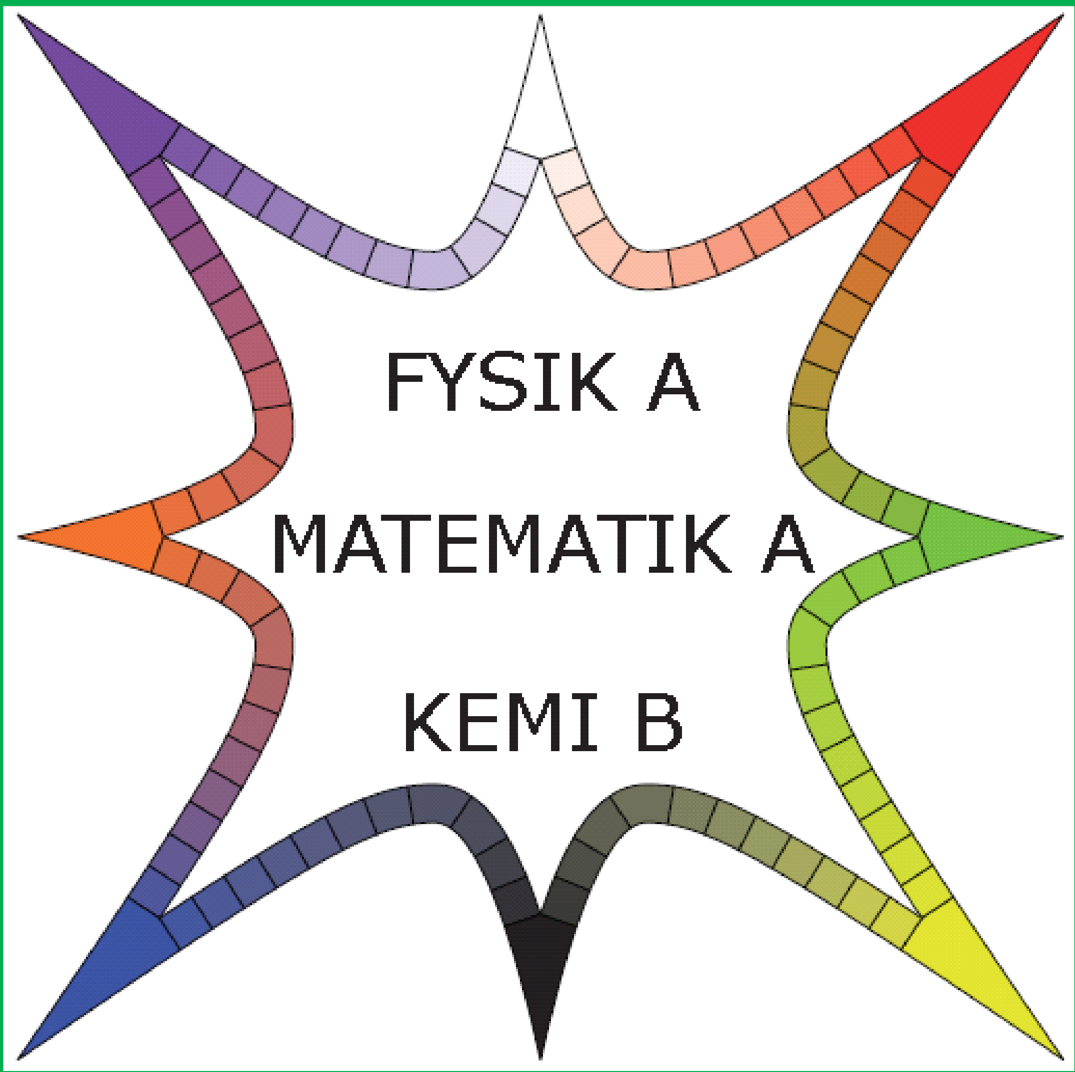
INTRODUKTION TIL VEKTORER



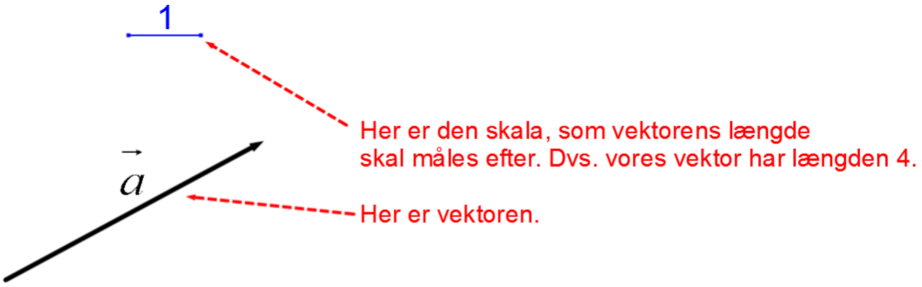
x-klasserne
Gammel Hellerup Gymnasium

Marts 2023 ; Michael Szymanski ; mz@ghg.dk

Indholdsfortegnelse

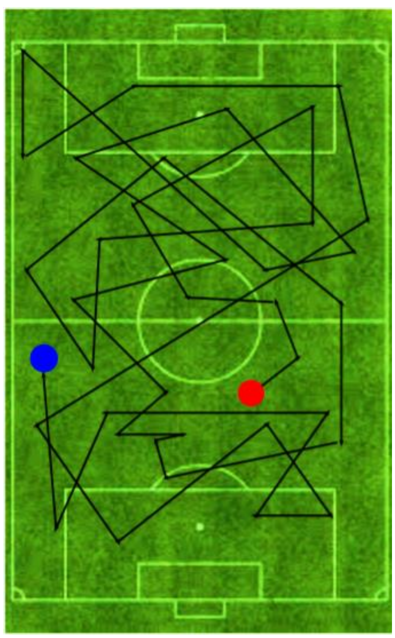
HVORFOR INDFØRES VEKTORER?

Vi begynder med lidt løst at sige, at en *vektor* er en størrelse, der både har en længde og en retning (orientering). Dette er den geometriske (eller euklidiske) beskrivelse. Man tegner vektorer som pile, hvor pilens retning er det, vi kalder *orienteringen*, og hvor længden af pilen måles i forhold til en angivet skala:



Vi angiver som vist på figuren, at en størrelse er en vektor, ved at sætte en pil over den.
Der kommer snart en matematisk mere fyldestgørende definition på en vektor, men ovenstående indeholder det mest centrale i forbindelse med vektorer.

Når du arbejder med vektorer, skal du vænne dig til, at man bruger navnet *skalar* om det, vi normalt bare kalder tal. Inden for fysik kan fysiske størrelser (energi, effekt, hastighed, fart, kraft, rumfang, strøm, spændingsfald, acceleration, masse, …) deles op i størrelser, der angives som skalarer (oftest med enhed) eller som vektorer (også med enhed).
Lad os se på, hvorfor dette er tilfældet.



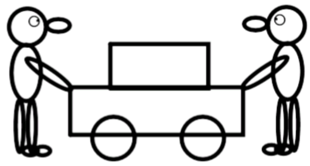
En fodboldspiller kan godt løbe mere end 10 km i løbet af en kamp. På denne forenklede tegning over hendes løbebaner, begynder hun kampen på den røde plet og slutter kampen på den blå. Hun vil altså til slut ikke være ret langt fra sit udgangspunkt, selvom hun har løbet langt. Dvs. der er en uoverensstemmelse mellem den tilbagelagte afstand (10 km) og afstanden fra udgangspunktet (måske 37 m), hvis man bare kigger på dem som tal med enheder.
Det er selvfølgelig, fordi de fleste af hendes løbebaner tilsammen kan siges at ophæve hverandre i de forskellige **retninger**.
Hendes trætte ben er naturligvis ligeglad med de 37 m, og i nogle situationer er det de 10 km, der er væsentlige.
Men hvis man vil beskrive, **hvor** hun er, er man nødt til at tage højde for retningerne, og det er netop det, man gør, når man regner med vektorer, for vektorer er som sagt størrelser med både orientering (retning) og længde. Hvis man placerer et koordinatsystem med den røde plet i origo, vil man kunne beskrive hendes placering med *stedvektorer*.

Masse og *energi* er eksempler på fysiske størrelser, der ikke beskrives med vektorer, men med skalarer. Hvis en person som udgangspunkt vejer 70 kg og efterfølgende tager 7 kg på, taber 3 kg, tager 1 kg på og taber 8 kg, så ved vi, at personen nu vejer 67 kg.
Man kan selvfølgelig sige, at der ligger en form for retning i, om massen øges eller mindskes, men pointen er, at vi i tilfældene *masse* og *energi* er i stand til at beskrive denne retning med et fortegn.

Man kan sige, at man er nødt til at bruge vektorer, når man skal beskrive retninger i 2 eller 3 dimensioner, mens man i én dimension (en talakse) kan beskrive retninger med et fortegn.

Søgeordene ”push car” fører til et hav af billeder, der har noget tilfælles (her et meget lille udvalg):

Når mere end én person skubber en bil, skubber de altid i samme retning. Man ser ingen billeder som dette:



Alle mennesker ved godt, at retninger på kræfter har betydning. Kraft er altså også en størrelse, der beskrives med vektorer.

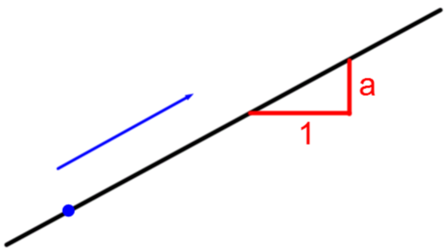
Nedenfor er en ikke-fuldstændig liste over fysiske størrelser med angivelse af, om de skal behandles som vektorer eller skalarer. Tænk i hvert tilfælde over, om det giver mening.

Fysiske størrelser, der behandles som vektorer	**Angivelse**	**Fysiske størrelser, der behandles som skalarer**	**Angivelse**
Sted	$\vec{s}$	Længde	x
Hastighed	$\vec{v}$	Fart	v
Acceleration	$\vec{a}$	Masse	m
Kraft	$\vec{F}$	Energi	E
Strøm	$\vec{I}$	Spændingsfald	U
Bevægelsesmængde	$\vec{p}$	Tid	t
		Temperatur	T

Man angiver længden af en vektor ved $\left|\vec{s}\right|$, og den måles ud fra den skala, der er oplyst.

Farten er længden af hastighedsvektoren, dvs. $v = \left|\vec{v}\right|$

Inden for matematik spiller vektorer en stor rolle. Der kan være fordele forbundet med at anvende vektorer til at beskrive forskellige situationer. Et eksempel:



I stedet for hældningen *a* for en ret linje kan man anvende en såkaldt *retningsvektor* (den blå pil). Den kan - sammen med et vilkårligt punkt på linjen – bruges til at beskrive den rette linje ved en *parameterfremstilling*, hvor hvert punkt svarer til en værdi for en parameter *t* (tiden). Dermed kan man beskrive banekurven for et objekt i bevægelse.

Det ser vi mere på i forbindelse med vektorfunktioner og vektorgeometri.

VEKTORER

Da vi gennemgik tallene, anvendte vi to forskellige indfaldsvinkler. Den ene var *tal som det, man tæller med*, og den anden var *tal som noget, man regner med ifølge nogle bestemte regler*.

Vi gør det samme med vektorerne. Først ser vi på vektorer som pile, der repræsenterer nogle (fysiske) størrelser og prøver at se på, hvordan de kan bruges i den forbindelse (den geometriske beskrivelse). Derefter ser vi på vektorer som noget, man regner med ifølge nogle bestemte regler.

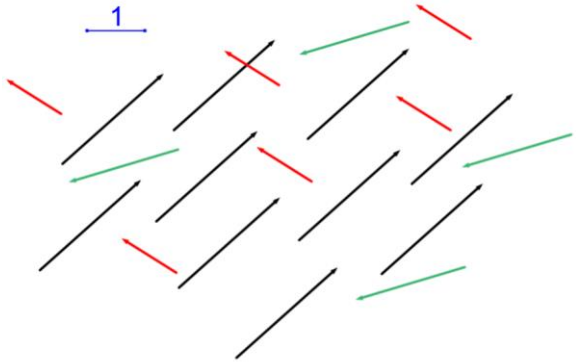
De to indfaldsvinkler fører (naturligvis) ikke til modstridende resultater.

Definition 1: Givet et *n*-dimensionalt rum og en enhed til måling af længder, er en *pil* en størrelse med en længde og en orientering i rummet.

En *egentlig vektor* er en mængde bestående af samtlige pile med ens længde og samme orientering.
Den uegentlige vektor er mængden bestående af samtlige punkter i rummet, og den kaldes *nulvektoren* og angives $\vec{0}$. Den har længden 0 og pr. definition ingen orientering.
Mængden af vektorer består af de egentlige vektorer og nulvektoren.

