KEGLESNIT

x-klasserne
Gammel Hellerup Gymnasium

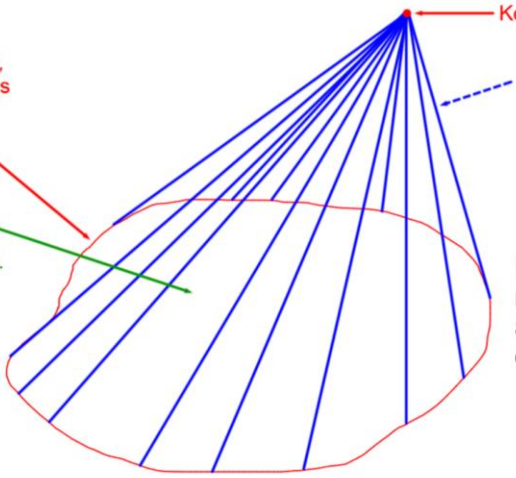
April 2019 ; Michael Szymanski ; mz@ghg.dk

INDHOLDSFORTEGNELSE

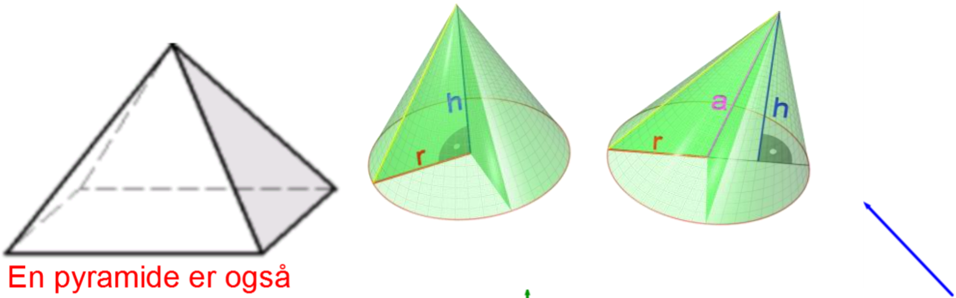
BEGREBET KEGLE

Vi begynder med at se på, hvad en kegle er, så vi kan se, hvad det er, vi ikke skal bruge til keglesnit.

En kegle defineres ud fra en lukket, plan kurve og et punkt uden for denne plan (se nedenstående figur):



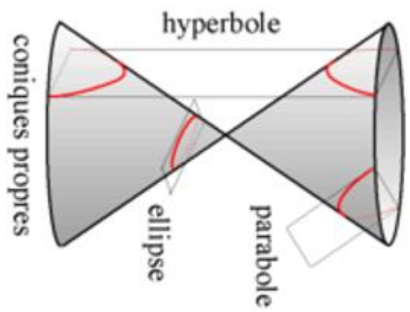
Keglens ledekurve kan have alle mulige forskellige former, så det kan kegler også:



Når man taler om keglesnit, er det dog som nævnt slet ikke kegler, man snitter. For som vi har set ovenfor, dækker begrebet *kegle* over så forskellige former, at det ville være svært at sige noget generelt om snitkurverne. Det er en bestemt slags *kegleflader*, der snittes, men det er ikke altid, at man går så meget op i, om man siger *kegle* eller *keglefIade* (bortset fra, at man aldrig bruger ordet *keglefIade* om en *kegle*).

En keglefIade er et mere abstrakt begreb end en kegle, da det er en rumlig flade med uendelig udstrækning. Den fremkommer ved, at man omdanner frembringerne til linjer i stedet for linjestykker.

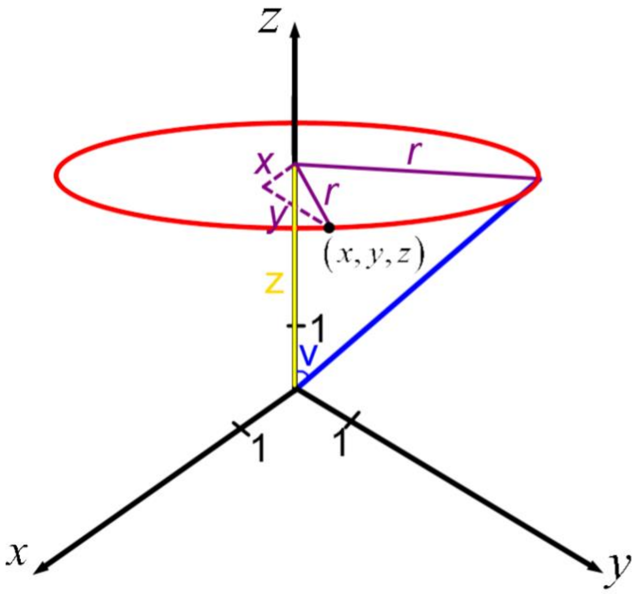
Vi skal se på den rette, cirkulære keglefIade, der dannes ud fra den rette, cirkulære kegle. Det kaldes også en ***omdrejningskeglefIade***. Dvs. det er en keglefIade, hvor ledekurven er en cirkel, og hvor toppunktets projektion på fladen afgrænset af ledekurven er fladens centrum.



Linjen gennem toppunktet og centrum kaldes i en omdrejningskeglefIade for *keglefladens akse*. Alle frembringere danner sammen med keglefladens akse den samme spidse vinkel, der kaldes *aksevinklen*.

Vi er nu klar til at lægge vores omdrejningskeglefIade ind i et tredimensionelt koordinatsystem:

Vi placerer keglefladen i et koordinatsystem, så keglefladens akse falder sammen med *z*-aksen, og så toppunktet ligger i origo.



En del af keglefladen er illustreret med den røde cirkel, og punktet (x, y, z) ligger på keglefladen. Afstanden fra punktet ind til *z*-aksen kaldes *r*, og det er radius i den røde cirkel.

Bemærk, at den røde cirkel blot er en vilkårlig del af keglen, så dette *r* er ikke en størrelse, der har noget som helst med keglefladen at gøre. Det er kun en størrelse, der skal hjælpe os gennem de følgende udregninger.

Til gengæld er aksevinklen *v* en størrelse, der er knyttet til keglefladen, og den er angivet med blåt.

Cirklen ligger parallelt med *xy*-planen, så vi kan bestemme *r* ved hjælp af Pythagoras, da vores delvist stiplede violette trekant er retvinklet (da *x*- og *y*-aksen er ortogonale):

$$x^2 + y^2 = r^2 .$$

Som det ses på figuren, kan man udtrykke *r* ud fra *v*, da vi har endnu en retvinklet trekant (gul, violet og blå linjer). Her har vi:

$$\tan(v) = \frac{r}{z} \Leftrightarrow r = \tan(v) \cdot z$$

Der gælder altså:

$$x^2 + y^2 = \tan^2(v) \cdot z^2$$

Da aksevinklen er konstant, kan man også skrive:

$$x^2 + y^2 = k^2 \cdot z^2 \quad \text{, hvor } k = \tan(v)$$

Vi har altså:

Sætning 1: Ligningen for en omdrejningskeglefIade med aksen sammenfaldende med *z*-aksen og toppunkt i origo er:

$$x^2 + y^2 = k^2 \cdot z^2$$

I de følgende afsnit arbejdes med ovenstående ligning samt aksevinklen *v*, dvs. det er hele tiden underforstået, at vi har placeret omdrejningskeglefladen som angivet i Sætning 1.

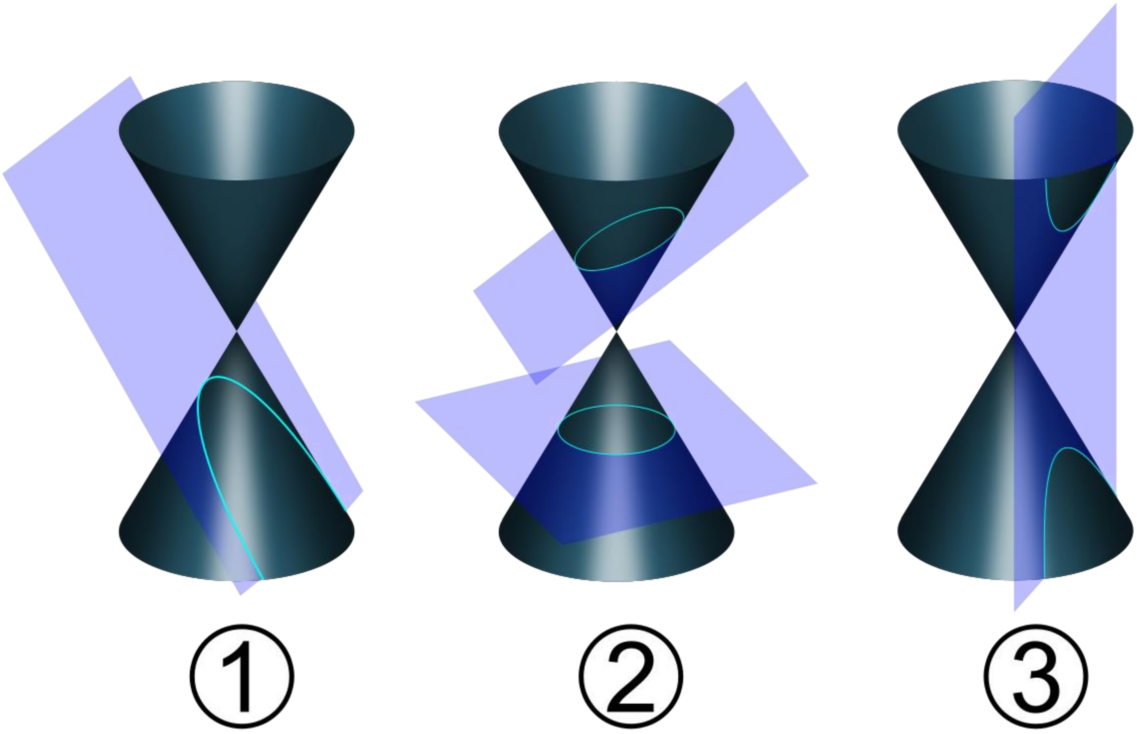
Opgaverne 100*

KEGLESNIT

Der er 4 keglesnit: Cirkel, ellipse, parabel og hyperbel.

Apollonius fra Perga levede ca. 262 – ca. 190 fvt. Han blev uddannet og underviste i Alexandria og var på et tidspunkt på besøg i Pergamon. Men lad nu det være nok om hans liv.
Vi kender Apollonius fra forløbet om *Uendeligheder og verdensbilleder*, hvor han bidrager ved at opfinde både den excentriske model og epicykelmodellen. Desuden skrev Apollonius det næsten helt bevarede værk *Keglesnit* bestående af 8 bøger, hvor han samler den tidligere viden om keglesnit og samtidig tilføjer en hel række nye egenskaber og giver en mere generel behandling. I den forbindelse opfinder han navnene *ellipse*, *parabel* og *hyperbel*.
Apollonius stod altså både bag epicyklerne og ellipserne, dvs. både den forkerte og den rigtige beskrivelse af planetbanerne.

De fire keglesnit fremkommer – som også set i Firenze – ved forskellige fladesnit af en omdrejningskegleflade:



1: Parabel 2 (nederst): Cirkel 2 (øverst): Ellipse 3: Hyperbel

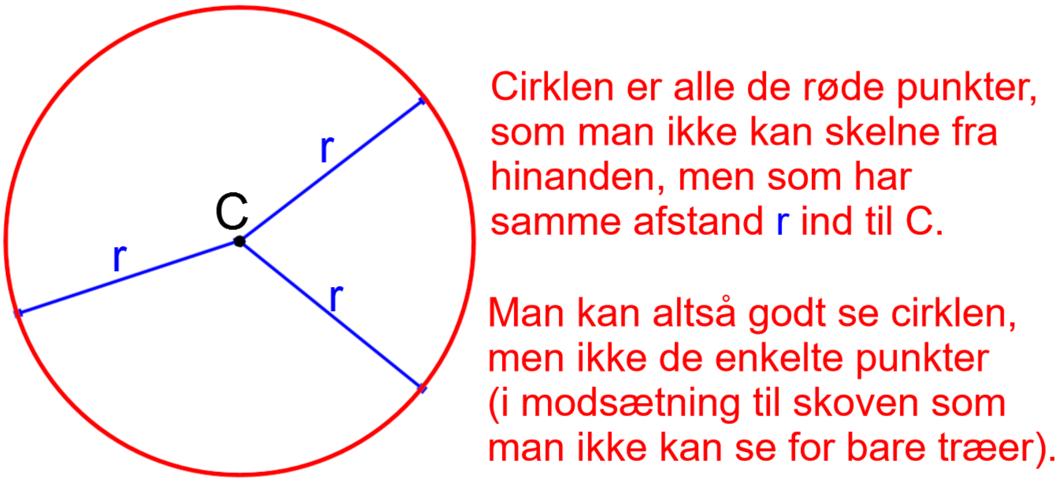
Vi skal behandle keglesnittene ved at se på ligninger, differentialligninger, vektorfunktioner og geometriske konstruktioner og egenskaber.
Keglesnittene gennemgås ét ad gangen.

Derefter går vi over til at se på nogle mere komplicerede flader, bl.a. den hyperbolske paraboloide.

Cirkel

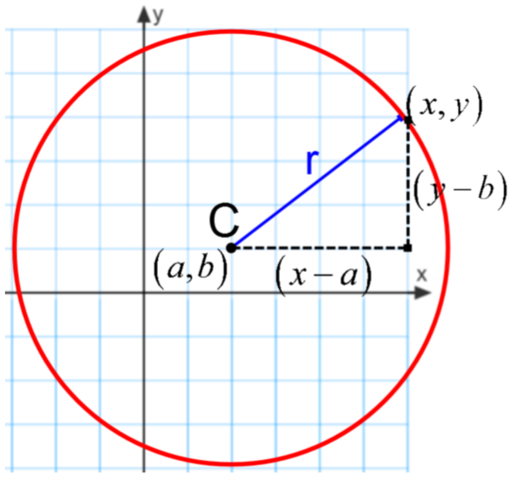
Geometrisk:

En *cirkel* er det geometriske sted for de punkter i planen, der har samme afstand r til et givet punkt C i planen. r kaldes cirklens *radius*, og C kaldes cirklens *centrum*.



Ligning:

Hvis cirklen indtegnes i et koordinatsystem (så man går fra geometri til analytisk geometri), kan man angive en ligning for den cirkel, der har centrum i $C(a,b)$ og radius r:



Pythagoras' Læresætning giver:

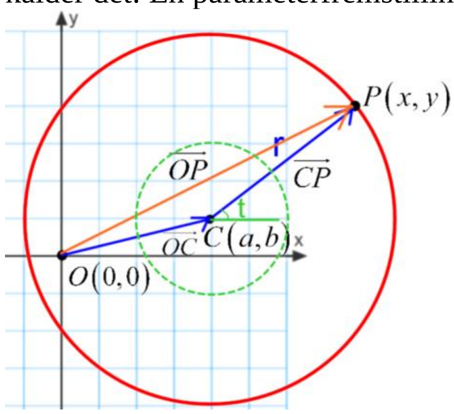
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Og hvis centrum placeres i origo:

$$x^2+y^2=r^2$$

Parameterfremstilling:

Hvis vi indfører vektorer, kan vi også angive cirklen som en vektorfunktion, eller som vi også kalder det: En parameterfremstilling med parameteren t:



Indskudsreglen giver os:

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad ; \quad t\in\mathbb{R}$$

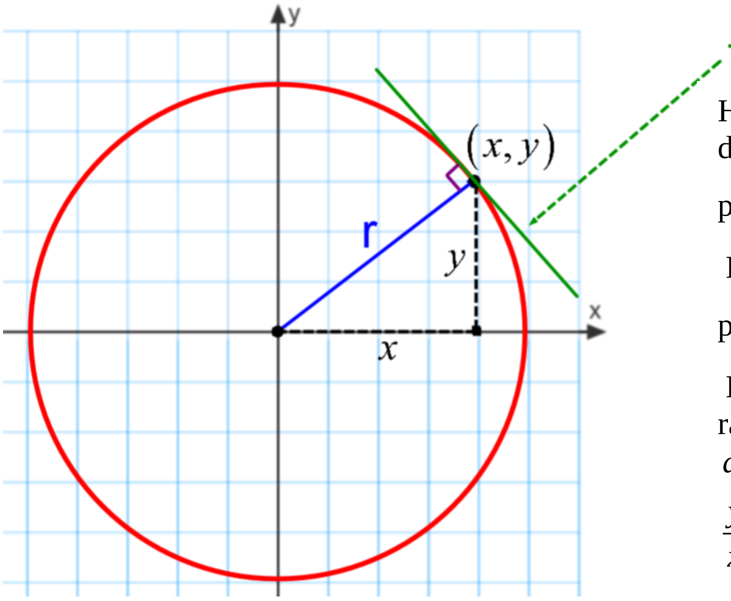
Hvis centrum ligger i origo, har man altså:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad ; \quad t\in\mathbb{R}$$

Differentialligning:

Først skal man gøre sig klart, at når man arbejder med differentialligninger, er det funktioner, der er de partikulære løsninger, og som bekendt kan cirklen ikke beskrives ved en funktion, da to forskellige *y*-værdier kan være knyttet til den samme *x*-værdi. Vi vil derfor aldrig kunne finde en løsning, der beskriver hele cirklen. Men vi kan finde løsninger, der beskriver en halvcirkel, og to af disse samt to punkter kan sættes sammen til en cirkel.

Vi begynder med det simple tilfælde, hvor centrum ligger i origo:



Hældningen for det blå linjestykke, der løber mellem centrum og punktet på cirklen, er $a_r = \frac{y}{x}$.

Hældningen for tangenten skrives pr. definition som $a_t = \frac{dy}{dx}$.

Da tangenten står vinkelret på radius, har man:

$a_r \cdot a_t = -1$

$\frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx} = -1 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

Vi er altså kommet frem til en differentialligning, der kan løses ved separation af de variable. Undervejs blev der ikke tænkt så meget over variablernes værdier, men det ser vi på nu. Umiddelbart kunne det se ud, som om vi kommer i problemer, både hvis *x* er 0, og hvis *y* er 0. I det første tilfælde fordi radius bliver lodret og derfor ikke har nogen hældning. I det andet tilfælde er det tangenten, der bliver lodret. Men $x = 0$ er ikke et problem, når vi kun ser på differentialligningen.

Vi vælger at arbejde videre med differentialligningen på den sidste form, og vi skal så have fundet nogle åbne intervaller, hvor *y* ikke er 0, som vi kan arbejde inden for.

Vi lader i første omgang: $x \in \mathbb{R}$ og $y \in \mathbb{R}_+$:

Vores sætning om separation af de variable giver så:

$$y > 0: \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Leftrightarrow \int y\,dy = \int -x\,dx$$

Vi regner løs og husker vores konstant, da det er ubestemte integraler:

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + k_1 \Leftrightarrow y^2 = -x^2 + k$$

Vi udnytter nu, at vores radius i cirklen er *r*, og det giver os: $r^2 = x^2 + y^2 = k$

Vi har derfor: $y^2 = -x^2 + r^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{-x^2 + r^2}$ (i sidste skridt er betingelsen $y > 0$ benyttet).

