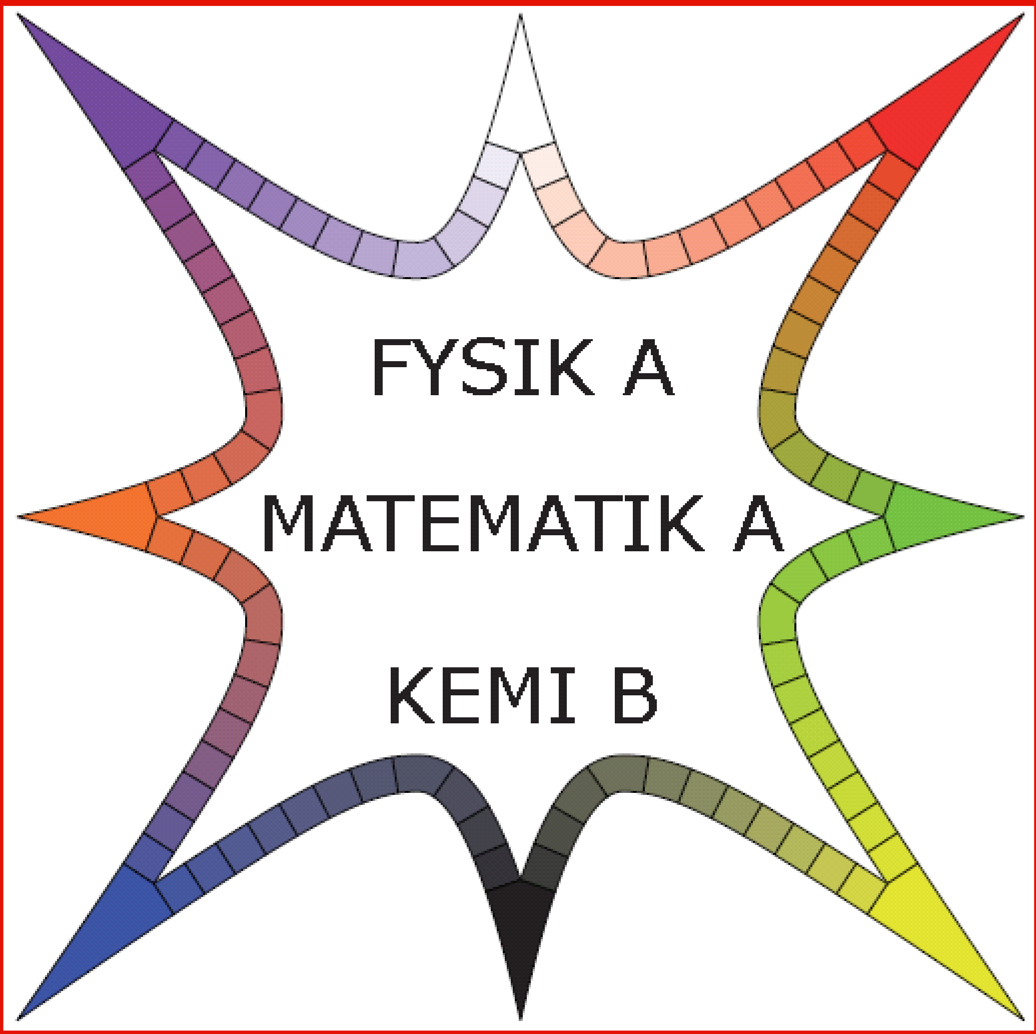
KOMPLEKSE TAL



x-klasserne

Gammel Hellerup Gymnasium

November 2023 ; Michael Szymanski ; mz@ghg.dk

Indholdsfortegnelse

En kort historie om imaginært og virkeligt 3
Tallegemet De Komplekse Tal 4
Indførelse af realdel og imaginærdel – samt *i* 8
Subtraktion, division og komplekst konjugerede 12
Den komplekse talplan 14
Polær repræsentation 15
Multiplikation og division med polær form 19
Eulers formel og identitet 20
Division med polær repræsentation 25
Potenser 26
Rødder 30
Kvadratrødder 34
Den komplekse logaritmefunktion 35
De komplekse sinus- og cosinusfunktioner 38
Funktioner 41
Andengradsligninger 43

En kort historie om imaginært og virkeligt

Første skridt på vejen til indførelsen af komplekse tal i matematik blev taget midt i det 16. århundrede, da Gerolamo Cardano (1501-1576) i forbindelse med sit arbejde med 3. gradsligninger opdagede de tal, som René Descartes (1596-1650) senere kaldte *imaginære tal*, og som vi nu kan betegne som ”komplekse tal med realdelen 0”.

Cardano opdagede, at han **undervejs** i løsningen af en tredjegradsligning med 3 reelle løsninger måtte arbejde med kvadratrødder af negative tal. Metoden virkede, og han forholdt sig ikke til, hvordan man skulle forstå disse kvadratrødder af negative tal.

Mange matematikere har bidraget til forståelsen, fortolkningen og anvendelsen af komplekse tal, og Leonhard Euler (1707-1783) er (selvfølgelig) én af dem. I sit værk *Vollständige Anleitung zur Algebra* fra 1770 indførte han de imaginære tal (som han også kalder *umulige tal*) lige efter at have indført de grundlæggende regneregler, hvilket også er den fremgangsmåde, der bliver anvendt i disse noter. Desuden indførte Euler (der også indførte symbolerne *e*, $f(x)$ og $\sum$) betegnelsen *i* i stedet for symbolet $\sqrt{-1}$, der tidligere havde været anvendt.

Man kan nok ikke finde et præcist tidspunkt for, hvornår de imaginære/umulige tal blev virkelige, men efter bidrag fra en anden uundgåelig matematiker C.F. Gauss (1777-1855) – herunder arbejdet med Algebraens Fundamentalsætning, hvor det er nødvendigt at arbejde med komplekse tal for at kunne sige, at alle *n*’te-gradspolynomier har netop *n* rødder regnet med multiplicitet – blev de komplekse tal vistnok af de fleste matematikere betegnet som ”virkelige”. En af undtagelserne er Charles Dodgson, der under pseudonymet Lewis Carroll i 1865 udgav bogen *Alice i Eventyrland*. I dette værk optræder også implicit *kvaternionerne*, der er en slags udvidelse af de komplekse tal, som blev beskrevet af William Hamilton i 1843. *Alice i Eventyrland* kan læses som en satire over eller kritik af matematikkens udvikling i det 19. århundrede (et muligt SRP-emne).

I 1799 havde den norske matematiker Caspar Wessel indført den komplekse talplan og en geometrisk fortolkning af komplekse tal, men det var i et værk (*Om directionens analytiske betegning*) skrevet på dansk, der blev overset i næsten 100 år, så det er den franske matematiker Jean-Robert Argand, der i 1806 uden at kende til Wessels arbejde også indførte en geometrisk fortolkning af komplekse tal, der har fået den komplekse talplan opkaldt efter sig (Argand-plan).

Men disse noter vil hverken behandle komplekse tal som et forløb inden for matematikkens historie eller historisk matematik. Det vil være et ”almindeligt” matematisk forløb med definitioner, sætninger og anvendelser, hvor målet er, at du skal blive fortrolig med at regne med komplekse tal og forstå, hvordan man indfører komplekse funktioner. Så kronologien overholdes ikke (f.eks. indføres den komplekse talplan før Eulers formel, da den geometriske fortolkning – som Euler ikke havde – kan hjælpe på forståelsen), og vi begynder med at repetere begrebet tallegeme, som vi arbejdede med i *Grundlæggende matematiske begreber del 1*…

Tallegemet De Komplekse Tal

Definition 1: Et *legeme* er en matematisk struktur bestående af en mængde *M*, hvortil der er knyttet de to binære operatorer + og $\cdot$, der virker på to elementer fra *M* og danner ét element, og hvor operatorerne opfylder følgende aksiomer:

1) $\forall x, y \in M : x + y \in M$ 2) $\forall x, y \in M : x \cdot y \in M$	Stabilitet
3) $\forall x, y \in M : \ x + y = y + x$ 4) $\forall x, y \in M : \ x \cdot y = y \cdot x$	Kommutativitet
5) $\forall x, y, z \in M : \ (x + y) + z = x + (y + z)$ 6) $\forall x, y, z \in M : \ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	Associativitet
7) $\forall x, y, z \in M : \ x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$	Distributivitet
8) $\exists 0 \in M : \forall x \in M : \ x + 0 = x$ 9) $\exists 1 \in M : \forall x \in M : \ x \cdot 1 = x$	Neutrale elementer
10) $\forall x \in M \ \exists (-x) \in M : \ x + (-x) = 0$	Modsat element
11) $\forall x \in M \setminus \{0\} \ \exists \frac{1}{x} \in M : \ x \cdot \frac{1}{x} = 1$	Reciprokt element

I 1.g fandt vi frem til, at både de rationale tal og de reelle tal med vores almindelige regler for addition og multiplikation er legemer, mens det ikke er tilfældet for hverken de naturlige tal eller de hele tal, hvor det bryder sammen ved henholdsvis aksiom 8 (da vi ikke har et neutralt element ved addition inden for de naturlige tal) og aksiom 11 (da vi ikke kan finde reciprokke elementer for andre tal end -1 og 1).

Definition 2: *De Komplekse Tal* er en matematisk struktur bestående af mængden

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

hvortil der er knyttet de binære operatorer $+$ (*addition*) og $\cdot$ (*multiplikation*) givet ved:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 \ , \ a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$$

Fra start er det væsentligt at bemærke, at $+$ og $\cdot$, der står på venstresiden i ovenstående definitioner, er de binære operatorer, der nævnes i definitionen, mens $+$, $-$ og $\cdot$, der står på højresiden, er de regneoperationer, vi kender fra de reelle tal. For bemærk, at på højresiden står regneoperationerne mellem reelle tal, mens de på venstresiden står mellem komplekse tal.
Vi skal senere indføre den imaginære enhed *i*, hvorved vores regneoperationer fra de reelle tal ”æder” regneoperationerne på venstresiden, men fra start er det som sagt - for rigtigt at forstå definitionen - vigtigt at bemærke, at der er tale om forskellige operatorer.

De komplekse tal består altså af par af reelle tal, og du kan måske allerede se, hvordan vi senere kan indføre en fortolkning af de komplekse tal som punkter i planen.

Eksempel 1: Definition 2 anvendes til at addere og multiplicere komplekse tal:

$$(3,8)+(7,4)=(3+7,8+4)=(10,12)$$
$$(-2,5)+(6,-1)=(-2+6,5+(-1))=(4,4)$$
$$(3,8)\cdot(7,4)=(3\cdot 7-8\cdot 4,3\cdot 4+8\cdot 7)=(21-32,\ 12+56)=(-11,68)$$
$$(-2,5)\cdot(6,-1)=(-2\cdot 6-5\cdot(-1),-2\cdot(-1)+5\cdot 6)=(-12+5,\ 2+30)=(-7,32)$$

Opgaverne 500*

Ordet legeme indgår ikke i Definition 2, for det er noget, der skal bevises:

Sætning 1: *De Komplekse Tal* er et legeme.

Vi skal altså vise, at vi med vores binære operatorer fra Definition 2 får opfyldt de 11 aksiomer fra Definition 1.

Bevis 1: Stabiliteten (*aksiomerne* 1 og 2) er opfyldt, da vi får et komplekst tal, både når vi adderer og multiplicerer to komplekse tal (højresiderne i de to nederste identiteter i Definition 2 er begge elementer i $\mathbb{C}$).

Aksiom 3: Vi ser på to vilkårlige komplekse tal $z_1=(a_1,b_1)$ og $z_2=(a_2,b_2)$, hvor vi skal vise, at

$z_1+z_2=z_2+z_1$:

$$z_1+z_2=(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2\ ,\ b_1+b_2)=(a_2+a_1,b_2+b_1)=(a_2,b_2)+(a_1,b_1)=z_2+z_1$$

De blå lighedstegn følger af Definition 2, mens det røde lighedstegn følger af, at addition af reelle tal er kommutativ.

Øvelse 1: Bevis aksiomerne 4-7 ved at benytte Definition 2 og at de reelle tal er et legeme, dvs. at regneoperationer med reelle tal opfylder de 11 aksiomer.

