INTRODUKTION

Maple
Funktioner
Regression

x-klasserne

Gammel Hellerup Gymnasium

Maj 2023 ; Michael Szymanski ; mz@ghg.dk

Indholdsfortegnelse

Installering af Maple (*gør det hjemmefra eller sørg for at fjerne det flueben, hvor man beder Maple om at søge efter opdateringer, for dette punkt tager flere timer, hvis det udføres på skolen*):

1) Fra hjemmesiden www.ghg.dk går du ind på 'intra' (se bjælken i toppen af skærmen), og under IT finder du menuen 'koder og programmer' (ligesom da du installerede loggerPro).

2) Installér **først** selve Maple (Maple 2023), og **derefter** den tilhørende GYM UPGRADE, der står nedenunder. Den angivne kode er kun til selve Maple-programmet. Gym-pakken kræver ikke nogen kode.

PAPIR, BLYANT OG COMPUTER

Når du læser lektier eller har et modul på skolen, er det vigtigt, at du altid både har computer samt blyant og papir til rådighed. Du skal ende med at beherske begge dele.

Vi anvender hovedsageligt matematikprogrammet Maple, der er et såkaldt CAS-værktøj (Computer Algebra System), der dækker over matematikprogrammer, der kan arbejde med matematiske udtryk indeholdende bogstaver. Maple kan dog væsentligt mere end det, og det tager tid at blive fortrolig med programmet.

Det er derfor vigtigt, at du – både hjemme og i skolen - **altid selv** prøver at indtaste kommandoerne, samt at du udviser en vis nysgerrighed. Problemerne skal opdages i timerne eller i forbindelse med lektierne. Det er skidt først at opdage problemerne, når du sidder til en prøve eller i en anden situation, hvor det er kritisk.

Du skal også kunne regne selv, og på nogle punkter er en computer væsentlig langsommere end papir og blyant. Hvis du f.eks. skal skitsere et kompliceret problem og tænke over, hvordan man løser det, eller hvis du skal gennemføre et matematisk bevis, er en computer ikke meget værd.

Det er derfor vigtigt, at du altid har en papirblok og skriveredskaber med, og at du i matematik, fysik og kemi tager noter i hånden – **hvis** du tager noter. I matematik anbefaler jeg, at du ikke tager noter, men i stedet bruger tiden på at tænke. Alt væsentligt står i hæfterne.

LEKTIELÆSNING

Vær opmærksom på, at lektielæsning i de naturvidenskabelige fag og matematik foregår i et langsommere tempo, end når du læser en roman. Det er vigtigt, at du får tænkt over sætninger, formler, pointer og tankegange og hele tiden selv regner med i eksemplerne.

I matematik læser vi som udgangspunkt ”bagud”. Dvs. vi gennemgår det nye stof på skolen, hvorefter du læser om det hjemme. Det er derfor vigtigt, at du noterer dig, hvis der efter læsningen er noget, du ikke har forstået, så du kan stille spørgsmål til det i det kommende modul.

OM DETTE HÆFTE

Dette hæfte adskiller sig markant fra resten af matematiknoterne. Vi begynder med en ”kickstart”, hvor I kastes lige ud i anvendelsen af Maple samt behandlingen af regression på lineære funktioner, eksponentielle udviklinger og potensfunktioner. I får smidt utrolig mange informationer i hovedet uden nogen grundig introduktion til begreberne, så der bliver meget ”gør dette”, ”skriv sådan” og ”se hvad Maple gør”.

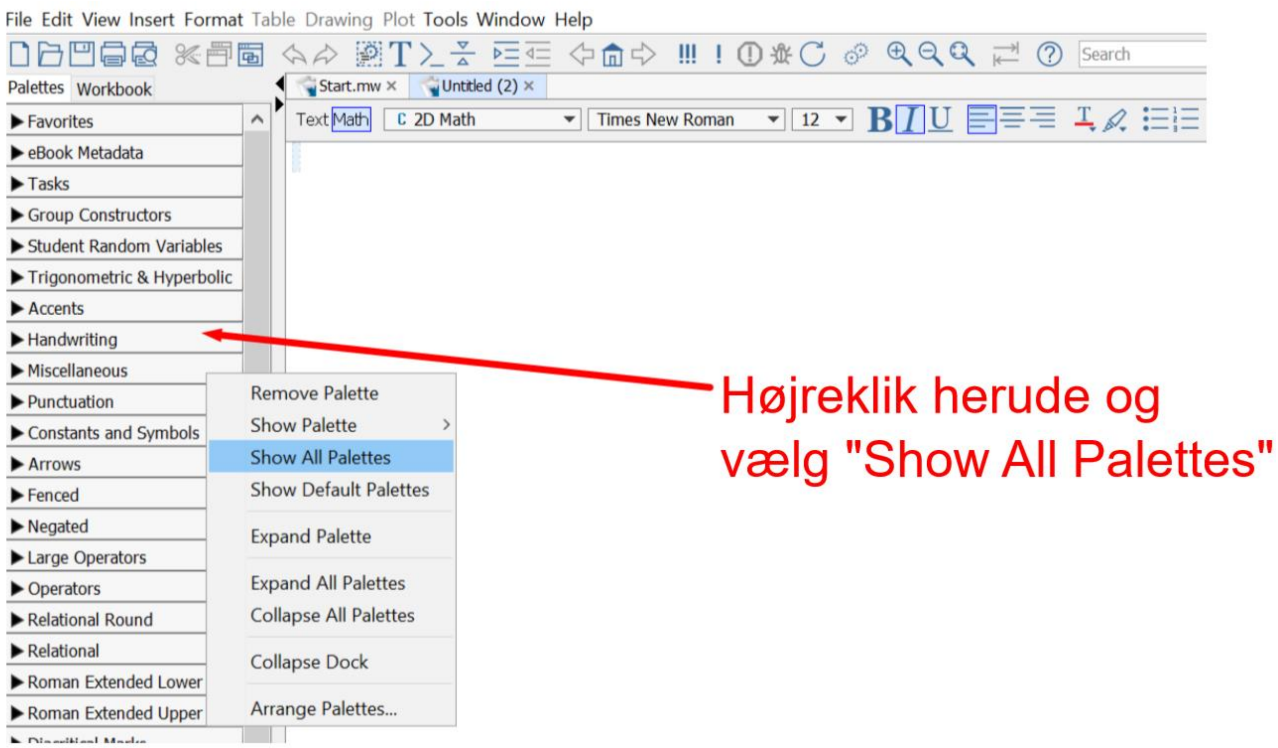
Formålet er at få jer i gang med at anvende Maple og gøre jer i stand til hurtigt at løse en standardopgavetype med funktionstyper, der er vigtige inden for både kemi og fysik.

Derefter går vi i gang med rigtig matematik, hvor det hele bygges op fra bunden, og alt forklares, og vi vender senere tilbage og behandler ovennævnte funktionstyper ordentligt.

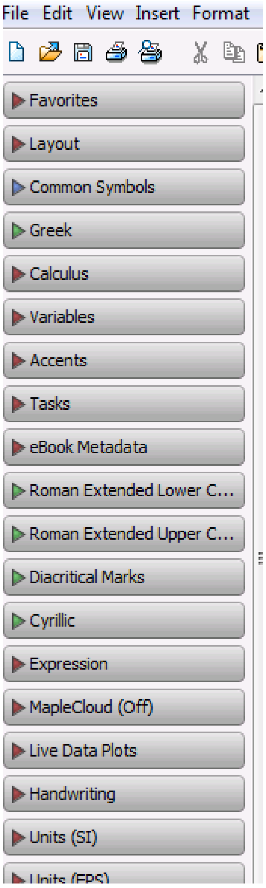
KOM I GANG MED MAPLE

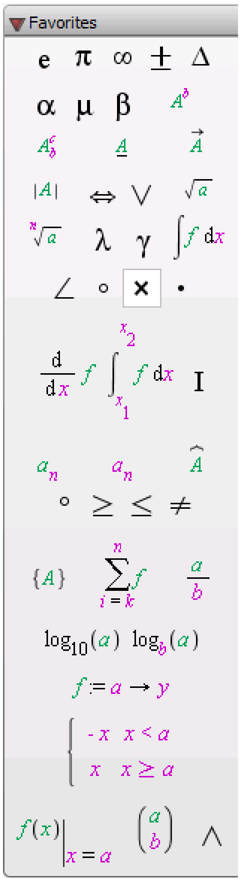
Når du åbner Maple, kan du vælge mellem ”New Document” og ”New Worksheet”. Vores Maple-dokumenter skal se ordentlige ud, så vi arbejder i ”Document”:

Til venstre i Maple findes *paletterne*, hvor du kan finde alle de symboler, bogstaver og skrivemåder, du har brug for. Bemærk, at dit område ikke ligner området yderst til venstre på nedenstående billede, før du har været ude i området, højreklikket og valgt ”Show All Palettes”.



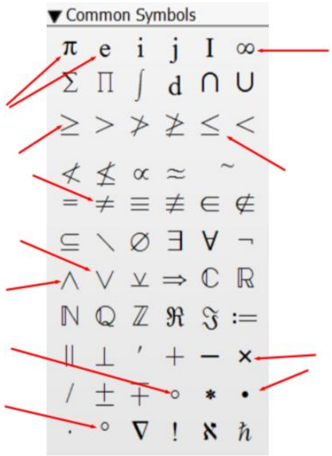
Sommetider havner nogle af paletterne i højreside af skærmen, men de kan i så fald flyttes til venstre side.





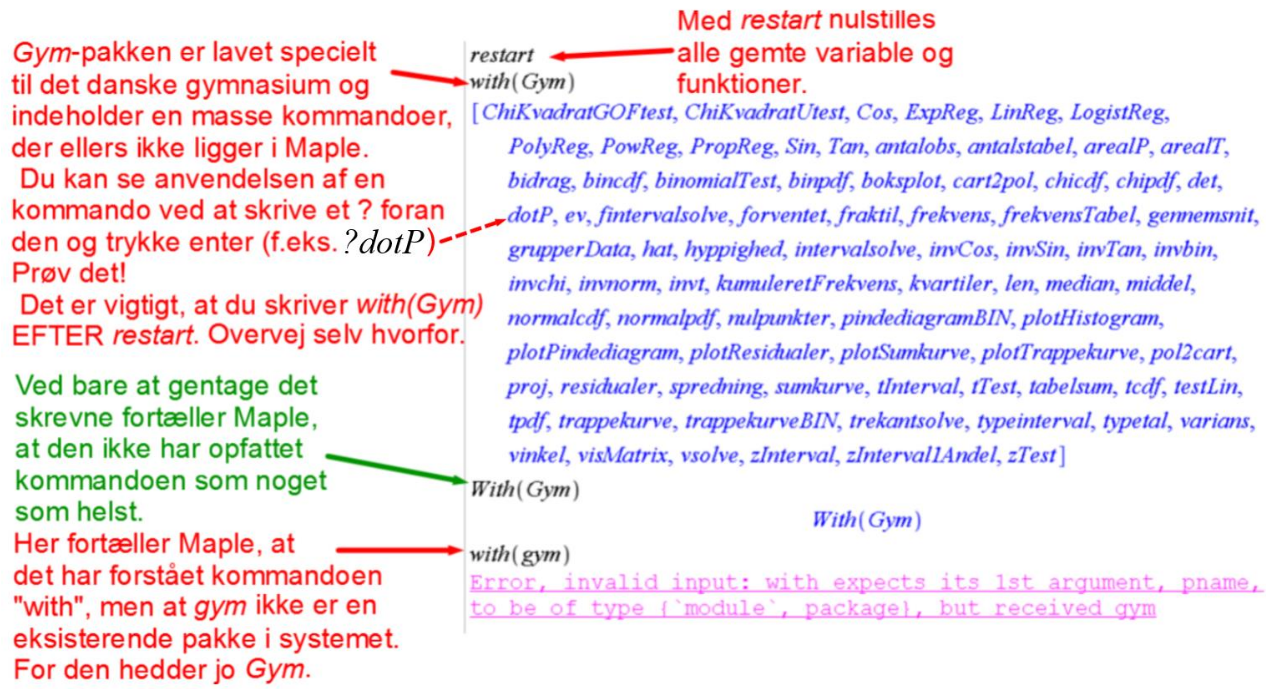
Når du efterfølgende åbner paletten ”Favorites”, vil den ikke se ud som min ”Favorites” til venstre. Du skal selv vælge dine favoritter ved at højreklikke på dem og vælge ”Add To Favorites Palette”.

Prøv allerede nu at finde nogle af de viste symboler under ”Common Symbols”, ”Calculus”, ”Accents” og ”Expression” og tilføj dem til favoritpaletten. F.eks:



Væn dig til altid at begynde en opgave med *restart* og *with(Gym)*.

