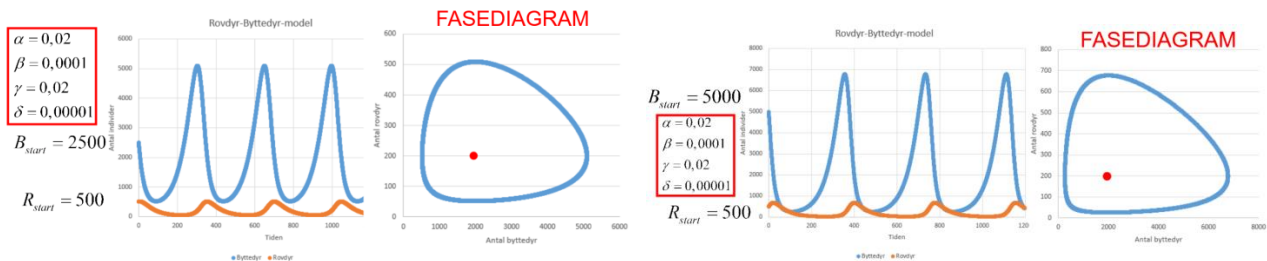
Vi er igen nødt til at flette vores udregninger af parametrene sammen.

I de følgende figurer er den stationære løsning angivet med et rødt punkt, så man kan se, hvordan man i fase-diagrammet bevæger sig rundt om dette.



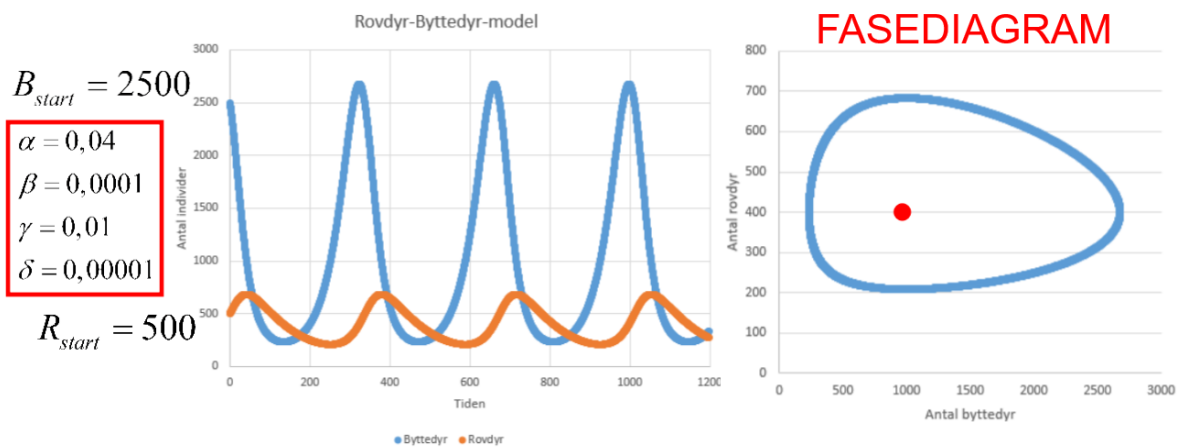
Bemærk på figuren ovenfor, hvordan funktionerne B og R er periodiske med samme periode (der er godt 300). Men graferne er forskudt i forhold til hinanden, så maksimum for R indtræffer en fjerdedel periode efter maksimum for B . Kig også på faseagrammet til højre og tjek, at du forstår, hvad det viser. Hvilken vej bevæger man sig rundt i faseagrammet?

Nedenstående figurer viser en situation, hvor koefficienterne α, β, γ og δ er de samme som ovenfor, men hvor man begynder med 500 rovdyr i stedet for 200.



Man kan se, hvordan udsvingene bliver meget større. På figuren til højre, hvor antallet af byttedyr også er blevet fordoblet fra start, ser man, at udsvingene faktisk bliver så store, at man kan spekulere på, om ikke en af dyrearterne i praksis ville risikere at blive udryddet.