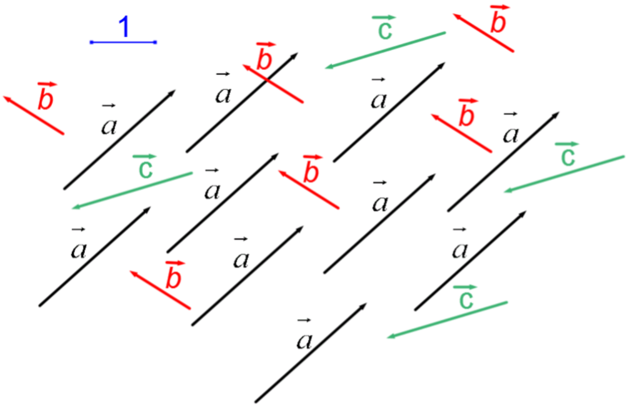
Rent matematisk kan man regne med vilkårligt mange dimensioner, men vi holder os til 2 (planen) og 3 (rummet). I planen kan vi tegne en pil som vist tidligere.

Definition 2: Enhver pil, der tilhører en bestemt vektor, kaldes en *repræsentant* for vektoren.



Alle de sorte pile er repræsentanter for den samme vektor.
De røde pile er repræsentanter for en anden vektor.
Og de turkise pile er repræsentanter for en tredje vektor.

Definitionerne 1 og 2 gør en vektor til et temmelig abstrakt begreb, da "… en mængde bestående af samtlige pile …" er en mængde med uendeligt mange elementer, men når man arbejder med vektorer i praksis, gør man det nemt for sig selv ved at anvende et andet – ikke helt korrekt – ordvalg:



Vi siger, at alle de sorte pile ER vektoren $\vec{a}$.
Og vi opnår dermed den meget vigtige pointe, som du skal lægge godt mærke til og vænne dig til med det samme, da vi kommer til at bruge det igen og igen:
Vi kan tage vores vektor og flytte rundt på den lige så tosset, vi vil. Det er stadig den samme vektor.

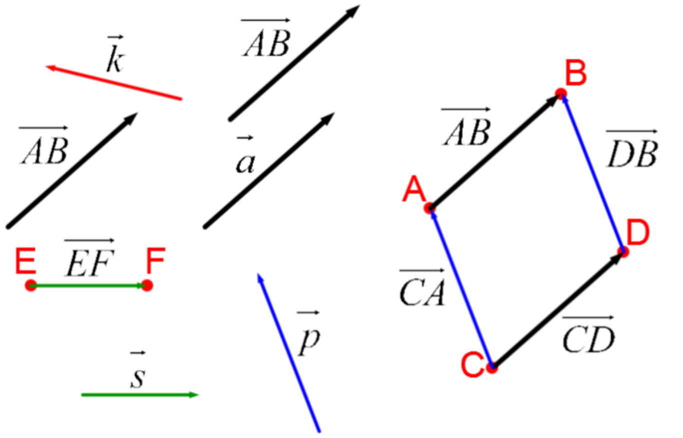
Rent matematisk svarer det til, at man vælger andre pile, der repræsenterer den samme vektor.

Opgaverne 300*

Det skal lige siges, at godt nok er det abstrakt med pile, mængder og repræsentanter, men det er nødvendigt. Man kan ikke rent matematisk kalde to pile, der er placeret forskellige steder i planen, for ens, ligesom to forskellige punkter ikke kan være det (jf. den første af de tre traditionelle love for tænkning: *Enhver ting er det samme som sig selv og forskellig fra andre ting*).

Men lad os altså fremover sige, at alle pile med samme længde og samme orientering er den samme vektor.

Vi angiver en vektor enten ved et navn ($\vec{a}$, $\vec{F_t}$ eller $\vec{s}(t)$) eller ud fra et startpunkt og et slutpunkt:



Bemærk, hvor vektorerne begynder og ender. Der er forskel på $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{BA}$.
Da vi har tilladt os selv at anvende den simplere sprogbrug, kan vi også anvende lighedstegnet på følgende måde:

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

$\vec{p} = \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}$

$\vec{s} = \overrightarrow{EF}$

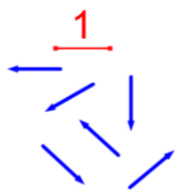
Bemærk, at vi IKKE må flytte punkterne i planen, men vi må gerne flytte vektorerne. Så godt nok er vektoren $\overrightarrow{AB}$ den vektor, der begynder i punktet *A* og slutter i punktet *B*, men vi behøver ikke at have den placeret mellem *A* og *B*.

I nogle bøger angives vektorer med fed skrift eller bare streger ($\bar{a}$, $\underline{a}$ eller ***a***), men i det danske gymnasium anvender vi pile.

Vi er nu klar til at få indført nogle flere begreber:

Definition 3 *Enhedsvektorer* er vektorer med længden 1.

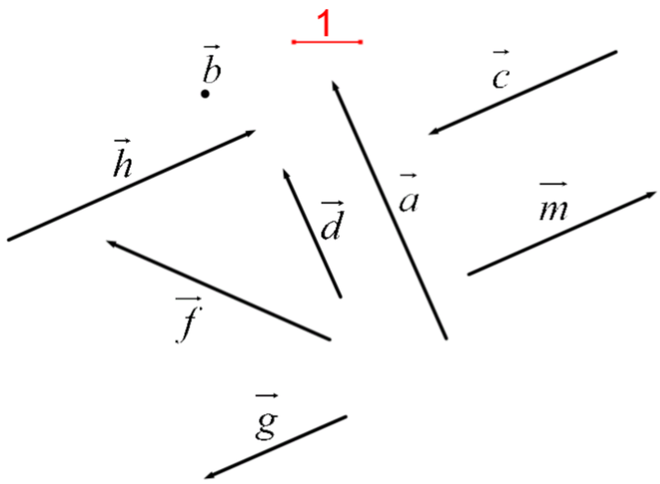
Eksempel 1: Eksempler på enhedsvektorer er alle disse forskellige blå vektorer:



Definition 4: For vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ gælder:

- Hvis vektorerne har samme orientering, kaldes de *ensrettede vektorer*.
- Hvis vektorerne har modsatte orienteringer, kaldes de *modsatrettede vektorer*.
- *Parallelle vektorer* er vektorer, der enten er ensrettede eller modsatrettede, og det betegnes med $\vec{a} \parallel \vec{b}$.
- Hvis vektorerne er modsatrettede og har samme længde, kaldes de *modsatte vektorer*, dvs. $\vec{b}$ er den modsatte vektor til $\vec{a}$ (og omvendt), og man skriver $\vec{b} = -\vec{a}$.
- Hvis der findes repræsentanter for vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$, der danner en ret vinkel, kaldes vektorerne for *ortogonale vektorer*, og det skrives $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Læg mærke til, at da vi kan placere vektorer alle mulige steder i planen eller rummet, vil ortogonale vektorer ikke nødvendigvis udgå fra samme punkt. Men pointen er, at hvis du flytter dem hen, så de udgår fra samme punkt, så danner de en ret vinkel.



Her er $\vec{a}\perp\vec{c}$, $\vec{a}\perp\vec{m}$, $\vec{a}\perp\vec{g}$ og $\vec{a}\perp\vec{h}$.
Det samme gælder for $\vec{d}$, fordi $\vec{a}$ og $\vec{d}$ er ensrettede vektorer. Dermed er $\vec{a}$ og $\vec{d}$ også parallelle vektorer.

$\vec{m}$ og $\vec{g}$ er modsatrettede vektorer, og dermed er de også parallelle vektorer.

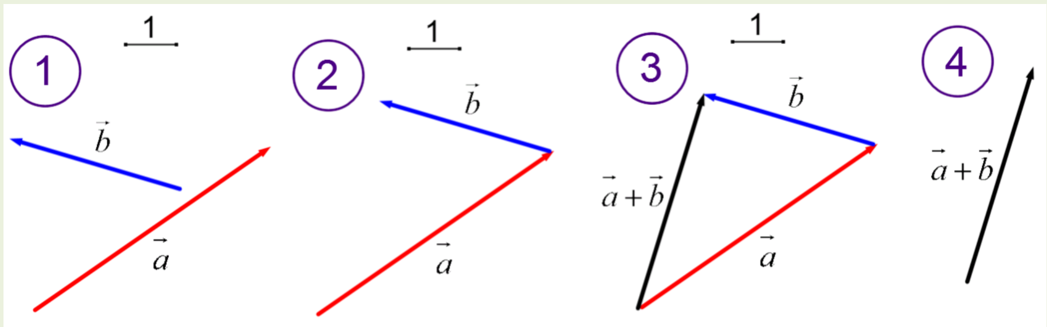
$\vec{m}$ og $\vec{c}$ er modsatte vektorer, da de er modsatrettede og har samme længde.

$\vec{b}$ er nulvektoren.

Opgaverne 301*

Vektoraddition

Lad os nu se på, hvordan man lægger vektorer sammen:



1: Vi har to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, der skal lægges sammen.

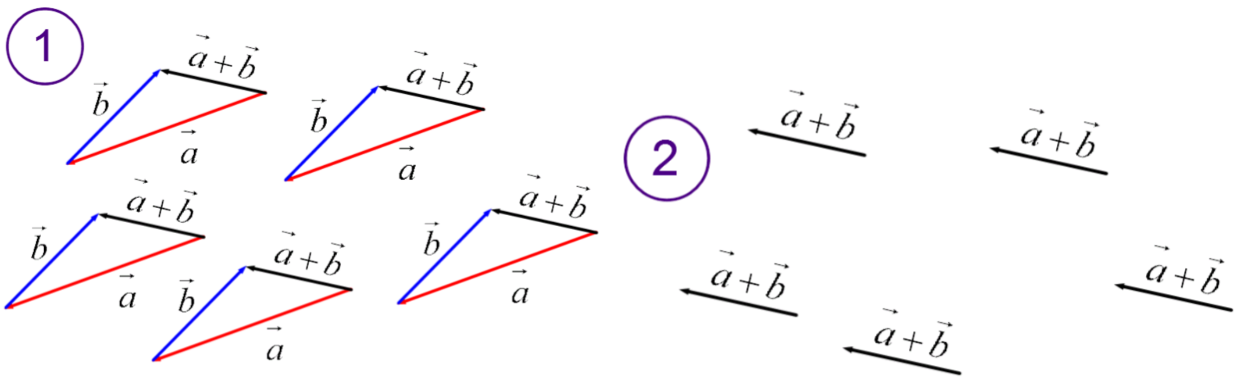
2: Vi flytter $\vec{b}$ hen, så den begynder i pilespidsen, hvor $\vec{a}$ ender.

3: Fra $\vec{a}$'s begyndelsespunkt til $\vec{b}$'s slutpunkt (pilespids) tegnes nu en vektor. Dette er $\vec{a}+\vec{b}$.

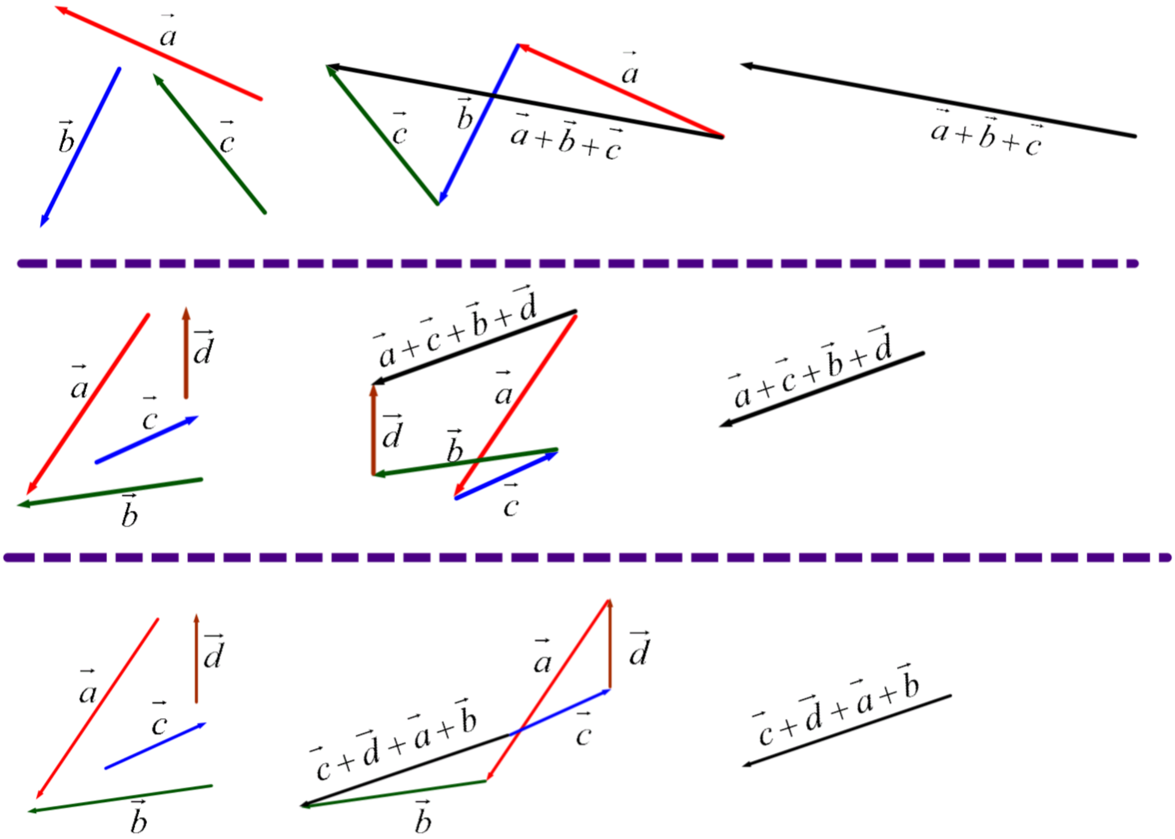
4: Her ser du vektoren $\vec{a}+\vec{b}$. Den kaldes *resultanten* af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Dvs. for tallene *a* og *b* har $a+b$ navnet *summen*, mens $\vec{a}+\vec{b}$ for vektorer hedder *resultanten*.