Vores partikulære løsning er altså:

$$\underline{\underline{f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad , \ -r < x < r}}$$

Definitionsmængden følger af, at $y > 0$, og argumentet i kvadratroden må ikke være negativt.

Undervejs så vi, at vi kom frem til cirklens ligning.

Hvis vi løser for $y < 0$, får vi den anden halvdel af cirklen, bortset fra, at vi mangler punkterne $(-r, 0)$ og $(r, 0)$, fordi vi arbejder med åbne intervaller.

Opgaverne 101*

Øvelse 1: Vis, at differentialligningen $\frac{dy}{dx} = -\frac{(x-a)}{(y-b)}$ fører til vores generelle cirkelligning.

Keglesnittet:
Cirklen fremkommer som keglesnit, hvis snittet lægges parallelt med *xy*-planen, dvs. hvis keglefladens akse står vinkelret på snitfladen.
På denne snitflade er *z*-koordinaten konstant, dvs. vi har $z = c$.
Indsættes dette i ligningen for omdrejningskeglefladen (Sætning 1), får vi:

$$x^2 + y^2 = k^2 \cdot c^2$$

Da *k* og *c* er konstanter, ser vi altså, at vi genfinder cirklens ligning, og radius i cirklen er:

$$r = k \cdot c = \tan(v) \cdot c \,.$$

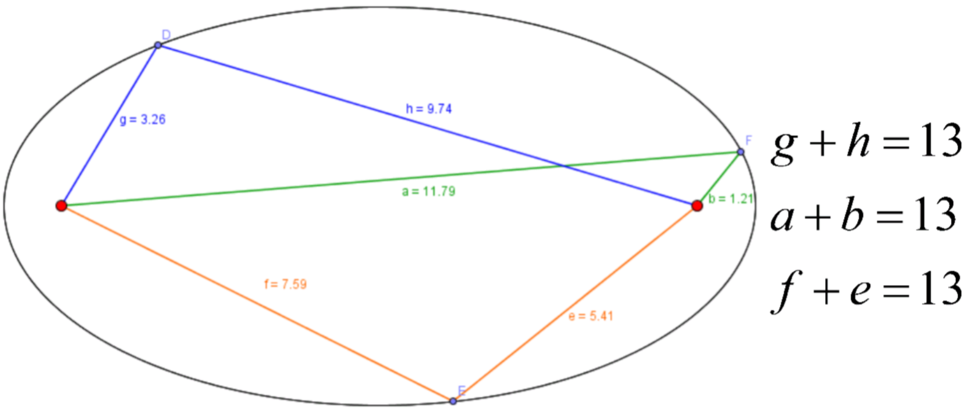
Karakteristiske egenskaber:
En cirkel har den karakteristiske egenskab, at en ret linje, der udgår fra centrum og reflekteres på cirklen (cirkelperiferien), vil ramme tilbage i centrum. Dvs. hvis man er vred og har en tennisbold i hånden, er det ikke en god idé at stå i centrum af et cirkelformet rum (f.eks. i et ombygget vandtårn eller i en kornsilo).

Ellipse

Geometrisk:
Der er to forskellige geometriske beskrivelser af ellipser.

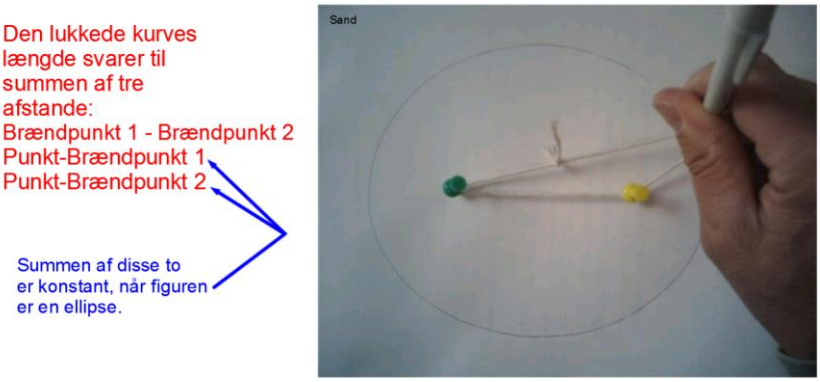
2 punkter: Givet to ikke-sammenfaldende punkter F_1 og F_2 i en plan, er en *ellipse* det geometriske sted for alle de punkter i planen, hvor summen af afstandene til de to givne punkter er lig en given konstant *k*, hvor $k > |F_1F_2|$.

Dvs. for ethvert punkt *P* på ellipsen gælder $|PF_1| + |PF_2| = k$



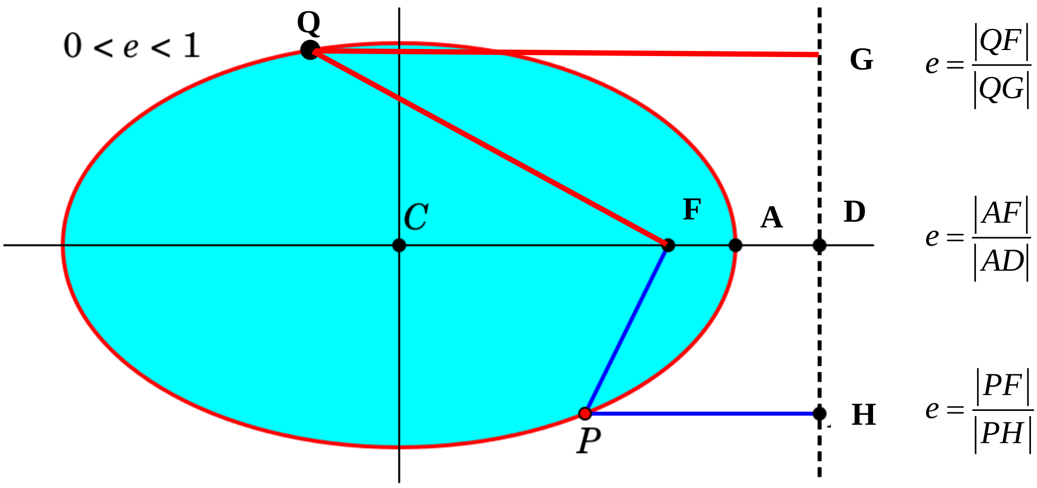
De to givne punkter kaldes *brændpunkter* (markeret med rødt). Ellipsen er den sorte kurve, og som vist med de angivne afstande, gælder det, at uanset hvilket punkt på ellipsen, man vælger, så er summen af afstandene ind til brændpunkterne den samme (i dette tilfælde 13).

Denne beskrivelse af ellipsen kan bruges, når man skal tegne den i sandet. Man tager tre pinde og et reb, der bindes sammen, så det danner en lukket kurve. De to pinde sættes fast og fungerer som brændpunkter, mens den tredje pind tegner ellipsen i sandet:



Øvelse 2: Hvorfor er det nødvendigt, at $k > |F_1F_2|$? Hvad ville $k < |F_1F_2|$ betyde? Eller $k = |F_1F_2|$?

Punkt og linje: Givet en ret linje *l* og et punkt *F*, der ikke ligger på linjen, er en *ellipse* det geometriske sted for de punkter, hvor forholdet mellem afstanden til punktet *F* og afstanden til linjen *l* har den samme værdi *e*, hvor $0 < e < 1$.



Denne gang er der kun ét punkt *F*, der kaldes *brændpunktet*, og linjen *l* kaldes *ledelinjen* (den stiplede linje). Linjen, der står vinkelret på ledelinjen og går gennem brændpunktet, skærer ellipsen i to punkter (hvoraf det ene er navngivet som *A* ovenfor). Linjestykket mellem disse to punkter kaldes *storaksen*, og dets længde betegnes med $2 \cdot a$, dvs. *a* er *den halve storakse*. Midtpunktet af storaksen er ellipsens *centrum C*. Storaksens midtnormal skærer ellipsen i to punkter. Linjestykket mellem disse kaldes *lilleaksen*, og *den halve lilleakse* har længden *b*.

Man kan tegne en ellipse identisk med ovenstående ud fra et andet punkt og en anden linje, nemlig det givne punkt og den givne linjes spejlinger i storaksens midtnormal. *F* 's spejlbillede er så ellipsens andet brændpunkt.

Denne geometriske definition lyder jo meget anderledes end den første. Fordelen ved denne beskrivelse er, at den – som vi senere skal se – er fælles for de tre keglesnit ellipse, parabel og hyperbel. Forskellen er kun værdien af *e*, der kaldes *excentriciteten.* Vi har:

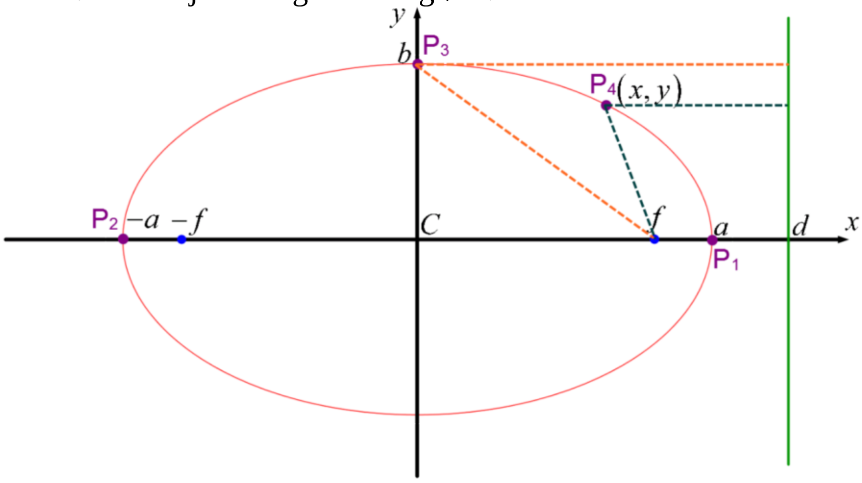
$(e = 0)$: Cirkel (det svarer til ledelinjen uendelig langt væk, hvilket selvfølgelig ikke kan lade sig gøre, og derfor regnes cirklen med denne definition ikke til keglesnittene).
$0 < e < 1$: Ellipse
$e = 1$: Parabel
$e > 1$: Hyperbel

Hvis man kigger på placeringen af punktet *A*, kan man altså ret hurtigt afgøre, om man får en ellipse, parabel eller hyperbel. Hvis punktet ligger tættere på *F* end på *D*, er det en ellipse. Hvis *A* ligger midt mellem *F* og *D*, er det en parabel. Hvis *A* ligger tættere på *D* end på *F*, er det en hyperbel.

Ligning:

Vi vil benytte den sidste af de to geometriske definitioner til at udlede ligningen for en ellipse. Efterfølgende kan vi så vise, at denne ligning også opfylder den anden definition.

Vi indfører et koordinatsystem og lægger ellipsen med centrum i origo og brændpunktet på den positive del af *x*-aksen. Ledelinjen er tegnet med grønt:



Vi har fået indført en masse begreber (brændpunkt, ledelinje, storakse, lilleakse, centrum og excentricitet). Vi kender kun den helt generelle regel, at det for ethvert punkt på ellipsen gælder, at forholdet mellem dets afstand til brændpunktet og til ledelinjen er lig excentriciteten. Dette vil vi nu udnytte. Kig på figuren ovenfor og indse, at vores fire nøje udvalgte punkter giver os:

$$P_1 : e = \frac{a-f}{d-a} \qquad P_2 : e = \frac{a+f}{d+a} \qquad P_3 : e = \frac{\sqrt{b^2+f^2}}{d} \qquad P_4 : e = \frac{\sqrt{(f-x)^2+y^2}}{d-x}$$

De to første sammenhænge giver os:

$$\left.\begin{aligned} e = \frac{a-f}{d-a} &\Leftrightarrow d\cdot e - a\cdot e = a-f \\ e = \frac{a+f}{d+a} &\Leftrightarrow d\cdot e + a\cdot e = a+f \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\xrightarrow{\text{addition}} 2\cdot d\cdot e = 2\cdot a \Leftrightarrow \boxed{e = \frac{a}{d}} \\ &\xrightarrow{\text{subtraktion}} 2\cdot a\cdot e = 2\cdot f \Leftrightarrow \boxed{e = \frac{f}{a}} \end{aligned}$$

Da $a = e\cdot d$ og $f = e\cdot a$ (omskrivning af de gule sammenhænge ovenfor), så gælder $f = e^2\cdot d$.

Hvis man skal regne frem og tilbage mellem afstandene fra centrum og ud til enten brændpunktet, ellipsepunktet længst fra centrum eller ledelinjen (dvs. *f*, *a* eller *d*), har man altså kun brug for excentriciteten:

$$\boxed{a = e\cdot d \qquad f = e\cdot a \qquad f = e^2\cdot d}$$

Bemærk, hvor meget informationen fra P_3 ligner den øverste af de gule sammenhænge. Det fortæller os, at deres tællere må være ens, dvs.:

$$a = \sqrt{b^2+f^2} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + f^2 \Leftrightarrow \boxed{f = \sqrt{a^2-b^2}}$$

Vi har her fundet en formel, der kan hjælpe os med at få placeret brændpunktet, når vi kender storaksen og lilleaksen.

Storaksen og lilleaksen fastsætter også excentriciteten, der dermed bliver et udtryk for ”fladtryktheden”. Det sker ved at indsætte vores netop fundne udtryk for *f* i den nederste af de to gule ligninger, vi fandt lige før:

$$e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \text{ eller } \boxed{e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Vi ser altså som postuleret ovenfor, at hvis $a = b$ (svarende til en cirkel), så er $e = 0$, og jo mindre lilleaksen er i forhold til storaksen, dvs. jo mere fladtrykt ellipsen er, jo tættere kommer excentriciteten på 1.

Vi er nu klar til at udlede ligningen for ellipsen, hvilket sker ved at regne på informationen fra P_4 og inddrage de udregnede sammenhænge:

$$e^2=\frac{(f-x)^2+y^2}{(d-x)^2}\Leftrightarrow$$

Vores viden fra P_4

$$e^2\cdot\left(d^2+x^2-2\cdot d\cdot x\right)=f^2+x^2-2\cdot f\cdot x+y^2\Leftrightarrow$$

Nævneren er ganget over på venstresiden, og den 2. kvadratsætning er anvendt på begge sider.

$$e^2\cdot d^2+e^2\cdot x^2-2\cdot d\cdot e^2\cdot x=f^2+x^2-2\cdot f\cdot x+y^2\Leftrightarrow$$

$$a^2+\frac{a^2-b^2}{a^2}\cdot x^2-2\cdot a\cdot e\cdot x=a^2-b^2+x^2-2\cdot e\cdot a\cdot x+y^2\Leftrightarrow$$

Her udnyttes de fundne sammenhænge:

$$a=e\cdot d$$
$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$
$$f=\sqrt{a^2-b^2}$$
$$f=e\cdot a$$

$$\frac{a^2-b^2}{a^2}\cdot x^2=-b^2+x^2+y^2\Leftrightarrow$$

Bemærk:

$$\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}$$

$$b^2=\frac{b^2}{a^2}\cdot x^2+y^2\Leftrightarrow$$

$$\boxed{1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$$

Vi har nu fundet ligningen for en ellipse med centrum i origo og brændpunkterne liggende på *x*-aksen. Vi kan så parallelforskyde, spejle eller rotere grafen på sædvanlig vis. Hvis vi f.eks. parallelforskyder, så centrum flyttes til (p,q), bliver ligningen: $1=\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}$.

Lad os se, hvordan punkterne, der opfylder ellipseligningen, også opfylder vores første geometriske betingelse. Dvs. vi skal vise, at summen af hvert enkelt punkts afstande ind til brændpunkterne er den samme for alle punkter.

Vi ser på det generelle punkt P_4 og beregner summen af afstandene til brændpunkterne:

$$dist_1+dist_2=\sqrt{y^2+(f-x)^2}+\sqrt{y^2+(f+x)^2}=\sqrt{y^2+f^2+x^2-2\cdot f\cdot x}+\sqrt{y^2+f^2+x^2+2\cdot f\cdot x}=$$
$$\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}\cdot x^2+a^2-b^2+x^2-2\cdot e\cdot a\cdot x}+\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}\cdot x^2+a^2-b^2+x^2+2\cdot e\cdot a\cdot x}=$$
$$\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}\cdot x^2+a^2-2\cdot e\cdot a\cdot x}+\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}\cdot x^2+a^2+2\cdot e\cdot a\cdot x}=$$
$$\sqrt{e^2\cdot x^2+a^2-2\cdot e\cdot a\cdot x}+\sqrt{e^2\cdot x^2+a^2+2\cdot e\cdot a\cdot x}=\sqrt{(a-e\cdot x)^2}+\sqrt{(a+e\cdot x)^2}=$$
$$(a-e\cdot x)+(a+e\cdot x)=$$
$$2\cdot a$$

Vi fik altså ikke blot vist, at summen af afstandene er konstant. Vi fik også vist, hvad denne sum er, nemlig storaksen. Det sidste kunne punkterne P_1 og P_2 også have vist os.

Vi har nu fået vist, at de to geometriske definitioner dækker over det samme, og vi har fundet en ligning for ellipsen.

Opgaverne 102*

Parameterfremstilling:

Parameterfremstillingen for ellipsen med centrum i origo og brændpunkterne på *x*-aksen er:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cdot\cos(t) \\ b\cdot\sin(t) \end{pmatrix} \ ; \ t\in\mathbb{R}$$

Vi kan vise, at dette er en rigtig parameterfremstilling, ved at tjekke, at den passer med vores ligning:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2\cdot\cos^2(t)}{a^2}+\frac{b^2\cdot\sin^2(t)}{b^2}=\cos^2(t)+\sin^2(t)=1$$

Grundrelationen viser os til sidst, at vores parameterfremstilling passer med ligningen.

Som med alle andre parameterfremstillinger er det meget nemt at parallelforskyde grafen. Når vi parallelforskyder ellipsen, så centrum placeres i (p,q), fås:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a\cdot\cos(t) \\ b\cdot\sin(t) \end{pmatrix} \ ; \ t\in\mathbb{R}$$

Opgaverne 103*

Differentialligning:

Vi ser på følgende differentialligning: $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$, $a,b\in\mathbb{R}_+$, $b<a$.