Bemærk med det samme, at Maple skelner mellem store og små bogstaver, og bemærk, at mellemrum har afgørende betydning. Oftest skal du skrive tingene ud i ét. Maple sætter selv nogle mellemrum - f.eks. ved kommaer – og det kan snyde, når du læser disse noter:



Læs altid Maples lyserøde fejlmeddelelser. De kan hjælpe dig med at identificere en fejl.

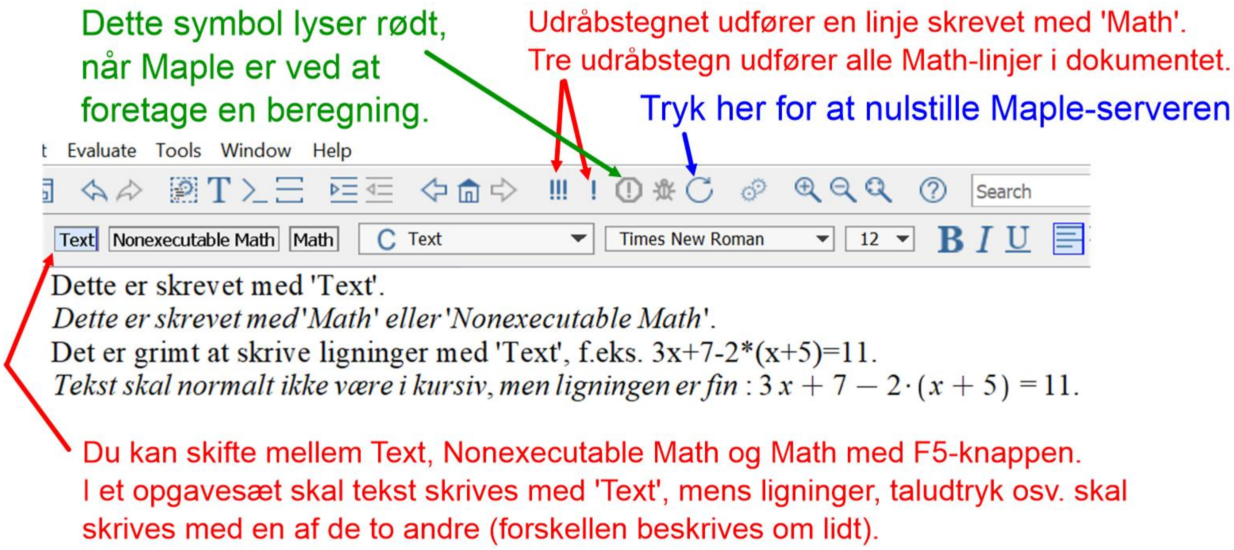
Når man har lært kommandoerne at kende, eller når man skal aflevere en opgave, der jo skal se ordentlig ud, skal man ikke se alt det med blå skrift. Dette gøres med et kolon ":". Gå op og tilføj et kolon efter *with(Gym)* og tryk enter.

```
restart
with(Gym) :
With(Gym)
                                        With(Gym)
with(gym)
Error, invalid input: with expects its 1st argument, pname, to be of
type {`module`, package}, but received gym
```

Du skal dog IKKE sætte dette kolon fra start. Indtast først kommandoen uden kolon, da du dermed kan se, om Maple har registreret kommandoen på den måde, du ønskede - jf. ovenstående eksempel med *with(Gym)* og *With(Gym)*. Når opgaven er løst, går du ind og sætter kolon, så man slipper for Maples blå gentagelser.

Nogle vigtige knapper

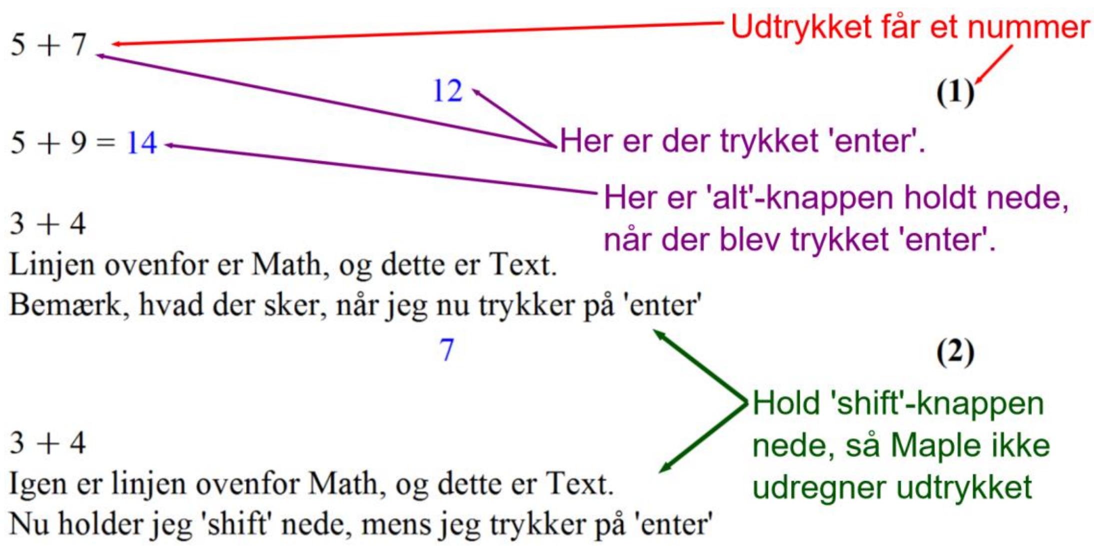
Der kan af forskellige årsager opstå rod i Maples lager. I så fald kan du nulstille Maple-serveren og efterfølgende med de tre udråbstegn gennemkøre samtlige kommandoer.



Om at trykke 'enter' i Maple

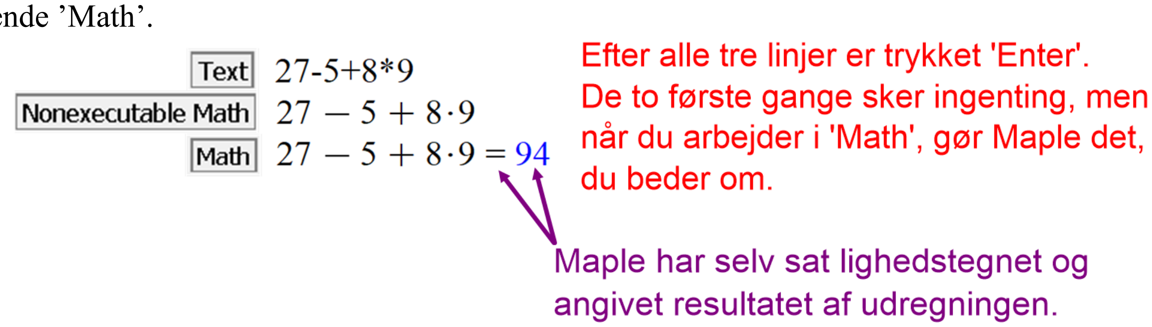
Du skal være opmærksom på, hvordan du anvender 'enter'-knappen i Maple. I Word eller andre tekstbehandlingsprogrammer giver det blot et linjeskift, men i Maple er 'enter' en besked om at udføre en udregning, så hvis du vil have et linjeskift i teksten, skal du holde 'shift'-knappen nede, når du trykker 'enter.

Og for at få resultatet af en udregning til at stå pænt skal du holde 'alt'-knappen nede, når du trykker 'enter' (se næste side)

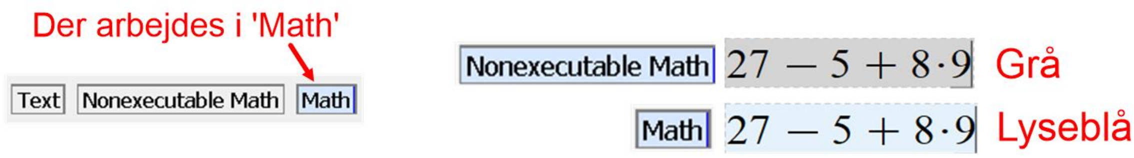


Opskrivning i Maple

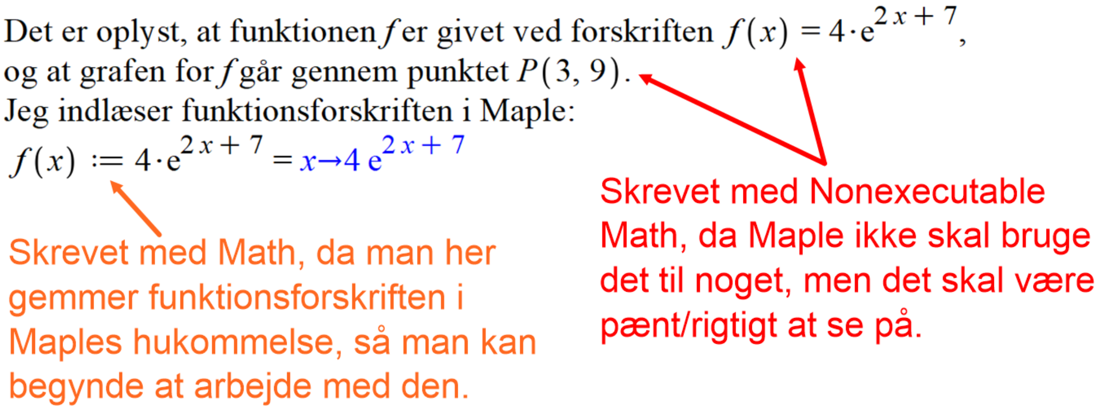
Hvis du vil have Maple til at foretage sig noget (løse en ligning, udregne et udtryk, …), skal du anvende 'Math'.



Du kan altid i menuen se på farven (lyseblå), om du arbejder i 'Text', 'Nonexecutable Math' eller 'Math'. Men du kan også skelne de to sidstnævnte fra hinanden ved at kigge på farven af det, du skriver (se nedenfor).



Nedenfor ses et eksempel på, hvordan man skal anvende de tre muligheder. Det er et eksempel på, hvordan besvarelsen af en opgave kunne begynde:



Du kan altid se, hvad Maple har tænkt sig at behandle, når du trykker enter:

restart

with(*Gym*) :

$$\boxed{3\,x^2 + 6\,x - 7 = 0}$$

Bemærk det stiplede rektangel, der afgrænser et stykke matematik.

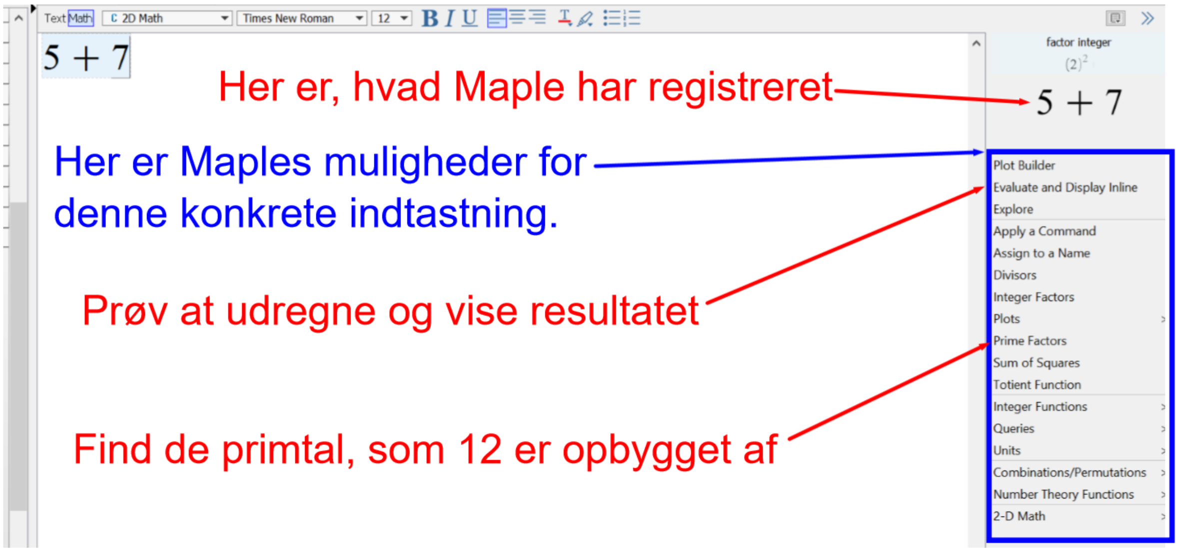
Sammenlign ovenstående med nedenstående og bemærk, hvordan man – hvis man har kludret i det og sat et tekst-mellemrum ind midt i det hele – kan opdage fejlen ved at holde øje med det stiplede område:

Hov!