Det er ligegyldigt, hvor du placerer din første vektor. For som du kan se i nedenstående eksempel, vil din resultant bare komme til at ligge et andet sted.

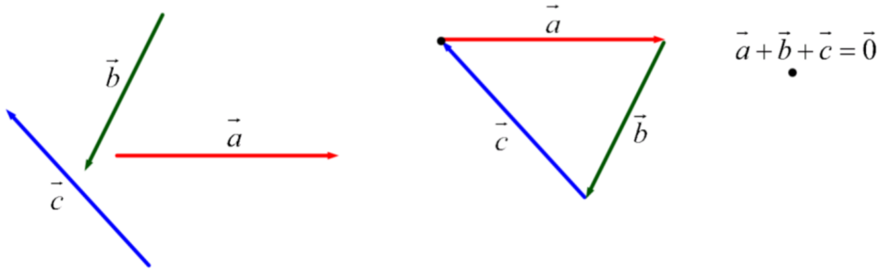


Hvis man skal lægge tre eller flere vektorer sammen, foregår det på samme måde. Man placerer hele tiden den næste vektor, så den begynder, hvor den forrige sluttede. Se i nedenstående eksempler, hvordan dette gøres:



Bemærk, hvad der sker i de to sidste eksempler. Hvad er pointen?

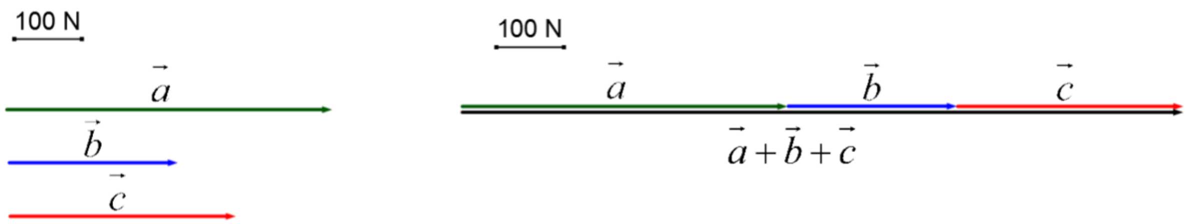
Som sidste eksempel ser vi på en situation, der er meget vigtig i fysik:



Her har vi tre vektorer, der lagt sammen giver nulvektoren, fordi vi ender samme sted, som vi begyndte. *Resultanten* af de tre vektorer er altså nulvektoren.

Tænk godt over, hvorfor denne måde at lægge vektorer sammen netop kommer til at svare til det, du oplever i den virkelige verden. Tag f.eks. fodboldspilleren fra første eksempel. Hendes løbebaner skulle netop lægges sammen som vektorer for at finde hendes slutposition.

Og for et af billederne med 3 personer, der skubber en bil, kunne *resultanten* være:

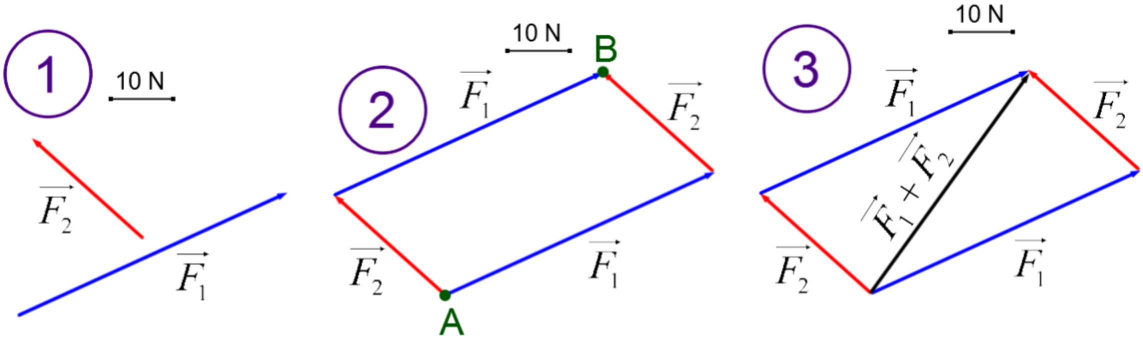


De tre personer skubber ikke med lige store kræfter, men de peger samme vej, og det hjælper.

Kræfternes parallelogram

Kræfternes parallelogram er et begreb, du kan støde på inden for fysik. Faktisk dækker det ikke over en egenskab, der er særlig for kræfter, for det gælder generelt for vektorer, og egentlig er det bare en anden måde at lægge vektorer sammen, så vi opnår i første omgang ikke noget ekstra i forhold til det allerede gennemgåede:

Vi vælger denne gang at kalde vores vektorer for $\overrightarrow{F_1}$ og $\overrightarrow{F_2}$, da det jo kaldes *kræfternes* parallelogram, men bemærk, at det stadig bare er vektorer, så man kunne også have kaldt dem $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Denne gang er skalaen også angivet med enheden newton (som kraft måles i), således at det viste stykke angiver 10 N, og de to vektorer har derfor længderne 24 N og 49 N (mål selv efter).



1: Vi har to vektorer, som vi gerne vil lægge samme.
2: Vi ser på det parallelogram, der udspændes af de to vektorer. Det udspændte parallelogram konstrueres ved, at man lader begge vektorer udgå fra samme punkt (her kaldet *A*), og derefter for endepunkterne af de to vektorer placere den anden vektor, så man får dannet et parallelogram, når vektorerne ender i samme punkt (her kaldet *B*).
3: Diagonalen, der går fra *A* til *B*, er så resultanten.

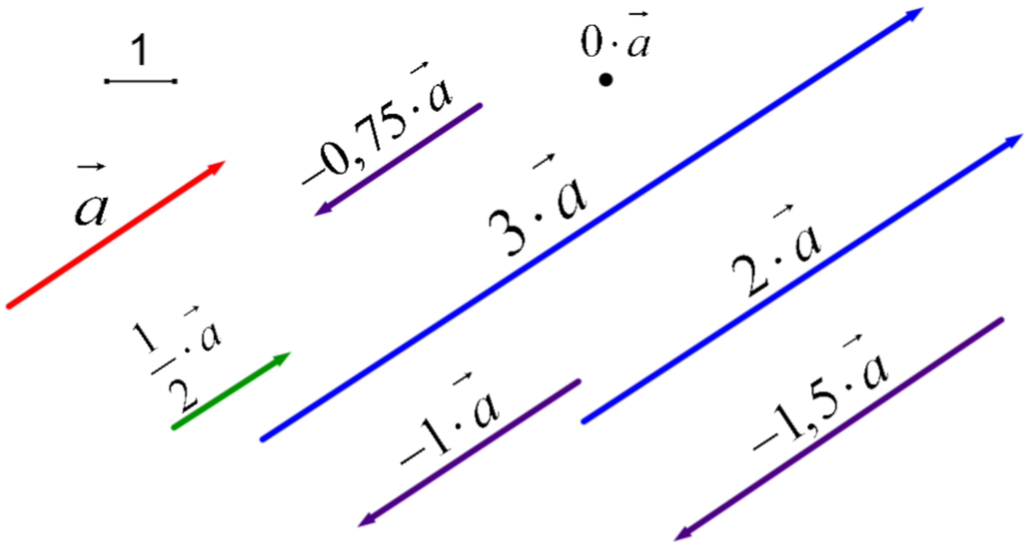
Kræfternes parallelogram viser os, at der helt generelt gælder $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$. Dette vender vi snart tilbage til.

Opgaverne 302*

Multiplikation af vektor med skalar

Vi husker på, at en skalar blot er det, vi normalt kalder et tal. Så overskriften fortæller, at vi nu skal forstå, hvordan man ganger en vektor med et tal.

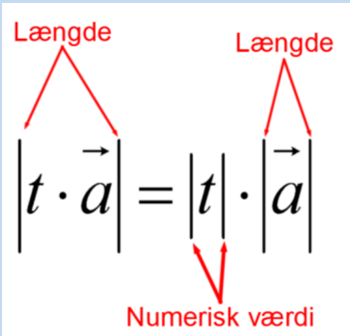
Definition 5: Lad $\vec{a}$ være en vektor, og lad $t \in \mathbb{R}$.
Når man ganger skalaren *t* med vektoren $\vec{a}$, siger man, at man *skalerer* vektoren, og man skriver $t \cdot \vec{a}$.
Hvis $\vec{a}$ er nulvektoren, er $t \cdot \vec{a}$ nulvektoren.
Hvis $\vec{a}$ er en egentlig vektor gælder:
Hvis $t > 0$, er $t \cdot \vec{a}$ den vektor, der er ensrettet med $\vec{a}$ og har længden $t \cdot |\vec{a}|$.
Hvis $t = 0$, er $t \cdot \vec{a}$ nulvektoren.
Hvis $t < 0$, er $t \cdot \vec{a}$ den vektor, der er modsatrettet med $\vec{a}$ og har længden $-t \cdot |\vec{a}|$.



Bemærk retningerne på ovenstående vektorer.

Hvis $t > 1$, siger man, at man *skalerer vektoren op*.
Hvis $0 < t < 1$, siger man, at man *skalerer vektoren ned.*

Generelt gælder:



Man kan godt møde formuleringerne, at man forlænger eller forkorter en vektor. Det er ikke et hensigtsmæssigt ordvalg, da vi allerede anvender disse ord i forbindelse med ligninger og brøker, hvor pointen er, at en ligning ikke ændrer sandhedsværdi og en brøk ikke værdi, når de forlænges eller forkortes.

Men vektorerne ændrer længde, når de skaleres op eller ned, og længden har betydning i mange situationer.

Så væn dig til at sige *skalere op* og *skalere ned*.

Opgaverne 303*

Vektorrum

Vi har nu set på, hvordan man lægger vektorer sammen ved hjælp af pile, og vi har set på skalering af vektorer. Lad os nu – ligesom med tallene – se på den mere formelle del, nemlig hvordan man regner med vektorer ud fra nogle fastsatte regler (10 aksiomer). Dette gøres med den matematiske struktur *vektorrum*.

Definition 6: Et *vektorrum* $(V,+,\cdot)$ består af en mængde *V*, hvis elementer kaldes *vektorer*, samt regneoperationerne addition $(+)$ og skalarmultiplikation $(\,\cdot\,)$.

Addition virker på to elementer fra *V* og danner ét element (*resultanten*) fra *V*.
Skalarmultiplikation virker på et element fra *V* og et reelt tal (der i denne forbindelse kaldes en *skalar*) og danner et element fra *V*.
Vektorrummet skal opfylde følgende 10 aksiomer (1 og 2 er allerede udtrykt i teksten ovenfor):

1)	$\forall \vec{a},\vec{b} \in V : \vec{a}+\vec{b} \in V$	(Stabilitet ved addition)
2)	$\forall \vec{a} \in V, s \in \mathbb{R} : s \cdot \vec{a} \in V$	(Stabilitet ved skalarmultiplikation)
3)	$\forall \vec{a},\vec{b} \in V : \vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$	(Kommutativitet ved addition)
4)	$\forall \vec{a},\vec{b},\vec{c} \in V : \vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$	(Associativitet ved addition)
5)	$\forall \vec{a} \in V, s,t \in \mathbb{R} : s \cdot \left(t \cdot \vec{a}\right) = (s \cdot t) \cdot \vec{a}$	(Associativitet ved skalarmultiplikation)
6)	$\exists \vec{0} \in V : \vec{a}+\vec{0} = \vec{a} \qquad \left(\forall \vec{a} \in V\right)$	(Eksistens af additiv nulvektor)
7)	$\forall \vec{a} \in V \exists -\vec{a} \in V : \vec{a}+\left(-\vec{a}\right) = \vec{0}$	(Eksistens af modsat vektor)
8)	$\forall \vec{a},\vec{b} \in V, s \in \mathbb{R} : s \cdot \left(\vec{a}+\vec{b}\right) = s \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$	(Første distributive lov)
9)	$\forall \vec{a} \in V, s,t \in \mathbb{R} : (s+t) \cdot \vec{a} = s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{a}$	(Anden distributive lov)
10)	$\forall \vec{a} \in V : 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$	(Neutralt element ved multiplikation)

Kommentarer: Bemærk, at 1-tallet i Aksiom 10 er tallet 1, som du kender fra de reelle tal. Så aksiomet siger bare, at det element, der er neutralt element ved multiplikation i vores tallegeme også er det i vores vektorrum.

Du kan nok heller ikke undgå at bemærke, at dette abstrakte begreb *vektorrum* umiddelbart slet ikke hjælper på forståelsen af, hvad en vektor er. Men pointen med disse abstrakte konstruktioner er – som vi også så med de reelle tal – at man ud fra aksiomerne kan udlede en masse sætninger, der gælder for vektorer.