Man aner en anelse snyd i opstillingen af denne differentialligning, for den er jo nærmest konstrueret til at give det ønskede, men lad os nu se, at den også gør det. Vi løser den ved separation af de variable, og igen huskes det, at vi kun er i stand til at se på halvdelen af ellipsen:

$$y>0: \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y} \Leftrightarrow \int\frac{y}{b^2}dy=\int-\frac{x}{a^2}dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{y^2}{b^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{a^2}+k_1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=k$$

Hvis vi udnytter, at punktet $(a,0)$skal ligge på grafen, får vi:

$$k=\frac{a^2}{a^2}+\frac{0^2}{b^2}=1$$

Og vi har hermed set, at den funktion, hvis graf er vores halvellipse, er en løsning til differentialligningen. Angående betingelsen $b<a$, så er den ikke vigtig for løsningen af differentialligningen. Den sikrer bare, at vores storakse er længere end lilleaksen. Det er – som vi senere skal se – fortegnet i differentialligningen, der er vigtigt.

Vores differentialligning fortæller os noget meget vigtigt, nemlig at hældningen for tangenten til ellipsen i punktet (x,y)er $-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$. Det får vi brug for, når vi skal vise ellipsens karakteristiske egenskab.

Keglesnittet:

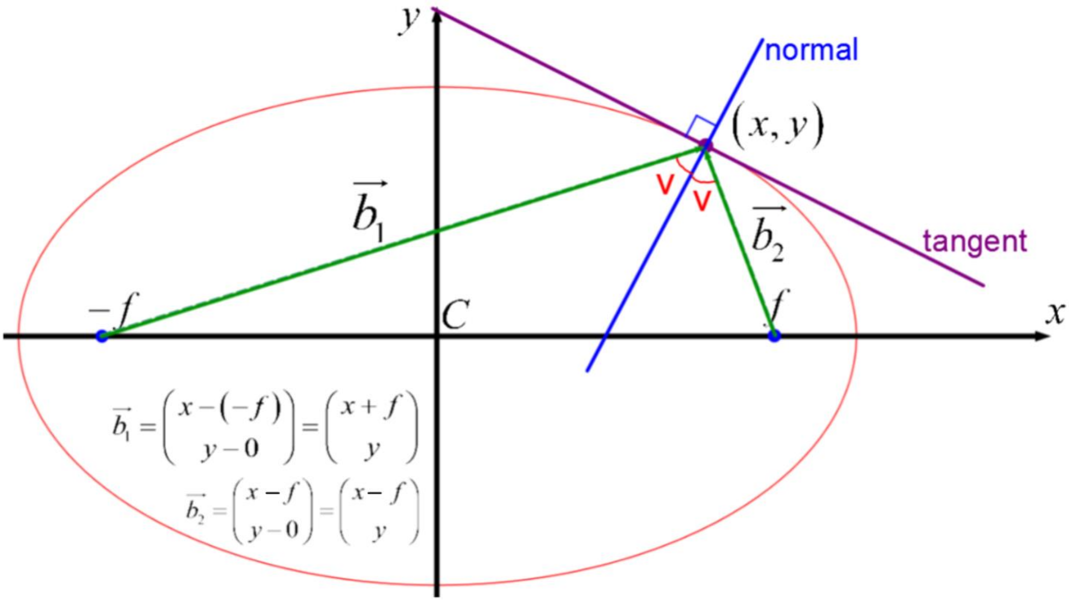
Vi lader *w* være vinklen mellem snitplanens normalvektor og *z*-aksen.

Ellipsen fremkommer så, hvis $0<w<v$, hvor *v* er omdrejningskeglefladens aksevinkel.

Karakteristiske egenskab:

Den karakteristiske egenskab for en ellipse er, at en partikel, der udgår fra et af brændpunkterne og følger en ret linje, af ellipsen vil reflekteres hen i det andet brændpunkt.
Dvs. lysstråler eller lydbølger, der udsendes i alle retninger fra det ene brændpunkt, vil samles igen i det andet brændpunkt.

I kender dette fra det elliptiske loft (et "hviskegalleri") på matematikmuseet i Firenze. Egenskaben kan illustreres på følgende måde:



Pointen er altså, at de rette linjer fra de to brændpunkter til punktet (x, y) danner kongruente vinkler med normalen (*indfaldsvinkel* = *udfaldsvinkel*). Det skal nu bevises.

Fra vores differentialligning ved vi, at hældningen for tangenten i punktet (x, y) er $-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$. Dvs. en retningsvektor for tangenten er:

$$\vec{r_t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y} \end{pmatrix}.$$

En tværvektor til denne retningsvektor fungerer som retningsvektor for normalen, da denne står vinkelret på tangenten. Vi har:

$$\hat{r_t} = \begin{pmatrix} \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Som sagt kunne denne vektor benyttes som retningsvektor for normalen, men vi vælger først at skalere den op med *y*, så vi vælger:

$$\vec{r_n} = \begin{pmatrix} \frac{b^2}{a^2}\cdot x \\ y \end{pmatrix}.$$

Som retningsvektorer for linjerne gennem brændpunkt og (x, y) vælges vektorerne, der går fra det ene punkt til det andet, dvs:

$$\vec{b_1} = \begin{pmatrix} x+f \\ y \end{pmatrix} \qquad \vec{b_2} = \begin{pmatrix} x-f \\ y \end{pmatrix}$$

Vinklen mellem to af vektorerne bestemmes ved:

$$\cos(v_1) = \frac{\vec{r_n}\cdot\vec{b_1}}{|\vec{r_n}|\cdot|\vec{b_1}|} \qquad \text{og} \qquad \cos(v_2) = \frac{\vec{r_n}\cdot\vec{b_2}}{|\vec{r_n}|\cdot|\vec{b_2}|}.$$

Der er to vinkler mellem linjer, nemlig en spids og en stump, der er supplementvinkler. Vores indfaldsvinkel og udfaldsvinkel er begge spidse, men afhængigt af retningsvektorernes retninger kan vores vinkelformler godt give stumpe vinkler. Hvis vi får en stump vinkel, skal vi selv efterfølgende bestemme dens supplementvinkel. Vores overgangsformler fortæller os, at $\cos(w) = -\cos(180° - w)$, dvs. cosinusværdierne er numerisk ens, men med forskellige fortegn. Vi skal altså blot vise, at højresiderne i vinkelformlerne er numerisk ens. Det kan vi gøre ved at vise, at deres kvadrater er ens. Vi vil altså vise følgende:

$$\left(\frac{\vec{r}_n \cdot \vec{b}_1}{|\vec{r}_n| \cdot |\vec{b}_1|}\right)^2 = \left(\frac{\vec{r}_n \cdot \vec{b}_2}{|\vec{r}_n| \cdot |\vec{b}_2|}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{(\vec{r}_n \cdot \vec{b}_1)^2}{|\vec{b}_1|^2} = \frac{(\vec{r}_n \cdot \vec{b}_2)^2}{|\vec{b}_2|^2} \Leftrightarrow (\vec{r}_n \cdot \vec{b}_1)^2 \cdot |\vec{b}_2|^2 = (\vec{r}_n \cdot \vec{b}_2)^2 \cdot |\vec{b}_1|^2$$

Vi ønsker altså at vise, at det gule udtryk er en identitet.

Vi udregner først de størrelser, der skal indsættes. For at gøre udtrykkene simplere og få fjernet nogle variable, benytter vi følgende sammenhænge, som vi udledte i forbindelse med ellipsens ligning:

$$f^2 = a^2 - b^2 \Leftrightarrow b^2 = a^2 - f^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2 + y^2 = b^2$$

Dvs: $a^2 - f^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2 + y^2 \Leftrightarrow y^2 = a^2 - f^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2$

$$\vec{r}_n \cdot \vec{b}_1 = \frac{b^2}{a^2} \cdot x \cdot (x + f) + y \cdot y = \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2 + \frac{b^2}{a^2} \cdot x \cdot f + y^2 = b^2 + \frac{b^2}{a^2} \cdot x \cdot f = b^2 \cdot \left(1 + \frac{x \cdot f}{a^2}\right)$$

$$\vec{r}_n \cdot \vec{b}_2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot x \cdot (x - f) + y \cdot y = \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x \cdot f + y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x \cdot f = b^2 \cdot \left(1 - \frac{x \cdot f}{a^2}\right)$$

$$|\vec{b}_1|^2 = (x + f)^2 + y^2 = x^2 + f^2 + 2 \cdot x \cdot f + y^2$$

$$|\vec{b}_2|^2 = (x - f)^2 + y^2 = x^2 + f^2 - 2 \cdot x \cdot f + y^2$$

De fire grønne udtryk indsættes nu i den gule ligning:

$$b^4 \cdot \left(1 + \frac{x \cdot f}{a^2}\right)^2 \cdot (x^2 + f^2 - 2 \cdot x \cdot f + y^2) = b^4 \cdot \left(1 - \frac{x \cdot f}{a^2}\right)^2 \cdot (x^2 + f^2 + 2 \cdot x \cdot f + y^2) \Leftrightarrow$$

$$\left(1 + \frac{x^2 \cdot f^2}{a^4} + 2 \cdot \frac{x \cdot f}{a^2}\right) \cdot (x^2 + f^2 - 2 \cdot x \cdot f + y^2) = \left(1 + \frac{x^2 \cdot f^2}{a^4} - 2 \cdot \frac{x \cdot f}{a^2}\right) \cdot (x^2 + f^2 + 2 \cdot x \cdot f + y^2)$$

Hver side består af et produkt af to parenteser, hvor der er 3 og 4 led i hver. Dvs. når parenteserne ganges sammen, får man 12 led. Men bemærk, at mange af leddene går igen på begge sider, fordi mange af leddene i parenteserne er ens. Man får derfor følgende, når de ens led er gået ud med hinanden:

$$-2xf - \frac{2x^3 f^3}{a^4} + \frac{2x^3 f}{a^2} + \frac{2xf^3}{a^2} + \frac{2xfy^2}{a^2} = 2xf + \frac{2x^3 f^3}{a^4} - \frac{2x^3 f}{a^2} - \frac{2xf^3}{a^2} - \frac{2xfy^2}{a^2}$$

Bemærk, at leddene på de to sider hele tiden er numerisk ens, men med modsatte fortegn. Værdierne vil derfor være hinandens modsatte elementer ved addition. Hvis de skal være ens, skal de derfor være 0. Der regnes videre på venstresiden for at se, om den giver 0:

$$-2xf-\frac{2x^3f^3}{a^4}+\frac{2x^3f}{a^2}+\frac{2xf^3}{a^2}+\frac{2xfy^2}{a^2}=$$

$$-2xf-\frac{2x^3f^3}{a^4}+\frac{2x^3f}{a^2}+\frac{2xf^3}{a^2}+\frac{2xf}{a^2}\cdot\left(a^2-f^2-\frac{b^2}{a^2}\cdot x^2\right)=$$

$$-\frac{2x^3f^3}{a^4}+\frac{2x^3f}{a^2}-\frac{2b^2x^3f}{a^4}=$$

$$\frac{2x^3f}{a^2}\cdot\left(-\frac{f^2}{a^2}+1-\frac{b^2}{a^2}\right)=$$

$$\frac{2x^3f}{a^2}\cdot\left(-\frac{f^2}{a^2}+1-\frac{a^2-f^2}{a^2}\right)=$$

$$\frac{2x^3f}{a^2}\cdot 0=0$$

Vi har hermed vist, at udtrykket giver 0, og dermed har vi vist, at indfaldsvinklen er lig udfaldsvinklen, hvorfor en stråle udsendt fra det ene brændpunkt vil reflekteres hen i det andet.

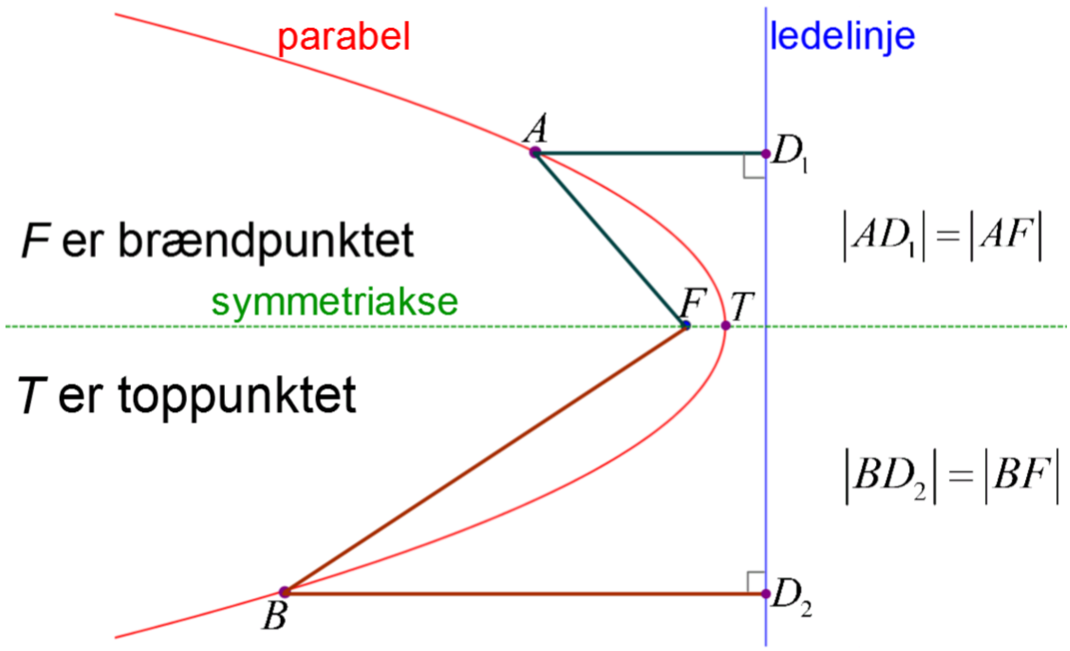
Parabel

Geometrisk:

Som tidligere nævnt er den geometriske beskrivelse af en parabel meget lig den ene beskrivelse af en ellipse. Vi definerer nemlig en parabel ved:

Givet en ret linje *l* og et punkt *F*, der ikke ligger på linjen, er en *parabel* det geometriske sted for de punkter, hvor afstanden til punktet *F* er den samme som afstanden til linjen *l*.

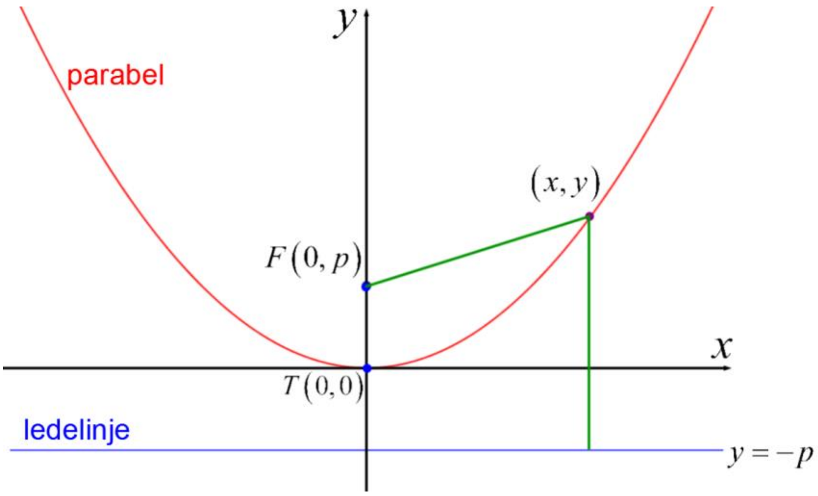
Vi kalder igen linjen *l* for *ledelinjen* og punktet *F* for *brændpunktet*. Definitionen svarer til *excentriciteten* 1.



Den rette linje, der går gennem brændpunktet og står vinkelret på ledelinjen, er parablens *symmetriakse*. Symmetriaksens skæring med parablen kaldes parablens *toppunkt*. Toppunktet ligger ifølge definitionen midt mellem brændpunktet og ledelinjen.

Ligning:

Den geometriske beskrivelse kan anvendes til at bestemme ligningen for en parabel. Parablen placeres i et koordinatsystem med toppunktet i origo og brændpunktet på den positive del af *y*-aksen. Vi kalder afstanden mellem ledelinje og brændpunktet for $2p$, og dermed får vi følgende figur:



Da afstandene fra punktet (x,y) til brændpunktet og ledelinjen skal være lige store, har man:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = y-(-p) \Leftrightarrow$$

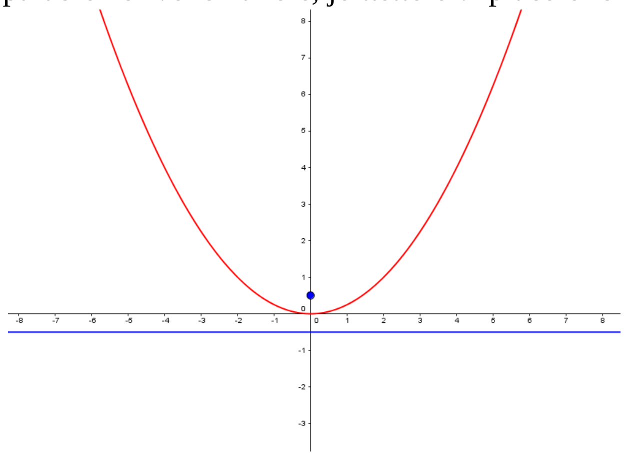
$$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}^{\,2} = (y+p)^2 \Leftrightarrow$$

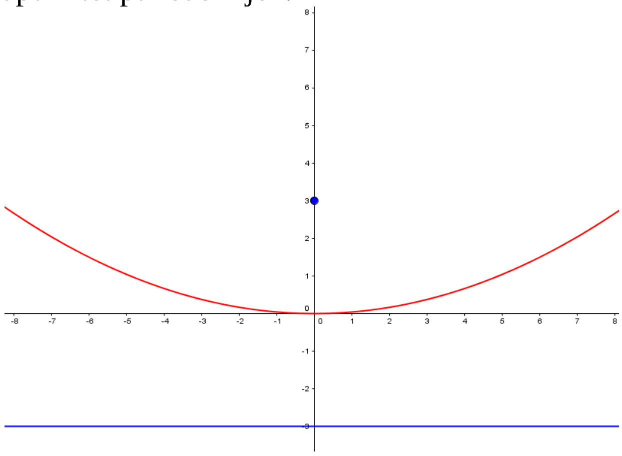
$$x^2+y^2+p^2-2yp = y^2+p^2+2yp \Leftrightarrow$$

$$x^2 = 4yp \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{4p}\cdot x^2$$

Vi genkender vores ligning for en parabel, hvor vores koefficient normalt kaldes *a*, og hvor vi altså har: $a = \frac{1}{4p}$.

Vi ved, at *a* er et udtryk for, hvor smal parablen er. Jo større *a*, jo smallere parabel. Vi ser her, at jo større *a*-værdi, jo mindre *p*-værdi, dvs. jo tættere er brændpunktet på ledelinjen. Vi har altså, at parablen bliver smallere, jo tættere vi placerer brændpunktet på ledelinjen.