Hvis du har løst opgaverne 5004 og 5005, har du måske allerede gennemskuet beviserne for aksiomerne 8-11.

Aksiom 8: Det vises nu, at det komplekse tal $(0,0)$ har den søgte egenskab.

Lad (a_1,b_1) være et komplekst tal. Definition 2 og vores viden om det neutrale element ved addition for reelle tal giver: $(a_1,b_1)+(0,0)=(a_1+0,b_1+0)=(a_1,b_1)$

Øvelse 2: Vis, at $(1,0)$ er det neutrale element ved multiplikation (aksiom 9), at $(-a_1,-b_1)$ er det modsatte element til (a_1,b_1) (aksiom 10) samt at $\left(\frac{a_1}{a_1^2+b_1^2},-\frac{b_1}{a_1^2+b_1^2}\right)$ er det reciprokke element til (a_1,b_1), når $(a_1,b_1)\neq(0,0)$ (aksiom 11)

Vi ved fra vores tidligere arbejde med legemer, at når *De Komplekse Tal* er et legeme, er der en hel bunke regneregler, der er opfyldt, men da nogle af disse involverer subtraktion og division, skal disse regneoperationer først defineres med definitioner identiske med dem, vi kender fra de reelle tal:

Definition 3: For de komplekse tal z_1 og z_2 (hvor $z_2 \neq (0,0)$ i de tre nederste tilfælde) indføres:

$(z_1 - z_2) + z_2 = z_1$ Subtraktion defineres, dvs. det er det røde tegn, der defineres.

$\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 = z_1$ Division defineres, dvs. det er brøkstregen, der indføres.

Man *forlænger* en brøk med det komplekse tal z_3, hvor $z_3 \neq (0,0)$, ved $\frac{z_1}{z_2} \rightarrow \frac{z_1 \cdot z_3}{z_2 \cdot z_3}$.

Man *forkorter* en brøk med det komplekse tal z_3, hvor $z_3 \neq (0,0)$, ved $\frac{z_1}{z_2} \rightarrow \dfrac{\frac{z_1}{z_3}}{\frac{z_2}{z_3}}$.

Dvs. præcis som med "almindelige" tal er pointen, at subtraktion defineres ved, at $z_1 - z_2$ er det tal, der lagt til z_2 giver z_1, mens division defineres ved, at kvotienten $\frac{z_1}{z_2}$ er det tal, der multipliceret med z_2 giver z_1. Og igen er pointen med begreberne *forlænge* og *forkorte*, at brøkens værdi **ikke** ændres ved denne operation (sætningerne 2.16 og 2.17).

Med vores Definition 1 og Definition 3 beviste vi allerede i 1.g, at der gælder følgende:

Sætning 2: For komplekse tal z_i, hvor $z_i \neq (0,0)$ hvis tallet optræder i nævneren, gælder:

1: $z_1 \cdot (0,0) = (0,0)$

2: $z_1 \cdot (-(1,0)) = -z_1$

3: $z_1 \cdot (-z_2) = -(z_1 \cdot z_2)$

4: $(-z_1) \cdot (-z_2) = z_1 \cdot z_2$

5: $(z_1 + z_2) = z_1 + z_2$

6: $z_1 + (-z_2) = z_1 - z_2$

7: $-(z_1 + z_2) = -z_1 - z_2$

8: $z_1 \cdot (z_2 + z_3 - z_4 \cdot z_5) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 - z_1 \cdot z_4 \cdot z_5$

9: $(z_1 + z_2) \cdot (z_3 + z_4) = z_1 \cdot z_3 + z_1 \cdot z_4 + z_2 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_4$

10: $\frac{z_1}{z_1} = (1,0)$

11: $z_1 \cdot \frac{(1,0)}{z_1} = \frac{z_1}{z_1}$

12: $z_1 \cdot \frac{(1,0)}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}$

13: $z_1 \cdot \frac{z_2}{z_3} = \frac{z_1 \cdot z_2}{z_3}$

NULREGLEN:

$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \ldots \cdot z_n = 0 \Leftrightarrow$

$z_1 = 0 \vee z_2 = 0 \vee z_3 = 0 \vee \ldots \vee z_n = 0$

14: $\dfrac{\frac{z_1}{z_2}}{z_3} = \frac{z_1}{z_2 \cdot z_3}$

15: $\dfrac{\frac{z_1}{z_2}}{z_3} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{(1,0)}{z_3}$

16: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_3}{z_2 \cdot z_3}$

17: $\frac{z_1}{z_2} = \dfrac{\frac{z_1}{z_3}}{\frac{z_2}{z_3}}$

18: $\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4} = \frac{z_1 \cdot z_3}{z_2 \cdot z_4}$

19: $\dfrac{z_1}{\frac{z_2}{z_3}} = z_1 \cdot \frac{z_3}{z_2}$

20: $\dfrac{\frac{z_1}{z_2}}{\frac{z_3}{z_4}} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_4}{z_3}$

21: $\frac{z_1 + z_2 - z_3 \cdot z_4}{z_5} = \frac{z_1}{z_5} + \frac{z_2}{z_5} - \frac{z_3 \cdot z_4}{z_5}$

22: $\frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3} = \frac{z_1 + z_2}{z_3}$

Vi regner altså med parenteser og brøker på sædvanlig vis, og når vi også kopierer definitionerne for potenser med heltallige eksponenter fra de reelle tal, vil vi også kunne overføre regnereglerne for disse (da beviserne for potensregnereglerne er baseret på potensdefinitionerne og brøk- og parentesregnereglerne):

Definition 4: a) Lad $n \in \mathbb{N}$, og lad $z \in \mathbb{C}$. *Potensen* z^n defineres som:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ faktorer}}$$

b) For ethvert tal $z \in \mathbb{C}$ gælder $z^0 = (1,0)$

c) Lad $m \in \mathbb{Z}$, og lad $z \in \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$. Så gælder $z^{-m} = \dfrac{(1,0)}{z^m}$

Sætning 3: De fem potensregneregler for komplekse tal.

Lad $n, m \in \mathbb{Z}$, og lad $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ og $z_3 \neq (0,0)$.Der gælder så:

1. **potensregneregel:** $z_1^n \cdot z_1^m = z_1^{n+m}$
2. **potensregneregel:** $\dfrac{z_3^m}{z_3^n} = z_3^{m-n}$
3. **potensregneregel:** $z_1^n \cdot z_2^n = (z_1 \cdot z_2)^n$
4. **potensregneregel:** $\dfrac{z_1^n}{z_3^n} = \left(\dfrac{z_1}{z_3}\right)^n$
5. **potensregneregel:** $(z_1^n)^m = z_1^{n \cdot m}$

Bemærk, at sætningerne 2 og 3 behandler komplekse tal uden at udtale sig om de reelle talpar, som de komplekse tal er opbygget af. F.eks. fortæller Sætning 2.21 os, hvordan vi dividerer et flerleddet udtryk med et komplekst tal, men ikke hvordan vi finder de reelle talpar, som udgør de enkelte kvotienter (se eksempel 2.c nedenfor).

Bemærk også, at det ikke er sætningerne 2 og 3, der giver os identiteten $z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot z_1 \cdot z_2$. Den følger af, at denne omskrivning kan foretages med alle størrelser (bananer, pærer, $\log(y)$, a^2b^3c og altså også $z_1 \cdot z_2$). Men igen er det vigtigt at bemærke, at vi endnu ikke ved, hvordan vi ganger det reelle tal 2 med det komplekse tal $z_1 \cdot z_2$. Det ser vi dog snart på.

Eksempel 2: Find selv de sætninger og aksiomer, der anvendes:

a) $(z_1 + z_2)^2 = (z_1 + z_2) \cdot (z_1 + z_2) = z_1 \cdot z_1 + z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_1 + z_2 \cdot z_2 = z_1^2 + z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_2 + z_2^2 =$

$$z_1^2 + 2 \cdot z_1 \cdot z_2 + z_2^2$$

b) $\dfrac{z_1}{z_2} \cdot \dfrac{z_2}{z_3} = \dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_2 \cdot z_3} = \dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_3 \cdot z_2} = \dfrac{z_1}{z_3}$

c) $\dfrac{(9,-5) + (4,3) \cdot (-1,8) - (6,2) \cdot (7,2)}{(6,2)} = \dfrac{(9,-5)}{(6,2)} + \dfrac{(4,3) \cdot (-1,8)}{(6,2)} - (7,2) = \dfrac{(9,-5)}{(6,2)} + \dfrac{(-28,29)}{(6,2)} - (7,2)$

Opgaverne 501*

Opsamling: Du skal på nuværende tidspunkt have bemærket, at selvom vi i Definition 2 indførte en måske ved første øjekast ret mystisk regel for multiplikation af to komplekse tal, så fungerer brøkstreger, parenteser og heltalspotenser på præcis samme måde som ved reelle tal. Det er meget vigtigt at bemærke disse ligheder, så du kan regne ubesværet med komplekse tal i disse situationer.

Men det er lige så vigtigt at bemærke forskellene, som vi snart skal se på. Som sagt mangler vi at finde ud af, hvordan man udregner de brøker, der optræder på højresiden i Eksempel 2.c, og vi har ikke fået set på potenser med rationale eksponenter, eller hvad der kommer an på det samme: **Rødder**.

Husk på, at da vi for reelle tal gav betydning til potenserne $a^{\frac{1}{n}}$ og $a^{\frac{p}{q}}$, udnyttede vi, at vi allerede kendte definitionen på rødder ("$\sqrt[6]{64}$ *er det **positive** tal, der opløftet i 6. potens giver 64*"). Men som vi skal se, opfører de komplekse tal sig anderledes end reelle tal, når det kommer til rødder. Vi kender allerede til den problemstilling, at både $(-2)^6 = 64$ og $2^6 = 64$, hvorfor vi for at gøre kvadratroden entydig var nødt til at tilføje ordet "positive" i definitionen. Med komplekse tal skal vi se, at der er seks forskellige komplekse tal *z*, der opfylder $z^6 = 64$, og der er generelt *n* forskellige komplekse tal z_1, der opfylder $z_1^n = z_2$.

Dette vender vi tilbage til. Først skal vi have indført en notation, der forbinder reelle og komplekse tal, og som gør det muligt at betragte reelle tal som en del af de komplekse tal. Vi vender derfor nu tilbage til at kigge på de par af reelle tal, som et komplekst tal er opbygget af.

Indførelse af realdel og imaginærdel – samt *i*

Vi ser på komplekse tal (a,b), hvor $b=0$, og vi skal nu se, hvorfor man kan fortolke denne type komplekse tal som reelle tal, dvs. der skal argumenteres for, at de reelle tal kan betragtes som en delmængde af de komplekse tal.

Vi ser på addition og multiplikation af to komplekse tal af denne type:

$$(a_1,0)+(a_2,0)=(a_1+a_2,0+0)=(a_1+a_2,0)$$

$$(a_1,0)\cdot(a_2,0)=(a_1\cdot a_2-0\cdot 0,a_1\cdot 0+0\cdot a_2)=(a_1\cdot a_2,0)$$

Bemærk nullerne. Alle beregninger ender med at foregå på den første plads i talparret, og her genkendes vores velkendte opskrivning af addition og multiplikation. Vi kan derfor indføre følgende definition:

Definition 5: Det komplekse tal $(a,0)$ kan betragtes som det reelle tal *a*, dvs. man kan skrive:

$$(a,0)=a$$

Hvis vi f.eks. havde fået $(a_1,0)\cdot(a_2,0)=(a_1^2-a_2^2,0)$ eller $(a_1,0)+(a_2,0)=(0,a_1+a_2)$ (←forkert!), ville der enten gælde andre regler, eller også ville resultatet være en anden type komplekst tal, og så havde vi ikke kunnet indføre ovenstående definition.