Dvs. vi skal i første omgang have vist, at vores forståelse af vektorer som nogle pile, vi flytter rundt på og gør kortere og længere, rent faktisk opfylder de 10 aksiomer.

Undersøgelse af aksiomerne:

Når du skal undersøge, om aksiomerne holder, skal du benytte alt det, der er gennemgået med vektorer som pile, der flyttes rundt, lægges sammen og skaleres.

1) $\forall \vec{a},\vec{b} \in V : \vec{a}+\vec{b} \in V$ (Stabilitet ved addition)

2) $\forall \vec{a} \in V, s \in \mathbb{R} : s \cdot \vec{a} \in V$ (Stabilitet ved skalarmultiplikation)

Disse aksiomer siger, at vi altid skal få en vektor, når vi lægger to vektorer sammen, og når vi skalerer en vektor.
Dette gælder, da vi i vores definition har sikret os, at også nulvektoren er en vektor. Du kan her se vigtigheden af, at vores uegentlige vektor (nulvektoren) pr. definition også er en vektor.

3) $\forall \vec{a},\vec{b} \in V : \vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$ (Kommutativitet ved addition)

Dette gælder også, som vi så under behandlingen af kræfternes parallelogram.

4) $\forall \vec{a},\vec{b},\vec{c} \in V : \vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$ (Associativitet ved addition)

5) $\forall \vec{a} \in V, s,t \in \mathbb{R} : s \cdot \left(t \cdot \vec{a}\right) = \left(s \cdot t\right) \cdot \vec{a}$ (Associativitet ved skalarmultiplikation)

Overvej selv disse tilfælde (tegn gerne en skitse af aksiom 4) og indse, at de holder.

6) $\exists \vec{0} \in V : \vec{a}+\vec{0} = \vec{a} \ \left(\forall \vec{a} \in V\right)$ (Eksistens af additiv nulvektor)

Vores nulvektor har netop den egenskab, at du kan lægge den til enhver vektor uden at ændre denne.

7) $\forall \vec{a} \in V \exists -\vec{a} \in V : \vec{a}+\left(-\vec{a}\right) = \vec{0}$ (Eksistens af modsat vektor)

Som modsat vektor $-\vec{a}$ til $\vec{a}$ har vi vektoren $-1 \cdot \vec{a}$, dvs. vektoren der fremkommer ved skalering med -1. For denne vektor, der er modsatrettet $\vec{a}$ og lige så lang som denne, har netop den egenskab, at $\vec{a}+\left(-1\right) \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

$$-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$$

Skaleret med -1 Modsatte vektor.

Dette er et af de udsagn, der ofte kan volde store problemer, fordi det kan virke så indlysende, da vi er vant til at se noget lignende fra tallene. Men pointen er, at man skal sikre sig, at det også gælder for vektorer.

8) $\forall \vec{a},\vec{b} \in V, s \in \mathbb{R} : s \cdot \left(\vec{a}+\vec{b}\right) = s \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$ (Første distributive lov)

9) $\forall \vec{a} \in V, s,t \in \mathbb{R} : (s+t) \cdot \vec{a} = s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{a}$ (Anden distributive lov)

Overvej selv disse aksiomer ved at tegne skitser.

10) $\forall \vec{a} \in V : 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ (Neutralt element ved multiplikation)

Som tidligere nævnt er det vores ”almindelige” 1-tal, der har den egenskab, at når man skalerer en vektor med dette, så får man samme vektor, som man havde fra start.

Alle vores tegninger af vektorer har været i to dimensioner (planen). Man kunne også have tegnet pilene i tre dimensioner. Reglerne er præcis de samme.

Der opstår først problemer, hvis man prøver at tegne noget i 4 eller flere dimensioner. Det kan ikke lade sig gøre. Men her kommer vores aksiomer os til hjælp, så vi kan have vektorer i vilkårligt mange dimensioner.

Eksempel 2: Hvis vi f.eks. har 7 dimensioner, kan vi indføre reglerne:

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$ $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7)$

$\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, a_4+b_4, a_5+b_5, a_6+b_6, a_7+b_7)$

$t \cdot \vec{a} = (t \cdot a_1, t \cdot a_2, t \cdot a_3, t \cdot a_4, t \cdot a_5, t \cdot a_6, t \cdot a_7)$

Hvis du kigger på aksiomerne, kan du se, at disse regler opfylder aksiomerne.

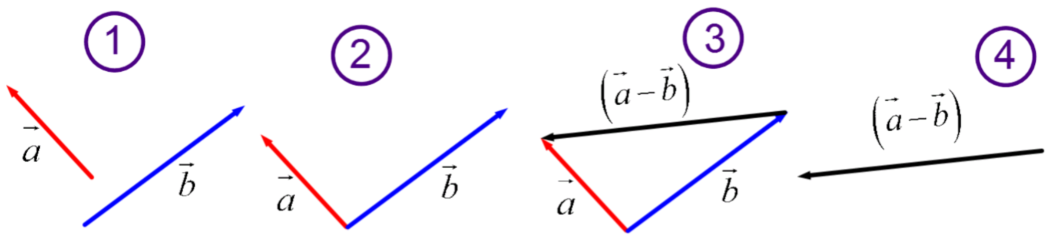
Og dermed fungerer dette som et vektorrum.

Subtraktion:

Vi har set på, hvordan man lægger vektorer sammen, men vi har ikke set på, om det er muligt at trække dem fra hinanden og i så fald, hvordan man gør det.

Vi udnytter vores arbejde med tallene til at sige:

Definition 7: Givet vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$, er $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$ den vektor, der lagt til $\vec{b}$ giver $\vec{a}$.

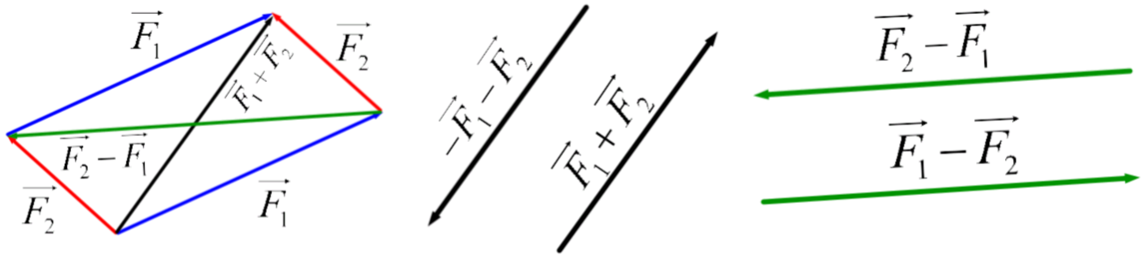


1: Vi har fået givet to vektorer og vil gerne finde $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$.

2: Vi placerer de to vektorer, så de har samme udgangspunkt.

3: Vi tegner nu pilen fra $\vec{b}$ ’s endepunkt til $\vec{a}$ ’s endepunkt. Bemærk, at dette netop er den vektor, der lagt til $\vec{b}$ giver $\vec{a}$.

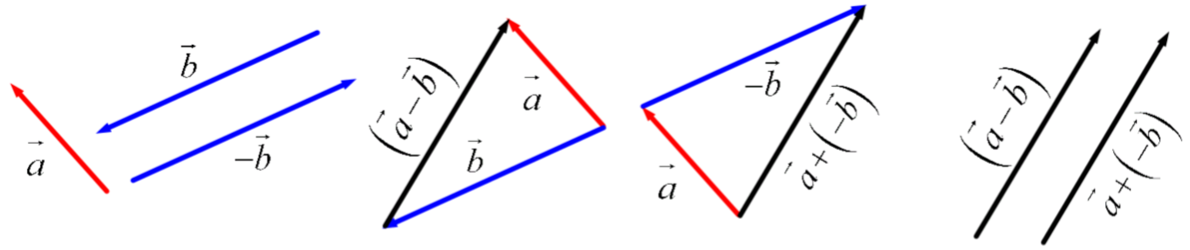
I kræfternes parallelogram får man:



Dvs. den ene diagonal svarer til addition, mens den anden svarer til subtraktion.

Vi har altså: $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)+\vec{b}=\vec{a}$.

Som nedenstående figur angiver, gælder der også: $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$



Dette kunne også være vist ud fra aksiomerne ved at sige:

$$\left(\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)\right)+\vec{b}\underset{aksiom 4}{=}\vec{a}+\left(-\vec{b}+\vec{b}\right)\underset{aksiom 7}{=}\vec{a}+\vec{0}\underset{aksiom 6}{=}\vec{a}$$

Denne udregning viser, at $\left(\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)\right)$ lagt til $\vec{b}$ giver $\vec{a}$, hvorfor det pr. definition er $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$.

En vigtig pointe ved ovenstående er, at vi nu har to forskellige indfaldsvinkler til det samme. Vi har vores aksiomer, der nok ikke giver den store fornemmelse for, hvad en vektor er, men som er nødvendige, hvis vi skal arbejde med mere end 3 dimensioner, og så har vi vores pile, som vi bruger, når vi anvender vektorer i fysik, eller når vi skal forstå vektorbegrebet.

Vi har nu vist, at du, når det drejer sig om addition og subtraktion, kan regne på vektorer på samme måde, som du regner med tal. Dvs. du kan rykke en vektor over på den anden side af et lighedstegn ved at skifte fortegn på den, f.eks.:

$$\vec{F}_t+\vec{F}_n=\vec{F}_{res} \Leftrightarrow \vec{F}_t=\vec{F}_{res}-\vec{F}_n .$$

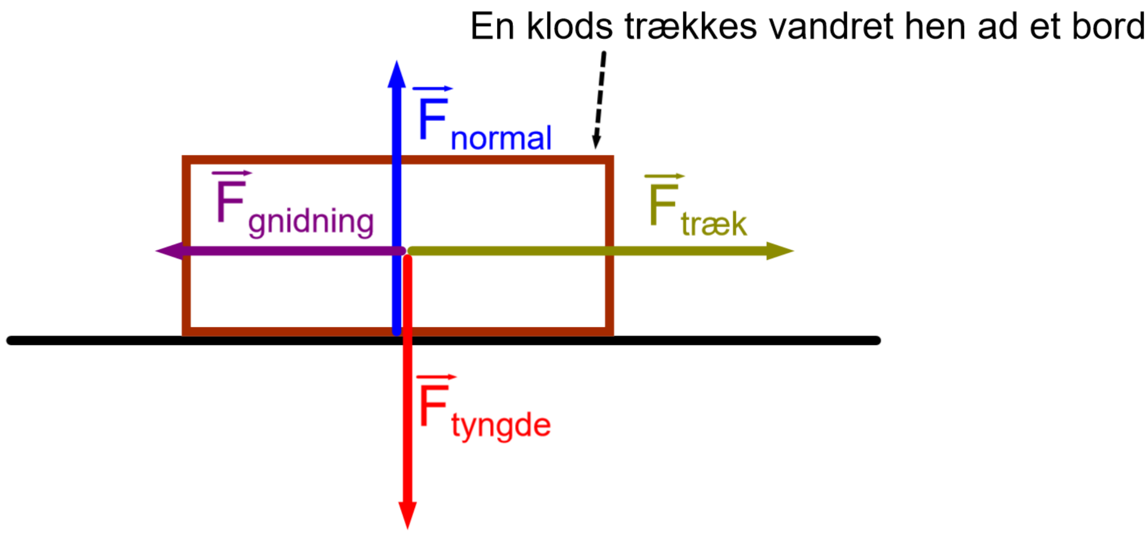
Opgaverne 304*

Anvendelser af vektorregning

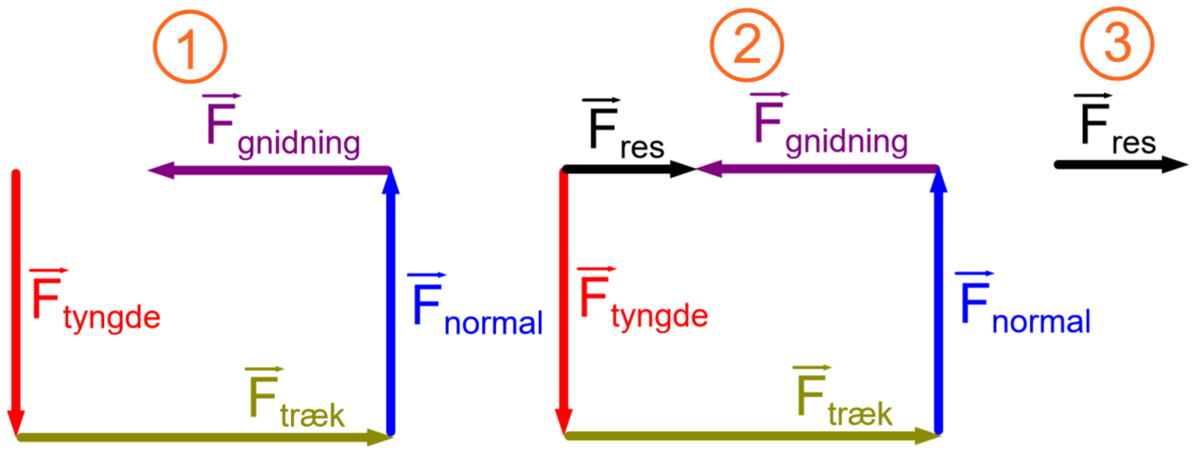
Vi ser på nogle anvendelser af vektorregning, hvor man udnytter, at man kan flytte rundt på vektorer og lægge dem sammen.