Vi siger altså, at ligningen for vores parabel er:

$$y = a\cdot x^2 \quad ; \; G = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\,.$$

Og her er afstanden $2p$ mellem brændpunkt og ledelinje altså: $2p = \frac{1}{2a}$.

Opgaverne 104*

Parameterfremstilling:

Som vi så under vektorfunktioner, er parameterfremstillingen for en parabel ret simpel, da man sådan set blot kopierer ligningsudtrykket:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ a \cdot t^2 \end{pmatrix} \quad ; \; t \in \mathbb{R}$$

Differentialligning:

Vi holder fast i vores ligningsudtryk og angiver parablen ved funktionsforskriften $f(x) = a \cdot x^2$.

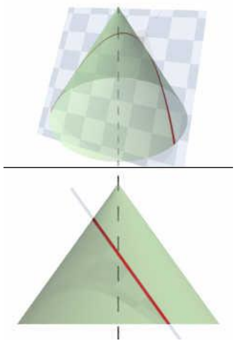
Den afledede funktion, der fortæller os, hvad tangenthældningerne er, er så $f'(x) = 2ax$.

Vores differentialligning må derfor være:

$$\frac{dy}{dx} = 2ax$$

Dette er den simplest mulige differentialligning, da vi har et udtryk med kun en konstant og vores uafhængige variabel på højresiden. Den kan løses ved integration, hvorved vi kommer tilbage til $f(x) = a \cdot x^2$, når vi har udnyttet begyndelsesbetingelsen $f(0) = 0$.

Keglesnittet:

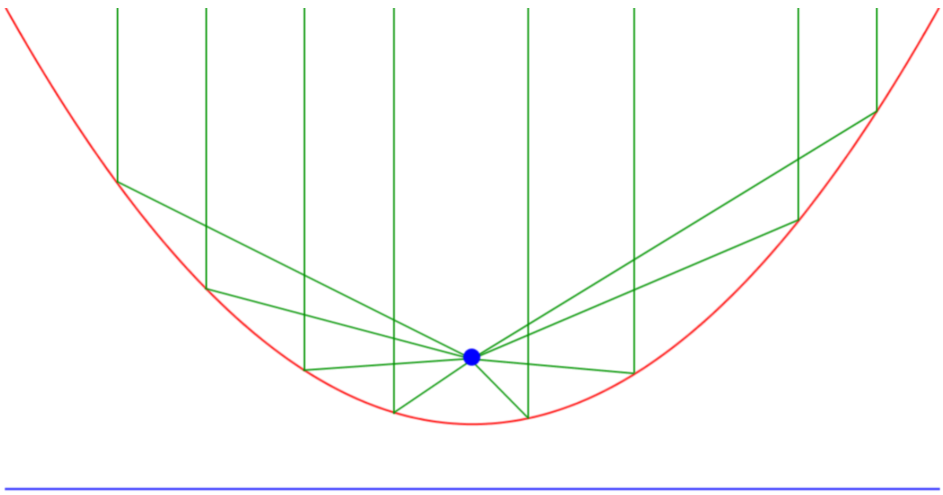


Vi lader *w* være vinklen mellem snitplanens normalvektor og *z*-aksen.

Parablen fremkommer så, hvis $w = v$, hvor *v* er omdrejningskeglefladens aksevinkel.

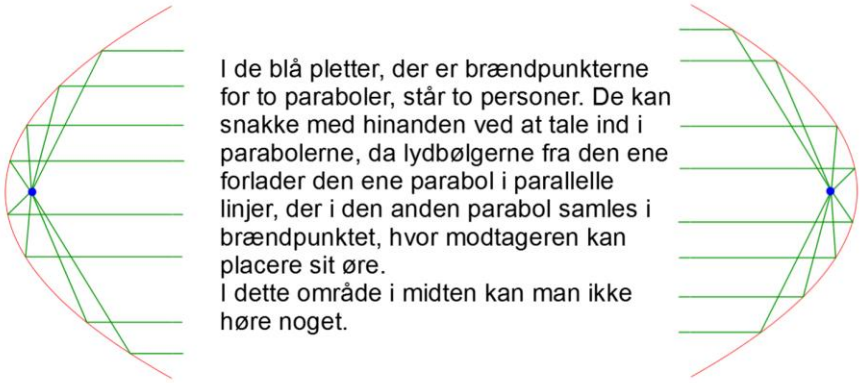
Karakteristiske egenskab:

Den karakteristiske egenskab for en parabel er, at stråler, der falder ind i parablen med en retning vinkelret på ledelinjen, af parablen vil reflekteres ind i brændpunktet.
Eller modsat: Stråler, der fra brændpunktet udsender i alle retninger, vil efter refleksion på parablen bevæge sig parallelt med hinanden.

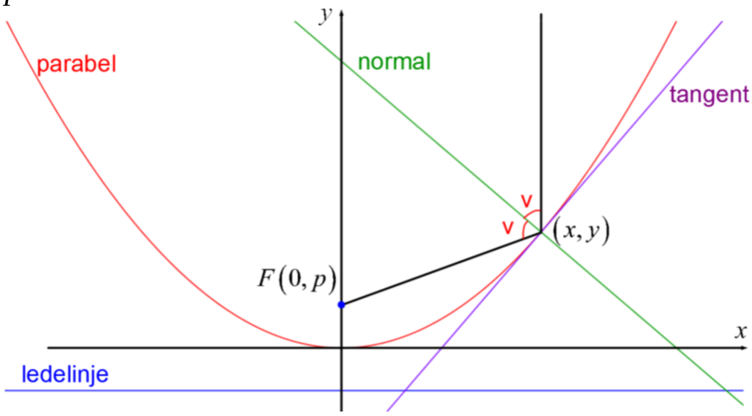


Dette udnyttes bl.a. i paraboler, hvor radiobølgerne kommer ind i parallelle stråler, og hvor parabolen, hvis den peger i den rigtige retning, derfor samler signalet i brændpunktet, hvor modtageren sidder.

Man kan også anvende det på en måde, der minder om det elliptiske loft:



Vi skal nu vise denne egenskab. Vi placerer igen parablen i et koordinatsystem med toppunktet i origo og brændpunktet på den positive del af *y*-aksen. Og vi lader afstanden mellem ledelinjen og brændpunktet være *2p*.



Vi ved altså, at der gælder følgende:

$$p = \frac{1}{4a}$$
$$y = ax^2$$
$$\frac{dy}{dx} = 2ax$$

Vi ser på følgende tre retningsvektorer:

En for linjestykket fra (x, y) til *F*: $\vec{r_1} = \begin{pmatrix} 0-x \\ p-y \end{pmatrix}$

En for linjen fra (x, y) og lodret op: $\vec{r_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

En for normalen, der peger ind i parablen: $\vec{r_n} = \hat{\vec{r_t}} = \widehat{\begin{pmatrix} 1 \\ 2ax \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -2ax \\ 1 \end{pmatrix}$

Vi skal vise, at vi får ens vinkler, og det gør vi ved at vise: $\frac{\vec{r_n} \bullet \vec{r_1}}{|\vec{r_n}| \cdot |\vec{r_1}|} = \frac{\vec{r_n} \bullet \vec{r_2}}{|\vec{r_n}| \cdot |\vec{r_2}|}$

Så vi regner løs:

$$\frac{\vec{r_n} \bullet \vec{r_1}}{|\vec{r_n}| \cdot |\vec{r_1}|} = \frac{\vec{r_n} \bullet \vec{r_2}}{|\vec{r_n}| \cdot |\vec{r_2}|} \Leftrightarrow \frac{\vec{r_n} \bullet \vec{r_1}}{|\vec{r_1}|} = \frac{\vec{r_n} \bullet \vec{r_2}}{|\vec{r_2}|} \Leftrightarrow \frac{2ax^2 + p - y}{\sqrt{x^2 + (p-y)^2}} = \frac{1}{1}$$

I det følgende udnyttes de to øverste af de grønne sammenhænge til at få *p* og *y* væk:

$$\frac{2ax^2 + p - y}{\sqrt{x^2 + (p-y)^2}} = \frac{1}{1} \Leftrightarrow 2ax^2 + p - ax^2 = \sqrt{x^2 + (p-y)^2} \Leftrightarrow ax^2 + p = \sqrt{x^2 + p^2 + y^2 - 2py}$$

Og da begge sider af lighedstegnet er positive, kan man kvadrere begge sider uden at nye løsninger opstår:

$$a^2x^4 + p^2 + 2pax^2 = x^2 + p^2 + y^2 - 2py \Leftrightarrow$$

$$a^2x^4 + 2\cdot\frac{1}{4a}\cdot ax^2 = x^2 + a^2x^4 - 2\cdot\frac{1}{4a}\cdot ax^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\cdot x^2 = x^2 - \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Vi får altså den ønskede identitet, der fortæller os, at de to vinkler er ens uanset hvilket punkt på parablen, vi tager udgangspunkt i.

Opgaverne 105*

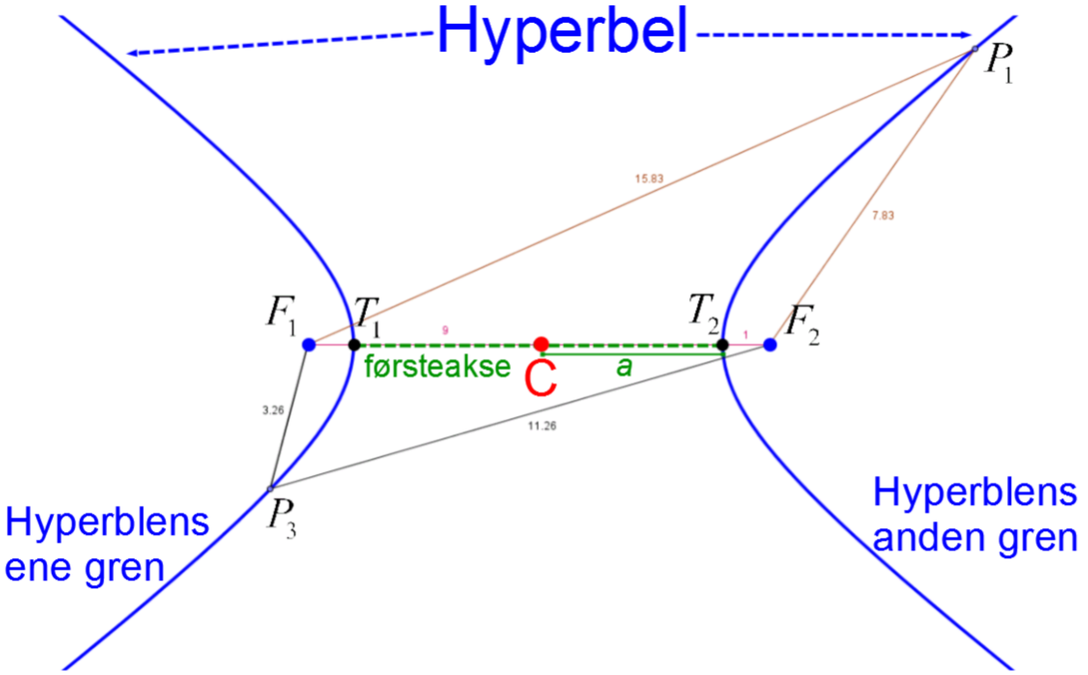
Hyperbel

En stor del af gennemgangen af hyperblen vil minde om gennemgangen af ellipsen. Det begynder allerede i den geometriske beskrivelse, hvor der også er to versioner.

Geometrisk:

2 punkter: Givet to punkter F_1 og F_2 i en plan, er en *hyperbel* det geometriske sted for de punkter i planen, hvor den numeriske værdi af differensen mellem afstandene til de to givne punkter er lig en given konstant *k*, hvor $0 < k < |F_1F_2|$.

Dvs. for ethvert punkt *P* på hyperblen gælder $\left||PF_1| - |PF_2|\right| = k$



De to givne punkter kaldes hyperblens *brændpunkter* (angivet med F_1 og F_2).

Hyperblen (angivet med blåt) kommer til at bestå af to adskilte dele, der kaldes hyperblens *grene*.

De to punkter, hvor linjen gennem brændpunkterne skærer hyperblen, kaldes hyperblens *toppunkter* (angivet med T_1 og T_2).

Linjestykket mellem de to toppunkter kaldes *førsteaksen*, og længden af førsteaksen sættes til *2a*, og midtpunktet på førsteaksen kaldes hyperblens *centrum* (angivet med *C*).

Øvelse 3: Hvorfor skal $0 < k < |F_1F_2|$? Hvad ville $k = 0, k = |F_1F_2|$ og $k > |F_1F_2|$ betyde?

På figuren på forrige side er angivet tre punkter P_1, T_2 og P_3, hvoraf det andet toppunkt er det ene. Vi ser på den numeriske værdi af differensen mellem afstandene fra disse punkter til de to brændpunkter:

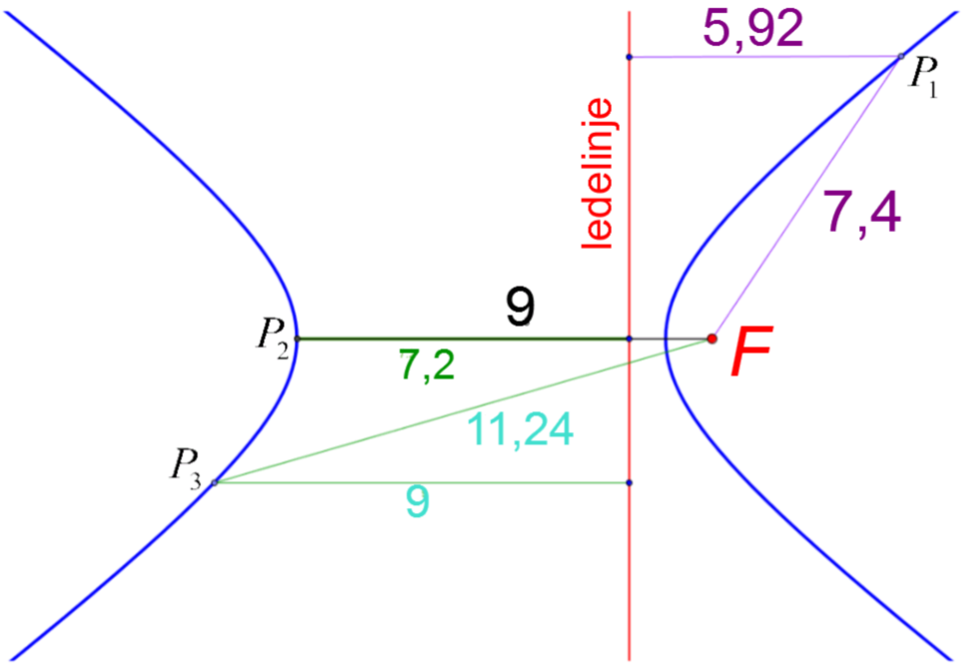
$$\left||P_1F_1| - |P_1F_2|\right| = |15,83 - 7,83| = |8| = 8 = 2 \cdot a$$

$$\left||T_2F_1| - |T_2F_2|\right| = |9 - 1| = |8| = 8 = 2 \cdot a$$

$$\left||P_3F_1| - |P_3F_2|\right| = |3,26 - 11,26| = |-8| = 8 = 2 \cdot a$$

Pointen er altså, at den numeriske værdi af differensen mellem afstandene er 8, og som angivet i udregningerne svarer det generelt til længden af førsteaksen.

Punkt og linje: Givet en ret linje *l* og et punkt *F*, der ikke ligger på linjen, er en *hyperbel* det geometriske sted for de punkter, hvor forholdet mellem afstanden til punktet *F* og afstanden til linjen *l* har den samme værdi *e*, hvor $e > 1$.



Den givne linje *l* kaldes *ledelinjen* (angivet med rødt).
Det givne punkt kaldes *brændpunktet* (angivet med F).
Tre punkter er valgt til at illustrere definitionen:

$$\frac{|P_1F|}{dist(P_1, l)} = \frac{7,4}{5,92} = 1,25 = e$$

$$\frac{|P_2F|}{dist(P_2, l)} = \frac{9}{7,2} = 1,25 = e$$

$$\frac{|P_3F|}{dist(P_3, l)} = \frac{11,24}{9} = 1,25 = e$$

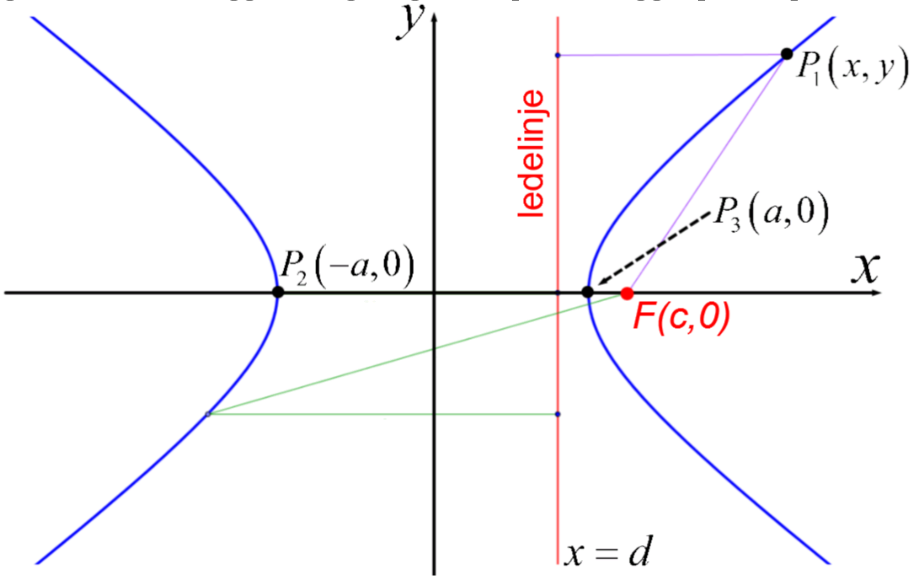
Bemærk, hvor toppunktet mellem ledelinjen og brændpunktet ligger for ellipser, parabler og hyperbler. For ellipser er det tættest på brændpunktet, for parabler ligger det midt mellem ledelinjen og brændpunktet og for hyperbler ligger toppunktet tættere på ledelinjen end på toppunktet.

Øvelse 4: Kunne man få den samme hyperbel med udgangspunkt i en anden ledelinje og et andet brændpunkt?

Ligning:

Den geometriske beskrivelse ud fra ledelinje og brændpunkt skal nu benyttes til at udlede en ligning for en hyperbel. Vi skal altså igen gå fra geometri til analytisk geometri og har derfor brug for et koordinatsystem.

Hyperblen lægges, så centrum ligger i origo, og brændpunktet ligger på den positive del af *x*-aksen:



Vi lader *c* være afstanden fra centrum til brændpunktet.

Vi lader *d* være afstanden fra centrum til ledelinjen, dvs. ledelinjen beskrives ved ligningen $x = d$.