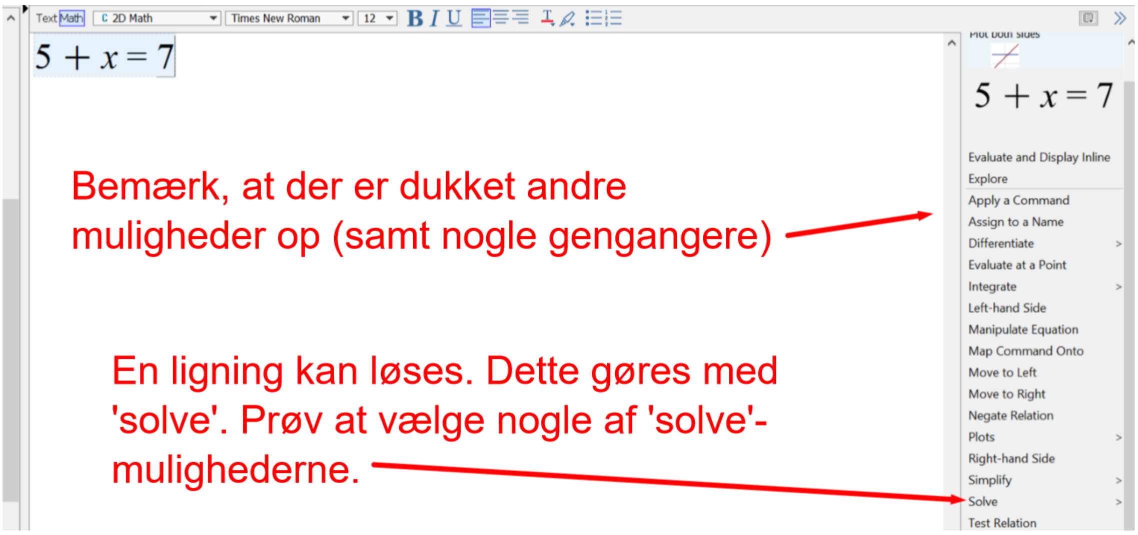
$$3\,x^2 \; \boxed{+ 6\,x - 7 = 0}$$

Maples muligheder

Når du har lavet en indtastning, kan du i højre side se, hvad Maple har registreret og hvilke muligheder Maple giver dig til behandling af indtastningen. I nedenstående eksempel er indtastet et udtryk, der bl.a. kan udregnes:



Hvis man indtaster en ligning, får man nogle andre muligheder:



?Gym

Hvis du skal se, hvordan man anvender Gym-pakkens kommandoer, kan du skrive *?Gym* og få en oversigt over kommandoerne (prøv det):

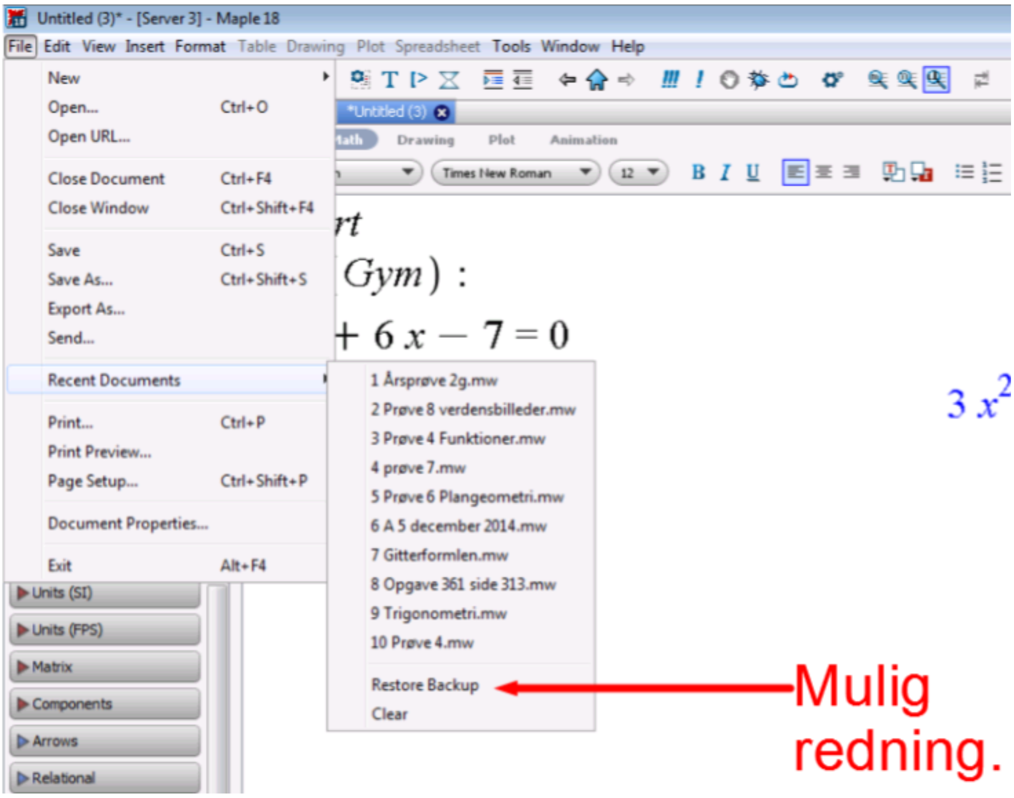
$$with(Gym):$$
$$?Gym$$

I et nyt vindue åbner så oversigten, hvor du kan klikke på de enkelte kommandoer (prøv det):

Solvere			
intervalsolve	fintervalsolve	nulpunkter	reelSolve
trekantsolve	TVM (finansSolver)	vektorsolve	
Trigonometriske funktioner til regning i grader			
Sin	Cos	Tan	
invSin	invCos	invTan	
arcSin	arcCos	arcTan	
Regressioner			
LinReg	ExpReg	PowReg	PolyReg
KvadReg	PropReg	LogistReg	MultiLinReg
Residualanalyse			
plotResidualer	residualer	residualspredning	residualQQplot
Vektorregning			

Restore Backup

Hvis du ikke har fået gemt dit dokument løbende og er så uheldig, at Maple pludselig ”fryser”, er det oftest muligt at redde det meste af det mistede, hvis du lukker Maple ned og FØRSTE GANG DU IGEN ÅBNER MAPLE med det samme går ned og vælger ”Restore Backup”:



Efter denne introduktion er vi klar til at se på, hvordan Maple anvendes på nogle matematiske problemstillinger.

LINEÆRE FUNKTIONER

En *lineær funktion* er en funktion med forskriften $f(x) = a \cdot x + b$.

a og b er såkaldte konstanter, der i konkrete situationer antager bestemte værdier. Så eksempler på lineære funktioner er:

$f(x) = 2x + 1$ (her er $a = 2$ og $b = 1$)

$f(x) = 13x - 7$ (her er $a = 13$ og $b = -7$)

$f(x) = -22{,}78x + 189{,}23$ (her er $a = -22{,}78$ og $b = 189{,}23$)

$f(x) = -x$ (her er $a = -1$ og $b = 0$)

$f(x) = x + \frac{5}{3}$ (her er $a = 1$ og $b = \frac{5}{3}$)

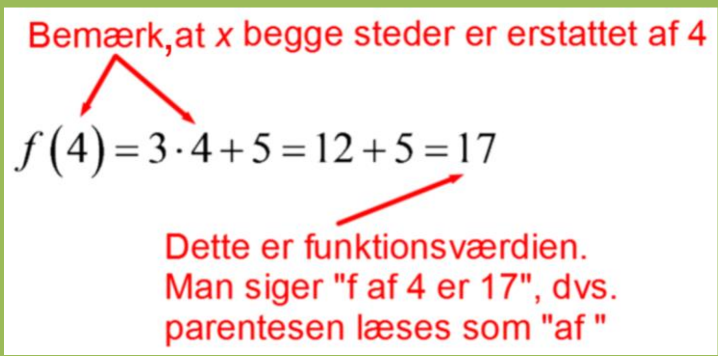
$f(x) = 7 + 2x$ (her er $a = 2$ og $b = 7$ (Bemærk, at leddene er byttet rundt))

x kaldes den *uafhængige variabel*, og *f(x)* er *funktionsværdien* eller den *afhængige variabel* (angivet som *y*, hvis det er en ligning).

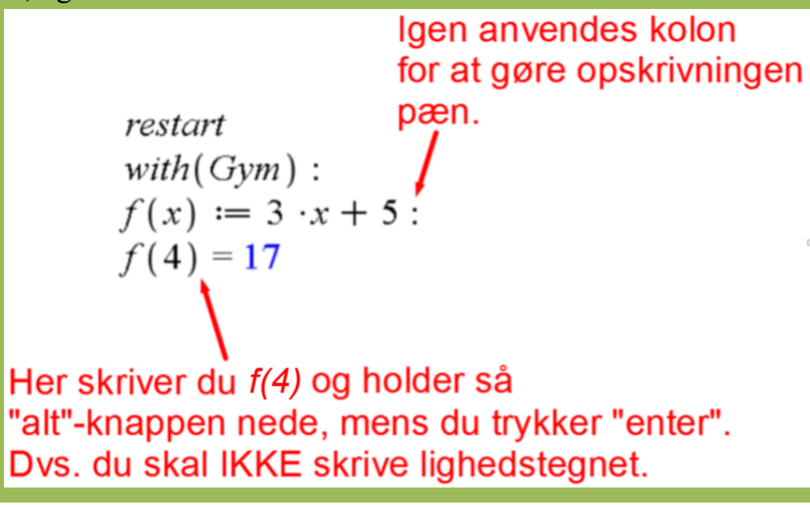
Det skal forstås på den måde, at du selv kan vælge din uafhængige variabel, og værdien af den afhængige variabel afhænger så af dette valg.

Eksempel 1: Vi ser på den lineære funktion *f* med funktionsforskriften $f(x) = 3 \cdot x + 5$.

Vi vælger nu – uden nogen bestemt grund – at vores uafhængige variabel *x* skal være 4. Vi indsætter dette i forskriften ved alle steder at erstatte *x* med 4:



I Maple foregår dette ved først at definere funktionen, hvilket sker med ":=" i stedet for bare "=", og derefter kan man indsætte værdier:



Eksempel 2: Man kan med udgangspunkt i $f(x)=3\cdot x+5$ fra Eksempel 1 stille spørgsmålet: ”Hvilken *x*-værdi vil give os funktionsværdien 2?”

Den matematiske opskrivning af dette er: $f(x)=2$.

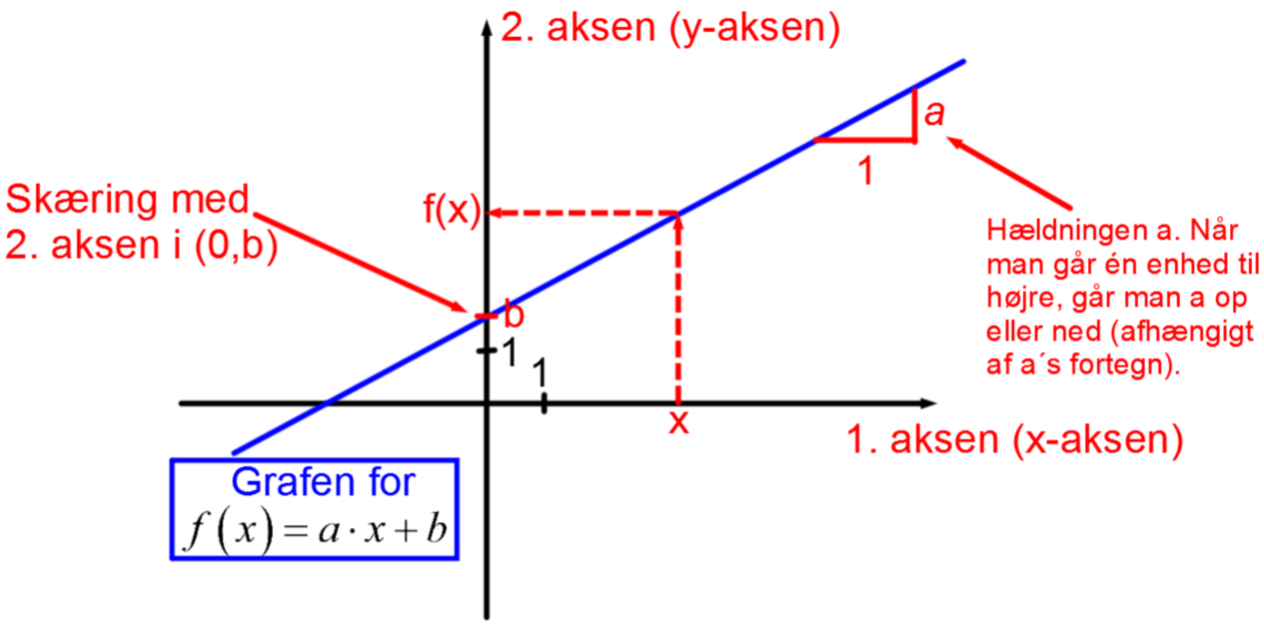
Maple kan som tidligere vist løse denne opgave (som er en ligning), hvis man opskriver udsagnet og vælger ’solve’ i menuen til højre. Her dukker flere forskellige muligheder op. Prøv nogle forskellige. I nedenstående opskrivning er der valgt ”solve” igen:

$$f(x)=2 \xrightarrow{\text{solve}} \{x=-1\}$$

Maple fortæller os altså, at hvis $x=-1$, er funktionsværdien 2, eller skrevet matematisk: $f(-1)=2$.