Klods på bord:

Eksempel 3:



En klods trækkes hen ad et bord. Den påvirkes af ovenstående kræfter. Vi vil gerne se, hvilken kraft klodsen samlet set påvirkes af (*den resulterende kraft*), og lægger derfor vektorerne sammen:

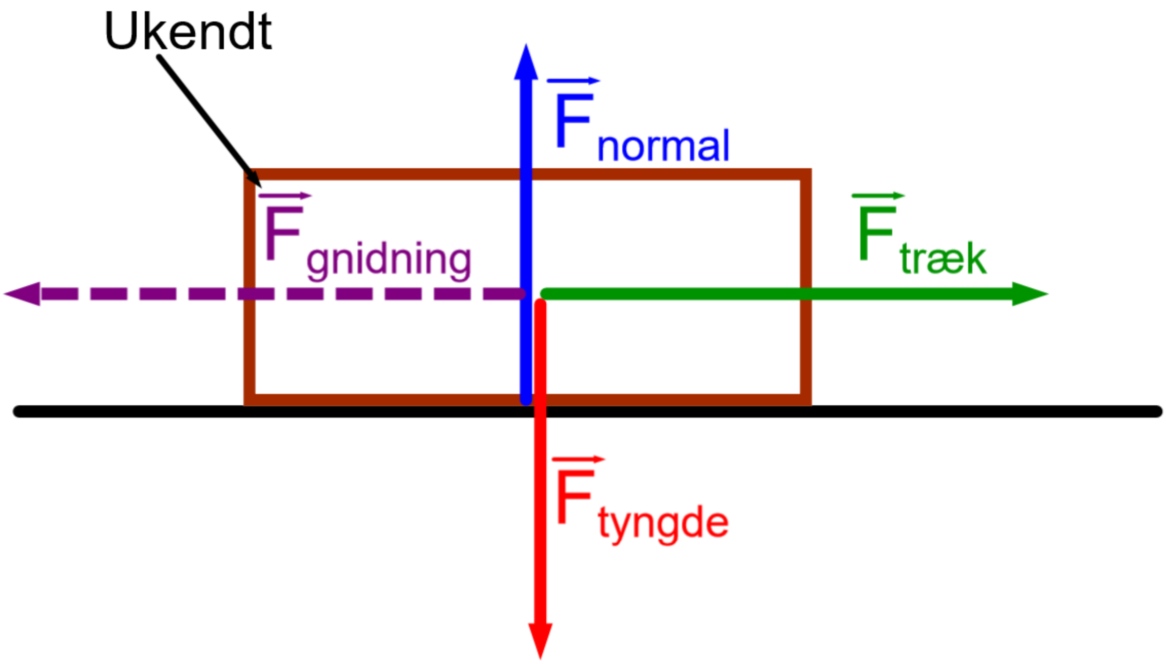


1: Vi udnytter, at vi kan flytte rundt på vektorerne, som vi vil, og det er ligegyldigt, hvilken rækkefølge vi lægger dem sammen i.

2: Vi kan tegne resultanten af vektorerne som pilen, der går fra startpunktet til slutpunktet.

3: Vi har fundet den resulterende kraft.

Eksempel 4: Nu får vi at vide, at **klodsen står stille**, og **at den resulterende kraft derfor skal være nulvektoren**. Vi forestiller os, at vi ikke kender gnidningskraften:

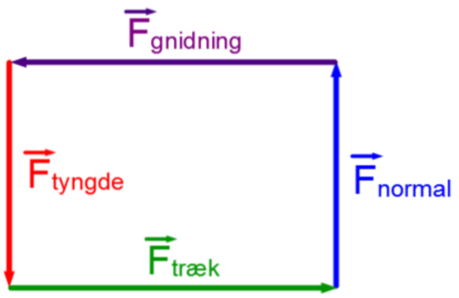


Når vi lægger vektorerne sammen, skal resultanten være nulvektoren:

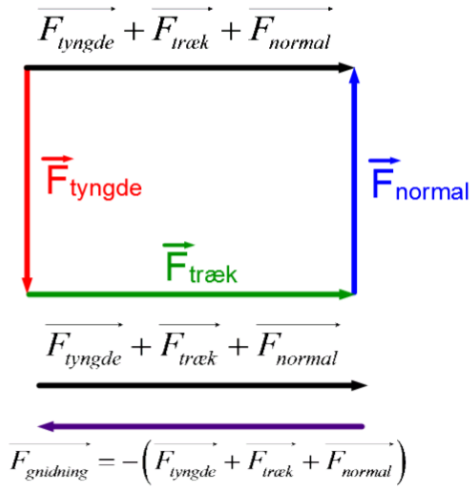
$$\overrightarrow{F_{tyngde}} + \overrightarrow{F_{træk}} + \overrightarrow{F_{normal}} + \overrightarrow{F_{gnidning}} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{F_{gnidning}} = -\left(\overrightarrow{F_{tyngde}} + \overrightarrow{F_{træk}} + \overrightarrow{F_{normal}}\right)$$

1. metode:
Vi kan finde gnidningskraften ved at udnytte, at den skal begynde, hvor den blå pil slutter, og ende, hvor man begyndte.



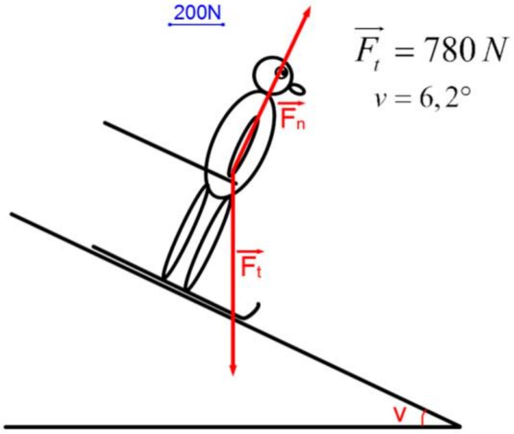
2. metode:
Vi lægger først de tre kendte kræfter sammen. Summen af disse vektorer er den sorte pil.
Vi ved, at gnidningskraften er den modsatte af denne pil.

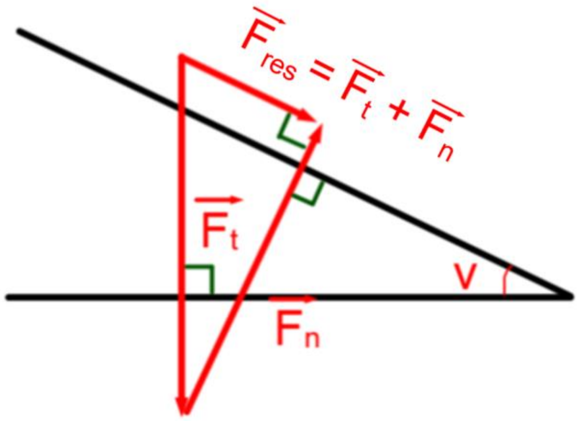


Bevægelse på skråplan:

Skiløberen kører på en bakke med hældningen 6,2°, og han er påvirket af to kræfter. Tyngdekraften, der peger lodret nedad og har størrelsen 780 N, samt normalkraften, der kommer fra underlaget og, som navnet siger, står vinkelret på underlaget.

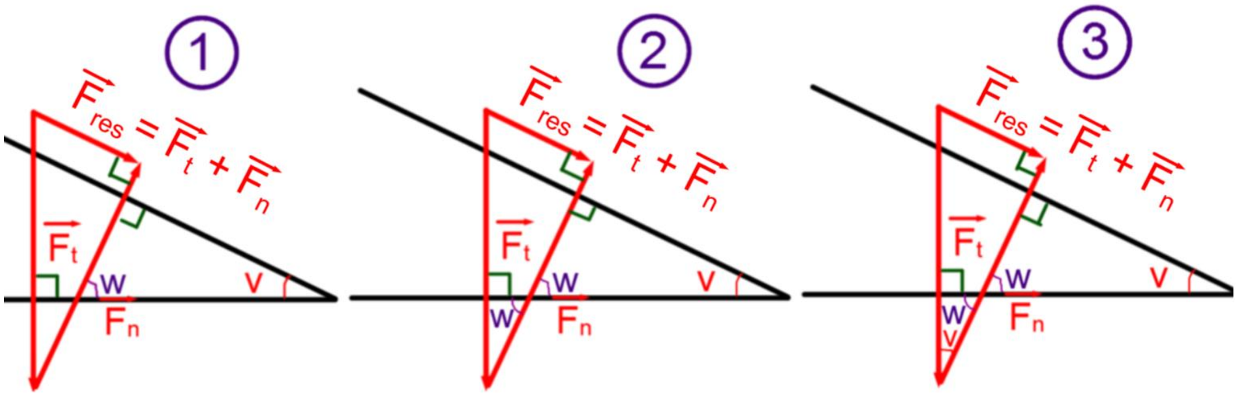
Resultanten af disse kræfter må pege langs underlaget, da det er i den retning, skiløberen trækkes. Vi vil gerne prøve at bestemme normalkraftens størrelse samt størrelsen af den resulterende kraft:



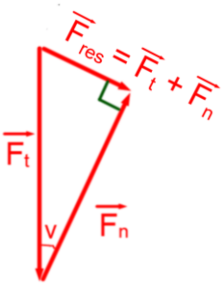


Vi skal altså lægge de to vektorer sammen (tyngdekraften og normalkraften). Som sædvanlig må vi parallelforskyde vores vektorer, som vi vil, og vi flytter normalkraften ned, så den begynder, hvor tyngdekraften ender (se figuren ovenfor til højre). Vi ved, at den resulterende kraft skal være parallel med underlaget. Og da normalkraften står vinkelret på underlaget, og da tyngdekraften peger lodret nedad, får vi dannet de rette vinkler, der er vist på figuren med grønt.

Bemærk den røde, retvinklede trekant. Den er nøglen til at regne på bevægelse på skråplan. Vi mangler bare at kende en af de spidse vinkler i denne trekant, da vi så kan udregne de manglende sider. Og her får vi brug for vores viden om vinkler:



1: Vores vinkler *v* og *w* er komplementvinkler, dvs. $w + v = 90°$.
2: Topvinklen til vores *w* er lige så stor som *w*.
3: I den lille, bitte, retvinklede trekant, der er dannet i bunden, genfinder vi altså vores vinkel *v*, da de to spidse vinkler i denne trekant er komplementvinkler, og da den anden er *w*.



Da vores røde trekant er retvinklet, har vi dermed:

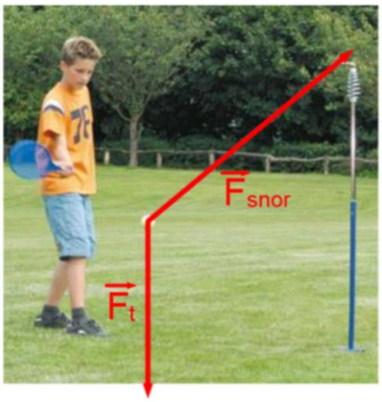
$$\sin(v) = \frac{|\vec{F}_{res}|}{|\vec{F}_t|} \Leftrightarrow |\vec{F}_{res}| = \sin(v) \cdot |\vec{F}_t| \qquad \cos(v) = \frac{|\vec{F}_n|}{|\vec{F}_t|} \Leftrightarrow |\vec{F}_n| = \cos(v) \cdot |\vec{F}_t|$$

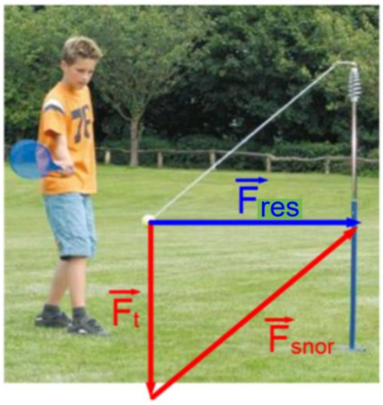
$$F_{res} = \sin(6,2°) \cdot 780\,\text{N} = 84\,\text{N} \qquad F_n = \cos(6,2°) \cdot 780\,\text{N} = 775\,\text{N}$$

Vi angiver størrelserne af kræfterne ved at undlade vektorstreger.

Centripetalkraft i cirkelbevægelse:

Vi ser på bolden i stangtennis, der er denne situation bevæger sig i en vandret cirkelbevægelse.



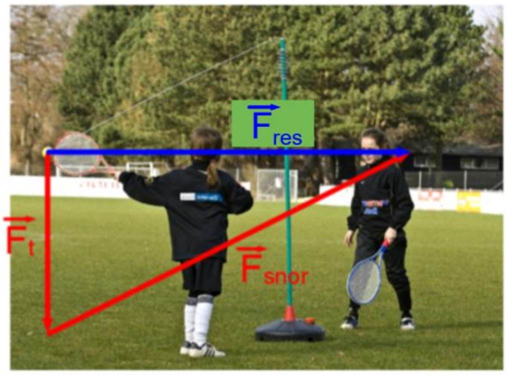


Bolden er påvirket af tyngdekraften, der peger nedad, samt af snorkraften, der nødvendigvis må pege parallelt med snoren. Der er ingen andre kræfter på bolden (der ses bort fra luftmodstand).