Vi har stadig, at *a* er den halve førsteakse, så punktet P_3 mellem brændpunktet og ledelinjen *l* får koordinatsættet $P_3(a,0)$.

Desuden arbejder vi med punktet $P_2(-a,0)$, der er spejlingen af P_3 i førsteaksens midtnormal, og vi har et vilkårligt punkt $P_1(x,y)$, der er punktet, vi skal bruge til at bestemme ligningen, da dette punkt repræsenterer samtlige punkter på hyperblen.

Vores geometriske definition fortæller os, at for alle hyperblens punkter gælder, at forholdet mellem dets afstand til brændpunktet og til ledelinjen er lig *e*, der er større end 1. Det giver os:

$$P_3: \quad \frac{|P_3F|}{dist(P_3,l)} = \frac{c-a}{a-d} = e \qquad \text{dvs.} \quad c-a = e\cdot(a-d)$$

$$P_2: \quad \frac{|P_2F|}{dist(P_2,l)} = \frac{c+a}{a+d} = e \qquad \text{dvs.} \quad c+a = e\cdot(a+d)$$

Hvis man lægger de to ligninger sammen, får man:

$(c-a)+(c+a) = e\cdot(a-d)+e\cdot(a+d) \Leftrightarrow 2c = 2ae \Leftrightarrow c = e\cdot a$

Trækkes den øverste ligning fra den nederste, fås:

$(c+a)-(c-a) = e\cdot(a+d)-e\cdot(a-d) \Leftrightarrow 2a = 2ed \Leftrightarrow a = e\cdot d$

De to gule ligninger fortæller os også, at: $c = e\cdot e\cdot d \Leftrightarrow c = e^2\cdot d$

Vi er nu klar til at se på, hvordan punktet $P_1(x,y)$ kan føre os til en ligning for hyperblen:

$$P_1: \quad \frac{|P_1F|}{dist(P_1,l)} = e \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{x-d} = e \quad \Leftrightarrow (x-c)^2+y^2 = e^2\cdot(x-d)^2$$

Dette er sådan set allerede en ligning, hvor konstanterne er størrelser, som vi kender betydningen af, men vi vil gerne have den skrevet på en form, så den kommer til at minde mere om ellipsen, selvom vi dermed er nødt til undervejs at indføre en størrelse *b*, som vi ikke har set på i forbindelse med hyperbler. Vi regner derfor videre på udtrykket ved i første omgang at anvende den 2. kvadratsætning:

$$x^2+c^2-2cx+y^2=e^2x^2+e^2d^2-2e^2dx \quad \Leftrightarrow$$
$$x^2+c^2+y^2=e^2x^2+e^2d^2 \Leftrightarrow$$
$$\left(1-e^2\right)\cdot x^2+y^2=e^2d^2-c^2 \Leftrightarrow$$
$$\frac{\left(1-e^2\right)\cdot x^2}{e^2d^2-c^2}+\frac{y^2}{e^2d^2-c^2}=\frac{e^2d^2-c^2}{e^2d^2-c^2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{\left(1-e^2\right)\cdot x^2}{a^2-e^2a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \Leftrightarrow$$
$$\frac{\left(1-e^2\right)\cdot x^2}{a^2\left(1-e^2\right)}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

I sidste skridt indførte vi størrelsen b ved $b^2=c^2-a^2$. Da $c>a$, ved vi, at det er en mulig definition, og vi vælger desuden – ligesom med alle de andre størrelser – at kræve $b>0$.

Vi har altså vist, at en ligning for en hyperbel er:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad , a,b\in\mathbb{R}_+ \quad , G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

Opgaverne 106*

Hvis $a=b$, kaldes hyperblen *ligesidet*.

Vi er tidligere stødt på hyperbler beskrevet med ligninger på formen $y=\frac{k}{x}$. Dette ligner jo ikke helt vores udledte ligning, men vi vil nu vise, at det netop er en anden form af ligningen for en ligesidet hyperbel, der er roteret med 45° omkring origo.

Vi begynder med rotation i positiv retning (dvs. mod uret):

Som bekendt roterer vi omkring origo med vinklen w ved at erstatte x med $x\cdot\cos(w)+y\cdot\sin(w)$ og y med $y\cdot\cos(w)-x\cdot\sin(w)$. Vi ved, at $\cos(45°)=\sin(45°)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vi roterer derfor på vores ligesidede hyperbel (hvor $a=b$) ved:

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot y\right)^2}{a^2}-\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot y-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x\right)^2}{a^2}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot y\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot y-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x\right)^2=a^2 \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot y-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2+2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot y\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x=a^2 \Leftrightarrow 2xy=a^2 \Leftrightarrow y=\frac{a^2}{2x}$$

Vi ser, at dette netop svarer til ligningen $y=\frac{k}{x}$, hvor $k=\frac{a^2}{2}$ er en positiv konstant. Denne hyperbel har altså grenene placeret i 1. og 3. kvadrant.

En rotation med 45° omkring origo i negativ retning (med uret) giver os, når vi udnytter, at

$$\cos(-45°)=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ og } \sin(-45°)=-\frac{1}{\sqrt{2}}:$$

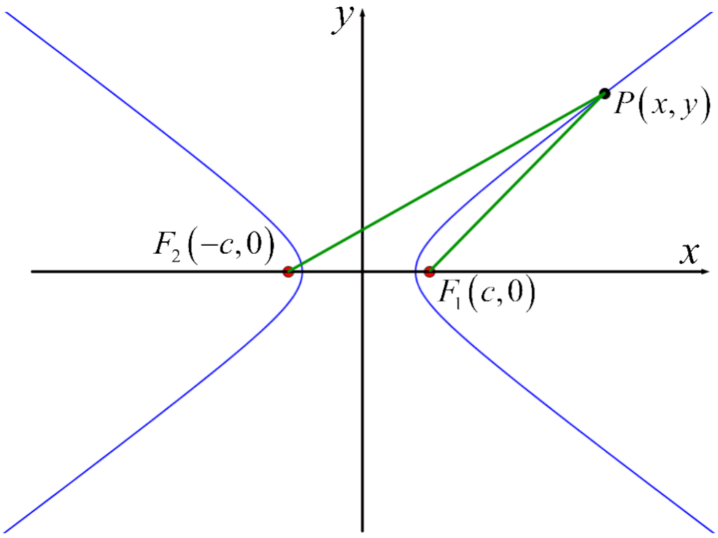
$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot y\right)^2}{a^2}-\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot y+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x\right)^2}{a^2}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot y\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot y+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x\right)^2=a^2 \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot y-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot y\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x=a^2 \Leftrightarrow -2xy=a^2 \Leftrightarrow y=-\frac{a^2}{2x}$$

Vi ser, at dette netop svarer til ligningen $y=\frac{k}{x}$, hvor $k=-\frac{a^2}{2}$ er en negativ konstant. Denne hyperbel har altså grenene placeret i 2. og 4. kvadrant.

Opsamling: Vores "gamle" ligning $y=\frac{k}{x}$ beskriver altså kun ligesidede hyperbler, mens ligningen $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ giver os alle hyperbler, når de lægges på den angivne måde. Vi kan derefter som altid med ligninger anvende isometrier (dvs. parallelforskyde, spejle omkring akserne og rotere omkring origo).

F.eks. kan vi parallelforskyde vores hyperbel med centrum i origo, så den får centrum i (h,k), og denne nye hyperbel beskrives ved ligningen $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

Vi mangler stadig at vise, at vores ligning svarer til den geometriske definition, der tager udgangspunkt i to brændpunkter.
Hyperblen indtegnes derfor med centrum i origo og brændpunkterne på *x*-aksen. Hyperblens ligning er indrammet med sort, mens to sammenhænge, der skal anvendes undervejs, er indrammet med rødt:



$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} y^2=\frac{b^2}{a^2}\cdot x^2-b^2 \\ c^2=a^2+b^2 \end{array}}$$

Vi vil altså vise, at for ethvert punkt på hyperblen er den numeriske værdi af differensen mellem afstandene til de to brændpunkter konstant. Der tages udgangspunkt i figuren ovenfor, så i første omgang ses bort fra den numeriske værdi, da den længste afstand sættes først:

$$|PF_2|-|PF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{x^2+c^2+2xc+y^2}-\sqrt{x^2+c^2-2xc+y^2}=$$

$$\sqrt{x^2+c^2+2xc+\frac{b^2}{a^2}\cdot x^2-b^2}-\sqrt{x^2+c^2-2xc+\frac{b^2}{a^2}\cdot x^2-b^2}=$$

$$\sqrt{\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\cdot x^2+a^2+2xc}-\sqrt{\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\cdot x^2+a^2-2xc}=$$

$$\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right)\cdot x^2+a^2+2xc}-\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right)\cdot x^2+a^2-2xc}=$$

$$\sqrt{\frac{c^2}{a^2}\cdot x^2+a^2+2xc}-\sqrt{\frac{c^2}{a^2}\cdot x^2+a^2-2xc}=$$

$$\sqrt{\left(\frac{c}{a}x+a\right)^2}-\sqrt{\left(\frac{c}{a}x-a\right)^2}=\frac{c}{a}x+a-\left(\frac{c}{a}x-a\right)=2a$$

Hvis vi havde byttet rundt på afstandene, havde vi fået $-2a$, men den numeriske værdi af dette er $2a$, og dermed har vi vist overensstemmelsen mellem ligningen og den geometriske definition. Og vi fik vist, at den beskrevne differens netop svarer til førsteaksen.

Differentialligning:

Vi ser på følgende differentialligning: $\frac{dy}{dx}=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$, $a,b\in\mathbb{R}_+$.

Dette ligner temmelig meget differentialligningen for en ellipse, men der er den væsentlige forskel, at der "mangler" et minustegn på højresiden, og der er ikke nogen betingelse med, at *b* skal være mindre end *a*.

Differentialligningen løses ved separation af de variable, og igen er vi opmærksomme på, at vi ikke kan få hele hyperblen med, da to forskellige *y*-værdier kan være knyttet til den samme *x*-værdi, dvs. det kan ikke være grafen for en funktion. Vi ser derfor på de dele af hyperblen, der ligger over *x*-aksen, og vi kan derfor med det samme se, at der må komme en lidt speciel definitionsmængde, da grafen kommer til at bestå af 2 adskilte, halve grene:

$$y>0:\ \frac{dy}{dx}=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}\Leftrightarrow\int\frac{y}{b^2}dy=\int\frac{x}{a^2}dx\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{a^2}+k_1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=k$$

Vi genfinder her næsten vores ligning for en hyperbel. Vi mangler dog lige at bestemme konstanten, og her kan vi benytte punktet $(a,0)$, der er hyperblens ene toppunkt. Det indsættes:

$$\frac{a^2}{a^2}-\frac{0^2}{b^2}=k\Leftrightarrow k=1.$$

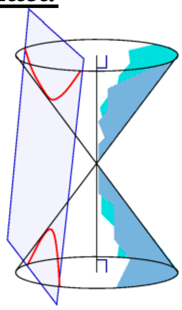
Hermed har vi vist, at den angivne differentialligning passer til vores hyperbel.
Hvis differentialligningen skal løses, skal vi arbejde videre med ligningen:

$$y>0:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\Leftrightarrow\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1\Leftrightarrow y^2=b^2\cdot\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)\Leftrightarrow y=b\cdot\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}$$

Da argumentet under kvadratroden skal være positivt (0 er ikke nok, da vi så har $y=0$), har vi:

$$f(x)=b\cdot\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\ ,\ x<-a\vee x>a$$

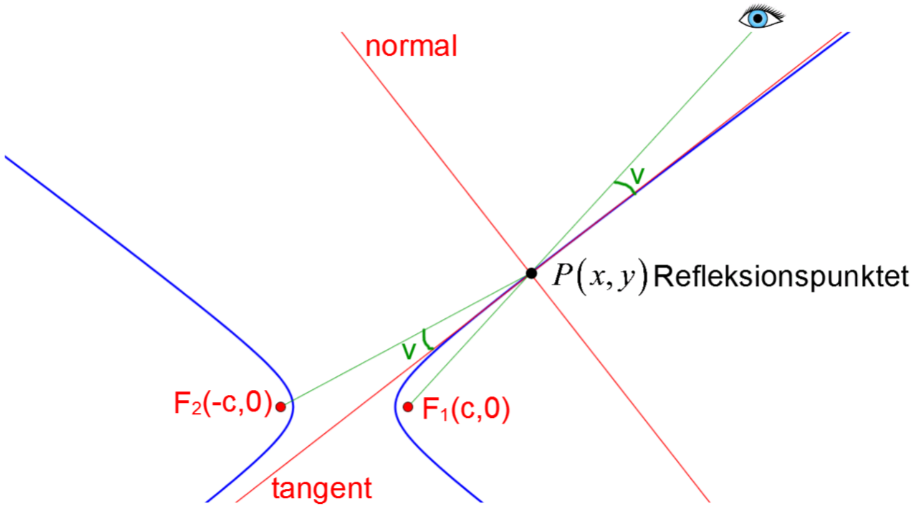
Keglesnittet:



Vi lader *w* være vinklen mellem snitplanens normalvektor og *z*-aksen.

Hyperblen fremkommer så, hvis $w>v$,
hvor *v* er omdrejningskeglefladens aksevinkel. Det er først, når snitplanen bliver vinklet på denne måde, at man får skæringer med begge halvdele af omdrejningskeglefladen.

Karakteristiske egenskab:
Den karakteristiske egenskab for en hyperbel har ikke overraskende noget med vinkler at gøre.



To rette halvlinjer, der udgår fra de to brændpunkter og går gennem samme punkt på hyperblen, vil danne ens vinkler med tangenten til grafen i dette punkt.

Det betyder, at en stråle, der udsendes fra det ene brændpunkt F_2 og går igennem den ene gren for derefter at reflekteres på den anden, vil for en iagttager uden for hyperblerne se ud, som om den udgår fra det andet brændpunkt F_1.

Eller modsat: Hvis en række fjender uden for hyperblen sigter efter brændpunktet F_1, vil et skjold med form som hyperblens ene gren reflektere samtlige projektiler hen i brændpunktet F_2.

Vi kan vise dette, da vores differentialligning har givet os tangentens hældning i punktet. Vi har dermed en retningsvektor for tangenten til grafen i *P*:

$$\vec{r_t} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} \end{pmatrix}$$

Desuden er to retningsvektorer for de to linjer, der udgår fra de to brændpunkter:

$$\vec{r_1} = \begin{pmatrix} x-c \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{r_2} = \begin{pmatrix} x+c \\ y \end{pmatrix}$$

Da vinklerne skal vises at være ens, skal man altså vise: $\cos(v) = \frac{\vec{r_1} \bullet \vec{r_t}}{|\vec{r_1}| \cdot |\vec{r_t}|} = \frac{\vec{r_2} \bullet \vec{r_t}}{|\vec{r_2}| \cdot |\vec{r_t}|}$.

Omskrevet giver det:

$$\left(\vec{r_1} \bullet \vec{r_t}\right) \cdot |\vec{r_2}| = \left(\vec{r_2} \bullet \vec{r_t}\right) \cdot |\vec{r_1}| \Leftrightarrow$$

$$\left(x - c + \frac{b^2}{a^2} \cdot x\right) \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \left(x + c + \frac{b^2}{a^2} \cdot x\right) \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{a^2+b^2}{a^2} x - c\right) \cdot \sqrt{x^2 + c^2 + 2xc + y^2} = \left(\frac{a^2+b^2}{a^2} x + c\right) \cdot \sqrt{x^2 + c^2 - 2xc + y^2}$$

Argumenterne under kvadratrødderne samt brøkerne genkender vi fra vores arbejde med hyperblens ligning, så ovenstående ligning kan omskrives til:

$$\left(\frac{c^2}{a^2} x - c\right) \cdot \left(\frac{c}{a} x + a\right) = \left(\frac{c^2}{a^2} x + c\right) \cdot \left(\frac{c}{a} x - a\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{c^3}{a^3} x^2 + \frac{c^2}{a} x - \frac{c^2}{a} x - c \cdot a = \frac{c^3}{a^3} x^2 + \frac{c^2}{a} x - \frac{c^2}{a} x - c \cdot a \Leftrightarrow \quad 0 = 0$$

Vi får altså den søgte identitet, der viser os, at de to vinkler er lige store.

Keglesnitsligninger generelt

Vi har set følgende ligninger for keglesnit, hvor konstanterne har forskellige betydninger, der ikke er relevante i denne sammenhæng:

$$\text{Cirkel: } x^2+y^2=r^2$$

$$\text{Ellipse: } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\text{Parabel: } y=ax^2$$

$$\text{Hyperbel: } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

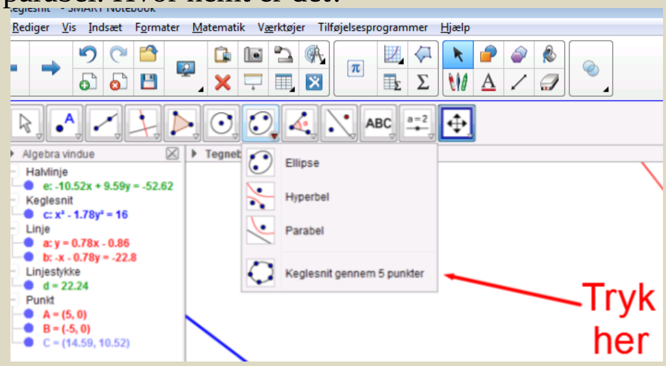
Vi husker nu på isometrierne (parallelforskydning, spejling, rotation), og vi kan se, at hvis vi inddrager parallelforskydninger, hvor man erstatter x med $x-h$ og y med $y-k$, samt spejlinger, hvor fortegnene på x eller y ændres, og endelig rotationer, hvor x erstattes af $x\cdot\cos(w)+y\cdot\sin(w)$ og y af $y\cdot\cos(w)-x\cdot\sin(w)$, så får man, at samtlige keglesnit kan skrives på formen:

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0,$$

der er en generel andengradsligning i to variable, og graferne er *andengradskurver*. Ud over keglesnittene kan ovenstående ligning også repræsentere et punkt eller en ret linje. Disse kaldes *udartede keglesnit*. Hvis ligningen forkortes med f, kan vi se, at der er 5 konstanter, der er afgørende for hvilken slags keglesnit, vi får med at gøre. For at bestemme disse 5 konstanter skal man kende 5 lineært uafhængige ligninger, og disse kan opstilles ud fra 5 punkter.

Dvs. at et keglesnit er entydigt bestemt ved 5 punkter i planen (hvis der ikke blandt disse er tre punkter, der ligger på linje). Dette har udviklerne af Geogebra udnyttet.

Øvelse: Leg med Geogebras "keglesnit gennem 5 punkter". Prøv at ramme en cirkel eller en parabel. Hvor nemt er det?