Man kan frit vælge *x*-værdier, og hver gang får man en tilsvarende funktionsværdi. Dette kan afbildes i et koordinatsystem ved at indsætte punkterne $(x, f(x))$. Der er uendeligt mange af sådanne punkter, da man kan vælge en hvilken som helst værdi for *x*, og grafen bliver så en ret linje med hældningen *a* og skæringen *b* med andenaksen:

Sætning 1: Grafen for den lineære funktion $f(x)=a\cdot x+b$ er i et almindeligt koordinatsystem en ret linje med hældningen *a* og skæring med andenaksen i punktet $(0,b)$.



Tjek, at du kan forstå tegningen ovenfor.

Lineære funktioner er vigtige, da de optræder ofte i den ”virkelige” verden.

Eksempel 3: Du skal købe mangoer, der koster 12 kr. stykket, og du skal købe en pose til 3 kr. at bære dem i. Lad *x* være antallet af mangoer, og lad *P(x)* være prisen målt i kr., du skal betale. Funktionsudtrykket bliver så – under forudsætning af at der ikke bliver behov for mere end én pose – følgende:

$P(x)=12\cdot x+3$.

Vi vil gerne vide to ting:

a) Hvor meget koster det dig at købe 7 mangoer?

b) Hvor mange mangoer kan du købe for 100 kroner?

Dette løses i Maple:

$P(x) := 12\cdot x + 3 :$

Hvis man skal have 7 mangoer, er $x = 7$.

$P(7) = 87$

Dvs. det koster $\underline{\underline{87\ kr.}}$ at købe 7 mangoer.

Hvis man har 100 kroner, er $P(x) = 100$:

$P(x) = 100 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{x = \frac{97}{12}\right\}$

$P(x) = 100. \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 8.083333333]]$

Man kan altså købe $\underline{\underline{8\ mangoer}}$ for 100 kroner.

Her ser den samme udregning ud til at være foretaget to gange.
Men bemærk punktumet efter 100 i den nederste af de to. Det sørger for, at der ikke regnes eksakt, dvs. resultatet kommer ud som et decimaltal i stedet for en brøk (brøken er den eksakte løsning)

Eksempel 4: Massefylden af saltvand afhænger af saltkoncentrationen i vandet. Ved 20 °C har man målt følgende:

Saltindhold (gram NaCl pr. L opløsning)	50	100	150	200	250
Massefylde (gram pr. milliliter)	1,033	1,066	1,098	1,129	1,160

Vi regner med, at der er tale om en lineær sammenhæng, men vil gerne undersøge, om det er tilfældet, og hvis det er tilfældet, vil vi gerne have en funktionsforskrift for massefylden som funktion af saltindholdet.

I tilfælde, hvor man har mere end 2 sæt sammenhørende værdier, skal man foretage *regression*. Dette gøres i Maple ved først at definere lister med firkantede parenteser (**husk selv at gennemføre alle indtastninger i eksemplerne**), hvorefter vi har nogle kommandoer fra Gym-pakken, der foretager udregninger for os

(se næste side):

$restart$

$with(Gym):$

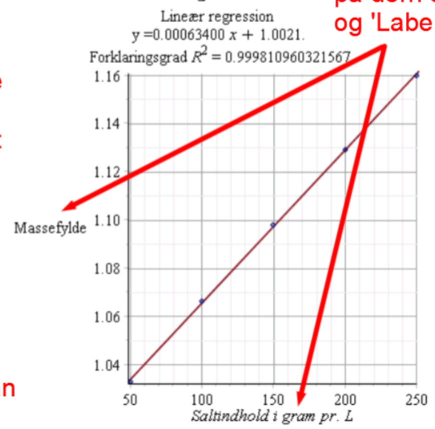
$Saltindhold := [50, 100, 150, 200, 250]:$

$Massefylde := [1.033, 1.066, 1.098, 1.129, 1.160]:$

Prøv selv at ændre navn på akserne ved at højreklikke på dem og så vælge 'Axes' og 'Labels'.

Bemærk, at du bruger "," til at adskille tal, mens "." anvendes til at angive decimaltal. Dette gælder helt generelt i Maple.

$LinReg(Saltindhold, Massefylde) =$



Når du skriver dette og når til "Sal.." og "Mas.." vil Maple genkende disse, fordi du allerede har defineret dem, og du kan så med "tab"-knappen få skrevet dem.

Bemærk, at punkterne danner en ret linje, og dermed ser vores forventning ud til at holde. Vi kan også aflæse ligningen for den rette linje lige over grafen.

Hvis vi ikke behøver at se grafen, men bare vil have en lineær funktionsforskrift, kan vi gøre følgende, hvor vi lader *M* betegne massefylden målt i g/mL og *S* saltindholdet målt i g/L:

Bemærk, at du skal angive symbolet for din uafhængige variabel.

$M(S) := LinReg(Saltindhold, Massefylde, S):$

$M(S) = 0.000634000000000000\, S + 1.00210000000000$

Husk at holde "alt"-knappen nede, når du trykker "enter".

Nu kender Maple forskriften, og du kan bruge den til f.eks. at besvare spørgsmålene:

a) Hvor stor vil massefylden være, hvis man opløser 133 g NaCl pr. L opløsning?

b) Hvor mange gram NaCl pr. liter opløsning skal opløses, hvis man skal have en massefylde på 2 g/mL?

a) Ifølge spørgsmålet er $S = 133$, så Maple skal udregne:

$M(133) = 1.08642200000000$

Dvs. massefylden vil være $\underline{\underline{1.086\ g\ pr.\ mL}}$

b) Ifølge spørgsmålet har man $M(S) = 2$:

$M(S) = 2 \xrightarrow{\text{solve for S}} [[S = 1573.974763]]$

Dvs. ifølge vores model, skal der opløses 1574 g NaCl pr. liter opløsning.

Hvis man tænker lidt over dette, kan man se, at det virker ret voldsomt, og faktisk kan det slet ikke lade sig gøre. Massefylden kan aldrig blive så stor. En mættet saltvandsopløsning har massefylden 1,197 g/mL.

Så her er en meget vigtig pointe, du altid skal holde dig for øje:

Der er grænser for modellers rækkevidde.

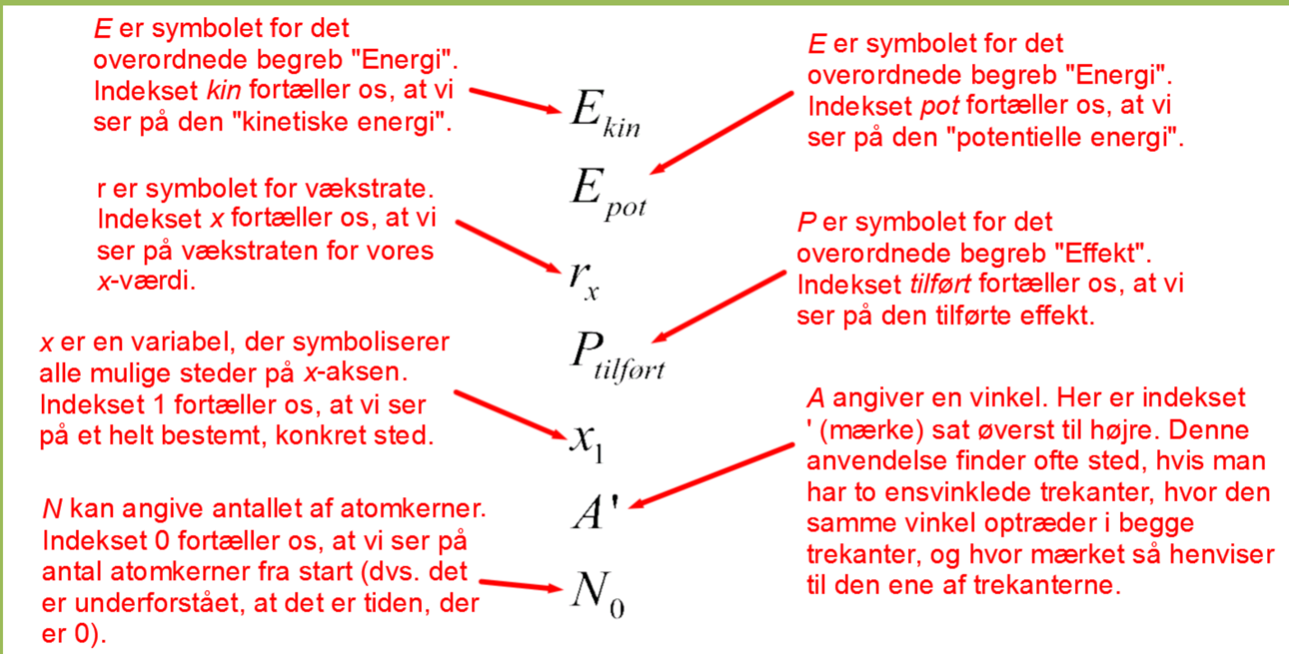
Opgaverne 001*

ANVENDELSE AF INDICES

Index er det latinske (anatomiske) navn for pegefingeren.

Et *index* angiver eller udpeger en mere udspecificeret del af et begreb. Indices er meget udbredt inden for naturvidenskaberne og i matematik. De kan placeres forskellige steder i forhold til det symbol, der angiver det overordnede begreb. Vi vil oftest sætte indices nederst til højre.

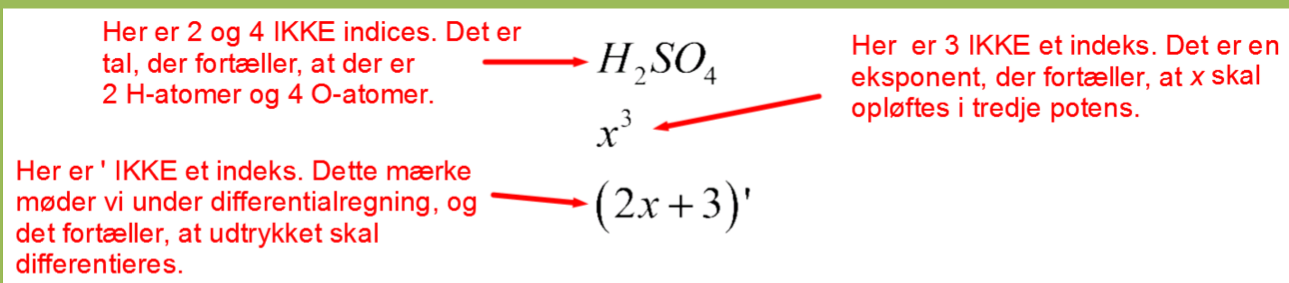
Eksempel 5: Her følger en række eksempler, der gerne skulle gøre ovenstående forståeligt:



Indices er en herlig opfindelse, som du hurtigst muligt skal vænne dig til at bruge. Det er en meget simpel og hurtig måde at forklare tankegangen i en opgave. Sommetider kan du med fordel anvende dobbelte indeks, f.eks. $E_{kin,start} + E_{pot,start} = E_{kin,slut} + E_{pot,slut}$, der er den såkaldte mekaniske energibevarelse, hvor formlen fortæller os, at summen af den kinetiske energi til slut og den potentielle energi til slut er lige så stor som summen af den kinetiske energi fra start og den potentielle energi fra start. Sammenlign teksten og formlen og se, hvad der er mest overskueligt.

Det er vigtigt at bemærke, at et indeks IKKE er et regnesymbol eller på anden måde fortæller, at vi skal gøre noget som helst ved det pågældende begreb.

Eksempel 6: Her følger noget, der **IKKE** er indices.