Eksempel 3: Vi er nu i stand til at addere og multiplicere et komplekst tal med et reelt tal, da vi blot kan betragte det reelle tal som en særlig slags komplekst tal:

$$9+(4,-6)=(9,0)+(4,-6)=(9+4,0-6)=(13,-6)$$

$$c+(a,b)=(c,0)+(a,b)=(c+a,0+b)=(c+a,b)$$

$$3\cdot(5,-7)=(3,0)\cdot(5,-7)=(3\cdot 5-0\cdot(-7),3\cdot(-7)+0\cdot 5)=(15,-21)$$

$$c\cdot(a,b)=(c,0)\cdot(a,b)=(c\cdot a-0\cdot b,c\cdot b-0\cdot a)=(c\cdot a,c\cdot b)$$

Og multiplikation af to reelle tal kan udføres inden for det komplekse tallegeme ved:

$$a\cdot c=(a,0)\cdot(c,0)=(a\cdot c-0\cdot 0,a\cdot 0+0\cdot c)=(a\cdot c,0)=a\cdot c$$

Dvs. vores gangetegn fra reelle tal og fra komplekse tal (det røde) "smelter sammen". Det samme sker med addition:

$$a+c=(a,0)+(c,0)=(a+c,0+0)=(a+c,0)=a+c$$

Du kan altså godt - hvilket dog ville være at gøre tingene unødvendigt kompliceret – regne med reelle tal ved hjælp af reglerne fra komplekse tal.

I Eksempel 3 beviste vi de generelle regler:

Sætning 4: For alle tal $c\in\mathbb{R}$ og $(a,b)\in\mathbb{C}$ gælder:

$$c\cdot(a,b)=(c\cdot a,c\cdot b)$$

$$c+(a,b)=(c+a,b)$$

Det er nu nærliggende at se på komplekse tal (a,b), hvor $a=0$:

$$(0,b_1)+(0,b_2)=(0+0,b_1+b_2)=(0,b_1+b_2)$$

$$(0,b_1)\cdot(0,b_2)=(0\cdot 0-b_1\cdot b_2,0\cdot b_2+b_1\cdot 0)=(-b_1\cdot b_2,0)$$

Her bemærkes det, at addition opfører sig på samme måde, som vi observerede hos de reelle tal, men ved multiplikation sker der noget nyt. Vi ser, at vores multiplikation fører til et reelt tal, samt at det ikke er vores sædvanlige måde at multiplicere (der kommer et fortegnsskift). Vi ser derfor, at man ikke kunne have betegnet $(0,b)$ som et reelt tal, men vi kan stadig give denne type tal et navn:

Definition 6: Komplekse tal af typen $(0,b)$ kaldes *imaginære tal*, og mængden bestående af samtlige imaginære tal betegner vi her $\mathbb{I}$.

Der er flere ting at bemærke i forbindelse med denne definition:

- Der er ikke konsensus omkring ordvalget. Nogle matematikere anvender *imaginært tal* synonymt med *komplekst tal* (og kan evt. anvende betegnelsen *rent imaginært tal* om det, der her kaldes et *imaginært tal*). Når det ikke er et problem med denne manglende konsensus, hænger det sammen med, at mængden af *imaginære tal* i sig selv ikke er så interessant. Det er det komplekse tallegeme, der i sin helhed er interessant.
- Betegnelsen *imaginært tal* er uforståelig ud fra det foregående. Det betyder jo, at tallet er en slags uvirkeligt tal, vi kun kan forestille os, men det kunne vi allerede have sagt om de komplekse tal. Navnet hænger sammen med, at det var denne slags komplekse tal, man historisk set først stødte på, fordi de – som vi senere skal se – fremkommer, når vi forsøger at uddrage kvadratroden af negative tal.

- De imaginære tal med regneoperatorerne fra de komplekse tal er IKKE et legeme. Allerede i Definition 1.2 går det galt, da der ikke er stabilitet ved multiplikation.
- Det reelle tal 0 kan ifølge Definition 5 skrives $(0,0)$, og dermed er det også et imaginært tal. Det er det eneste tal, der både tilhører de reelle og de imaginære tal.
- Det er i mængden af imaginære tal, at vi finder det berømte komplekse tal *i*.

Definition 7: Det imaginære tal $(0,1)$ betegnes *i*, dvs. $i=(0,1)$.

Eksempel 4: Af Definition 7 følger: $i^2=(0,1)^2=(0,1)\cdot(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1, 0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)=-1$

Vi kan nu foretage følgende omskrivning:

$$(a,b)=(a+0,0+b)=(a,0)+(0,b)=a+(0,b)\overset{\text{Sætning 4}}{=}a+b\cdot(0,1)=a+b\cdot i$$

Vi har hermed vist:

Sætning 5: $a+i\cdot b=(a,b)$

Definitionerne 5, 6 og 7 samt Sætning 5 fører frem til følgende definition:

Definition 8: I det komplekse tal $z=(a,b)$ kaldes *a* for *realdelen* og *b* for *imaginærdelen*.
Realdelen skrives *Re(z)* og imaginærdelen skrives *Im(z)*
Tallet *i* kaldes for *den imaginære enhed*.
Opskrivningen $a+i\cdot b$ eller $a+b\cdot i$ kaldes *den rektangulære repræsentation* af *z*.

Bemærk: Både *realdel* og *imaginærdel* er **reelle tal**.

Eksempel 5: Det komplekse tal $(4,-5)$ har realdelen 4 og imaginærdelen -5 og kan skrives $4-5i$.
Det komplekse tal $-3+i$ har realdelen -3 og imaginærdelen 1 og kan skrives $(-3,1)$.
Man skriver $\mathrm{Re}(-3+i)=-3$ og $\mathrm{Im}(-3+i)=1$

I Eksempel 3 så vi, hvordan Definition 5 førte til, at man kunne regne med reelle tal ved hjælp af regnereglerne fra de komplekse tal. Med indførelsen af den imaginære enhed og den rektangulære repræsentation af komplekse tal er sammensmeltningen blevet fuldkommen, dvs. vores binære operatorer + og $\cdot$ fra Definition 2 er smeltet sammen med de tilsvarende binære operatorer fra de reelle tal. Eller med andre ord: Vi regner med ”helt almindelige” + og $\cdot$, når vi opskriver komplekse tal på rektangulær form:

Eksempel 6: Vi adderer og multiplicerer nu de komplekse tal (a_1,b_1) og (a_2,b_2) angivet på rektangulær form, hvor vi regner, som om det hele var reelle tal, blot med den ekstra detalje, at $i^2=-1$ (Eksempel 4).

$$(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+i\cdot b_1)+(a_2+i\cdot b_2)=a_1+a_2+i\cdot b_1+i\cdot b_2=a_1+a_2+i\cdot(b_1+b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)$$

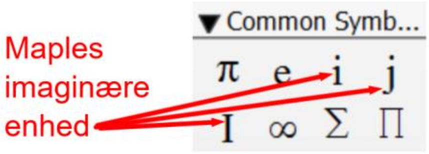
$$(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)=(a_1+i\cdot b_1)\cdot(a_2+i\cdot b_2)=a_1\cdot a_2+a_1\cdot i\cdot b_2+i\cdot b_1\cdot a_2+i^2\cdot b_1\cdot b_2=$$
$$a_1\cdot a_2-b_1\cdot b_2+i\cdot(a_1\cdot b_2+b_1\cdot a_2)=(a_1\cdot a_2-b_1\cdot b_2,a_1\cdot b_2+b_1\cdot a_2)$$

Eksempel 7: Med konkrete tal foregår udregningerne på følgende måde:

$$(4-3i)+(7+6i)=4+7-3i+6i=11+3i$$

$$(5+7i)\cdot(-2+3i)=-10+15i-14i+21i^2=-10-21+i=-31+i$$

Maple har 3 forskellige symboler for den imaginære enhed, men du kan også blot anvende et stort *I* skrevet med tastaturet.



Ovenstående udregninger udført i Maple:

Stort *I* skrevet med tastaturet

$$(4-3\,I)+(7+6\,I)=11+3\,\mathrm{I}$$

Anvendelse af Maples symboler

$$(4-3\mathrm{I})+(7+6\mathrm{I})=11+3\,\mathrm{I}$$

$$(5+7\,\mathrm{i})\cdot(-2+3\,\mathrm{i})=-31+\mathrm{I}$$

$$(5+7\mathrm{j})\cdot(-2+3\mathrm{j})=-31+\mathrm{I}$$

Eksempel 8: I Maple kan man med kommandoerne *Re* om *Im* få angivet henholdsvis realdelen og imaginærdelen af et komplekst tal (Udregningerne i de to nederste ses i Eksempel 7):

$$\mathrm{Re}(-9+6\,I)=-9$$

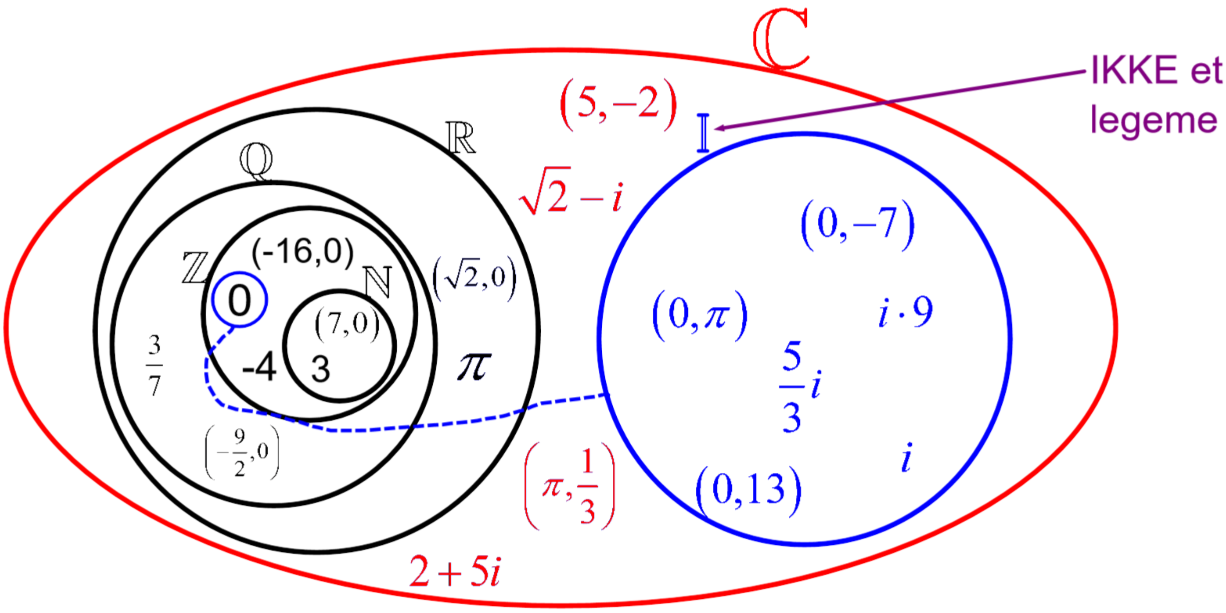
$$\mathrm{Im}(-9+6\,I)=6$$

$$\mathrm{Re}((4-3\,I)+(7+6\,I))=11$$

$$\mathrm{Im}((5+7\,I)\cdot(-2+3\,I))=1$$

Opgaverne 502*

Vi kan samle op på dette afsnit og illustrere vores kendte talmængder med følgende figur:



Subtraktion, division og komplekst konjugerede

Vi er nu klar til at se på, hvordan subtraktion og division foregår, når man arbejder med komplekse tal angivet på rektangulær form.

Sætning 6: Subtraktion: $(a+i\cdot b)-(c+i\cdot d)=(a-c)+i\cdot(b-d)$

Division: $\dfrac{a+i\cdot b}{c+i\cdot d}=\dfrac{a\cdot c+b\cdot d}{c^2+d^2}+i\cdot\dfrac{b\cdot c-a\cdot d}{c^2+d^2}$

Bevis 6: I Definition 3 fastsatte vi subtraktion på sædvanlig vis, så vi har:

$$\left((a+i\cdot b)-(c+i\cdot d)\right)+(c+i\cdot d)=a+i\cdot b$$

Vi husker på, at regnetegnene nu fungerer som for reelle tal.
Andet led på venstresiden trækkes fra på begge sider:

$$\left((a+i\cdot b)-(c+i\cdot d)\right)=a+i\cdot b-(c+i\cdot d)=a-c+i\cdot b-i\cdot d=(a-c)+i\cdot(b-d)$$

Man trækker altså blot realdelene fra hinanden og imaginærdelene fra hinanden.