Man kan altså sige, at keglesnittene har 5 frihedsgrader.

Selve navnene ellipse, parabel og hyperbel betyder henholdsvis *udeladelse*, *sammenligning* og *overdrivelse*. På denne måde anvendes de i dansk om forskellige talefigurer.

I matematik hentyder navnene – så vidt jeg har forstået – til anvendelser i forbindelse med at finde arealer, hvor ellipser åbenbart har givet for lidt, parabler det rigtige og hyperbler for meget. Hvis du vil vide mere om dette, må du anskaffe dig Apollonius' *Keglesnit*.

BANEKURVER

Kepler kom ved hjælp af Tycho Brahes målinger frem til, at planeter bevæger sig i ellipsebaner med Solen i det ene brændpunkt. Newton kunne bevise, at sådan vil objekter bevæge sig i et tyngdefelt, der aftager med kvadratet på afstanden.

Planeterne i Solsystemet bevæger sig i ellipsebaner med forskellige excentriciteter. Merkurs bane er med excentriciteten 0,21 den mest fladtrykte ellipse. Venus' bane kommer med excentriciteten 0,007 tættest på en cirkel.

Men objekter kan også bevæge sig i hyperbelbaner omkring et himmellegeme – og i teorien også i en parabelbane. Det afgørende for dette er den mekaniske energi i det pågældende to-legemesystem. Vi kalder her de to legemer for Solen og Jorden, men det kunne også være andre to-legemesystemer.

Den mekaniske energi er summen af potentiel og kinetisk energi:

$$E_{mek} = E_{pot} + E_{kin}$$

Nulpunktet for den potentielle er valgt, så den potentielle energi er 0, når Solen og Jorden er "uendelig langt" fra hinanden. Dette gør, at den potentielle energi hele tiden er negativ, da den potentielle energi øges, når afstanden mellem legemerne øges.

Den kinetiske energi er 0, når Jorden står stille (i det pågældende system, dvs. i forhold til Solen), og den er derfor positiv, når Jorden bevæger sig.

Det afgørende for, om den mekaniske energi er negativ, 0 eller positiv, er derfor de numeriske værdier af potentiel og kinetisk energi. Der er følgende muligheder:

- $E_{mek} < 0$. Ellipsebevægelse. Systemet er bundet.

  Den kinetiske energi er mindre end den numeriske værdi af den potentielle energi, og det lille legeme har altså ikke fart nok på til at kunne komme fri af det store legeme. Dette gælder for alle systemer af dobbeltstjerner, stjerne-planet og planet-måne. Også kometer har ellipsebaner. De er bare meget fladtrykte, dvs. de har excentriciteter tæt på 1.

- $E_{mek} = 0$. Parabelbevægelse.

  Dette er mere en teoretisk end en praktisk banekurve. Det er ikke sandsynligt, at et legemes kinetiske og potentielle energi skulle være numerisk nøjagtigt lige store.

- $E_{mek} > 0$ Hyperbelbevægelse (selvfølgelig kun langs én af grenene). Systemet er frit.

  Det lille legeme har så meget fart på, at det kan undslippe det store.

GAUDÍ OG OMDREJNINGSFLADER

Antoni Gaudí (1852-1926) var en spansk/catalansk arkitekt, der stod bag mange bygninger i Barcelona – heriblandt den ufærdige kirke La Sagrada Familia.
Gaudí anvendte usædvanlig meget matematik i sin arkitektur, og det er en del af den, vi nu skal beskæftige os med.
Gaudís arkitektur hører under *modernismen*, og den har ikke altid været lige velset.

Keglesnittene er plane figurer, der kan dannes som snit i den rumlige figur *en omdrejningskegleflade*. Men det kan også gå den modsatte vej, at man begynder med plane figurer og ud fra dem danner rumlige figurer, hvilket vi allerede har set inden for vektorgeometrien i forbindelse med omdrejningslegemer.

Ellipsoider:

Vi begynder med *omdrejningsellipsoiden*.
Det er den rumlige figur, der fremkommer, når en ellipse roteres omkring en af sine akser, dvs. enten storaksen eller lilleaksen.

Vi husker, at hvis vi placerer ellipsens centrum i origo og lægger storaksen på *x*-aksen, så kan ellipsen beskrives ved ligningen:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad ,$$

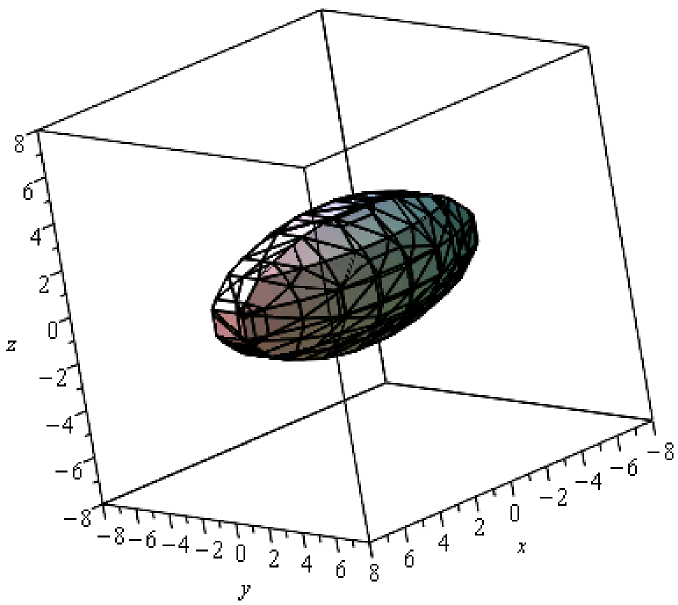
hvor *a* er den halve storakse og *b* den halve lilleakse.

Hvis ellipsen roteres omkring storaksen, får man en omdrejningsellipsoide bestemt ved ligningen:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

Eksempel:

$$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1 \rightarrow$$



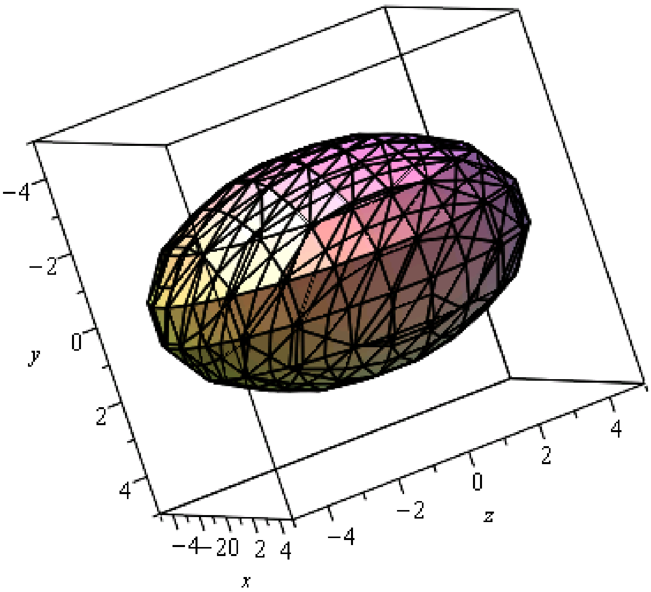
(Man laver 3D-plot i Maple ved at højreklikke på ligningen og under 'plots' vælge '3-D Implicit Plot').

Hvis ellipsen roteres omkring lilleaksen, får man en omdrejningsellipsoide bestemt ved ligningen:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$$

Eksempel:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1 \rightarrow$$



Omdrejningsaksens endepunkter kaldes *polerne* (uanset om det er storaksen eller lilleaksen, der er roteret omkring), og den cirkel, som den anden akses endepunkter danner, når ellipsen roteres, kaldes for *ækvator*.

Bemærk, at det er fuldstændig i overensstemmelse med vores sprogbrug i forbindelse med jordkloden.

Husk, at vi har lagt storaksen ud ad *x*-aksen og lilleaksen ud ad *y*-aksen. Vores poler vil derfor enten komme til at ligge på *x*-aksen eller *y*-aksen, mens ækvator vil ligge i *yz*-planen eller *xz*-planen.

Lad os se på nogle snitflader, ligesom vi så på snit i forbindelse med omdrejningskeglefladen.

Vi tager udgangspunkt i omdrejningsellipsoiden med ligningen:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

Dvs. vi har roteret ellipsen omkring storaksen.
Vores poler ligger så på *x*-aksen, mens ækvator ligger i *yz*-planen.
Vi ser først på et snit med en plan, der er parallel med ækvator. En sådan plan har ligningen $x=k$, og indsat i ellipsens ligning får man:

$$\frac{k^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{a^2} \Leftrightarrow y^2+z^2=b^2\cdot\left(1-\frac{k^2}{a^2}\right)$$

Dette er ligningen for en cirkel i en plan parallel med *yz*-planen med centrum i det nye koordinatsystems origo og radius $r=b\cdot\sqrt{1-\frac{k^2}{a^2}}$.

Vi bemærker her, at *k* skal være mindre end *a*, hvis vi skal have et positivt argument under kvadratroden, hvilket stemmer med, at vi kun får en cirkel, hvis snitplanen ligger inden for polerne. Vi ser desuden, at vores snit får radius *b*, hvis vi snitter med planen $x=0$.

Lad os nu se på et snit med en plan, der er parallel med *xz*-planen. Den har ligningen $y = k$, hvilket vi indsætter i ligningen for omdrejningsellipsoiden:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{b^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=\frac{b^2-k^2}{b^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{a^2\cdot\left(b^2-k^2\right)}{b^2}}+\frac{z^2}{b^2-k^2}=1$$

Vi ser, at dette er en ellipse i en plan parallel med *xz*-planen, hvor storaksen og lilleaksen afhænger af snitplanen. Hvis $y = 0$, genfinder vi vores oprindelige ellipse med den halve storakse *a* og den halve lilleakse *b*. For andre værdier af *k* bliver de to akser mindre.

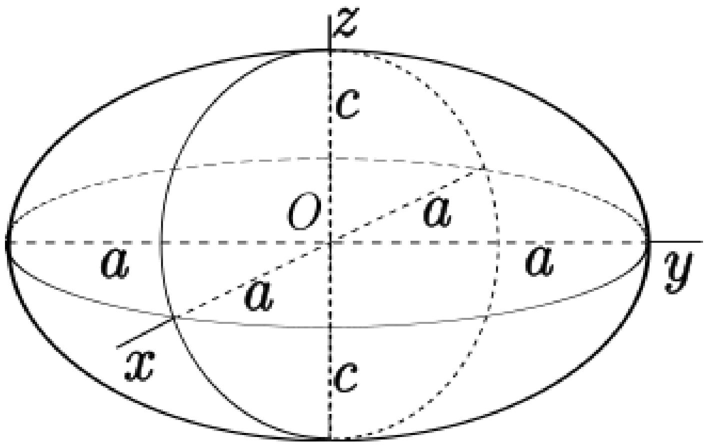
Øvelse: Hvilken geometrisk figur får man, hvis man snitter med en plan parallelt med *xy*-planen?

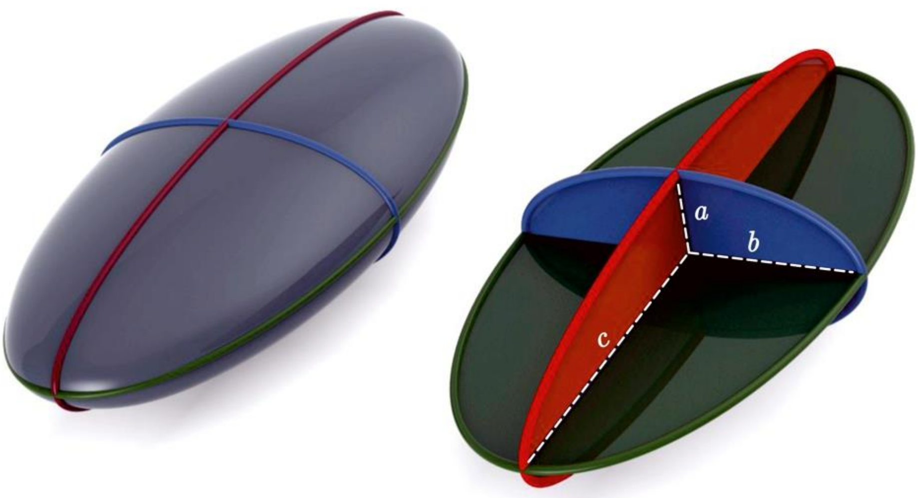
Vi har nu set på en omdrejningsellipsoide.

Generelt er en *ellipsoide* det geometriske sted for punkterne bestemt ved ligningen:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad , \; a > b > c$$

a er den halve *storakse*, *b* er den halve *mellemakse* og *c* den halve *lilleakse*.

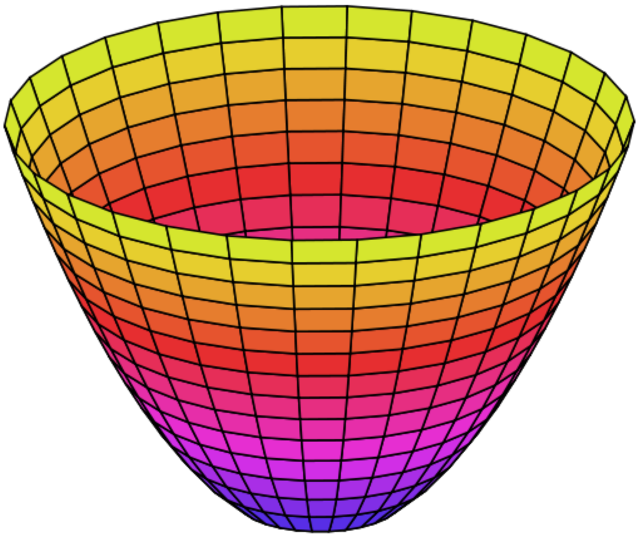




Øvelse: Hvilken geometrisk figur får man, hvis man snitter med en plan, hvor normalvektoren er parallel med en af koordinatakserne?
Hvilken geometrisk figur får man, hvis man helt generelt snitter med en plan?

Paraboloider

Ellipsen er en begrænset figur. Det er en parabel ikke. Når man derfor roterer en parabel omkring dens symmetriakse, får man en ubegrænset rumlig figur kaldet en *omdrejningsparaboloide*.
I praksis kan man selvfølgelig bare skære den af et sted.



Hvis man placerer en parabel i *xz*-planen med toppunkt i origo og symmetriaksen op ad den positive del af *z*-aksen, får man, hvis man roterer den omkring symmetriaksen en *omdrejningsparaboloide* bestemt ved ligningen:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=\frac{z}{c}$$

Øvelse: Hvilken figur får man ved snit med følgende planer:

1. En plan parallel med *xy*-planen.
2. En plan parallel med *xz*-planen.
3. En plan parallel med *yz*-planen.

Elliptisk paraboloide:

Vi skal nu have indført begrebet *retningsplan*, som vi skal bruge i nogle af de følgende figurer. En retningsplan er en plan, vi forestiller os placeret i et koordinatsystem eller rummet, således at vi kan beskrive retningerne ud fra den.

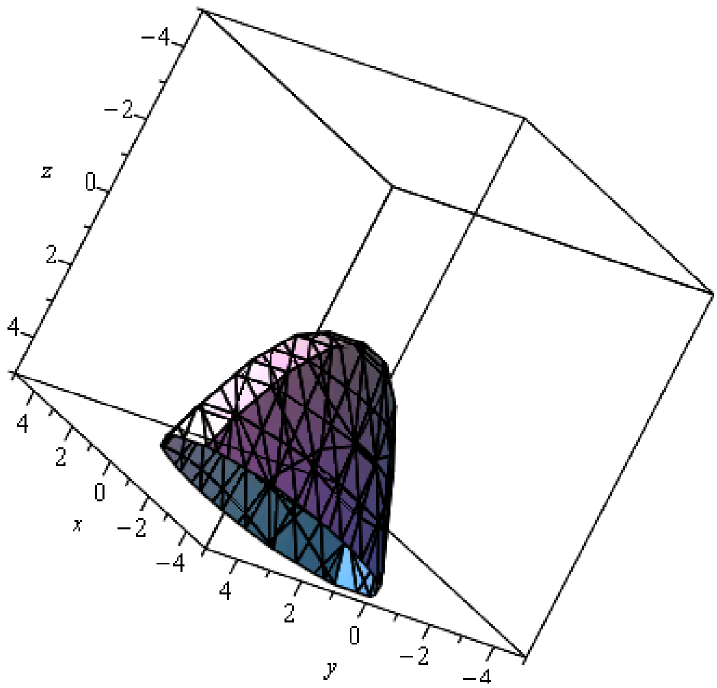
Vi kan f.eks. sige, at en ret linje skal bevæges, så den hele tiden er parallel med retningsplanen. Det giver mulighed for, at den kan rotere lige så tosset den vil omkring en akse parallel med en normalvektor for retningsplanen, men alle punkter på linjen vil hele tiden have samme afstand til planen.

Vi forestiller os nu, at retningsplanen er parallel med *xz*-planen, og at vi har en fast parabel i *yz*-planen med toppunkt i origo og symmetriaksen på *z*-aksen og med benene pegende opad. En anden parabel parallel med retningsplanen og også med benene pegende opad, glider nu med sit toppunkt placeret på den faste parabel hen langs denne (og hele tiden parallelt med retningsplanen). Denne parabel vil således danne en *elliptisk paraboloide*, der er bestemt ved ligningen:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$$

Eksempel:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=z \rightarrow$$



Øvelse: Hvilken figur får man ved snit med følgende planer:

1. En plan parallel med *xy*-planen.
2. En plan parallel med *xz*-planen.
3. En plan parallel med *yz*-planen.

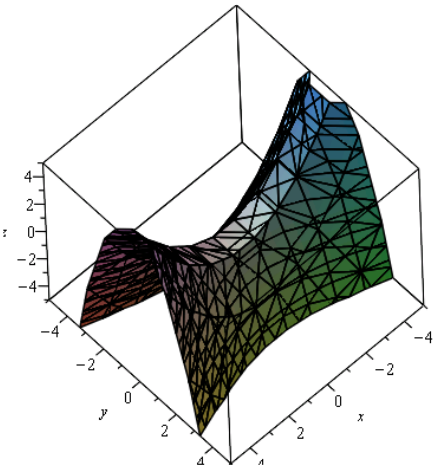
Hyperbolsk paraboloide:

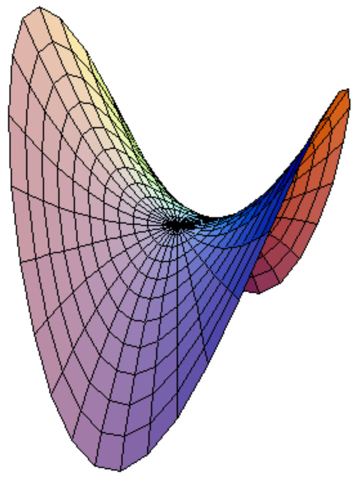
Vi gør nu som med den elliptiske paraboloide, bortset fra, at den løbende parabel nu har benene pegende nedad (den faste parabel har stadig benene pegende opad).