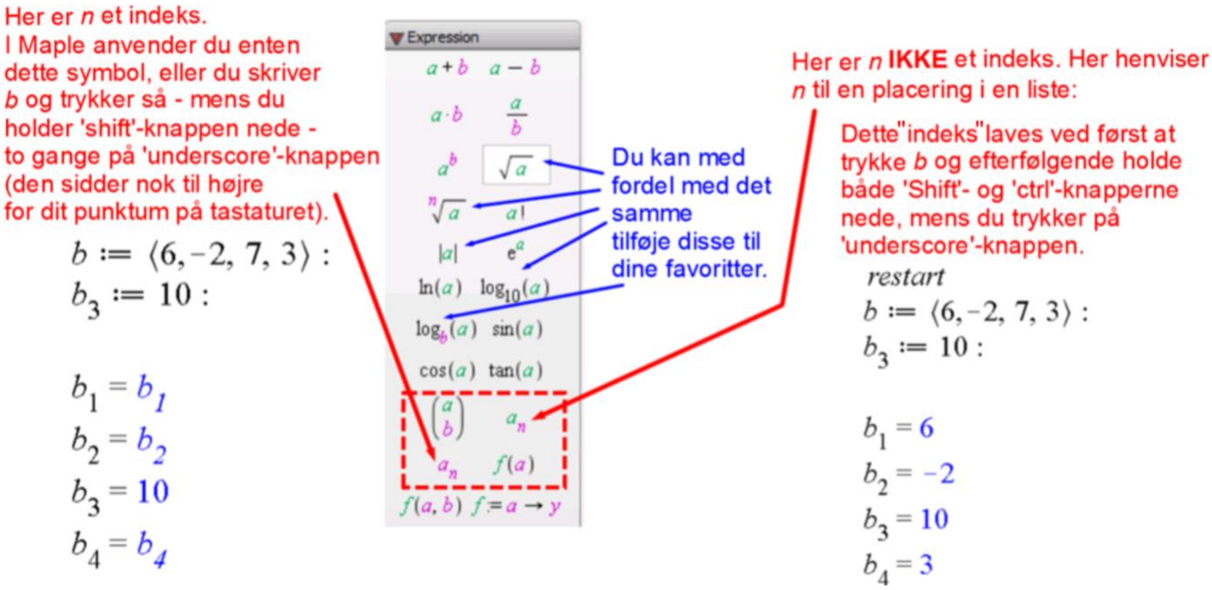


Indices i Maple

I Maple laver du et indeks ved at holde 'Shift'-knappen (den brede knap med en pil opad) nede, mens du to gange trykker på 'Underscore'-knappen, der nok sidder mellem dit punktum og den ene 'shift'-knap. Afprøv dette ved at først at skrive et symbol og efterfølgende tilføje et indeks.

Men der er også en anden skrivemåde, der ser ud på nøjagtig samme måde som et indeks, men betyder noget andet. Det er en skrivemåde, hvor du henviser til en placering i en liste. Dette gør du ved at holde både 'Shift'- og 'Ctrl'-knappen nede og trykke på 'Underscore-knappen én gang. Afprøv også dette.

Begge skrivemåder findes også som symboler i Maple (gå ind under Expression):



Bemærk, at det ensfarvede symbol er et indeks, fordi indekset jo sammen med symbolet udgør en enhed. Symbolet med det turkise *a* og det violette *n* fortæller, at *n* ikke hænger direkte sammen med *a*, men henviser til en placering i listen *a*.

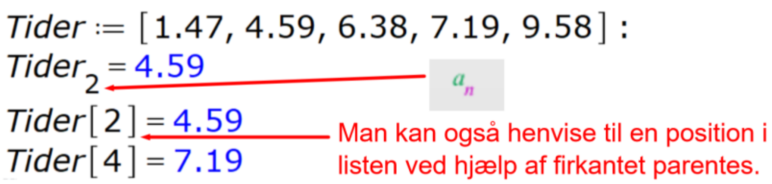
Prøv selv at opskrive ovenstående i Maple (både det på venstre- og højresiden). På venstresiden skal det skrive med indices. På højresiden skal det skrives, så der henvises til en placering i listen. Du laver de trekantede parenteser med tasterne "<" og ">".

Venstre side (anvendelse af indeks): Her definerer du en liste *b* og en variabel b_3. Det er to helt forskellige størrelser, der INTET har med hinanden at gøre.

Når du bagefter beder Maple om at angive, hvad b_1, b_2, b_3 og b_4 er, genkender Maple kun b_3, som du har defineret til at være 10. I de tre andre tilfælde gentager Maple bare din indtastning og viser dermed, at din indtastning ikke henviser til noget, Maple kender.

Højre side (anvendelse af henvisning til placering i liste): Her definerer du først en liste *b* med fire placeringer. Efterfølgende omdefinerer du den tredje placering i listen, dvs. du erstatter 7-tallet med tallet 10. Når du efterfølgende beder Maple om at angive, hvad b_1, b_2, b_3 og b_4 er, får du tallene placeret i listen *b*. Prøv også blot at skrive *b* og trykke 'alt'+'enter'.

Man kan også henvise til en position i en liste ved hjælp af firkantet parentes:



EKSPONENTIELLE UDVIKLINGER

En *eksponentiel udvikling* er en funktion med forskriften $f(x) = b \cdot a^x \quad ; \ a > 0 \ ; \ a \neq 1 \ ; \ b > 0$

Igen er *a* og *b* konstanter, der dog i dette tilfælde SKAL være positive.
Så eksempler på eksponentielle udviklinger er:

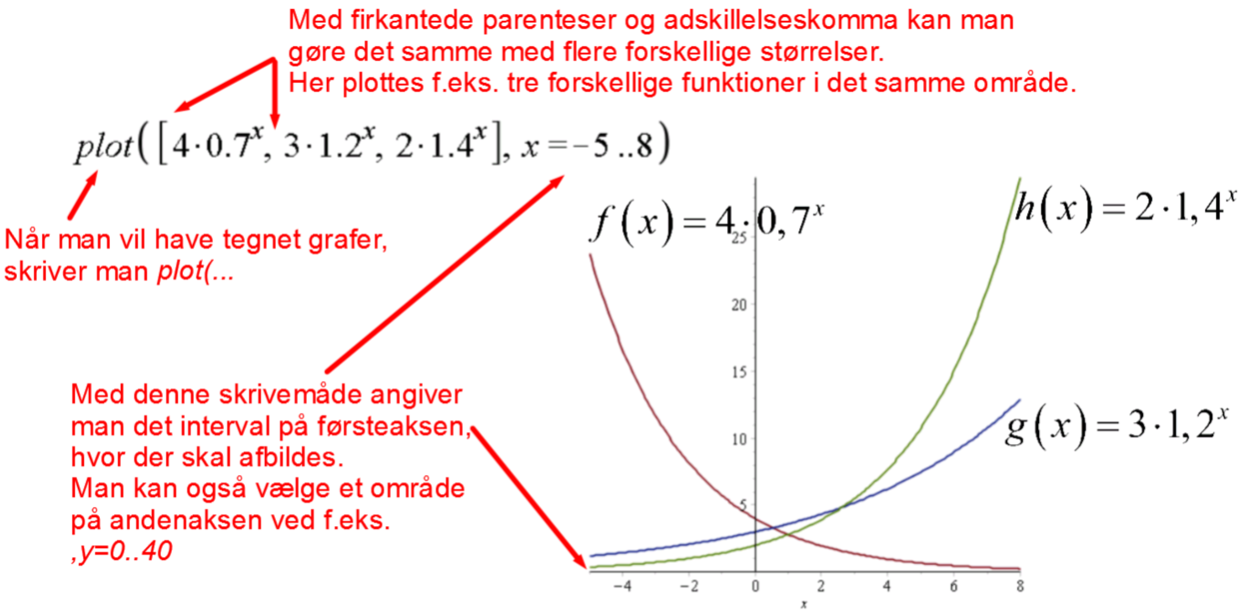
$$f(x) = 5 \cdot 3^x \quad \text{(Her er } a = 3 \text{ og } b = 5\text{)}$$

$$f(x) = 0,7 \cdot 13,7^x \quad \text{(Her er } a = 13,7 \text{ og } b = 0,7\text{)}$$

$$f(x) = 1,06^x \quad \text{(Her er } a = 1,06 \text{ og } b = 1\text{)}$$

Igen vil *b* angive skæringen med andenaksen, men grafen for en eksponentiel udvikling giver ikke en ret linje i et almindeligt koordinatsystem, så den har ingen hældning.
I stedet gælder følgende:

b er skæringen med andenaksen, og *a* kaldes *fremskrivningsfaktoren* (eller grundtallet), og den fortæller noget om, hvordan grafen buer.
Hvis $0 < a < 1$, har man en aftagende funktion med en graf, der buer som en tur ned ad en rutsjebane, når man bevæger sig mod højre (se den rødbrune graf nedenfor).
Hvis $a > 1$, har man en voksende funktion med en graf, der buer opad, når man bevæger sig mod højre. Jo større *a* er, jo hurtigere skyder grafen til vejrs (se grøn og blå graf nedenfor):



Tjek, at du forstår betydningen af *a* og *b* ved at kigge på graferne.

Fremskrivningsfaktoren *a* er knyttet til *vækstraten r* (også kaldet *rentefoden*) ved $a = 1 + r$.

Eksempel 7: Hvis $f(x) = 3,91 \cdot 1,57^x$ er $a = 1,57$ og dermed $r = 0,57 = 57\%$

Dette betyder, at hver gang *x* øges med én enhed, så øges *f(x)* med 57%.

Hvis $f(x) = 6,48 \cdot 0,83^x$ er $a = 0,83$ og dermed $r = -0,17 = -17\%$

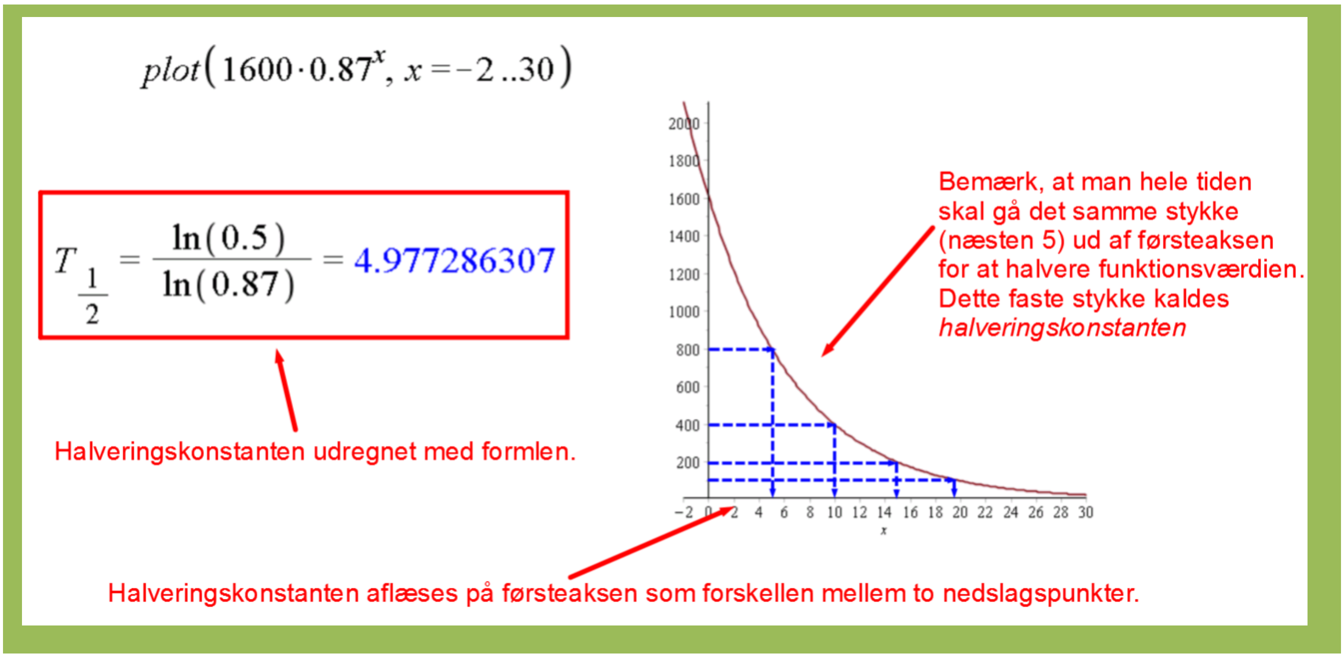
Dette betyder, at hver gang *x* øges med én enhed, så **falder** *f(x)* med 17%.