Division er ikke så simpel. Definition 3 bringer os ikke videre, men vi kan benytte en egenskab, du måske har opdaget i forbindelse med opgaveregning. Vi forlænger brøken med $c-i\cdot d$ og husker undervejs, at $i^2=-1$:

$$\frac{a+i\cdot b}{c+i\cdot d}=\frac{a+i\cdot b}{c+i\cdot d}\cdot\frac{c-i\cdot d}{c-i\cdot d}=\frac{a\cdot c-i\cdot a\cdot d+i\cdot b\cdot c-i^2\cdot b\cdot d}{c^2-i\cdot c\cdot d+i\cdot d\cdot c-i^2\cdot d^2}=\frac{(a\cdot c+b\cdot d)+i\cdot(b\cdot c-a\cdot d)}{c^2+d^2}$$

Det smarte – og væsentlige – er, at vores nævner nu er et reelt tal. Det betyder nemlig, at vi kan udregne de to brøker, vi får, når vi nu dividerer begge led i tælleren med nævneren og får indholdet i Sætning 6.

I beviset og sætningen ovenfor indgår to udtryk, der optræder så ofte, når man regner med komplekse tal, at de har fået deres egne navne:

Definition 9: For det komplekse tal $z=a+i\cdot b$ gælder:

Den komplekst konjugerede af z skrives $\bar{z}$ eller z^* og er givet ved:

$$\bar{z}=a-i\cdot b$$

Modulus (også kaldet *normen, størrelsen* eller *den numeriske værdi*) af z skrives $|z|$ og er givet ved:

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

Udtrykket for modulus af et komplekst tal er identisk med udtrykket for længden af en vektor i planen eller afstanden fra punktet (a,b) til origo i et koordinatsystem. Det ser vi på i næste afsnit, hvor den komplekse talplan indføres. Men først nogle konkrete eksempler.

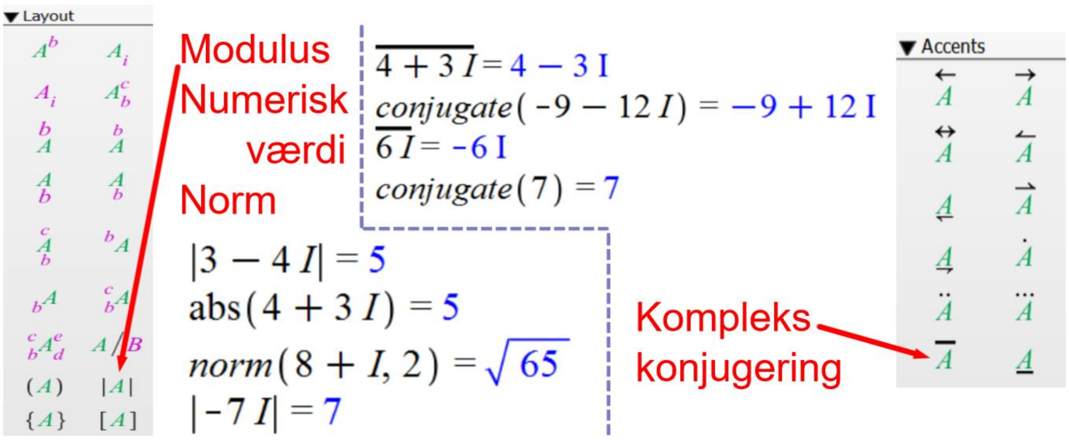
Eksempel 9: Den komplekst konjugerede af $4+3i$ er $4-3i$, den komplekst konjugerede af $-9-12i$ er $-9+12i$, den komplekst konjugerede af $6i$ er $-6i$ og den komplekst konjugerede af 7 er 7.

Modulus: $|3-4i|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ $\qquad |4+3i|=\sqrt{4^2+3^2}=5$

$|8+i|=\sqrt{8^2+1^2}=\sqrt{65}$ $\qquad |-7i|=\sqrt{(-7)^2}=7$ $\qquad |-13|=\sqrt{(-13)^2}=13$

Som vi så til sidst i Eksempel 9, fungerer modulus af et komplekst tal på samme måde som den numeriske værdi, vi kender fra reelle tal, når den virker på et reelt tal, dvs. vores allerede kendte numeriske værdi af reelle tal er egentlig blot et særtilfælde af det mere generelle udtryk inden for de komplekse tal. Når vi i næste afsnit indfører den komplekse talplan, kan vi da også indføre en definition på numerisk værdi (modulus), der kan bruges både inden for de komplekse tal og de reelle tal. I Maple kan man da også bruge vores velkendte symbol $|\ |$ samt kommandoen *abs* til at bestemme modulus. Hvis man bruger kommandoen *norm*, skal man være opmærksom på, at det ligesom for vektorer er 2-normen, vi skal bruge.

Den komplekst konjugerede kender vi ikke fra de reelle tal. I Maple kan man anvende kommandoen *conjugate* eller 'OverBarOver', der findes under 'Accents':



Opgaverne 503*

Øvelse 3: Vis, ved at anvende Definition 9 og regnereglerne for komplekse tal, at der for alle komplekse tal $z = a + i \cdot b$ gælder:

$$1)\ z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$$

$$2)\ |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

$$3)\ \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2} \cdot (z + \bar{z})$$

$$4)\ \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i} \cdot (z - \bar{z})$$

Subtraktion er ikke svært inden for de komplekse tal, men som vi så i Sætning 6, er division ikke så simpelt, da det er et stort udtryk, der indgår. I stedet for at skulle huske det store udtryk kan det være en fordel at anvende følgende metode, der giver mening, når man ser på Øvelse 3.1:

Metode til division inden for de komplekse tal:
Division foretages ved at forlænge brøken med den komplekst konjugerede af nævneren.

Eksempel 10: Subtraktion: $(12+3i)-(5+6i) = (12-5)+i\cdot(3-6) = 7-3i$

$$(-3+5i)-(-8-2i) = (-3+8)+i\cdot(5+2) = 5+7i$$

Division:

$$\frac{3-5i}{2+4i} = \frac{(3-5i)\cdot(2-4i)}{(2+4i)\cdot(2-4i)} = \frac{6-20+i\cdot(-12-10)}{4+16} = \frac{-7}{10} - \frac{11}{10}\cdot i$$

$$\frac{7+5i}{-9-2i} = \frac{(7+5i)\cdot(-9+2i)}{(-9-2i)\cdot(-9+2i)} = \frac{-63-10+i\cdot(14-45)}{81+4} = \frac{-73}{85} - \frac{31}{85}\cdot i$$

I Maple indtastes udtrykkene fra Eksempel 10 med samme notation:

$$(12+3\,I)-(5+6\,I)=7-3\,\mathrm{I}$$
$$(-3+5\,I)-(-8-2\,I)=5+7\,\mathrm{I}$$
$$\frac{3-5\,I}{2+4\,I}=-\frac{7}{10}-\frac{11\,\mathrm{I}}{10}$$
$$\frac{7+5\,I}{-9-2\,I}=-\frac{73}{85}-\frac{31\,\mathrm{I}}{85}$$

Opgaverne 504*

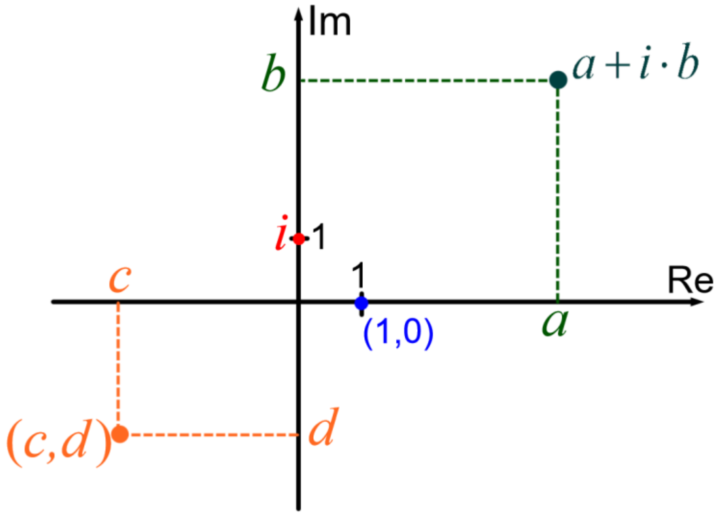
På nuværende tidspunkt skal du have bemærket, at når man arbejder med komplekse tal på den rektangulære form, er addition og subtraktion simpelt at udføre, mens multiplikation og specielt division er kompliceret.

Vi skal snart have indført en såkaldt *polær repræsentation*, hvor det er lige omvendt. Og det er vigtigt. For klart de fleste formler inden for fysik og andre naturvidenskaber er baseret på multiplikation og division, og desuden er potenser og rødder – og vi skal snart se på rødder – baseret på multiplikation.

Vi skal nu have indført den komplekse talplan, der gør det muligt for os at illustrere komplekse tal grafisk.

Den komplekse talplan

Vi ser på det komplekse tal $z=a+i\cdot b$. Realdelen er a, og imaginærdelen er b, og *den komplekse talplan* er så et helt almindeligt kartesisk koordinatsystem, hvor man afsætter z som punktet (a,b), dvs. realdelen ud ad førsteaksen og imaginærdelen ud ad andenaksen.

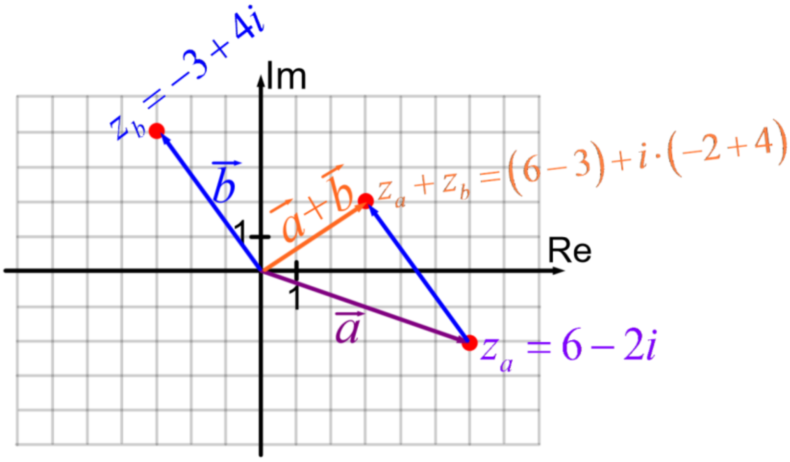


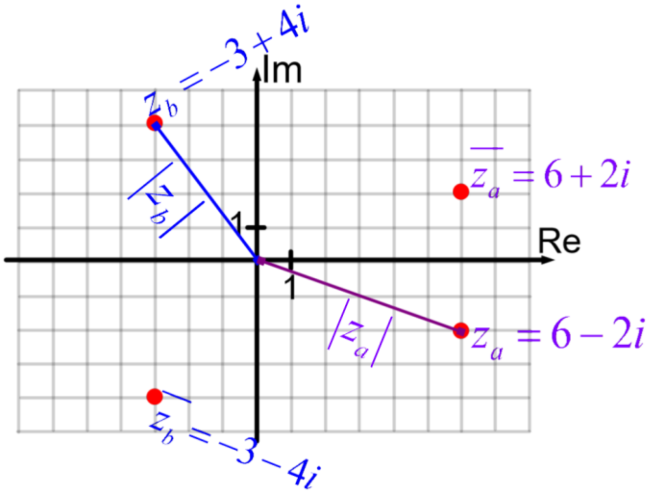
Opgaverne 505*

Der er flere ting at bemærke i forbindelse med den komplekse talplan (figurer på næste side):

- Da addition og subtraktion foregår ved at addere og subtrahere realdelene for sig og imaginærdelene for sig, kan operationerne foretages grafisk ved hjælp af stedvektorerne til punkterne (vektoraddition og -subtraktion foregår jo koordinatvis).
- Et komplekst tal og dets komplekst konjugerede er placeret symmetrisk omkring førsteaksen.
- Vi kan nu komme med en alternativ definition på numerisk værdi, der gælder for både reelle tal og komplekse tal:

Definition (alternativ til en del af Definition 9): *Den numeriske værdi* (*modulus, størrelse* eller *norm*) af et komplekst tal er afstanden fra tallet til origo i den komplekse talplan.