Vi får dermed en *hyperbolsk paraboloide* bestemt ved ligningen:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

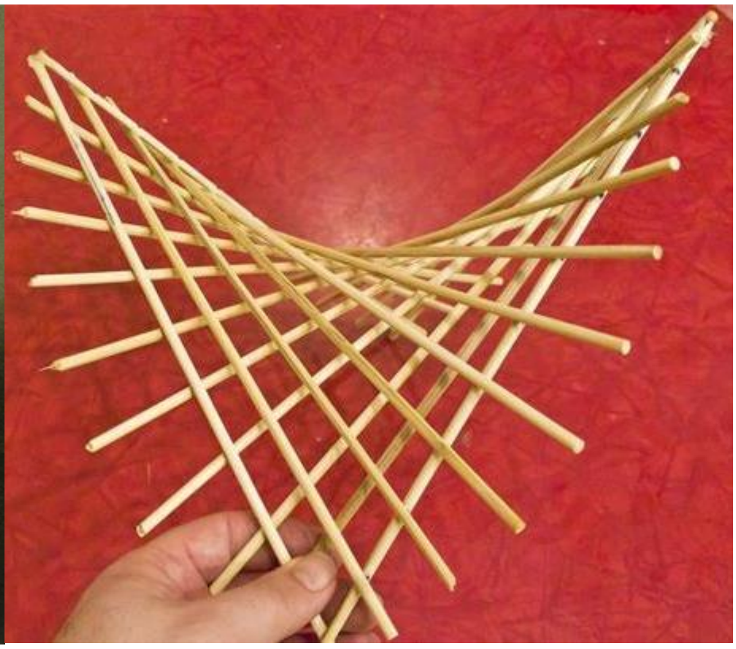
$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = z \rightarrow$$





Øvelse: Hvilken figur får man ved snit med følgende planer:

1. En plan parallel med *xy*-planen.
2. En plan parallel med *xz*-planen.
3. En plan parallel med *yz*-planen.

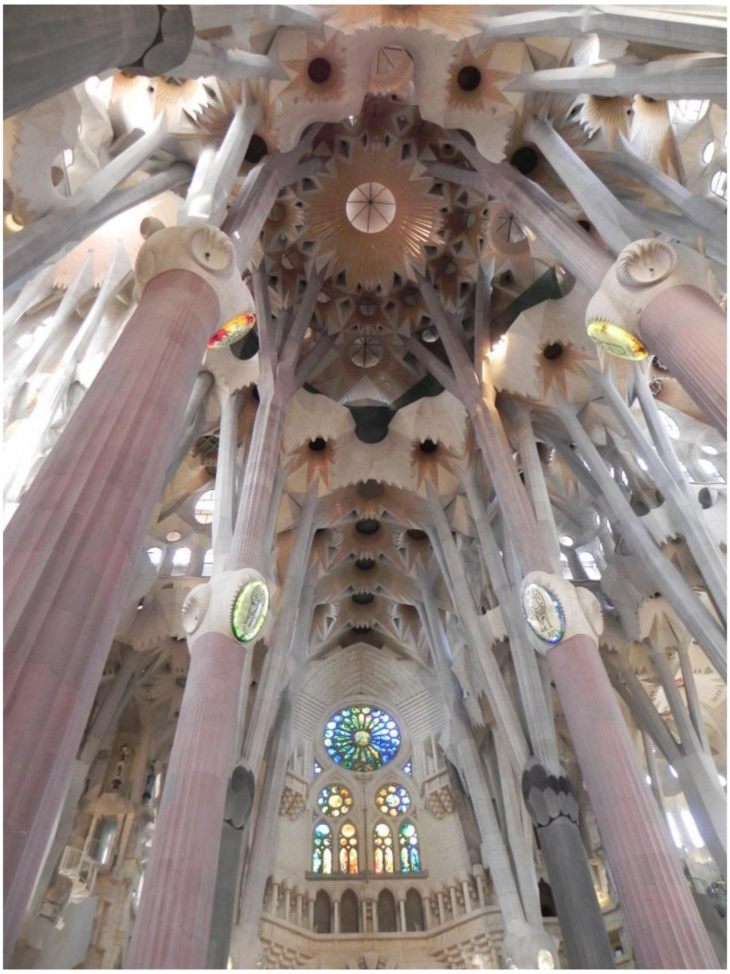


Den hyperbolske paraboloide ser jo temmelig glat ud, men som ovenstående to billeder viser, kan den faktisk også frembringes af rette linjer. Den er hermed en såkaldt *retlinet flade*.

Faktisk er det en *dobbelt retlinet flade*, da der gennem hvert punkt på fladen går to rette linjer, hvilket også fremgår af ovenstående billeder.

Definition: En *retlinet flade* er en flade, hvor der gennem hvert eneste punkt på fladen går en ret linje, der ligger i fladen.

Alle disse rette linjer kaldes *frembringere*.

Hvælvingen i La Sagrada Familia.
Det skulle være en hyperbolsk paraboloide.

Konoider

Der er forskellige slags retlinede flader, og det er muligvis ikke alle slags, der har et dansk navn. Så jeg ved ikke, om *catalanflader* findes på dansk, men de skulle i hvert fald være opkaldt efter den belgiske matematiker Eugène Charles Catalan (1814-1894).

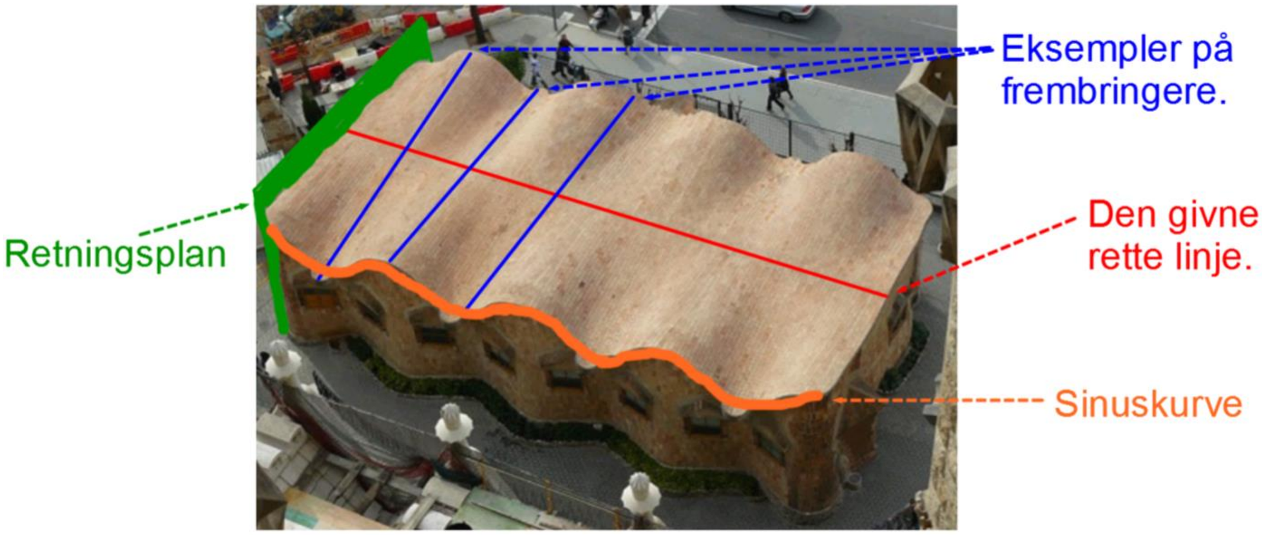
En *catalanflade* er en retlinet flade, hvor alle frembringere er parallelle med en given retningsplan.

Og blandt disse skal vi se på *konoider*:

Definition: En *konoide* er en catalanflade, hvor alle frembringere har et punkt fælles med en given ret linje.

Den hyperbolske paraboloide er et eksempel på en konoide. Kig på billedet side 33 med hånden. Hver af pindene, der peger den ene vej, kan bruges som den givne rette linje, som frembringerne, der så er alle pindene, der peger den anden vej, har et punkt fælles med.

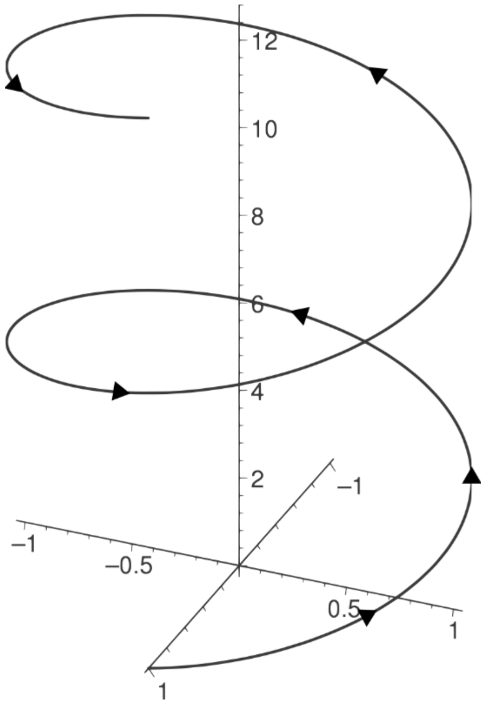
Et andet eksempel på en konoide er taget på skolen ved La Sagrada Familia:

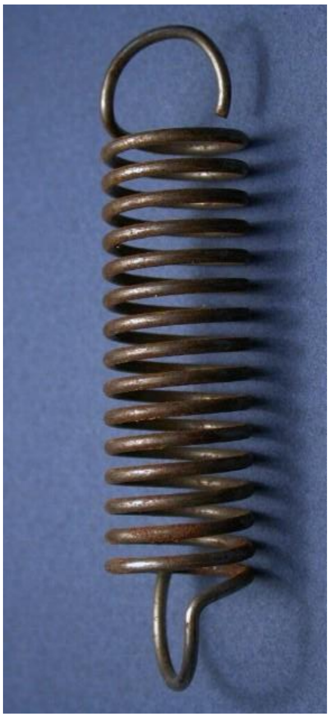


Helikoider

En *helix* er en kurve i rummet, der som vektorfunktion er givet ved forskriften:

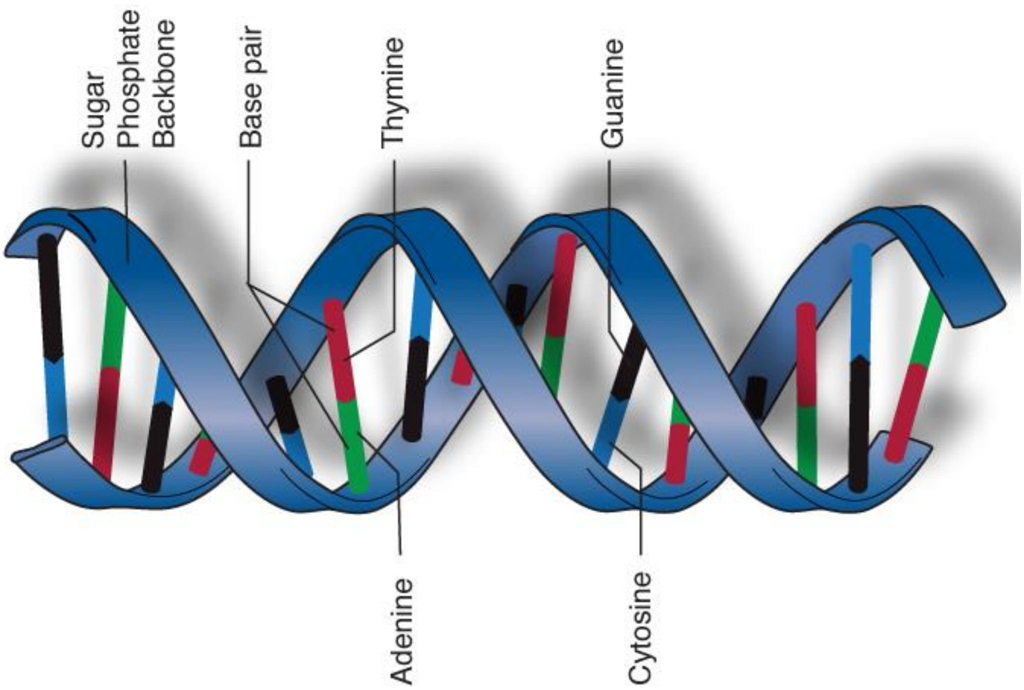
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(t) \\ r \cdot \sin(t) \\ a \cdot t \end{pmatrix} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$





r er radius i den cirkel, man ser, når man kigger oppe fra *z*-aksen.
Jo større *a* er, jo mere langstrakt bliver helixen.

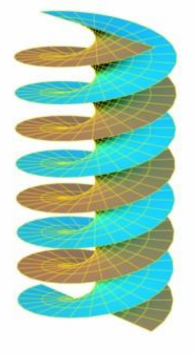
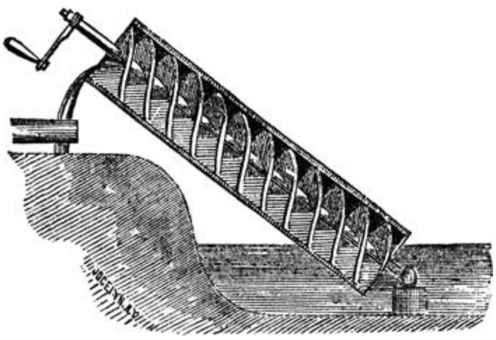
En dobbelthelix kendes fra DNA:



Man kan også sige, at en *helix* er den kurve, der dannes af det ene endepunkt af et linjestykke, når det bevæger sig parallelt med en retningsplan, og når det andet endepunkt bevæger sig med konstant hastighed ud ad en linje vinkelret på retningsplanen og samtidig roterer med konstant vinkelhastighed.

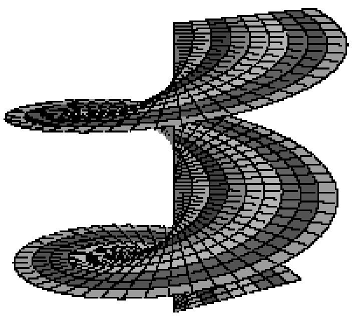
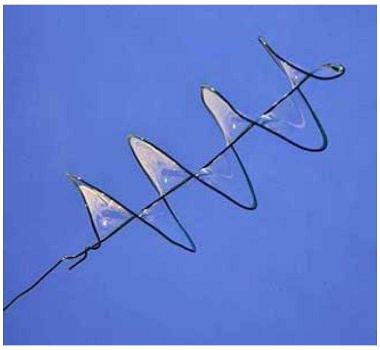
En *helikoide* er så den flade, der dannes af hele linjestykket.

En helikoide kaldes også en *vindelflade* eller en *skrueflade*.
Der lader dog ikke til at være helt enighed om denne definition. I hvert fald er de fleste billeder, der skal illustrere en helikoide af typen nedenfor, der er flader dannet mellem dobbelthelixer, dvs. hvor det bevægende linjestykke har sit centrum på linjen vinkelret på retningsplanen.


Denne flade kendes fra Archimedesskruen.

Men definitionen fører til nedenstående flade, der er et eksempel på en *minimalflade*, hvilket er den flade med en given randkurve (her helixen), der har det mindste areal.

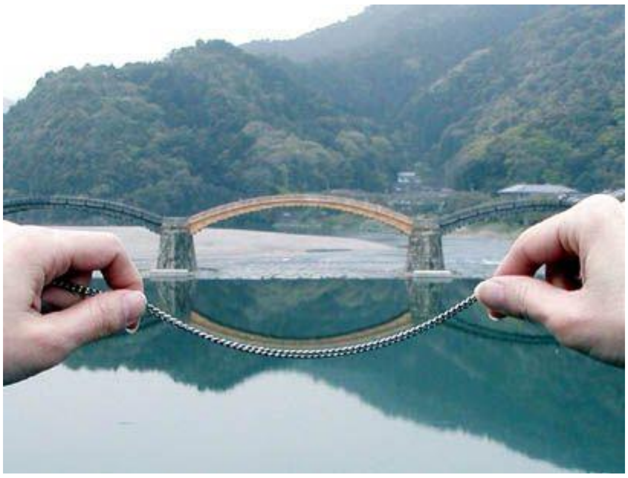
Minimalflader er et emne, der kan behandles inden for den såkaldte variationsregning. Her kan man også f.eks. vise, at cykloiden er brachistochronen, dvs. kurven der giver den hurtigste vej fra *A* til *B* i et homogent tyngdefelt (jf. Galilei-museet og matematikmuseet i Firenze).
Hvis man ikke vil regne på tingene, kan man bruge sæbevand til at finde minimalfladerne (se ovenstående billede).
Ved at rotere kvadratiske flader med samme højde kunne Gaudí konstruere *helikoidale* søjler. Det er en konstruktion, hvor kanterne danner en slags dobbelt dobbelthelix (en quadrihelix?). Det er altså ikke en helikoide. Sommetider har Gaudí vist også bare ladet sig inspirere af en helikoide (billedet til højre nedenfor):



Katenoider

En anden minimalflade er *katenoiden*. En plan er en triviel minimalflade, der giver det mindste areal, hvis man har en lukket kurve i planen, som fladen skal have som rand. Katenoiden var den første ikke-trivielle minimalflade, der blev opdaget og beskrevet. Det var Leonhard Euler (1707-1783), der fandt den.

Udgangspunktet for katenoiden er en *kædelinje*. En kædelinje er den kurve, der dannes af en (homogen) kæde, der hænger mellem to punkter.