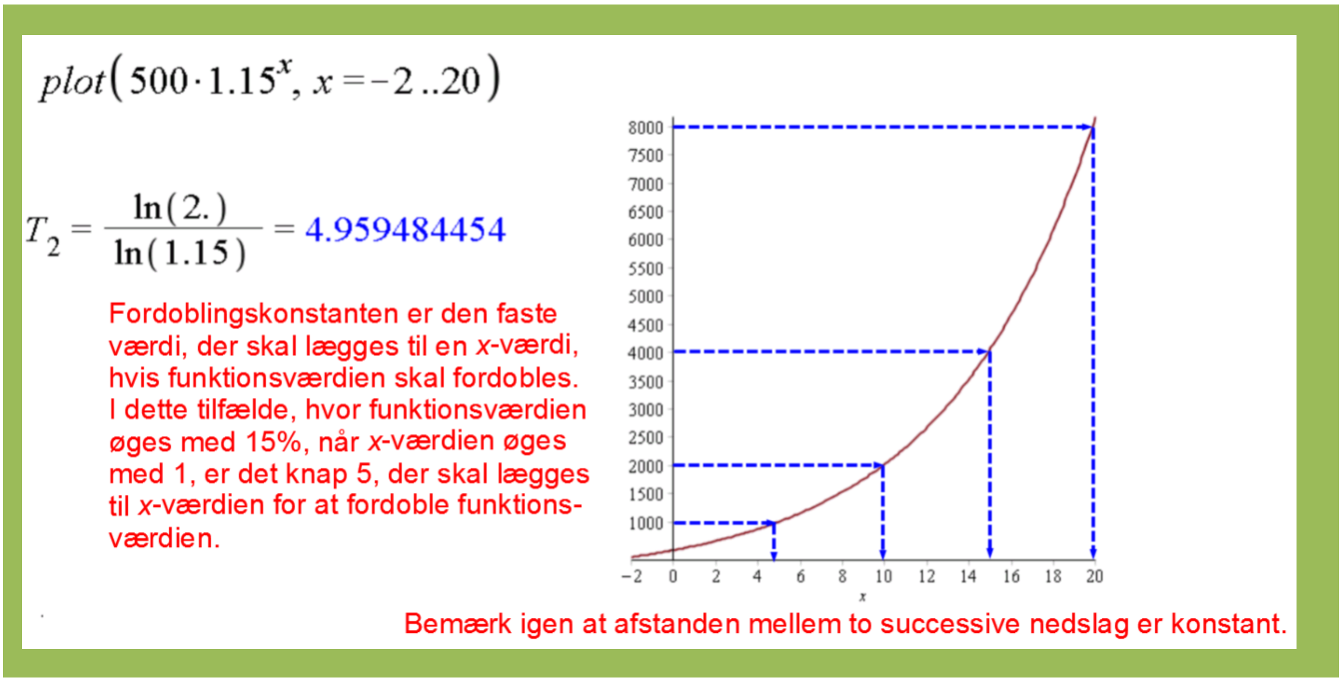
Der gælder følgende vigtige egenskaber for eksponentielle udviklinger, som vi på et senere tidspunkt skal udlede og behandle mere grundigt, men som vi i første omgang blot skal illustrere:

Sætning 2: Grafen for en eksponentiel udvikling $f(x) = b \cdot a^x$ er en ret linje, når den afbildes i et *enkeltlogaritmisk* koordinatsystem.

For en aftagende eksponentiel vækst (dvs. $0 < a < 1$) er halveringskonstanten $T_{½} = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(a)}$

For en voksende eksponentiel vækst (dvs. $a > 1$) er fordoblingskonstanten $T_2 = \dfrac{\ln(2)}{\ln(a)}$.





Kig igen på de to grafer. Det er på andenakserne, der halveres/fordobles, men det er på førsteakserne, at du kan aflæse halverings- eller fordoblings**konstanterne**.

Vi mangler nu at forklare, hvad et *enkeltlogaritmisk koordinatsystem* er. Den rigtige forklaring kommer først senere, når vi har gennemgået logaritmer, men her illustreres det grafisk i følgende eksempel, hvor vi også samler op på de andre informationer i forbindelse med eksponentielle udviklinger:

Eksempel 8: ${}^{99m}Tc$ er en metastabil nuklear isomer af isotopen technetium-99. Den er radioaktiv og er et af de mest anvendte radioaktive stoffer på hospitalerne, hvor dets gammahenfald anvendes til diagnosticering.

I vores opgave får en patient indsprøjtet ${}^{99m}Tc$, og man måler tælletallene N (registrerede henfald pr. sekund) til forskellige tider t, hvor t måles i antal timer efter indsprøjtningen.

Tid	1	3	5	7	9	11
Tælletal	159	125	101	78	63	51

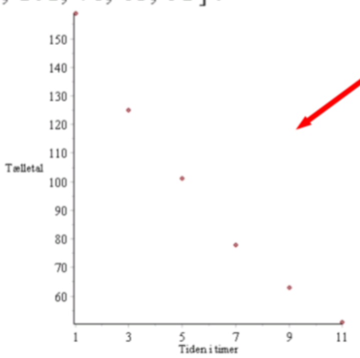
Vi ønsker svar på følgende spørgsmål:

a) Kan vi benytte en eksponentiel model til at beskrive tælletallet som funktion af tiden?
b) Hvad er i så fald funktionsforskriften?
c) Hvad er i så fald halveringstiden (det er tydeligvis en aftagende funktion)?
d) Hvad var tælletallet ifølge modellen lige efter indsprøjtningen?
e) Hvad vil tælletallet ifølge modellen være efter 20 timer?
f) Hvornår er tælletallet nede på 1?
g) Hvornår er tælletallet 0?

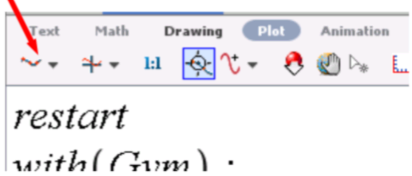
Spørgsmålene a) og b) kan du ikke svare på selv endnu. Men når du kommer til spørgsmål c), så tag spørgsmålene et for et. Prøv først selv at besvare dem ved hjælp af Maple, og læs derefter besvarelsen:

restart
with(*Gym*) :
a) Når vi skal undersøge, om noget er en eksponentiel udvikling, skal vi se, om det danner en ret linje i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem. Så vi skal have plottet punkterne:
$Tid := [1, 3, 5, 7, 9, 11]$:
$Tælletal := [159, 125, 101, 78, 63, 51]$:

plot(*Tid*, *Tælletal*) =



Når du plotter som vist, får du til at begynde med ikke rene punkter (som man skal), men forbundne punkter. Dette ændrer du ved at markere grafen (venstreklik) og så vælge 'Plot style point'.



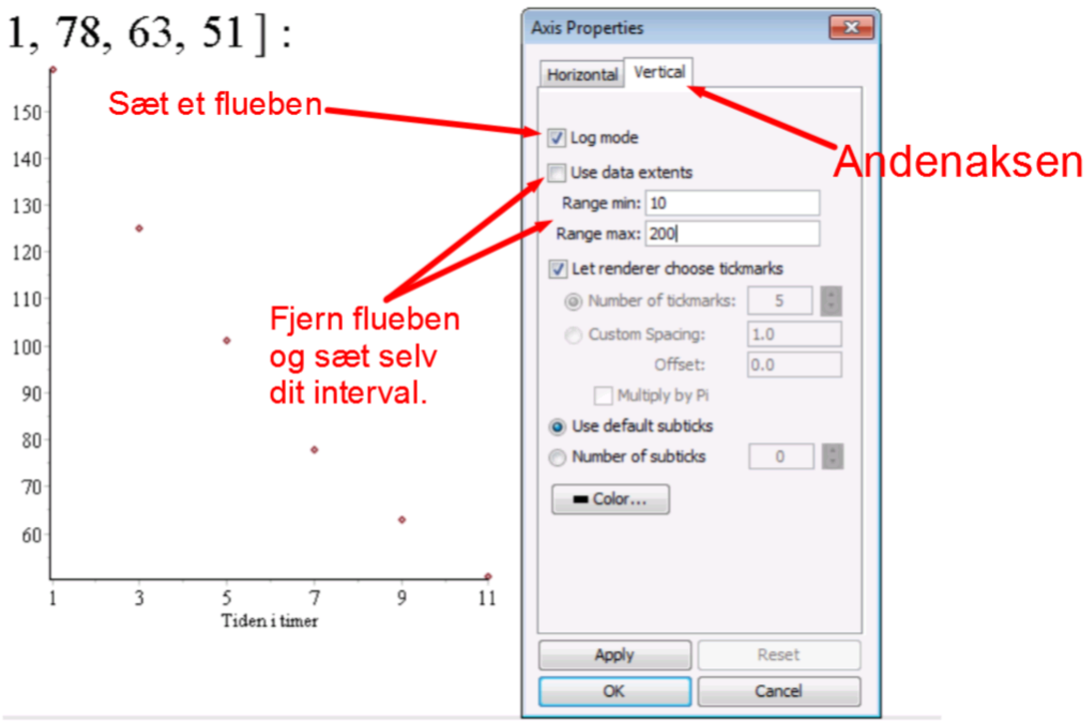
Vi har endnu ikke fået svar på vores spørgsmål, for vores koordinatsystem er ikke enkeltlogaritmisk, og vi ser da også, at punkterne bare danner en bue.

Bemærk her den meget vigtige pointe:

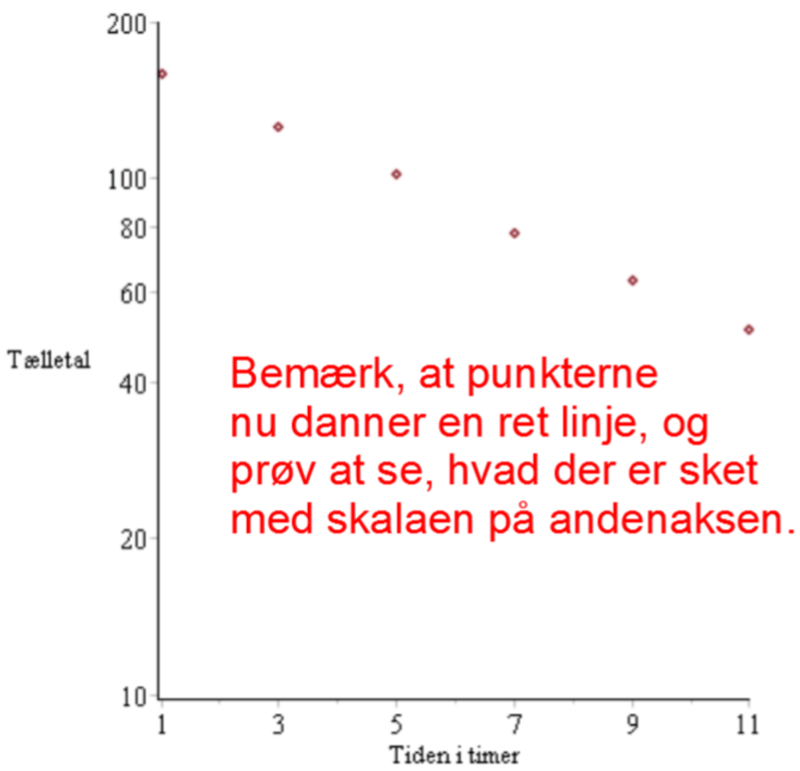
Man kan ikke vurdere buer, dvs. man kan ikke ud fra en bue sige "det er tydeligvis en eksponentiel udvikling", for der er uendelig mange andre funktioner, der giver buer. Man kan få en mistanke om det, men denne mistanke skal så bekræftes i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem. Man kan nemlig – som det eneste – vurdere rette linjer.

Når vi skal lave et enkeltlogaritmisk koordinatsystem, skal vi gøre vores **andenakse** logaritmisk (hvis du gør førsteaksen logaritmisk, har du jo godt nok stadig kun en enkelt logaritmisk akse, og i et sådant koordinatsystem vil logaritmefunktioner give rette linjer, men det er underforstået – dvs. sådan har man nu engang defineret ordet – at *enkeltlogaritmisk* henviser til en logaritmisk andenakse og ”almindelig” førsteakse):

Højreklik på diagrammet og vælg ’Axes’ og ’Properties’:



Du får nu:

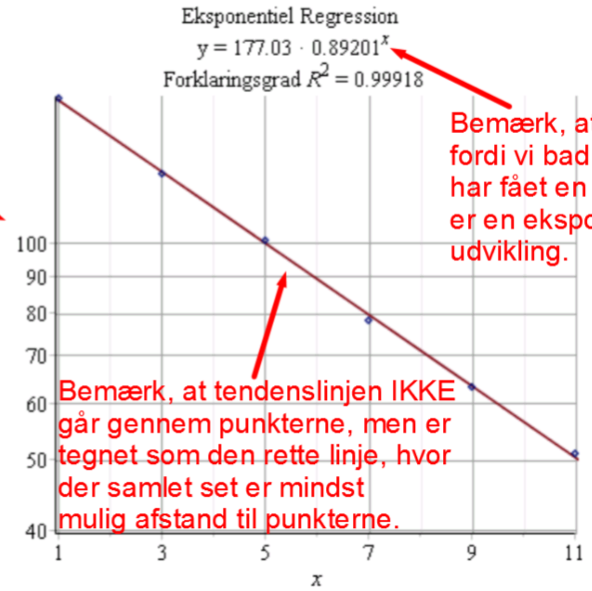


Da punkterne danner en ret linje i det enkeltlogaritmiske koordinatsystem, er der tale om en eksponentiel udvikling.