Polær repræsentation

Når vi nu indfører *den polære repræsentation* af komplekse tal, vil det som nævnt vise sig at blive nemmere at udføre multiplikationer og divisioner.

Den polære repræsentation gør brug af to begreber: Modulus, som vi allerede kender, samt *argument* (eller *fase*), som vi nu skal have indført. For at gøre opskrivningen nemmere anvendes r for modulus (det er et passende bogstav, da modulus jo er en afstand i den komplekse talplan), mens φ (det græske bogstav phi) anvendes om et argument, da det – som vi skal se – er en vinkel.

Definition 10: For et komplekst tal $z \neq 0$ kaldes vinklen φ (målt i radianer) for et *argument af z,* hvis

$$z = r\cdot\left(\cos(\varphi)+i\cdot\sin(\varphi)\right),\ \text{hvor}\ \ r = |z|,$$

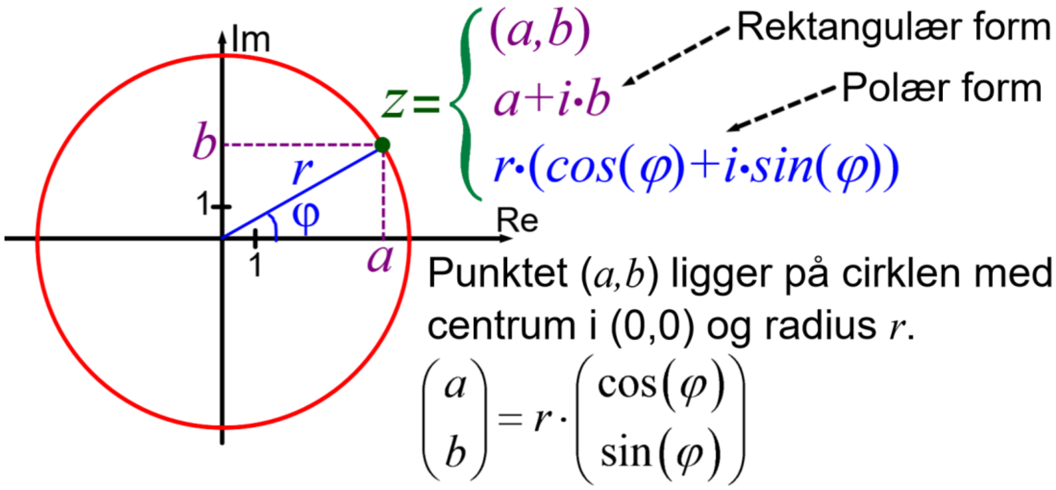
og udtrykket på højresiden kaldes *den polære repræsentation* af z.

Hovedargumentet af z er det argument, der ligger i intervallet $\left]-\pi,\pi\right]$

At φ er et argument af z skrives $\varphi = \arg(z)$, mens hovedargumentet af z skrives $\operatorname{Arg}(z)$.

Der er ingen argumenter af tallet 0.

Definition 10 bygger på vores viden om enhedscirklen, vektorer og parameterfremstillingen for en cirkel. Hvis $z = (a,b)$, så er hovedargumentet af z altså vinklen regnet med fortegn i intervallet $\left]-\pi,\pi\right]$ mellem stedvektoren til punktet (a,b) og en vektor ensrettet med førsteaksen (se figuren på næste side):



Af Definition 10 (og figuren ovenfor) følger altså:

$$\boxed{\begin{aligned} a &= r \cdot \cos(\varphi) \\ b &= r \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}}$$

Det er ret simpelt at komme fra polær repræsentation til rektangulær repræsentation, da man blot udregner $r \cdot \cos(\varphi)$ og $r \cdot \sin(\varphi)$ for at få *a* og *b*:

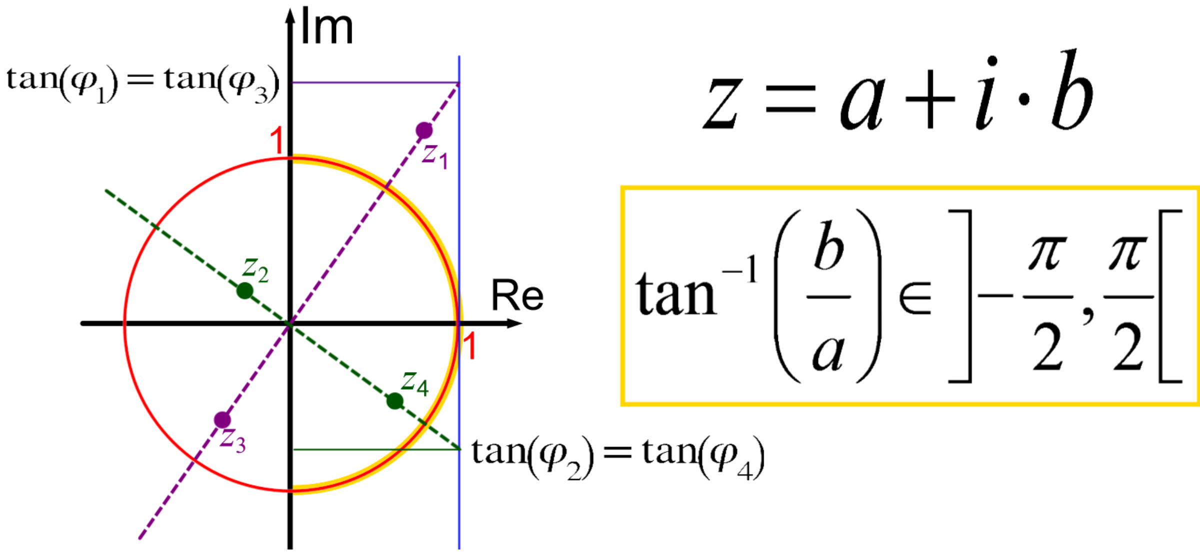
Eksempel 11: Vi ser på det komplekse tal $z = 6 \cdot (\cos(0,53) + i \cdot \sin(0,53))$, der tydeligvis er på polær form. Vi vil gerne skrive det på rektangulær form og udregner $a = 6 \cdot \cos(0,53) = 5,18$ og $b = 6 \cdot \sin(0,53) = 3,03$, hvilket giver os $z = 5,18 + 3,03 \cdot i$.

Om et andet komplekst tal z_1 oplyses det, at modulus er 3, og et argument er -1,32. Vi ønsker at skrive det på rektangulær form og udregner:
$z_1 = 3 \cdot (\cos(-1,32) + i \cdot \sin(-1,32)) = 3 \cdot \cos(-1,32) + 3 \cdot \sin(-1,32) \cdot i = 0,74 - 2,91 \cdot i$

Det er ikke helt så simpelt at komme fra rektangulær til polær form, fordi man skal tage hensyn til, hvilken kvadrant det komplekse tal ligger i. For vi ved, at $\frac{b}{a} = \frac{r \cdot \sin(\varphi)}{r \cdot \cos(\varphi)} = \tan(\varphi)$, men vi kan **IKKE** ud fra dette slutte, at $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$, fordi *tan* ikke er en injektiv funktion. For at indføre *arctan* (dvs. $\tan^{-1}$) var vi nødt til at indskrænke definitionsmængden for *tan* til $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, og da funktioner og deres omvendte funktioner bytter Dm og Vm, er værdimængden for *arctan* derfor $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Dvs. $\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ giver kun værdier i intervallet $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, men hvis vores komplekse tal ligger i 2. eller 3. kvadrant, ligger ingen argumenter af tallet i dette interval.

Det er denne problemstilling, vi skal have løst. Vi har allerede beskæftiget os med en lignende situation i ”Infinitesimalregning del 3 Sætning 32”, så måske virker følgende figur lidt bekendt:

Som vi allerede ved, og som vi kan få genopfrisket ved at se på nedenstående figur, er *tan* en periodisk funktion med perioden π, hvilket vi gør brug i argumentationen.



- Hvis det komplekse tal $z = a + i \cdot b$ ligger i 1. eller 4. kvadrant eller på den positive del af førsteaksen (hvilket kan samles under betingelsen $a > 0$), vil $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ give os hovedargumentet af *z*.
- Hvis *z* ligger i 2. kvadrant (z_2 på figuren) eller på den negative del af førsteaksen (dvs. $a < 0 \wedge b \geq 0$), vil $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ give os en vinkel i intervallet $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ (på figuren vil det give hovedargumentet af z_4), og vi skal altså lægge π til resultatet for at få hovedargumentet for *z*.
- Hvis *z* ligger i 3. kvadrant (z_3 på figuren), dvs. $a < 0 \wedge b < 0$, vil $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ give os en vinkel i intervallet $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (på figuren vil det give hovedargumentet af z_1), og vi skal altså trække π fra resultatet for at få hovedargumentet for *z*.
- Hvis *z* er et imaginært tal, dvs. ligger på andenaksen ($a = 0$), kan vi ikke bruge *arctan*, men her er der heller ikke brug for nogen udregning, da vi kan konkludere, at hvis $b > 0$, så er $Arg(z) = \frac{\pi}{2}$, og hvis $b < 0$, så er $Arg(z) = -\frac{\pi}{2}$.

Vi har hermed analyseret os frem til følgende:

Fremgangsmåde til bestemmelse af modulus og hovedargument ud fra rektangulær form:

For det komplekse tal $z = a + i \cdot b$, der ikke er 0, gælder: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$a > 0$	$a < 0 \wedge b \geq 0$	$a < 0 \wedge b < 0$	$a = 0 \wedge b > 0$	$a = 0 \wedge b < 0$
$Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$	$Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$	$Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) - \pi$	$Arg(z) = \frac{\pi}{2}$	$Arg(z) = -\frac{\pi}{2}$

Eksempel 12: Vi vil bestemme modulus og hovedargument for følgende komplekse tal og efterfølgende opskrive dem på polær form:

$z_1 = 5 - 7i: \quad r = |z_1| = \sqrt{5^2 + (-7)^2} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74}$

Da $a > 0$: $Arg(z_1) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-7}{5}\right) = -0{,}95$

$z_1 = \sqrt{74} \cdot (\cos(-0{,}95) + i \cdot \sin(-0{,}95))$

$z_2 = -4 - i: \quad r = |z_2| = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$

Da $a < 0 \wedge b < 0$: $Arg(z_2) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) - \pi = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{-4}\right) - \pi = -2{,}90$

$z_2 = \sqrt{17} \cdot (\cos(-2{,}90) + i \cdot \sin(-2{,}90))$

$z_3 = 9i: \quad r = |z_3| = \sqrt{0^2 + 9^2} = \sqrt{81} = 9$

Da $a = 0 \wedge b > 0$ er $Arg(z_3) = \frac{\pi}{2}$

$z_3 = 9 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

Husk, at Maple ikke anvender $\tan^{-1}$, men *arctan*:

$$\arctan\left(-\frac{7}{5.}\right) = -0.9505468408$$

Maple har dog også kommandoen *argument*, der giver hovedargumentet af et komplekst tal (nogle gange defineres hovedargumentet til at ligge i intervallet $[0, 2\pi[$, men Maple anvender vores definition, der vist også er den mest almindelige):

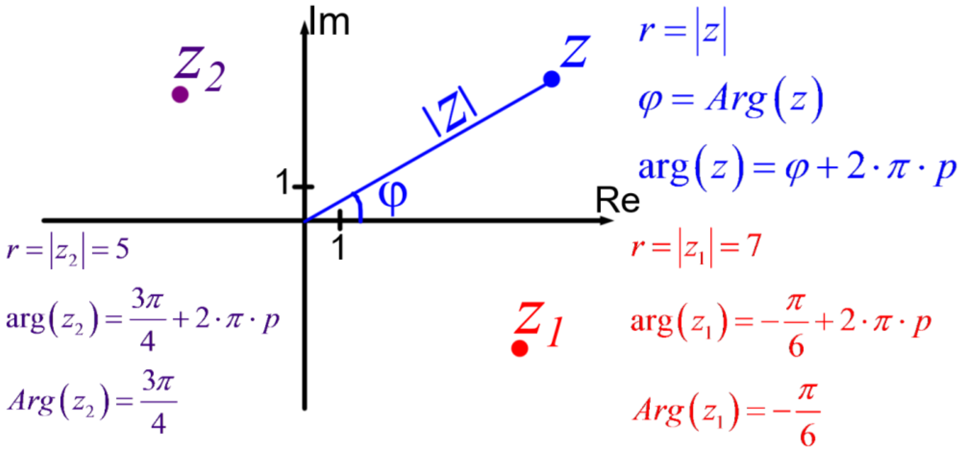
$|5 - 7\,I| = \sqrt{74}$ $\qquad$ $\text{argument}(5. - 7\,I) = -0.9505468408$

$\text{abs}(-4 - I) = \sqrt{17}$ $\qquad$ $\text{argument}(-4. - I) = -2.896613990$

$|9\,I| = 9$ $\qquad$ $\text{argument}(9\,I) = \frac{\pi}{2}$

Opgaverne 506*

Da *sin* og *cos* begge er periodiske funktioner med perioden 2π, er der uendelig mange argumenter af et komplekst tal, nemlig alle de vinkler, der er hovedargumentet plus et multiplum af 2π:



Multiplikation og division med polær form

Vi skal ikke se på addition og subtraktion af komplekse tal angivet på polær form. Her vil man typisk omskrive til rektangulær form og udføre regneoperationen der.