På figuren nedenfor ses et eksempel med andre værdier for α, β, γ og δ og dermed også en anden stationær løsning. Men mønsteret er det samme.



Lotka-Volterra-modellen kan –evt. i et SRP – udbygges og justeres, så man tager højde for flere faktorer, og der er også flere ting at sige om den, end vi er kommet ind på i det ovenstående.

Øvelse 21: Vis, at man med de angivne værdier for de relevante størrelser får figurene ovenfor.

Sætning 24: Den fuldstændige løsning til differentialligningen $\frac{dy}{dx} = g(x)$, hvor g er en kontinuert funktion, er funktionsfamilien $f_c : x \mapsto \int g(x) dx$

Sætning 25 (Lineære 1. ordens differentialligninger ; Panserformlen): Differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} + h(x) \cdot y = g(x),$$

hvor h og g er kontinuerte funktioner, har den fuldstændige løsning

$$f : x \mapsto e^{-H(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{H(x)} dx \quad \text{eller} \quad f : x \mapsto c \cdot e^{-H(x)} + p(x)$$

hvor H er en vilkårlig stamfunktion til h , c en reel konstant og p en vilkårlig, partikulær løsning.

Specialtilfælde:

$$g(x) = 0 \text{ og } h(x) = -k : \quad \frac{dy}{dx} = k \cdot y \quad \text{har den fuldstændige løsning } f : x \mapsto c \cdot e^{k \cdot x} ; c \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = b \text{ og } h(x) = a : \quad \frac{dy}{dx} = b - a \cdot y \quad \text{har den fuldstændige løsning: } f : x \mapsto \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x} ; c \in \mathbb{R}$$

I det sidste tilfælde skal $a \neq 0$. Hvis $a = 0$, har man et (simpelt) specialtilfælde af Sætning 24.

Sætning 26 (Separation af de variable): Lad h være en funktion af x , der er kontinuert i intervallet I , og lad g være en funktion af y , der er kontinuert og forskellig fra 0 i intervallet J . Så gælder:

$$\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y) \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx,$$

hvor løsningskurverne for løsningerne $y = f(x)$ ligger i intervallet $I \times J$.

Sætning 27: Den logistiske ligning $\frac{dy}{dx} = a \cdot y \cdot (M - y)$, $a > 0$, $M > 0$ har for $0 < y < M$

løsningerne:

$$f_c : x \mapsto \frac{M}{1 + c \cdot e^{-a \cdot M \cdot x}} ; c > 0$$

$$f_c \text{ har en maksimal væksthastighed } \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\max} = a \cdot \frac{M^2}{4}, \text{ der antages i punktet } \left(\frac{\ln(c)}{a \cdot M}, \frac{M}{2} \right).$$

0 er infimum (nedre grænse) for $f_c(x)$, og M er supremum (øvre grænse) for $f_c(x)$.

$$f_c(x) \rightarrow M \text{ for } x \rightarrow \infty \quad \text{og} \quad f_c(x) \rightarrow 0 \text{ for } x \rightarrow -\infty$$

Sætning 31: De fuldstændige løsninger f_{c_1, c_2} til følgende differentialligninger, hvor $k > 0$, er:

$$\begin{array}{lll} y'' = k^2 \cdot y & y'' = -k^2 \cdot y & y'' = 0 \\ f_{c_1, c_2} : x \mapsto c_1 \cdot e^{k \cdot x} + c_2 \cdot e^{-k \cdot x} & f_{c_1, c_2} : x \mapsto c_1 \cdot \sin(k \cdot x) + c_2 \cdot \cos(k \cdot x) & f_{c_1, c_2} : x \mapsto c_1 \cdot x + c_2 \end{array}$$

hvor c_1 og c_2 er vilkårlige, reelle konstanter.