Hvis vi gerne vil se det med tendenslinje, gør vi, som vi gjorde med den lineære funktion, bortset fra at vi nu skal lave eksponentiel regression i stedet for lineær regression:

Prøv selv at gøre aksen logaritmisk med intervallet [40,200].

$$ExpReg(Tid, Tælletal) =$$



Bemærk, at vi nu - fordi vi bad om det - har fået en ligning, der er en eksponentiel udvikling.

Bemærk, at tendenslinjen IKKE går gennem punkterne, men er tegnet som den rette linje, hvor der samlet set er mindst mulig afstand til punkterne.

Bemærk, at der nu laves <u>eksponentiel</u> regression.

Nu har vi fået vist, at der er tale om en eksponentiel udvikling, og vi skal derfor til at svare på de næste spørgsmål. Her har vi ikke brug for grafen og gør derfor følgende:

Bemærk igen, at du skal angive, hvad du anser som den uafhængige variabel, og den skal passe med den tabel, der står først i udtrykket.

b) $N(t) := ExpReg(Tid, Tælletal, t)$:

$$N(t) = 177.031164659072\ 0.892011451864495^t$$

Dvs. vores funktionsforskrift er $\underline{\underline{N(t) = 177 \cdot 0.8920^t}}$

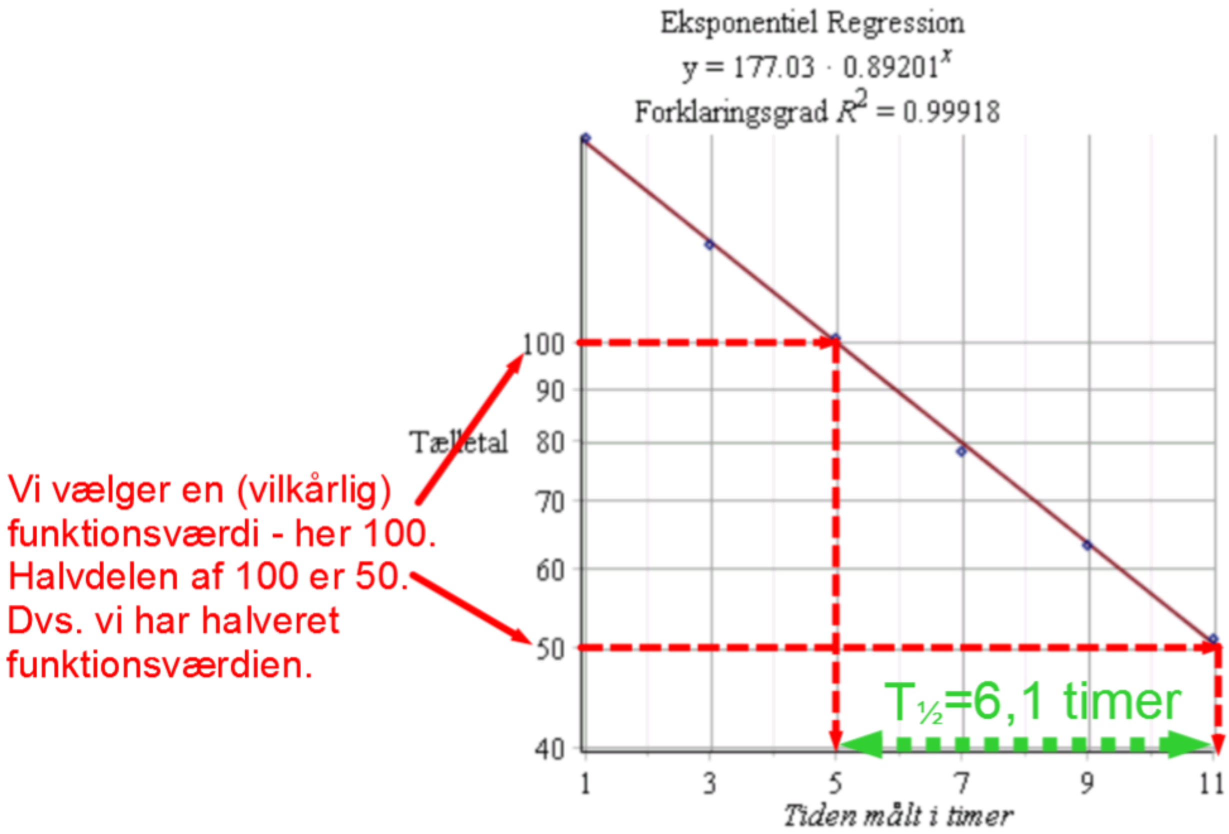
Læg mærke til den lidt underlige - og uheldige - skrivemåde, hvor Maple ikke skriver gangetegnet.
Det skal du selv råde bod på, når du angiver facit.

c) Vi kan udregne halveringstiden med vores formel $T_{\frac{1}{2}} = \dfrac{\ln(0.5)}{\ln(a)}$, og

vi kan efterfølgende tjekke på grafen, at det ser rimeligt ud:
Bemærk, at man kan aflæse $a = 0.892011451864495$ (brug 'copy'-'paste'):

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.892011451864495)} = 6.065537054$$

Dvs. at halveringstiden er $\underline{\underline{6.1\ timer}}$



d) Lige efter indsprøjtningen er $t = 0$, dvs. vores begyndelsesværdi på 177 fortæller os, at <u>lige efter indsprøjtningen er tælletallet ifølge modellen 177.</u>

e) 20 timer efter indsprøjtningen svarer til $t = 20$:

$N(20) = 18.0077032947531$

Dvs. tælletallet vil 20 timer efter indsprøjtningen være $\underline{\underline{18}}$

f) Hvis tælletallet skal ned på 1, skal $N(t) = 1$:

$N(t) = 1 \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t = 45.29657876]]$

Dvs. efter $\underline{\underline{45.3 \ timer}}$ er tælletallet ifølge modellen nede på 1.

Bemærk, at når Maple ikke skriver noget, er det dets måde at angive, at det ikke kunne finde nogen løsninger. Det er vigtigt at vide, da det ellers kan se ud, som om der er sket en fejl.

g) Hvis tællletallet skal ned på 0, skal $N(t) = 0$:

$N(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve}}$

Her er ingen løsninger, dvs. tælletallet kommer ifølge modellen aldrig ned på 0. I virkeligheden vil dette dog ske, men det viser igen, at modeller har begrænset rækkevidde.

Opsamling på eksponentielle udviklinger

Nogle af de egenskaber, vi har set på, er karakteristiske for eksponentielle udviklinger.
Dvs. de er de eneste funktioner med disse egenskaber.

Karakteristiske egenskaber ved eksponentielle udviklinger: $f(x) = b \cdot a^x$

a) Grafen danner en ret linje i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem.
b) Der findes enten en halverings- eller en fordoblingskonstant.
c) Når man går én enhed ud af *x*-aksen, øges funktionsværdien med en fast procentdel $r = a - 1$
d) Når man vedbliver med at lægge en fast værdi til *x*-værdien, vil funktionsværdien vedblive med at ændres med en fast procentdel.

Egentlig er b), c) og d) tre sider af samme sag.
"d)" er den mest generelle af de tre, og de to andre kan betragtes som specialtilfælde. For hvis man tager udgangspunkt i "d" og lader 1 være den faste værdi, man vedbliver at lægge til *x*-værdien, så vil $r = a - 1$ være den faste procentdel, som funktionsværdien ændres med.
Og hvis man vender situationen om og tager udgangspunkt i procentdelen og sætter denne til $r = -50\%$ eller $r = 100\%$, så finder man henholdsvis halverings- eller fordoblingskonstanten.

Tænk grundigt over betydningen af "karakteristiske egenskaber". Hvis du IKKE arbejder med en eksponentiel udvikling, giver det INGEN MENING at snakke om halverings- eller fordoblingskonstanter.

POTENSFUNKTIONER (ganget med en konstant)

Definition: En *potensfunktion ganget med en konstant* har forskriften:

$$f(x) = b \cdot x^a \;;\; b > 0 \;;\; x > 0 \;;\; a \neq 0$$

Bemærk, at det igen kræves, at b er positiv, men bemærk også forskellen fra eksponentielle udviklinger, nemlig at vi nu kun ser på positive værdier af vores uafhængige variabel, og at a til gengæld nu gerne må være negativ.

Da x ikke må være 0, har vi ingen begyndelsesværdi. b må derfor have en anden betydning i dette tilfælde. Vi samler her betydningen af konstanterne og de karakteristiske egenskaber for potensfunktioner (ganget med en konstant):

Sætning 3: For en funktion af typen $f(x) = b \cdot x^a \;;\; b > 0 \;;\; x > 0 \;;\; a \neq 0$ gælder:

a) Grafen går gennem punktet $(1, b)$.

b) Hvis $a < 0$ har man en aftagende funktion, hvor grafen er en bue og løber ned langs y-aksen og hen langs x-aksen.

c) Hvis $0 < a < 1$ har man en voksende funktion med aftagende væksthastighed, hvor grafen buer, som om x-aksen trak mere i den end y-aksen (*konkav*).

d) Hvis $a > 1$ har man en voksende funktion med voksende væksthastighed, hvor grafen buer, som om y-aksen trak mere i den end x-aksen (*konveks*).

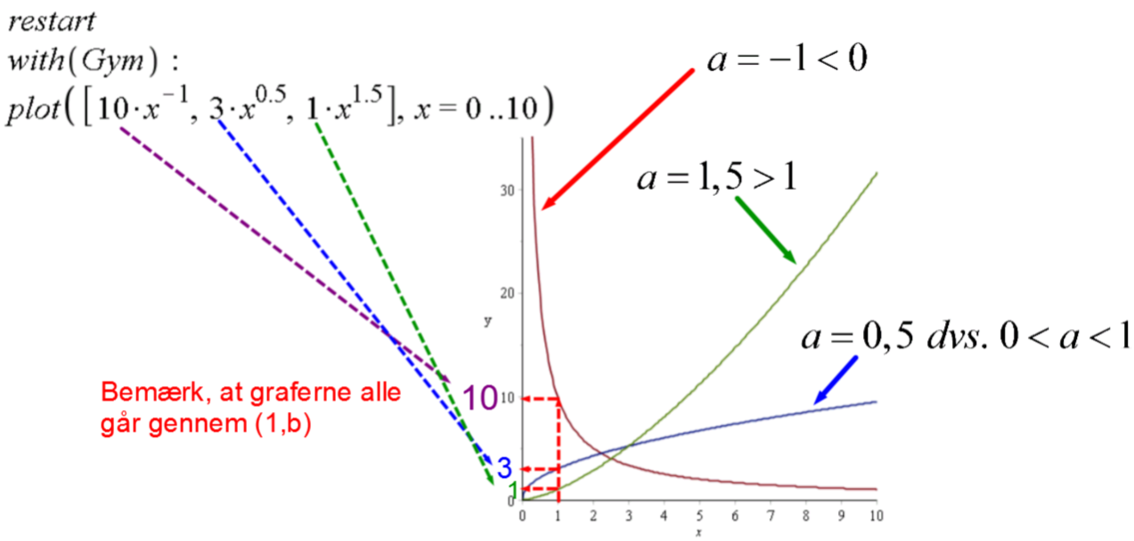
Karakteristiske egenskaber:

e) Grafen danner en ret linje i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem.

f) Når x-værdien ændres med en fast procentdel r_x, ændres y-værdien med en fast procentdel r_y, og sammenhængen mellem de to procentdele er givet ved:

$$(1 + r_y) = (1 + r_x)^a$$

Vi ser først på de tre typer af grafer (tilfældene b), c) og d)):



Vi ser nu på tre eksempler, der dækker hver af tilfældene b), c) og d):

Eksempel 9: Vi vil løse følgende gamle HF-eksamensopgave:

Nedenstående tabel viser sammenhængen mellem diameter og længde af en bestemt knogle (*humerus*) hos afrikanske antiloper.

Diameter (mm)	17,6	26,0	38,9	45,8	51,2	58,1	64,7	80,8
Længde (mm)	159,9	206,9	269,9	300,6	323,6	351,7	377,6	437,2

Indtegn tabellens oplysninger i et passende koordinatsystem, og gør ved hjælp heraf rede for, at længden $f(x)$ som funktion af diameteren x med god tilnærmelse kan skrives på formen

$$f(x) = b \cdot x^a ,$$

hvor både diameteren og længden af knoglen måles i mm.