Så vi springer direkte til multiplikation. Her får vi brug for additionsformlerne, som vi beviste i slutningen af Vektorgeometri del 1:

ADDITIONSFORMLERNE

$$\cos(v+w)=\cos(v)\cdot\cos(w)-\sin(v)\cdot\sin(w)$$
$$\cos(v-w)=\cos(v)\cdot\cos(w)+\sin(v)\cdot\sin(w)$$
$$\sin(v+w)=\sin(v)\cdot\cos(w)+\cos(v)\cdot\sin(w)$$
$$\sin(v-w)=\sin(v)\cdot\cos(w)-\cos(v)\cdot\sin(w)$$

Vi ser på de to komplekse tal $z_1=r_1\cdot\left(\cos(\varphi_1)+i\cdot\sin(\varphi_1)\right)$ og $z_2=r_2\cdot\left(\cos(\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_2)\right)$. Vi ønsker at multiplicere dem og kaster os hovedkulds ud i det. Bemærk, hvordan vi i sidste skridt anvender første og tredje additionsformel:

$$
\begin{aligned}
z_1\cdot z_2 &= r_1\cdot\left(\cos(\varphi_1)+i\cdot\sin(\varphi_1)\right)\cdot r_2\cdot\left(\cos(\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_2)\right)=\\
&r_1\cdot r_2\cdot\left(\cos(\varphi_1)\cdot\cos(\varphi_2)+\cos(\varphi_1)\cdot i\cdot\sin(\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_1)\cdot\cos(\varphi_2)+i^2\cdot\sin(\varphi_1)\cdot\sin(\varphi_2)\right)=\\
&r_1\cdot r_2\cdot\left(\cos(\varphi_1)\cdot\cos(\varphi_2)-\sin(\varphi_1)\cdot\sin(\varphi_2)+i\cdot\left(\cos(\varphi_1)\cdot\sin(\varphi_2)+\sin(\varphi_1)\cdot\cos(\varphi_2)\right)\right)=\\
&r_1\cdot r_2\cdot\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)
\end{aligned}
$$

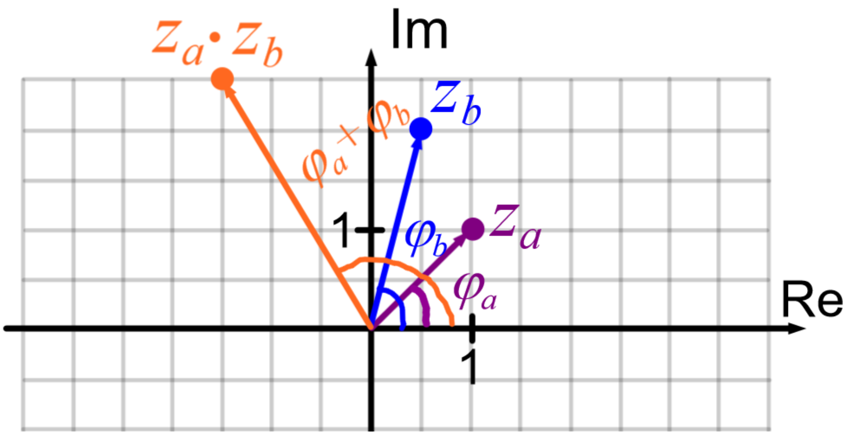
Vi har altså vist følgende sætning:

Sætning 7: For $z_1=r_1\cdot\left(\cos(\varphi_1)+i\cdot\sin(\varphi_1)\right)$ og $z_2=r_2\cdot\left(\cos(\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_2)\right)$ gælder:

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\cdot\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$$

Eller i ord: Man multiplicerer to komplekse tal ved at multiplicere deres moduli og addere deres argumenter.

Grafisk kan det illustreres med nedenstående figur.



Det behøver ikke at være hovedargumenterne, der anvendes. Man kan anvende et hvilket som helst argument. Det er bare oftest hovedargumenterne, der er angivet i de to komplekse tal. Summen af to hovedargumenter kan godt ligge uden for $]-\pi,\pi]$, men man kan så blot addere eller subtrahere 2π, hvis man ønsker hovedargumentet for produktet af de to tal.

Eksempel 13: Komplekse tal på polær form multipliceres:

$$\left(3\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)\cdot\left(7\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)=3\cdot 7\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right)=$$

$$21\cdot\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$\left(6\cdot\left(\cos(-0,31)+i\cdot\sin(-0,31)\right)\right)\cdot\left(4\cdot\left(\cos(2,64)+i\cdot\sin(2,64)\right)\right)=24\cdot\left(\cos(2,33)+i\cdot\sin(2,33)\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)\right)\cdot\left(12\cdot\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)\right)=6\cdot\left(\cos(3\pi)+i\cdot\sin(3\pi)\right)=$$

$$6\cdot\left(\cos(\pi)+i\cdot\sin(\pi)\right)$$

Ovenfor blev der trukket 2π fra det udregnede argument for at få hovedargumentet.

$$\left(9\cdot\left(\cos(-1,67)+i\cdot\sin(-1,67)\right)\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\left(\cos(-2,81)+i\cdot\sin(-2,81)\right)\right)=6\cdot\left(\cos(-4,48)+i\cdot\sin(-4,48)\right)=$$

$$6\cdot\left(\cos(1,80)+i\cdot\sin(1,80)\right)$$

Ovenfor blev der lagt 2π til det udregnede argument for at få hovedargumentet.

Opgaverne 507*

Selvom det kun er få sider siden, vi indførte den polære repræsentationsform, er du muligvis allerede træt af hele tiden at skulle skrive $\cos(\varphi)+i\cdot\sin(\varphi)$, og da vi snart skal arbejde videre med den polære form i forbindelse med division, roduddragning og ligningsløsning, kunne det være rart med en kortere skrivemåde. Her er skrivemåden $cis(\varphi)$ en mulighed, der anvendes nogle steder. Vi skal dog nu se, at der faktisk findes en anden overraskende og smuk mulighed.

Eulers formel og identitet

Når vi arbejder med reelle tal, kan vi have eksponentialfunktioner med et hvilket som helst positivt grundtal, men den med grundtallet **e** er noget ganske særligt og har fået sit helt eget navn, *den naturlige eksponentialfunktion* eller *exp*. Inden for de komplekse tal bliver den naturlige eksponentialfunktion helt central, for vi kan ikke uden den give mening til andre eksponentialfunktioner (og sådan var det jo trods alt ikke inden for de reelle tal, hvor vi sagtens kunne forstå f.eks. 5^x uden at skulle inddrage *exp*). Inden for de komplekse tal taler vi derfor om ***den** komplekse eksponentialfunktion*, der skrives e^z. Som det fremgår, er det en udvidelse af vores naturlige eksponentialfunktion fra de reelle tal. Ideen er, at man udnytter taylorrækken kendt fra de reelle tal. I Infinitesimalregning del 2 (og tilhørende opgaver) viste vi følgende, som vi skal gøre brug af i dette afsnit:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots$$

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}+\ldots$$

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}+\ldots$$

Vi indfører nu den komplekse eksponentialfunktion med følgende definition:

Definition 11: *Den komplekse eksponentialfunktion* betegnes e^z og er givet ved:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!}$$

Der er flere ting at bemærke ved denne definition:

- Da vi udnytter taylorrækken for den naturlige eksponentialfunktion fra de reelle tal, ved vi, at den komplekse eksponentialfunktion giver samme resultat som den naturlige eksponentialfunktion, når den virker på reelle tal. Vores komplekse eksponentialfunktion er altså en udvidelse af den naturlige eksponentialfunktion.
- Egentlig burde det vises, at rækken er konvergent, så der er en rækkesum på højresiden. Det KAN vises, men det er ikke noget, vi kommer ind på i gymnasiet.
- Vi kan udregne hvert led på højresiden, da tællerne er potenser med heltallige eksponenter (Definition 4), mens nævnerne er reelle tal. Og det er det smarte ved definitionen. Vi kunne ikke inden definitionen udregne venstresiden inden for de komplekse tal, men det kan vi nu, da højresiden er et udtryk, der kan udregnes inden for de komplekse tal (Sætning 2).
- Da Sætning 2 gælder for både reelle og komplekse tal, kan vi overføre potensregnereglerne $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ og $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$ fra de reelle tal, for opskrevet med deres taylorrækker ser den første af de to potensregneregler ud som:

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) \cdot \left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots\right) = \left(1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \ldots\right)$$

Da brøk- og parentesregnereglerne er ens for reelle tal og komplekse tal, må der altså også for to komplekse tal z_1 og z_2 gælde:

$$\left(1 + z_1 + \frac{z_1^{\ 2}}{2!} + \frac{z_1^{\ 3}}{3!} + \ldots\right) \cdot \left(1 + z_2 + \frac{z_2^{\ 2}}{2!} + \frac{z_2^{\ 3}}{3!} + \ldots\right) = \left(1 + (z_1 + z_2) + \frac{(z_1+z_2)^2}{2!} + \frac{(z_1+z_2)^3}{3!} + \ldots\right).$$

Man kan gøre tilsvarende med den anden af de to potensregneregler. Dvs. man har:

Sætning 8: For de to komplekse tal z_1 og z_2 gælder:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \qquad\qquad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$$

Eksempel 14: Sætning 8 anvendes til at reducere følgende udtryk:

$$e^{2+3i} \cdot e^{5+9i} = e^{(2+3i)+(5+9i)} = e^{7+12i}$$

$$e^{-5+7i} \cdot e^{3-6i} = e^{(-5+7i)+(3-6i)} = e^{-2+i}$$

$$\frac{e^{8-5i}}{e^{3+2i}} = e^{(8-5i)-(3+2i)} = e^{5-7i}$$

$$\frac{e^{-6+3i}}{e^{-9-14i}} = e^{(-6+3i)-(-9-14i)} = e^{3+17i}$$

Lad os se på, hvad Definition 11 fortæller os, hvis vores komplekse tal er et (rent) imaginært tal, dvs. $z = i \cdot b$. Bemærk, at b er et reelt tal, så vi kan udnytte taylorrækkerne for sinus og cosinus inden for de reelle tal. Desuden anvendes $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, $i^7 = -i$, $i^8 = 1, \ldots$, der følger af vores viden om, at $i^2 = -1$:

$$
\begin{aligned}
e^z = e^{i \cdot b} &= 1 + i \cdot b + \frac{(i \cdot b)^2}{2!} + \frac{(i \cdot b)^3}{3!} + \frac{(i \cdot b)^4}{4!} + \frac{(i \cdot b)^5}{5!} + \frac{(i \cdot b)^6}{6!} + \frac{(i \cdot b)^7}{7!} + \ldots = \\
& 1 + i \cdot b + \frac{i^2 \cdot b^2}{2!} + \frac{i^3 \cdot b^3}{3!} + \frac{i^4 \cdot b^4}{4!} + \frac{i^5 \cdot b^5}{5!} + \frac{i^6 \cdot b^6}{6!} + \frac{i^7 \cdot b^7}{7!} + \ldots = \\
& 1 + i \cdot b - \frac{b^2}{2!} - \frac{i \cdot b^3}{3!} + \frac{b^4}{4!} + \frac{i \cdot b^5}{5!} - \frac{b^6}{6!} - \frac{i \cdot b^7}{7!} + \frac{b^8}{8!} + \frac{i \cdot b^9}{9!} \ldots = \\
& \left(1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - \frac{b^6}{6!} + \frac{b^8}{8!} + \ldots\right) + i \cdot \left(b - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} - \frac{b^7}{7!} + \frac{b^9}{9!} \ldots\right) = \cos(b) + i \cdot \sin(b)
\end{aligned}
$$

Denne overraskende sammenhæng mellem den naturlige eksponentialfunktion og de trigonometriske funktioner dukker altså op, når man arbejder med komplekse tal, og hermed har vi fundet en simplere måde at skrive vores $\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ på.