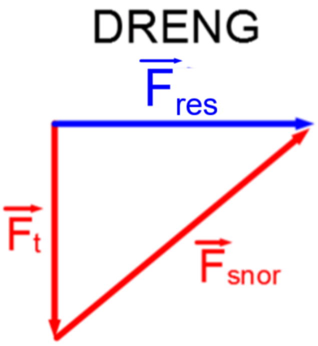
Når disse to kræfter lægges sammen, skal deres lodrette dele ophæve hinanden, og det fortæller os, hvor lang snorkraften skal være, for når den placeres, så den begynder, hvor tyngdekraftpilen slutter, skal den ende i samme højde, således resultanten af vektorerne giver en vandret pil.

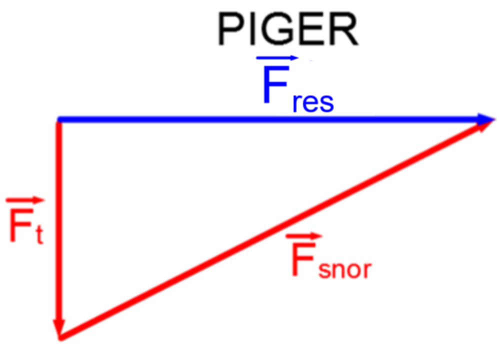
Dette fastsætter dermed også længden af den resulterende vektor.

Lad os nu se på en tilsvarende situation, hvor den eneste forskel er, at snoren danner en større vinkel med lodret:



Bolden er den samme, så tyngdekraften på bolden er den samme. Igen skal den resulterende vektor være repræsenteret af en vandret pil, og det fører til, at den ender med at blive længere, dvs. bolden er påvirket af en større kraft.



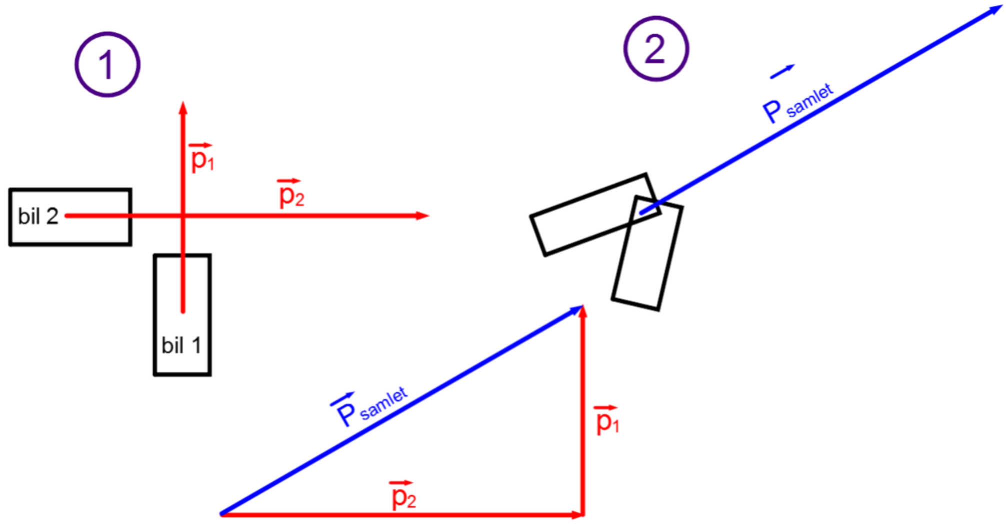


Din erfaring vil nok fortælle dig, at jo mere fart bolden får på i stangtennis, jo større bliver snorens vinkel med lodret (hvis du får bolden til at bevæge sig i en nogenlunde vandret liggende cirkel). Den større vinkel svarer til en større resulterende kraft på bolden.

Opgaverne 305*

Sammenstød mellem to biler:

To biler støder sammen og fortsætter efter sammenstødet sammenfiltret. Inden sammenstødet kender man bilernes såkaldte bevægelsesmængder (der betegnes med $\vec{p}$). De er et udtryk for, hvor hurtigt bilerne kører, og hvor meget de vejer. Bevægelsesmængden peger i samme retning som hastigheden, og bevægelsesmængden er en såkaldt bevaret størrelse, dvs. den samlede bevægelsesmængde lige efter sammenstødet er den samme som lige før sammenstødet.

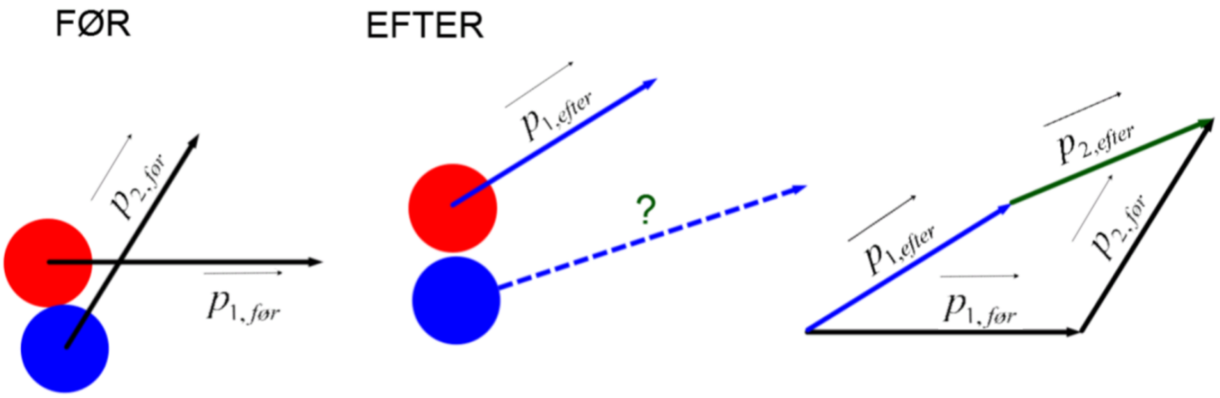


1: Bilerne støder sammen. Den resulterende vektor svarer til den samlede bevægelsesmængde.

2: Vi kender nu den samlede bevægelsesmængde og ved dermed i hvilken retning, bilvragene bevæger sig efter sammenstødet. Faktisk kan man også beregne hastigheden, men det er en fysikopgave.

Sammenstød mellem billardkugler:

Vi ser på to billardkugler, der støder sammen (rød og blå). Vi kender deres bevægelsesmængder lige inden sammenstødet, og vi kender den røde kugles bevægelsesmængde lige efter sammenstødet. Spørgsmålet er, om vi ud fra dette kan bestemme den blå kugles bevægelsesmængde lige efter sammenstødet?



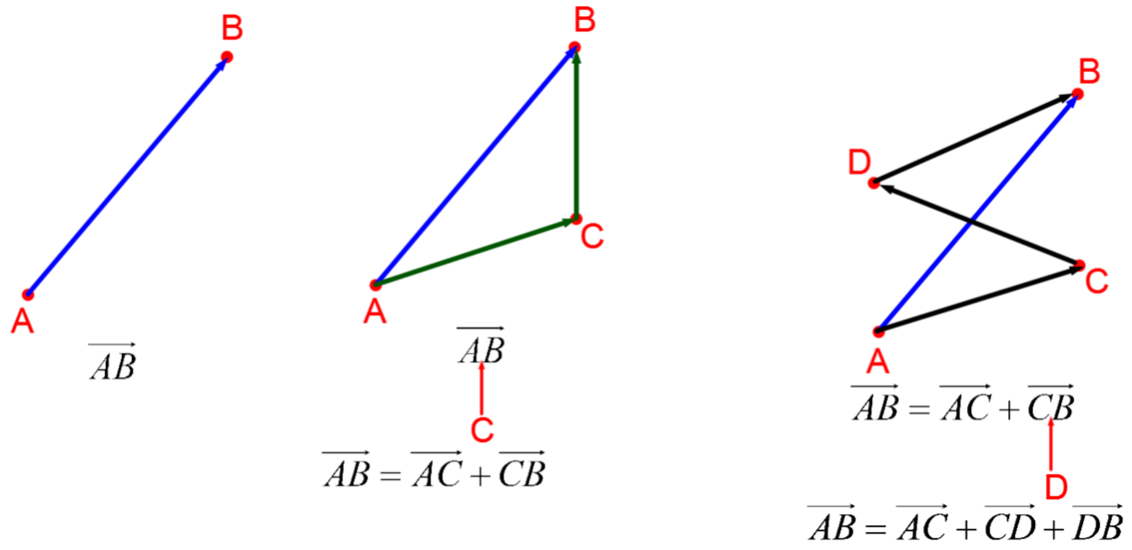
Svaret er "Ja".

Vi ved, at den samlede bevægelsesmængde før sammenstødet skal være den samme som efter sammenstødet. Så vi lægger de to sorte vektorer sammen (vektorerne "før"). Fra samme udgangspunkt afsættes den kendte vektor efter sammenstødet (den blå pil). Vi kan så bestemme den manglende vektor (den grønne).

Opgaverne 306*

Indskudsreglen:

Indskudsreglen er illustreret på nedenstående figurer:



Vektoren $\overrightarrow{AB}$ går mellem punkterne *A* og *B*. Du kan også komme fra *A* til *B* ved først at gå til punkt *C* og derfra til punkt *B*. Vores måde at lægge vektorer sammen fører til, at $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$. Og hvis vi indskyder endnu et punkt mellem *C* og *B*, får vi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$.

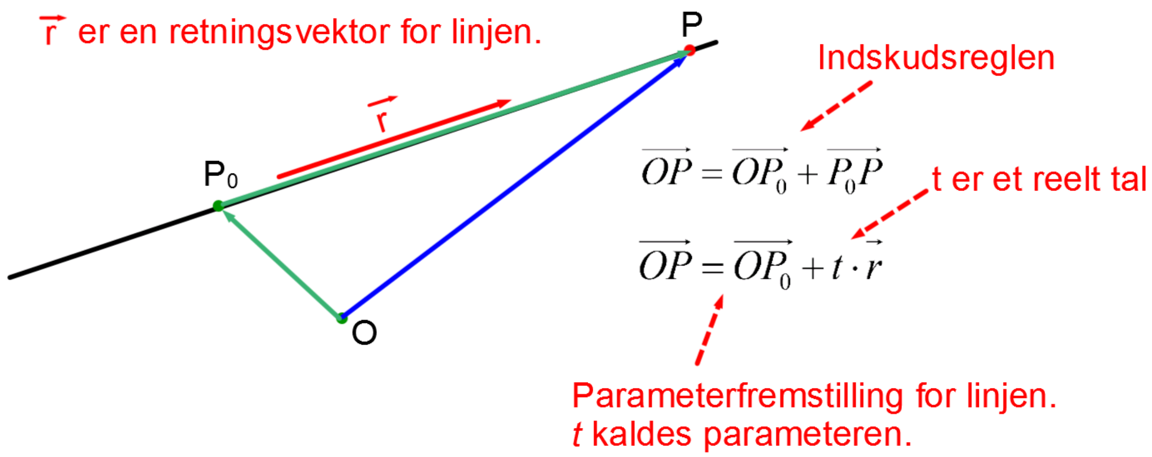
Bemærk, hvordan det fungerer med at indsætte punkter, så du kan se, at det gælder helt generelt (uanset beliggenheden af punkterne):

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SL} + \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{CX} + \overrightarrow{XJ} + \overrightarrow{JR} + \overrightarrow{RF} + \overrightarrow{FP}$$

Opgaverne 307*

Parameterfremstilling for en ret linje (igen):

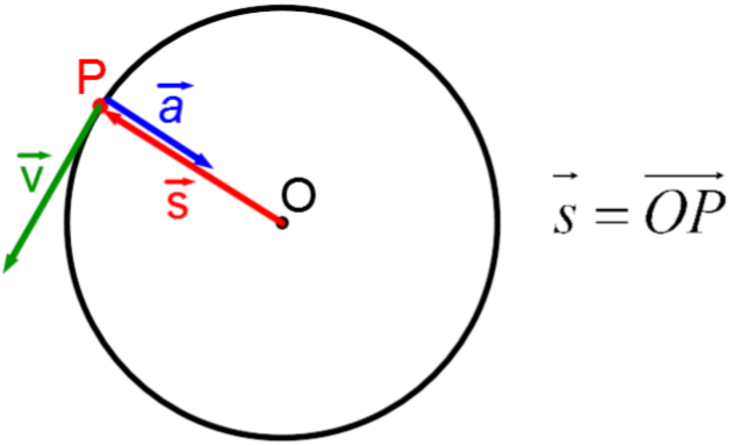
Vi ser på en ret linje (den sorte linje). Den røde pil angiver en retningsvektor for linjen, dvs. det er en vektor parallel med linjen.