Bestem tallene a og b.

Bestem længden af en knogle med diameter 32 mm.

Bestem diameteren af en knogle med længde 384 mm.

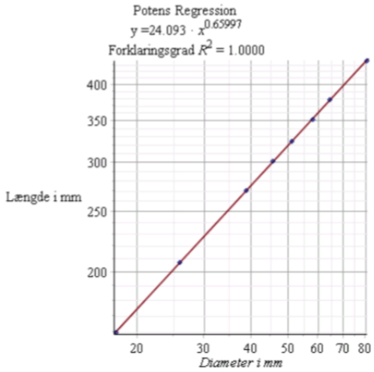
Diameteren af en knogle fra én antilope er 10% større end diameteren af knoglen fra en anden antilope.

Hvor mange procent er den ene knogle længere end den anden?

with(*Gym*) :
Diameter := [17.6, 26.0, 38.9, 45.8, 51.2, 58.1, 64.7, 80.8] :
Længde := [159.9, 206.9, 269.9, 300.6, 323.6, 351.7, 377.6, 437.2] :
local D
L(D) := *PowReg*(*Diameter*, *Længde*, D) :
PowReg(*Diameter*, *Længde*)

"D" er en beskyttet variabel i Maple (ligesom f.eks. I), dvs. de er tillagt en helt bestemt betydning. Hvis man er ligeglad med denne betydning og bare gerne vil benytte symbolet i en opgave, skriver man *local* .

Bemærk, at akserne er gjort logaritmiske, og at punkterne danner en ret linje i dette dobbeltlogaritmiske koordinatsystem.



$L(D) = 24.0929253108226\ D^{0.659966121844400}$
Dvs. $\underline{\underline{a = 0.6600}}$ og $\underline{\underline{b = 24.09}}$

Bemærk, at man her kommer i problemer, hvis man anvender 'solve for D'.
Det kan godt være farligt at anvende *local*.

Hvis diameteren er 32 mm, har man D = 32:
$L(32) = 237.267103364166$
Dvs. at længden er $\underline{\underline{237\ mm}}$

Da vi arbejder med L(D) og ikke f(x), får vi nogle andre indices på vækstraterne, men formlen er den samme.

Hvis længden er 384 mm, er $L(D) = 384$:
$L(D) = 384 \xrightarrow{\text{solve}} \{\text{:-}D = 66.37046670\} \xrightarrow{\text{solve for D}} [\ ]$
Dvs. så er diameteren $\underline{\underline{66\ mm}}$

Hvis diameteren øges med 10%, er $r_D = 0.10$, og man har $(1 + r_L) = (1 + r_D)^a$:
$(1 + r_L) = (1 + 0.10)^{0.659966121844400} \xrightarrow{\text{solve}} \{r_L = 0.06492192800\}$
Dvs. så vil længden øges med $\underline{\underline{6.5\ \%}}$

Eksempel 10: Et lod hænges i forskellige sytråde, og for hver sytråd måles først loddets svingningstid og derefter sytrådens længde.

Man får følgende måleserie:

Svingningstid i sekunder	0,92	1,35	1,79	1,98	2,23
Sytrådens længde i meter	0,21	0,45	0,80	0,98	1,24

Vi går ud fra, at det er potensvækst og vil så finde forskriften:

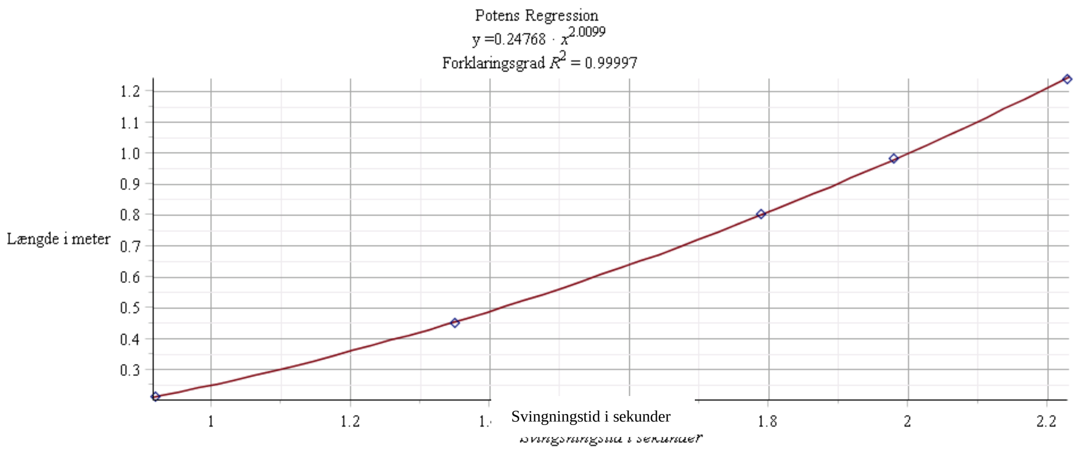
$restart$

$with(Gym)$:

$Svingningstid := [0.92, 1.35, 1.79, 1.98, 2.23]$:

$Længde := [0.21, 0.45, 0.80, 0.98, 1.24]$:

$PowReg(Svingningstid, Længde)$



Denne gang er anvendt et almindeligt koordinatsystem, så man kan se, hvordan grafen buer, når vi har en a-værdi over 1.

I dette tilfælde er:

$b = 0,2477$

$a = 2,01$

Vi kan så besvare nogle spørgsmål, vi selv stiller:

$L(S) := PowReg(Svingningstid, Længde, S)$:

$L(S) = 0.247682355019854\ S^{2.00988447677258}$

Hvor lang skal snoren være for at give svingsningstiden 1 sekund?

$L(1) = 0.247682355019854$

Dvs. så skal snoren være $\underline{\underline{24.8\ cm}}$ lang.

Hvilken svingningstid er der, når snoren er 4 m lang?

$fsolve(L(S) = 4, S) = 3.991274749$

Dvs. svingningstiden er $\underline{\underline{4.0\ s}}$

Hvor mange procent skal længden øges, hvis svingningstiden skal øges med 35%?

Dette svarer til $r_S = 0.35$, og man har $(1 + r_L) = (1 + r_s)^a$.

$(1 + r_L) = (1 + 0.35)^{2.00988447677258} \xrightarrow{\text{solve}} \{r_L = 0.8279142480\}$

Dvs. længden skal så øges med $\underline{\underline{83\ \%}}$

Hvis snorlængden fordobles, hvad sker der så med svingningstiden?

En fordobling af snorlængden svarer til $r_L = 100\ \% = 1$:

$fsolve\left((1 + 1) = (1 + r_s)^{2.00988447677258}\right) = 0.4118051936$

Dvs. når snorlængden fordobles, øges svingningstiden med $\underline{\underline{41\ \%}}$

Når man arbejder med potens-funktioner, kan der sommetider være problemer med 'solve'. Man kan så vælge at benytte 'fsolve' som angivet, hvilket kun giver ikke-eksakte og reelle løsninger.

Eksempel 11: Vi ser på en funktion med forskriften $f(x) = 34{,}16 \cdot x^{-0{,}28}$.

Vi ønsker svar på spørgsmålene:

a) Hvilken ændring sker der med funktionsværdien, når *x* værdien øges med 60%?

b) På hvilken måde skal *x*-værdien ændres, hvis *y*-værdien skal halveres?

Inden vi svarer på spørgsmålene, er det vigtigt, at du bemærker, at der IKKE er tale om en halveringskonstant i spørgsmål 'b'. Der findes ingen halveringskonstant, for det er ikke en eksponentiel udvikling. Når vi har løst opgaven, ser vi på, hvorfor det ikke er en halveringskonstant, vi har fundet.

restart

with(*Gym*) :

$f(x) := 34.16 \cdot x^{-0.28}$:

Vi arbejder med $(1 + r_y) = (1 + r_x)^a$, da det er en potensfunktion.

a) Når *x*-værdien øges med 60%, er $r_x = 0.60$:

$$(1 + r_y) = (1 + 0.60)^{-0.28} \xrightarrow{\text{solve}} \{r_y = -0.1233092890\}$$

Dvs. når *x* øges med 60%, $\underline{\underline{\textit{falder funktionsværdien med } 12.3\ \%}}$

b) Hvis *y*-værdien skal halveres, skal $r_y = -50\ \% = -0.50$:

$$(1 - 0.50) = (1 + r_x)^{-0.28} \xrightarrow{\text{solve}} \{r_x = 10.88795431\}$$

Dvs. hvis *y*-værdien skal halveres, skal *x*-værdien øges med $\underline{\underline{1089\ \%}}$

(husk at kommaet skal flyttes to pladser, når man går fra decimaltal til procent)

Du skal bemærke, at det er **fast procentdel**, som *x* skal øges med, og IKKE en **fast værdi**, når *y*-værdien skal halveres. Derfor er der ikke tale om en halveringskonstant.

Opgaverne 003*

ANVENDELSE AF EN TILDE: ~

Man kan komme ud for, at det ikke er selve værdierne i en tabel, man skal arbejde videre med, men f.eks. deres kvadrater eller reciprokke elementer. Hvis man vil undgå at skulle sidde og gøre det manuelt for hver eneste værdi i en tabel, skal man kende til anvendelsen af en tilde i Maple. Den kan skrives med tastaturet, men den findes også under 'Common Symbols' i Maple.

(Bemærk, der findes en anden tilde i Maple (under Relational Round), som IKKE fungerer, og det er den, som Maple selv kalder 'tilde'. Så det er vigtigt, at du med det samme får tilføjet den rigtige tilde til dine favoritter.)

Potensopløftning og roduddragning

Her skrives tilden opløftet efter tabellen eller tabellens navn, og man udnytter – som vi senere skal lære – at alle former for roduddragning kan formuleres som en potensopløftning:

$Tabel := [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]:$

Her indføres den tabel, vi arbejder videre med.

Reciprokke elementer kan skrives som en potensopløftning i minus-første.

$\frac{1}{x} = x^{-1}$ $\frac{1}{13} = 13^{-1}$

$$Tabel^{\sim -1} = \left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}\right]$$

$$[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]^{\sim 2} = [1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100]$$

Tabellens værdier kvadreres.

Her uddrages kvadratroden, og værdierne gemmes i en ny tabel, der kan arbejdes videre med.

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{13} = 13^{\frac{1}{2}}$

$$NyTabel := Tabel^{\sim \frac{1}{2}} = \left[1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}\right]$$

Addition, subtraktion, multiplikation og division

Her skrives tilden foran tabellen eller tabellens navn, og man udnytter, at en subtraktion kan formuleres som en addition med et negativt tal, og at en division kan formuleres som en multiplikation med det reciprokke element:

4 lægges til: $4 +\sim Tabel = [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]$

Der ganges med 7: $7 \cdot\sim Tabel = [7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70]$

4 trækkes fra: $-4 +\sim Tabel = [-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]$

Der divideres med 7: $\frac{1}{7} \cdot\sim Tabel = \left[\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, 1, \frac{8}{7}, \frac{9}{7}, \frac{10}{7}\right]$

Multiplikation og division kan dog også gøres simplere uden en tilde ved:

$$Tabel \cdot 2 = [2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20]$$

$$Tiendedele := \frac{Tabel}{10} = \left[\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}, 1\right]$$

Eksponentialfunktioner

Man kan også få tallene i tabellen til at fungere som eksponenter for samme grundtal. Eulers tal e er et ganske særligt tal, der meget ofte anvendes som grundtal. Du finder det under 'Common Symbols', og IKKE på tastaturet:

$$2^{\sim Tabel} = [2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024]$$

$$e^{\sim Tabel} = [e, (e)^2, (e)^3, (e)^4, (e)^5, (e)^6, (e)^7, (e)^8, (e)^9, (e)^{10}]$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sim Tabel} = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}, \frac{1}{1024}\right]$$

Eulers tal e er ligesom π et af de vigtigste tal inden for matematik.

e = 2,71828182845904523536028747135266249775724709369...

Funktioner

Man kan lade en funktion virke på elementerne i tabellen, f.eks. som vist nedenfor den naturlige logaritmefunktion eller sinusfunktionen:

$$\ln\sim(Tabel) = [0, \ln(2), \ln(3), 2\ln(2), \ln(5), \ln(6), \ln(7), 3\ln(2), 2\ln(3), \ln(10)]$$

$$Sinusværdier := \sin\sim(Tabel) =$$
$$[\sin(1), \sin(2), \sin(3), \sin(4), \sin(5), \sin(6), \sin(7), \sin(8), \sin(9), \sin(10)]$$