Dvs. vi kan nu omforme ordlyden af vores Definition 10, så vi kan skrive et komplekst tal med modulus r og et argument φ som $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$, og denne form skal du lægge mærke til, for det er oftest den nemmeste form at anvende, når man arbejder med komplekse tal.

Vi samler ovenstående udregninger i en sætning:

Sætning 9: For det imaginære tal $i \cdot b$ gælder:

$$e^{i \cdot b} = \cos(b) + i \cdot \sin(b) \qquad \textbf{EULERS FORMEL}$$

Det komplekse tal $z \neq 0$ med modulus r og et argument φ kan skrives som:

$$z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$$

Et berømt specialtilfælde af Eulers formel er *Eulers identitet*. Den fremkommer, når man indsætter $b = \pi$ i Eulers formel:

$$e^{i \cdot \pi} = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi) \iff e^{i \cdot \pi} = -1 + i \cdot 0 \iff e^{i \cdot \pi} + 1 = 0$$

Det kan virke lidt underligt at flytte -1 over på venstresiden i sidste skridt, da man normalt ville foretrække at have ét led på hver side af lighedstegnet, og man kan da også nogle gange se sammenhængen angivet som $e^{i \cdot \pi} = -1$, men den er mest berømt på den anden form:

Sætning 10: Eulers identitet.

$$e^{i \cdot \pi} + 1 = 0$$

I 1988 blev denne formel ved en afstemning blandt matematikere kåret som den smukkeste matematiske sætning (sætninger af Euler endte også på 2. og 5. pladsen). Og det er virkelig en ganske særlig sætning. Den imaginære enhed forbinder matematikkens fire vigtigste tal 0, 1, π og e i denne identitet. Man kan sige, at *i* (eller nok mere rimeligt *de komplekse tal*) afslører en hidtil skjult sammenhæng mellem vidt forskellige områder inden for matematikken.

Sætningerne 8 og 9 (Eulers formel) giver os et udtryk for den komplekse eksponentialfunktion, da vi for et vilkårligt komplekst tal $z = a + i \cdot b$ har:

$$e^z = e^{a+i\cdot b} \overset{\text{Sætning 8}}{=} e^a \cdot e^{i\cdot b} \overset{\text{Sætning 9}}{=} e^a \cdot \left(\cos(b) + i \cdot \sin(b)\right)$$

Sætning 11: Den komplekse eksponentialfunktion giver for $z = a + i \cdot b$:

$$e^z = e^a \cdot \left(\cos(b) + i \cdot \sin(b)\right)$$

Og hermed er vi jo fremme ved et udtryk, der kan beregnes, da *a* og *b* begge er reelle, og da vi derfor kan anvende den naturlige eksponentialfunktion og de trigonometriske funktioner, vi kender fra de reelle tal.

Eksempel 15: Sætning 11 anvendes til at beregne forskellige værdier for den komplekse eksponentialfunktion:

$$e^{1+i\cdot\pi} = e^1 \cdot \left(\cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi)\right) = e \cdot (-1 + i \cdot 0) = -e$$

Her er værdien altså et reelt tal, selvom eksponenten er et komplekst tal.

$$e^{2+i\cdot\frac{\pi}{2}} = e^2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = e^2 \cdot (0 + i \cdot 1) = i \cdot e^2$$

Her er værdien et (rent) imaginært tal.

$$e^{-1+i\cdot\frac{\pi}{4}} = e^{-1} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = e^{-1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot e} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \cdot e}$$

Værdien er et komplekst tal.

Maple kan også udregne værdierne. Ved at højreklikke og vælge *Complex Maps* og *a+bI Form*, får man:

$$e^{1+I\cdot\pi} \xrightarrow{\text{a + bI form}} -e$$

$$e^{2+I\cdot\frac{\pi}{2}} \xrightarrow{\text{a + bI form}} I\,e^2$$

$$e^{-1+\frac{I\cdot\pi}{4}} \xrightarrow{\text{a + bI form}} \frac{e^{-1}\sqrt{2}}{2} + \frac{I\,e^{-1}\sqrt{2}}{2}$$

Opgaverne 508*

Med skrivemåden fra Sætning 9 kan Sætning 7 omformuleres til:

Sætning 7 med ny skrivemåde: For de komplekse tal $z_1 = r_1 \cdot e^{i\cdot\varphi_1}$ og $z_2 = r_2 \cdot e^{i\cdot\varphi_2}$ gælder:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i\cdot(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Eksempel 16: Om det komplekse tal z_1 oplyses det, at $|z_1| = 7$ og $Arg(z_1) = \frac{\pi}{3}$, så vi kan skrive det som $z_1 = 7 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}$.

Det kan aflæses, at det komplekse tal $z_2 = 5 \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{2}}$ har modulus 5 og hovedargumentet $-\frac{\pi}{2}$.

Når z_1 og z_2 multipliceres, får man:

$$z_1 \cdot z_2 = 7 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}} \cdot 5 \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{2}} = 7 \cdot 5 \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)} = 35 \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{6}}$$

En multiplikation af to andre komplekse tal:

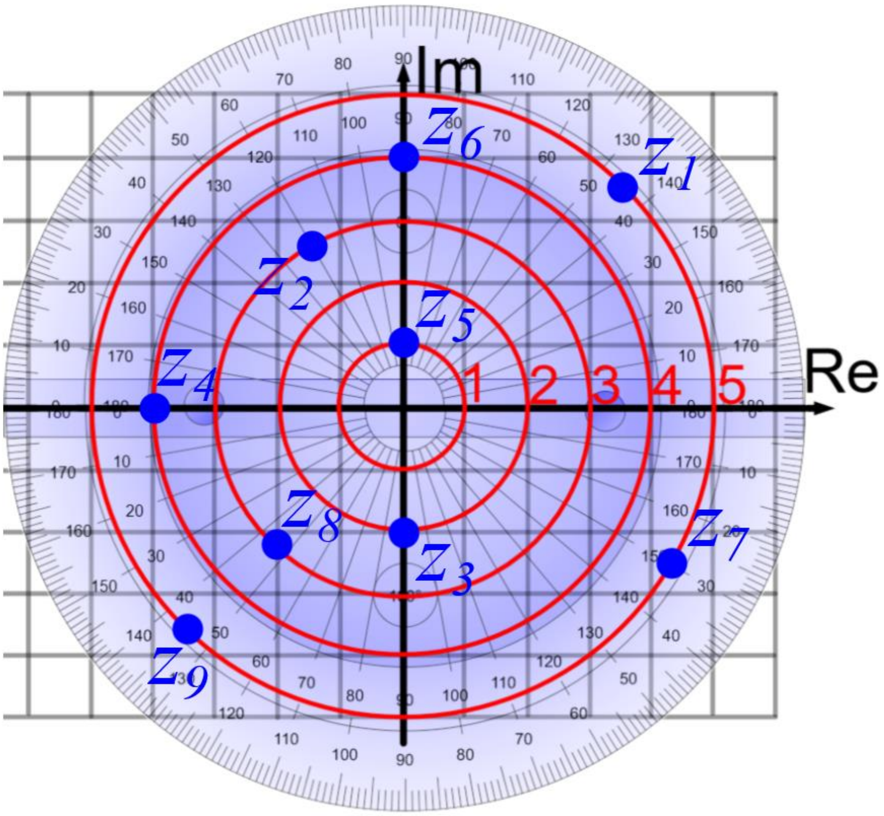
$$9 \cdot e^{0,7 \cdot i} \cdot 11 \cdot e^{1,5 \cdot i} = 9 \cdot 11 \cdot e^{(0,7+1,5) \cdot i} = 99 \cdot e^{2,2 \cdot i}$$

Maple kan (selvfølgelig) også regne med den komplekse eksponentialfunktion, men facit angives stadig på rektangulær form, med mindre du højreklikker og vælger *Complex Maps* (*Polar form*):

$$9 \cdot e^{I \cdot 0.7} \cdot 11 \cdot e^{I \cdot 1.5} = -58.26161061 + 80.04114399\, I$$

$$9 \cdot e^{I \cdot 0.7} \cdot 11 \cdot e^{I \cdot 1.5} = \xrightarrow{\text{polar form}} \mathrm{polar}(99.00000000, 2.200000000)$$

Eksempel 17: Da man kan aflæse modulus og et argument ud fra formen $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$, er det meget nemt at afsætte komplekse tal i den komplekse talplan (hvis man har en vinkelmåler og lineal). Tjek, at du forstår afsætningen af nedenstående komplekse tal.



$z_1 = 5 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$

$z_2 = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}}$

$z_3 = 2 \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{2}}$

$z_4 = 4 \cdot e^{i \cdot \pi}$

$z_5 = e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$

$z_6 = 4 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$

$z_7 = 5 \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{6}}$

$z_8 = 3 \cdot e^{-i \cdot \frac{3\pi}{4}}$

$z_9 = 5 \cdot e^{-i \cdot \frac{3\pi}{4}}$

Opgaverne 510*

Det er altså nu for alvor blevet nemt at multiplicere komplekse tal (når blot de er på formen $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$), og vi er klar til at tage fat på division, potenser og rødder.

Division med polær repræsentation

Vi tager udgangspunkt i vores sædvanlige definition på kvotienten $\frac{z_1}{z_2}$ (hvor $z_2 \neq 0$), nemlig $\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 = z_1$. Vi skriver de to komplekse tal og deres kvotient på formen $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$:

$$z_1 = r_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1} \quad , \quad z_2 = r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2} \quad \text{og} \quad \frac{z_1}{z_2} = r_3 \cdot e^{i \cdot \varphi_3}$$

Hermed omskrives $\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 = z_1$ til: $\quad r_3 \cdot e^{i \cdot \varphi_3} \cdot r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2} = r_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1} \quad \Leftrightarrow \quad r_3 \cdot r_2 \cdot e^{i \cdot (\varphi_3 + \varphi_2)} = r_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1}$

Da de to moduli skal være ens, hvis de komplekse tal skal være identiske, har man altså:

$$r_3 \cdot r_2 = r_1 \quad \Leftrightarrow \quad r_3 = \frac{r_1}{r_2}$$

Argumenterne skal kun være ens bortset fra en evt. afvigelse med et multiplum af 2π, dvs.:

$$\varphi_3 + \varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi p \quad \Leftrightarrow \varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2 + 2\pi p$$

Vi har altså vist følgende sætning (som også blev bevist i opgave 5074 og følger af Sætning 8):

Sætning 12: Division af det komplekse tal $z_1 = r_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1}$ med $z_2 = r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2}$ ($r_2 \neq 0$) foregår ved:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Eller i ord: Man dividerer to komplekse tal med hinanden ved at dividere moduli og trække argumenterne fra hinanden.

Igen skal man være opmærksom på, at man kan anvende et hvilket som helst argument for hvert komplekse tal, og selv hvis man anvender hovedargumenterne, kan man risikere, at man for kvotientens argument ender uden for intervallet $]-\pi, \pi]$, men man kan i så fald blot addere et passende multiplum af 2π, hvis man ønsker at angive hovedargumentet ($\arg(z) = Arg(z) + 2\pi p$).