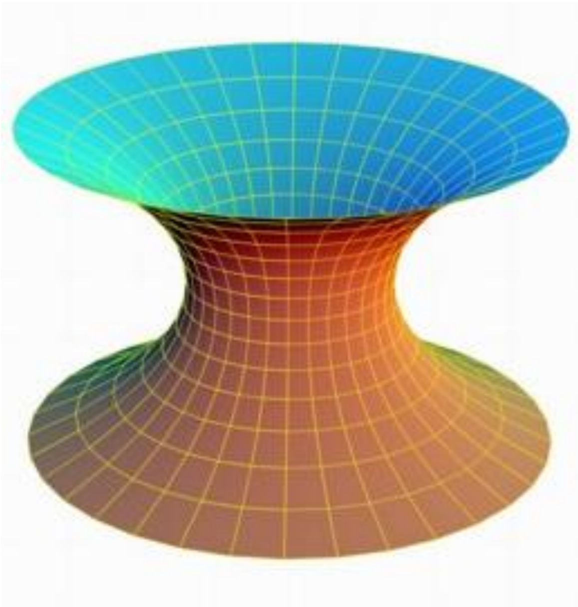


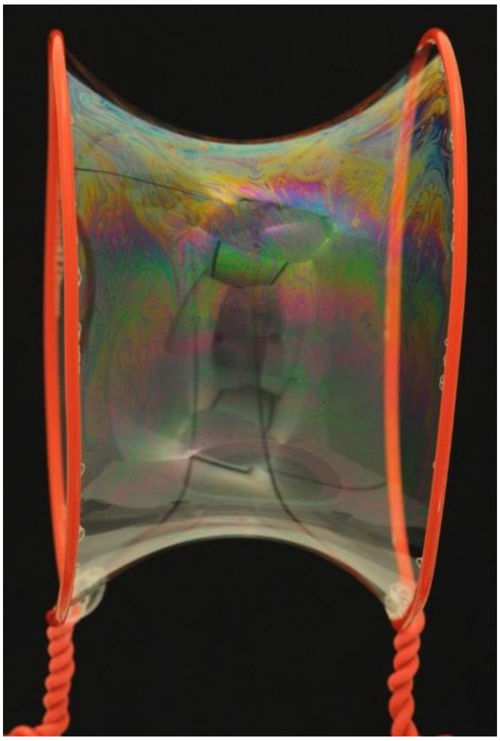
Gaudí anvendte kædelinjer, når han skulle finde formene til sine konstruktioner.

Fra Casa Milà.

Ved at hænge lodder i kæderne kunne Gaudì danne transformerede kædelinjer. Hele pointen er, at kæderne er påvirket af trækkræfter, og lodderne anvendes til at variere trækkræfterne. Når man så laver en konstruktion, kommer der trykkræfter på konstruktionens dele, men dette er blot en slags ”spejling” af situationen, og ved at have anvendt nogle passende lodder, har konstruktionen fået den optimale form med hensyn til bæreevne.

En *katenoide* er den flade, der fremkommer, når en kædelinje roteres omkring sin ledelinje.



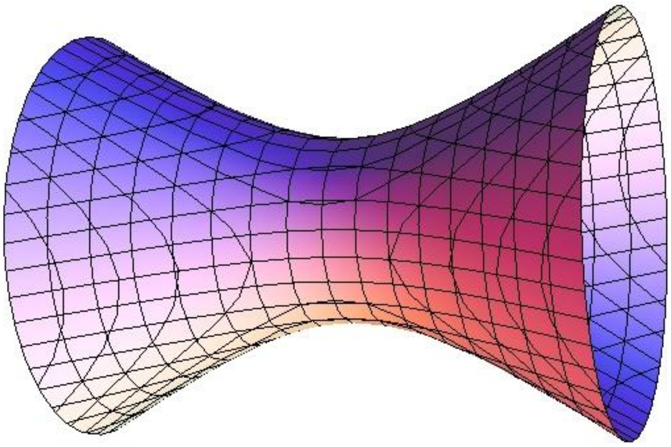


Katenoiden er som nævnt en minimalflade, og dermed kan den dannes med sæbevand.

Hyperboloider

Som sidste type flade går vi væk fra minimalfladerne, men vender tilbage til de retlinede flader. Vi skal se på hyperboloider.

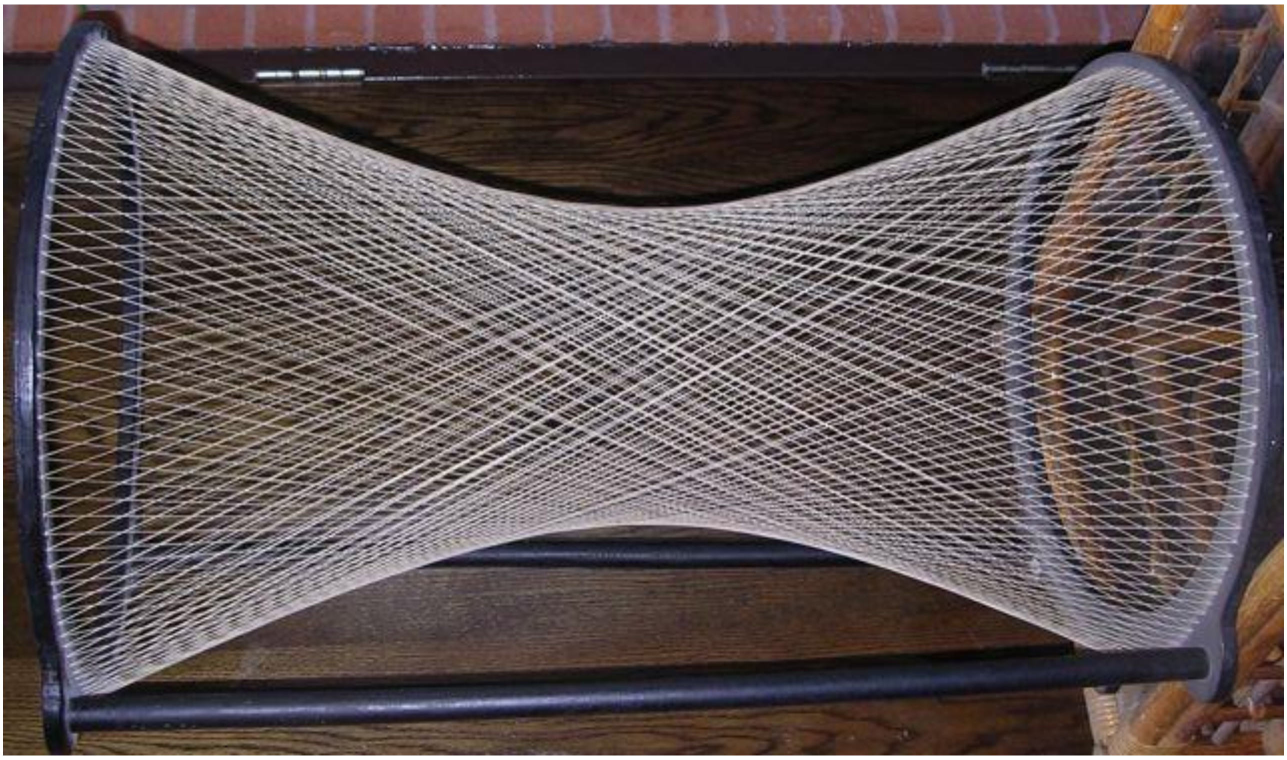
Vi begynder med *omdrejningshyperboloiden*, der er den flade, der dannes, når en hyperbel roteres omkring førsteaksens midtnormal:



Det minder om katenoiden, men det er en anden form, og som nævnt er det en retlinet flade.

Mere generel er en *elliptisk hyperboloide*, der også er en retlinet flade, og som er givet ved ligningen:

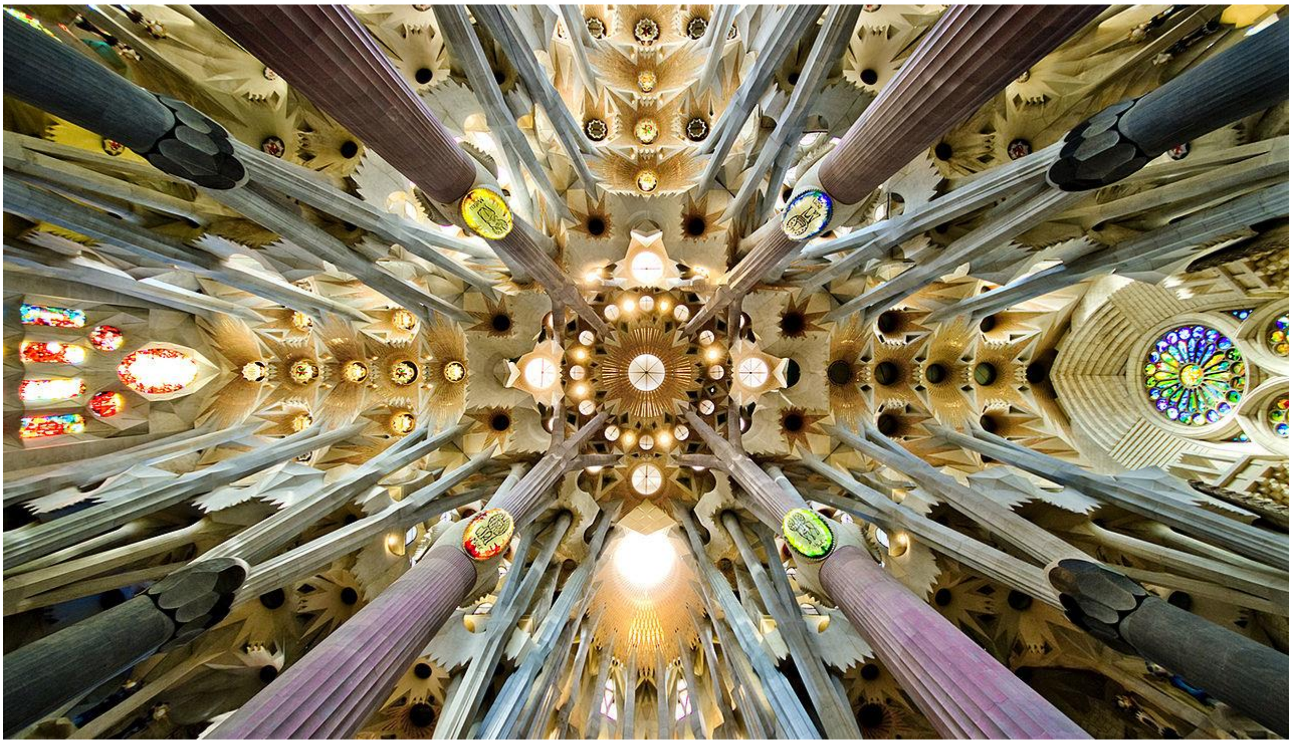
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



Øvelse: Hvilken figur får man ved snit med følgende planer:

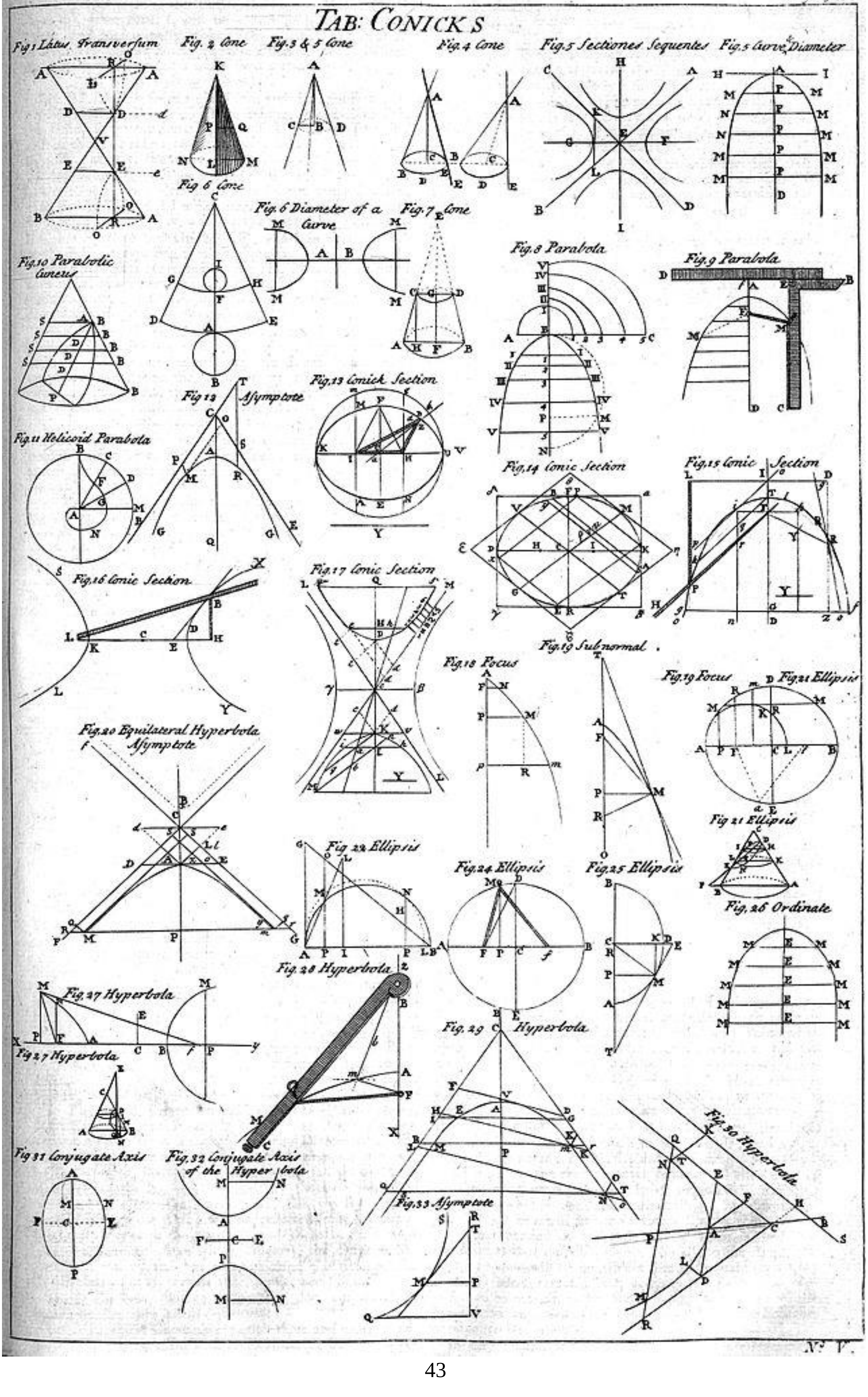
1. En plan parallel med *xy*-planen.
2. En plan parallel med *xz*-planen.
3. En plan parallel med *yz*-planen.


Salamander i Park Güell

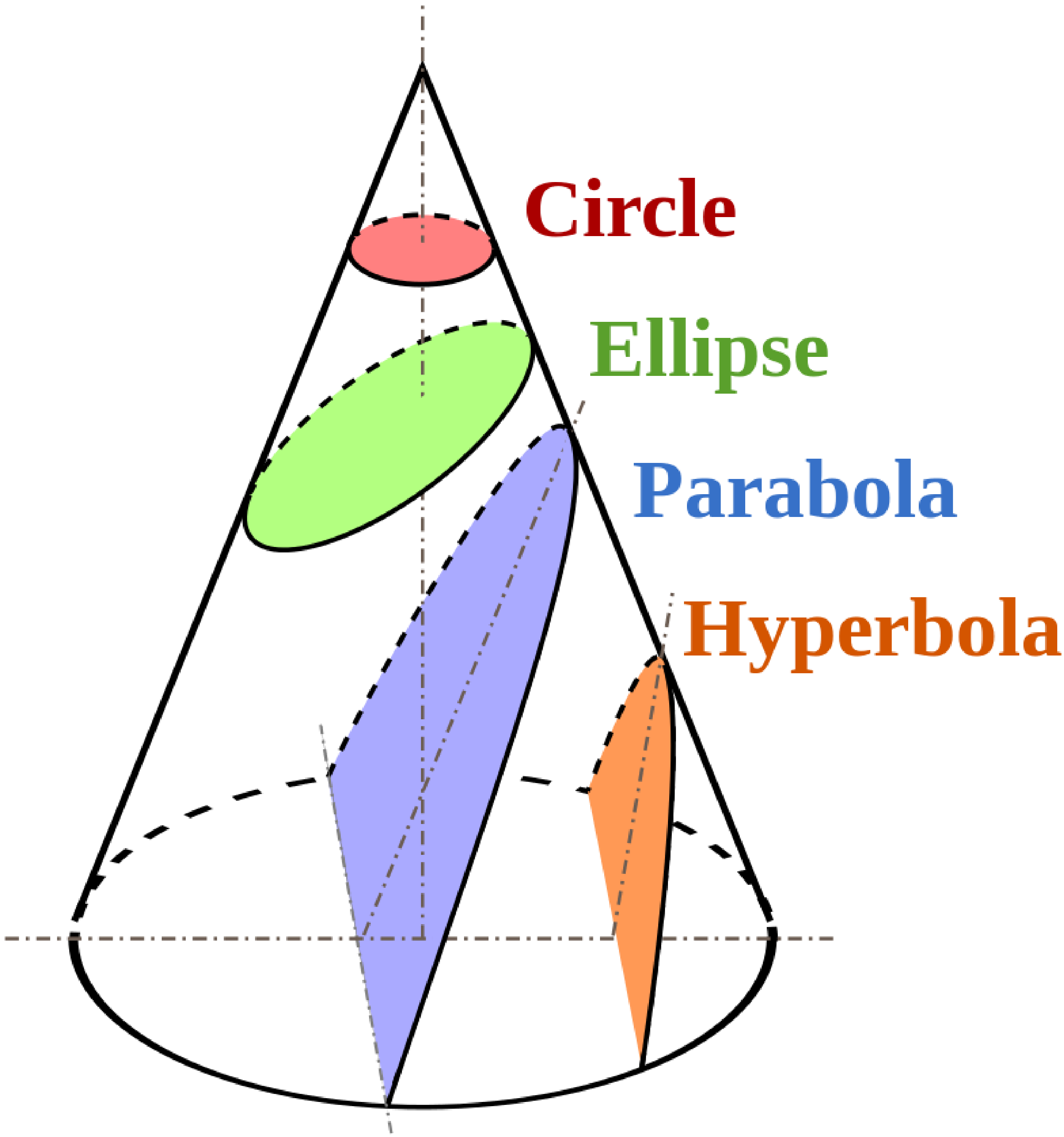

Fra Sagrada Familia

Casa Milà


La Sagrada Familia


TAB: CONICKS
Fig 1 Latus Transversum
Fig. 2 Cone
Fig. 3 & 5 Cone
Fig. 4 Cone
Fig. 5 Sectiones Sequentes
Fig. 5 Curve & Diameter
Fig 6 Cone
Fig. 6 Diameter of a Curve
Fig. 7 Cone
Fig. 8 Parabola
Fig. 9 Parabola
Fig. 10 Parabolic Cuneus
Fig 12 Asymptote
Fig. 13 Conick Section
Fig. 11 Helicoid Parabola
Fig. 14 Conic Section
Fig. 15 Conic Section
Fig. 16 Conic Section
Fig. 17 Conic Section
Fig. 19 Subnormal
Fig. 18 Focus
Fig. 19 Focus
Fig. 21 Ellipsis
Fig. 20 Equilateral Hyperbola Asymptote
Fig 21 Ellipsis
Fig 22 Ellipsis
Fig. 24 Ellipsis
Fig. 25 Ellipsis
Fig. 26 Ordinate
Fig. 28 Hyperbola
Fig. 27 Hyperbola
Fig 27 Hyperbola
Fig. 29 Hyperbola
Fig. 30 Hyperbola
Fig 31 Conjugate Axis
Fig. 32 Conjugate Axis of the Hyperbola
Fig. 33 Asymptote

N.° V.


Circle
Ellipse
Parabola
Hyperbola