Hvis man skal beskrive punkterne på linjen – angivet ved det variable punkt *P* – kan man i stedet for at gå den direkte vej fra origo (punktet *O*) først gå til et fast punkt på linjen P_0 og derfra følge linjen ud til punkterne. Denne tankegang fører til en parameterfremstilling for linjen.

Cirkelbevægelse:

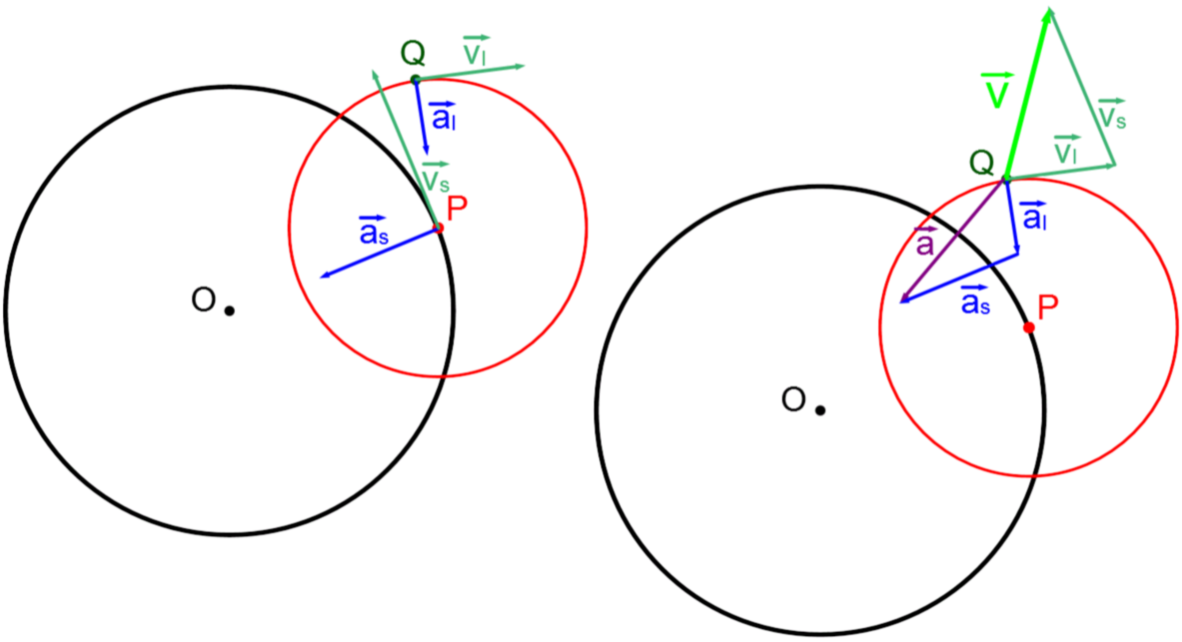
En genstand – angivet som punktet *P* – bevæger sig rundt i en jævn cirkelbevægelse.
Genstandens placering beskrives ved stedvektoren $\vec{s} = \overrightarrow{OP}$.
Hastigheden har altid en retning tangentielt til cirklen og angives med $\vec{v}$.
Accelerationen peger ind mod centrum og betegnes med $\vec{a}$



Cirkelbevægelser:

Vi ser nu på en epicykel, der er en cirkelbevægelse omkring et punkt *P*, der selv bevæger sig i en cirkelbevægelse omkring punktet *O*.

Det giver en kompliceret bevægelse, men igen kan vi udnytte vektoraddition og lægge vektorerne fra den store cirkel ($\overrightarrow{v_s}$ og $\overrightarrow{a_s}$) sammen med dem fra den lille ($\overrightarrow{v_l}$ og $\overrightarrow{a_l}$) og på den måde finde den resulterende hastighed og den resulterende acceleration.



Vi har altså:

Sted: $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$

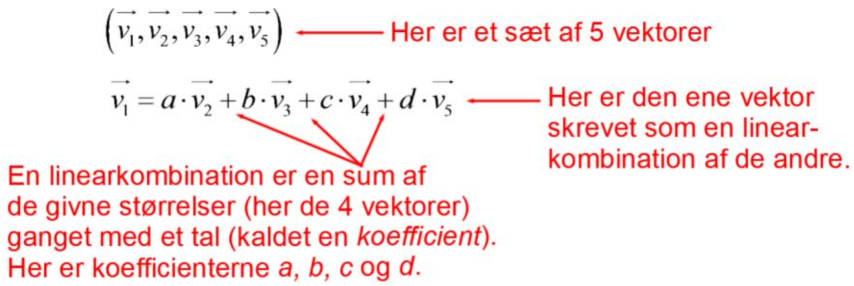
Hastighed: $\vec{v} = \overrightarrow{v_s} + \overrightarrow{v_l}$

Acceleration: $\vec{a} = \overrightarrow{a_s} + \overrightarrow{a_l}$

Opløsning af vektor efter retninger:

Vi har set på, hvordan man kan lægge to vektorer sammen og få en ny vektor. Vi skal nu se på, hvordan man med udgangspunkt i den "nye" vektor kan finde de to vektorer, der er lagt sammen. Dette kan nemlig lade sig gøre, **hvis man kender to ikke-parallelle retninger, som de to vektorer ligger parallelt med**. Man siger i så fald, at man opløser vektoren efter to retninger.

Hvis man arbejder i 3 eller flere dimensioner, kan man ligeledes opløse efter det pågældende antal retninger. Det kræver i så fald, at retningerne er bestemt ved et sæt af såkaldt *lineært uafhængige* vektorer, hvilket vil sige, at ingen af vektorerne kan skrives som en *linearkombination* af de andre.



I ovenstående tilfælde er $\vec{v}_1$ skrevet som en linearkombination af de 4 andre vektorer. Dermed er sættet IKKE lineært uafhængigt, men derimod *lineært afhængigt*.

I tre dimensioner vil tre vektorer, der ligger i samme plan, være lineært afhængige. Når man kræver, at sættet skal være lineært uafhængigt, hvis man skal bruge det til at opløse vektorer efter, skyldes det, at man ellers ikke kan komme "ud af" den plan, som vektorerne ligger i.

I to dimensioner kræves det blot, at de to vektorer ikke er parallelle, hvis de skal være lineært uafhængige. HVIS de er parallelle, kan man jo skrive $\vec{v}_2 = a\cdot\vec{v}_1$, hvilket er den simplest mulige linearkombination.

Det nemmeste vil ofte være, at man vælger en *base* af enhedsvektorer, der alle står vinkelret på hverandre. Og du vil – i hvert fald i gymnasiet – oftest i fysik kun komme til at arbejde med to dimensioner, hvor vi arbejder med retningerne vandret (*x*-aksen) og lodret (*y*-aksen).

Det er dog en vigtig pointe, at man kan opløse efter alle mulige forskellige retninger, hvilket vi ser på i et enkelt af de følgende eksempler.

Definition 8: Givet et *n*-dimensionalt rum og et lineært uafhængigt sæt $\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n\right)$ af *n* vektorer, siger man, at man *opløser* en given vektor $\vec{v}$ *efter retninger*, hvis man skriver den som $\vec{v} = k_1\cdot\vec{v}_1 + k_2\cdot\vec{v}_2 + k_3\cdot\vec{v}_3 + \ldots + k_n\cdot\vec{v}_n$.

Vektorerne $k_1\cdot\vec{v}_1, k_2\cdot\vec{v}_2, k_3\cdot\vec{v}_3, \ldots, k_n\cdot\vec{v}_n$ kaldes vektorens *komposanter* eller *komponenter* efter de givne retninger.

I 2 dimensioner med et ortogonalt sæt ($\vec{e}_x, \vec{e}_y$) af enhedsvektorer:

Her er $\vec{a} = a_1\cdot\vec{e}_x + a_2\cdot\vec{e}_y = \vec{a}_x + \vec{a}_y$ *opløsningen efter x- og y-retningerne.*

$\vec{a}_x$ kaldes *x*-komposanten (eller *x*-komponenten).

$\vec{a}_y$ kaldes *y*-komposanten (eller *y*-komponenten).

(a_1, a_2) er vektorens koordinater.

Bemærk, hvad der skete til allersidst i definitionen. Vi fik indført vektorers koordinater. Når vi senere vender tilbage til vektorer i forløbet *Vektorgeometri*, vil vi hovedsageligt arbejde med vektorer ved hjælp af deres koordinater, som vi vil regne med.

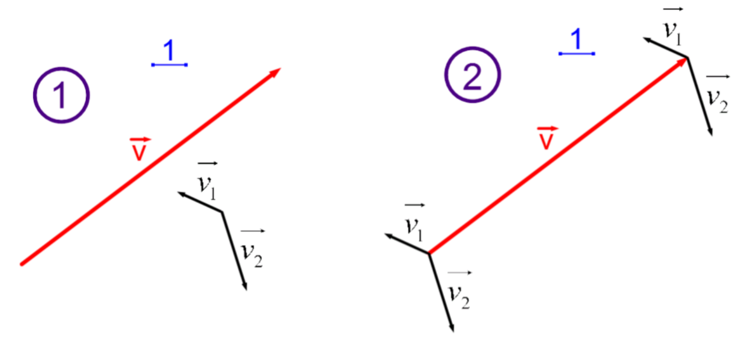
Ovenstående definition hænger nøje sammen med følgende sætning, uden hvilken den ville være uanvendelig:

Sætning 1: Givet et n-dimensionalt rum og et lineært uafhængigt sæt $\left(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \ldots, \vec{v_n}\right)$ af n vektorer.

Enhver vektor $\vec{v}$ i dette rum <u>kan</u> opløses efter de givne retninger, og denne opløsning er <u>entydig</u>.

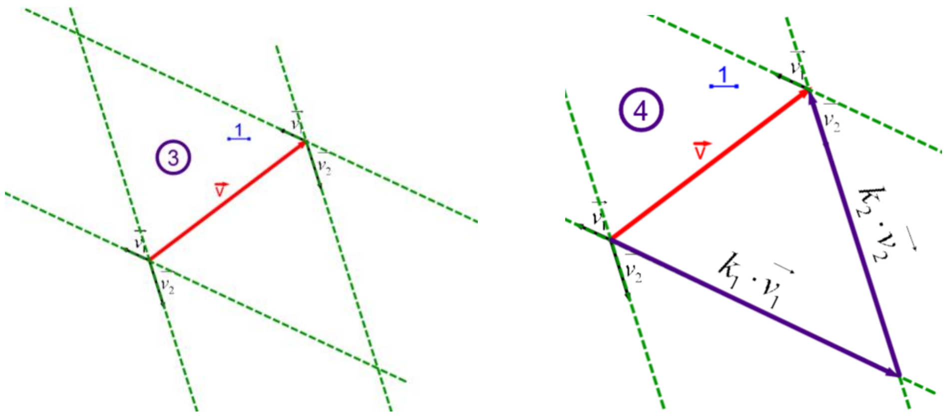
Bemærk, at denne sætning indeholder en såkaldt eksistensdel (”**kan”**) og en entydighedsdel. Det er vigtigt at være opmærksom på begge dele. Vi kan være sikre på, at der findes en opløsning. Og når vi har fundet denne opløsning, kan vi være sikre på, at der ikke er andre opløsninger.

Bevis 1: Vi beviser kun sætningen i to dimensioner, hvor det er nemmere at tegne situationen. Du kan evt. selv prøve at se, om du kan udvide beviset til flere dimensioner.
Beviset har den styrke, at det ikke blot viser rigtigheden af sætningen, men også anviser, hvordan man rent faktisk finder den pågældende opløsning, hvilket er temmelig væsentligt, da du kommer til at bruge dette mange gange.



1: Vi arbejder i planen og har fået to ikke-parallelle vektorer $\vec{v_1}$ og $\vec{v_2}$ samt en vektor $\vec{v}$, som vi ønsker at opløse efter retningerne angivet af $\vec{v_1}$ og $\vec{v_2}$.

2: Vi afsætter de to retningsgivende vektorer i endepunkterne af vores givne vektor.



3: Gennem endepunkterne tegnes rette linjer med de givne vektorer som retningsvektorer (stiplede grønne linjer). Hermed får vi dannet et parallelogram, da de grønne linjer er parvis parallelle.

4: Et af de to skæringspunkter (hjørner i parallelogrammet) anvendes til at tegne de to vektorer, hvorom det gælder $\vec{v} = k_1 \cdot \vec{v_1} + k_2 \cdot \vec{v_2}$ (i denne situation er begge koefficienter negative).

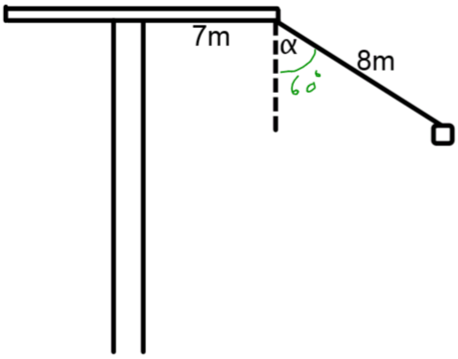
Eksistensen af opløsningen fremgår af, at to ikke-parallelle linjer altid vil skære hinanden, dvs. der vil altid dannes et parallelogram. Entydigheden følger af, at man for at nå den røde vektors endepunkter ved at følge de givne retninger er nødt til at bevæge sig ad de grønne linjer.

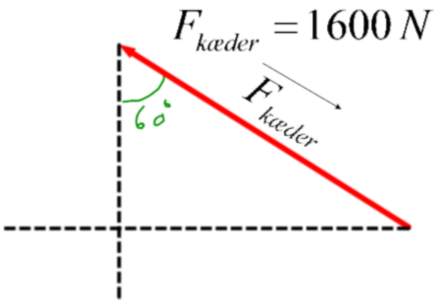
Opgaverne 308*

Øvelse 1: De grønne linjer i beviset ovenfor skærer hinanden to steder ud over den røde vektors endepunkter. Overvej, hvorfor dette ikke modsiger entydighedsdelen af sætningen.

Lad os nu se på en række anvendelser af opløsning af vektorer.

Eksempel 5: Himmelskibet i Tivoli.





I Himmelskibet bevæger man sig rundt i en jævn, vandret cirkelbevægelse. Stolene holdes fast af kæder, og kæderne danner i vores eksempel en vinkel på 60° med lodret. Stolene er påvirket af to kræfter: Tyngdekraften og kraften fra kæderne (der ses bort fra luftmodstand).

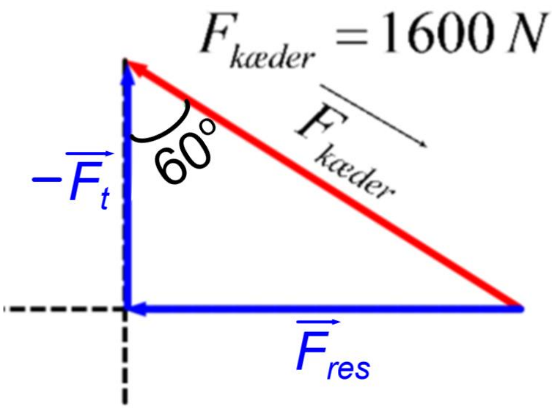
Vi antager, at man har en måler siddende på kæderne, så man kan måle, at kraften fra kæderne er 1600 N.

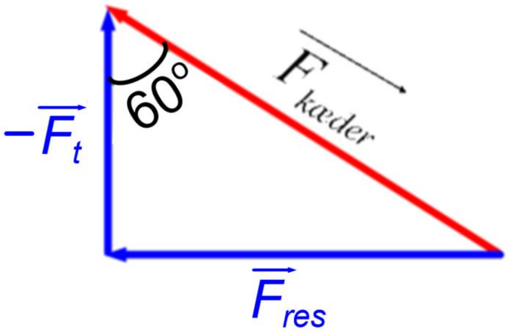
Som vi tidligere har set, vil kraften fra kæderne lagt sammen med tyngdekraften, der peger lodret nedad, give en resulterende kraft, der peger vandret ind mod tårnet i Himmelskibet.

Men nu er situationen en lidt anden, da vi kun kender kraften fra kæderne.

Pointen er så, at vi kan bestemme både tyngdekraften og den resulterende kraft ind mod centrum (centripetalkraften), da vi kender deres retninger, som er henholdsvis lodret og vandret.

Vi opløser vores kraft fra kæderne i disse to retninger (der er angivet med stiplede linjer ovenfor):





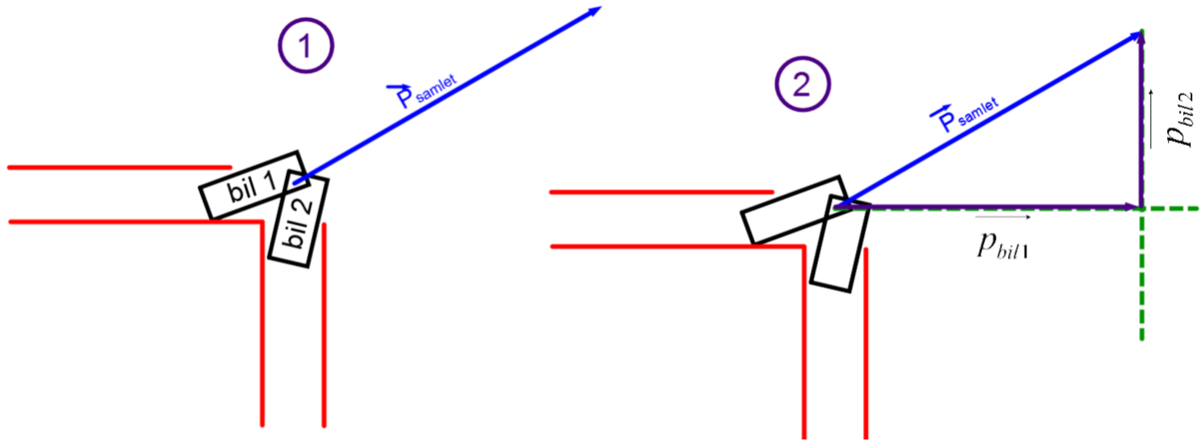
Vi skal være opmærksomme på, at vi finder den modsatte vektor til tyngdekraften, da vi jo finder den del af kraften fra kæderne, der skal ophæve tyngdekraften. Men størrelsen er den samme som tyngdekraftens størrelse, og vi kan derfor beregne:

$$\cos(v) = \frac{F_t}{F_{kæder}} \Leftrightarrow F_t = \cos(v) \cdot F_{kæder} \qquad \sin(v) = \frac{F_{res}}{F_{kæder}} \Leftrightarrow F_{res} = \sin(v) \cdot F_{kæder}$$

$$F_t = \cos(60°) \cdot 1600\,\text{N} = \frac{1}{2} \cdot 1600\ \text{N} = \underline{\underline{800\,\text{N}}} \qquad F_{res} = \sin(60°) \cdot 1600\,\text{N} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1600\,\text{N} = \underline{\underline{1386\,\text{N}}}$$

Vi ville derefter med viden fra fysik kunne beregne, hvor meget stolen med passagerer vejer samt farten i cirkelbevægelsen.

Eksempel 6: Vi ser igen på et sammenstød mellem to biler. Ud fra kendskabet til gnidningen mod underlaget kan teknikere efterfølgende bestemme bilernes samlede bevægelsesmængde lige efter sammenstødet. Spørgsmålet er nu, om man ud fra dette kan bestemme de enkelte bilers bevægelsesmængde (og dermed hastighed) lige inden sammenstødet, så man kan se, om nogle af bilerne kørte for hurtigt?

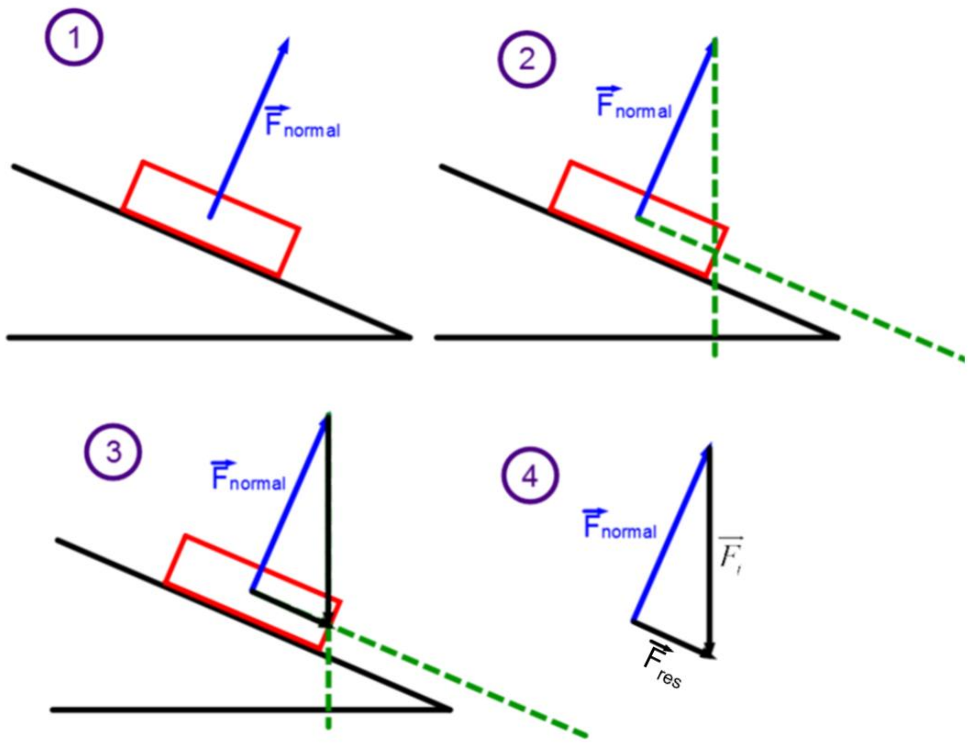


Igen er svaret ”Ja”.

Vejene giver os de retninger, vi skal opløse efter (vi regner med, at bilerne fulgte vejene og ikke nåede at ændre retning).

Vi tegner de stiplede grønne linjer efter retningerne, og skæringerne fortæller os, hvad bevægelsesmængderne af de to biler var lige før sammenstødet.

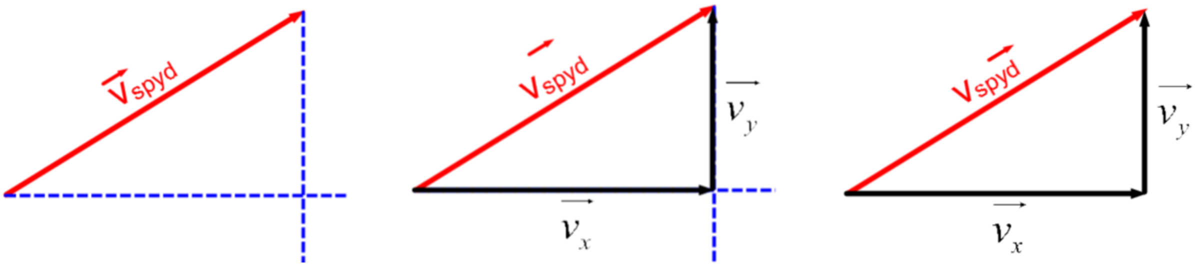
Eksempel 7: Bevægelse på skråplan.



Vi ser på en situation, hvor vi kun kender normalkraften og ønsker at finde den resulterende kraft, der går langs med underlaget (der ses bort fra gnidning) samt tyngdekraften, der peger lodret ned.

Denne gang står de to retninger ikke vinkelret på hinanden, men som ovenstående figurer viser, er fremgangsmåden præcis den samme, og vi får opløst normalkraften efter de to retninger.

Eksempel 8: Spydkast.

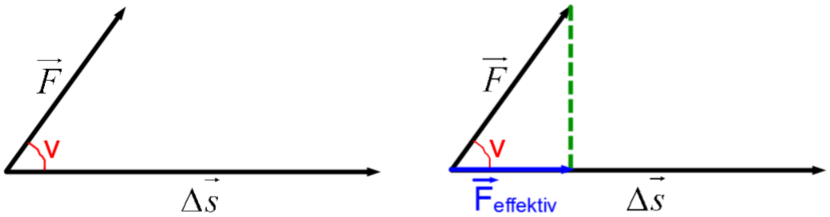


Et spyd kastes af sted med en eller anden vinkel (tæt på 42°) med vandret. Hvis vi skal regne på situationen, skal vi betragte den vandrette og den lodrette del af bevægelsen hver for sig (da den ene er en såkaldt bevægelse med konstant hastighed og den anden en bevægelse med konstant acceleration). Vi vil derfor gerne vide, hvad hastighedsvektorens vandrette og lodrette komposanter er, og de bestemmes på samme måde som tidligere.

Opgaverne 309* og 310*

I nogle situationer er det kun den ene komposant, der er væsentlig.

Dette udnytter man til at indføre en slags produkt mellem vektorer (bemærk, at vores tidligere produkt har været en skalar ganget med en vektor).



$$\cos(v) = \frac{F_{effektiv}}{F}$$

$$F_{effektiv} = F \cdot \cos(v)$$

Vi ser på den situation, hvor man trækker noget, der bevæger sig i en anden retning end trækkraften (hvilket kan skyldes, at der er andre kræfter – f.eks. tyngdekraften – indblandet). Hvis kun kraften i bevægelsesretningen har betydning, kan vi snakke om den *effektive* del af kraften, og det er den del, der er væsentlig, når vi skal give en definition på det såkaldte *prikprodukt (skalarprodukt)* mellem vektorer.

Definition 9: Givet to vektorer $\vec{F}$ og $\Delta\vec{s}$ med vinklen *v* mellem sig, er *prikproduktet (skalarproduktet)* mellem de to vektorer givet ved:

$$\vec{F} \bullet \Delta\vec{s} = F_{effektiv} \cdot \Delta s = F \cdot \Delta s \cdot \cos(v)$$

Tegnet mellem de to vektorer i et prikprodukt er en *prik*. Dvs. det er ikke et gangetegn. Gangetegnene står mellem skalarerne efter lighedstegnene.

Bemærk, at *skalarproduktet* ikke har fået sit navn efter, hvad man prikker sammen, men efter resultatet, der er en skalar.

Dvs. et prikprodukt er et produkt mellem to vektorer, og resultatet er en skalar.

Opgaverne 311*