Bemærk, at Sætning 12 fortæller os, at division følger den 2. potensregneregel, hvilket gør udregningerne nemmere, da du kan regne, som du er vant til.

Eksempel 18: Vi ser på tallene $z_1 = 12 \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}}$, $z_2 = 4 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$, $z_3 = 2 \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{2}}$, $z_4 = 15 \cdot e^{0{,}92 i}$ og $z_5 = 5 \cdot e^{-1{,}23 i}$

Nogle kvotienter udregnes:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{12}{4} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)} = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{5\pi}{12}}$$

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{12}{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{2\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)} = 6 \cdot e^{i \cdot \frac{7\pi}{6}} = 6 \cdot e^{-i \cdot \frac{5\pi}{6}} \quad (2\pi \text{ er trukket fra argumentet})$$

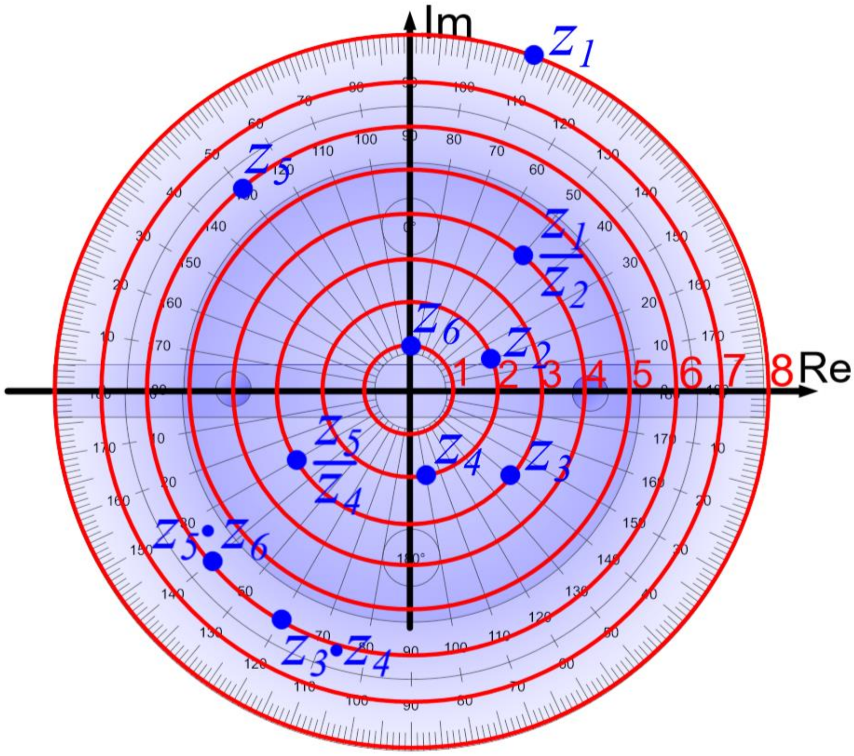
$$\frac{z_4}{z_5} = \frac{15}{5} \cdot e^{(0{,}92 - (-1{,}23)) \cdot i} = 3 \cdot e^{2{,}15 \cdot i}$$

$$\frac{z_3}{z_1} = \frac{2}{12} \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{1}{6} \cdot e^{-i \cdot \frac{7\pi}{6}} = \frac{1}{6} \cdot e^{i \cdot \frac{5\pi}{6}} \quad (2\pi \text{ er lagt til argumentet})$$

Husk, det er ikke noget krav, at man anvender hovedargumentet. Den sidste kvotient i Eksempel 18 kunne også godt være angivet $\frac{1}{6}\cdot \mathrm{e}^{-i\cdot\frac{7\pi}{6}}$ eller $\frac{1}{6}\cdot \mathrm{e}^{-i\cdot\frac{19\pi}{6}}$ eller $\frac{1}{6}\cdot \mathrm{e}^{i\cdot\frac{41\pi}{6}}$ eller ...

Det er samme komplekse tal, der angives, uanset hvilket argument af tallet, der anvendes.

Eksempel 19: Tjek, at du kan se, hvordan produkterne $z_3 \cdot z_4$ og $z_5 \cdot z_6$ samt kvotienterne $\frac{z_1}{z_2}$ og $\frac{z_5}{z_4}$ er fremkommet.



Opgaverne 515*

Potenser

Vi kan benytte sætningerne 7 og 12 (multiplikation og division) til at bestemme $z^n \ (n \in \mathbb{Z})$, når $z = r \cdot \mathrm{e}^{i\cdot\varphi}$. Sætningen lyder:

Sætning 13: For det komplekse tal $z = r \cdot \mathrm{e}^{i\cdot\varphi}$ gælder følgende, når $n \in \mathbb{Z}$:

$$z^n = r^n \cdot \mathrm{e}^{i\cdot n\cdot\varphi}$$

Igen skal det bemærkes, at man kan anvende et hvilket som helst argument for z, og $n\cdot\varphi$ er også blot et eller andet argument for z^n, hvor man igen kan få hovedargumentet ved at addere et passende multiplum af 2π.

Et særtilfælde af Sætning 13 blev opdaget af Abraham de Moivre (1667-1754) og kendes som

De Moivres formel:

$$\left(\cos(\varphi)+i\cdot\sin(\varphi)\right)^n=\cos(n\cdot\varphi)+i\cdot\sin(n\cdot\varphi)$$

Men Sætning 13 er jo både kortere og mere indholdsrig, så vi skal ikke bruge tid på ovenstående.

Sætning 13 bevises ved et såkaldt *Induktionsbevis* (hvilket kan virke som et lidt pudsigt navn, da beviset – som alle andre matematiske beviser – er aksiomatisk-deduktivt, men det skyldes, at det er baseret på *Induktionsaksiomet*, der sådan set blot slår fast, at induktionsbeviser er gyldige):

Bevis 13 (Induktionsbevis): Vi vil gerne vise, at $z^n=r^n\cdot e^{i\cdot n\cdot\varphi}$ er sandt for alle $n\in\mathbb{Z}$, når $z=r\cdot e^{i\cdot\varphi}$, og med et induktionsbevis sker det ved at vise 2 ting:

1) Først vises, at udsagnet er sandt for et (velvalgt) *n*. Her vælges $n=1$, og vi ser med det samme, at udsagnet er sandt, for med $n=1$ har man $z^1=r^1\cdot e^{i\cdot 1\cdot\varphi}\;\Leftrightarrow\; z=r\cdot e^{i\cdot\varphi}$.

2) Vi skal nu vise, at **hvis** udsagnet er sandt for *n*, **så** er det også sandt for $n+1$. Bemærk, at nu ser vi ikke længere på $n=1$, men på et hvilket som helst *n*. Så vi **antager** nu, at udsagnet er sandt for *n*, dvs. $z^n=r^n\cdot e^{i\cdot n\cdot\varphi}$. Vi kan så udregne:

$$z^{n+1}\overset{\text{Sætning 3.1}}{=}z^n\cdot z^1\overset{\text{Antagelsen}}{=}r^n\cdot e^{i\cdot n\cdot\varphi}\cdot r\cdot e^{i\cdot\varphi}\overset{\text{Sætning 7}}{=}r^n\cdot r\cdot e^{i\cdot(n\cdot\varphi+\varphi)}=r^{n+1}\cdot e^{i\cdot\varphi\cdot(n+1)}$$

Dvs. vi kan se, at udsagnet så også er sandt for $n+1$.

Når vi sammenholder 1) og 2), har vi vist, at udsagnet $z^n=r^n\cdot e^{i\cdot n\cdot\varphi}$ er sandt for alle $n\in\mathbb{N}$, for 1) har fortalt os, at det er sandt for $n=1$, og ifølge 2) må det så også være sandt for $n=2$. Og når det er sandt for $n=2$, må det ifølge 2) også være sandt for $n=3$, og når det er sandt for $n=3$, må det ifølge 2) også være sandt for $n=4$. Og således kan man fortsætte.

Men vi skulle jo vise, at udsagnet er sandt for $n\in\mathbb{Z}$, så i dette tilfælde er vi nødt til at udvide punkt 2):

2) fortsat: Vi vil nu også vise, at **hvis** udsagnet er sandt for *n*, **så** er det også sandt for $n-1$. Så vi **antager**, at udsagnet er sandt for *n*, dvs. $z^n=r^n\cdot e^{i\cdot n\cdot\varphi}$. Vi udregner så:

$$z^{n-1}\overset{\text{Sætning 3.2}}{=}\frac{z^n}{z^1}\overset{\text{Antagelsen}}{=}\frac{r^n\cdot e^{i\cdot n\cdot\varphi}}{r\cdot e^{i\cdot\varphi}}\overset{\text{Sætning 10}}{=}\frac{r^n}{r}\cdot e^{i\cdot(n\cdot\varphi-\varphi)}=r^{n-1}\cdot e^{i\cdot\varphi\cdot(n-1)}$$

Dvs. udsagnet er så også sandt for $n-1$.

Når vi sammenholder 1) med den fortsatte del af 2), kan vi sige, at 1) fortæller os, at udsagnet er sandt for $n=1$, og 2) fortæller os så, at det dermed også er sandt for $n=0$, og når det er sandt for $n=0$, er det ifølge 2) også sandt for $n=-1$, og når det er sandt for $n=-1$, er det ifølge 2) også sandt for $n=-2$, og når det er sandt for $n=-2$, er det ifølge 2) også sandt for $n=-3$, osv.

Det er hermed vist, at $z^n=r^n\cdot e^{i\cdot n\cdot\varphi}$ er sandt for alle $n\in\mathbb{Z}$.

Induktionsbeviser anvender implicit aktuel uendelighed, dvs. de såkaldte *intuitionister*, der blev omtalt i forbindelse med uendelighedsbegrebet, accepterer ikke denne type beviser, men bortset fra hos denne (ubetydelige) sidegren er de bredt accepteret. Man skal blot være opmærksom på, at man ikke overser noget, når man argumenterer i skridt 2). For hvis argumentet ikke holder, når f.eks. $n=3$, bryder det hele sammen (der er konstrueret forskellige ”snydebeviser”, hvor man netop narrer læseren med en argumentation, der egentlig lyder rigtig, men ikke holder for et enkelt *n*).

Sætning 13 fortæller os, hvordan vi opløfter i en given heltallig potens. Bemærk, at vi allerede i Sætning 3 indførte potensregnereglerne, men de gjorde os ikke i stand til helt konkret at beregne en potens. Vi ved nu, at modulus behandles som potensopløftning inden for de reelle tal, mens argumentet skal ganges med eksponenten (hvorefter man evt. kan korrigere med et multiplum af 2π). Vi ser på nogle eksempler:

Eksempel 20: Vi udregner forskellige potenser af $z = 2\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$:

$$z^1 = 2\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$$

$$z^2 = 2^2\cdot e^{i\cdot 2\cdot\frac{\pi}{4}} = 4\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}$$

$$z^3 = 2^3\cdot e^{i\cdot 3\cdot\frac{\pi}{4}} = 8\cdot e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}}$$

$$z^4 = 2^4\cdot e^{i\cdot 4\cdot\frac{\pi}{4}} = 16\cdot e^{i\cdot\pi}$$

$$z^5 = 2^5\cdot e^{i\cdot 5\cdot\frac{\pi}{4}} = 32\cdot e^{i\cdot\frac{5\pi}{4}}$$

$$z^6 = 2^6\cdot e^{i\cdot 6\cdot\frac{\pi}{4}} = 64\cdot e^{i\cdot\frac{3\pi}{2}}$$

$$z^7 = 2^7\cdot e^{i\cdot 7\cdot\frac{\pi}{4}} = 128\cdot e^{i\cdot\frac{7\pi}{4}}$$

$$z^8 = 2^8\cdot e^{i\cdot 8\cdot\frac{\pi}{4}} = 256\cdot e^{i\cdot 2\pi}$$

$$z^0 = 2^0\cdot e^{i\cdot 0\cdot\frac{\pi}{4}} = 1\cdot e^0 = 1$$

$$z^{-1} = 2^{-1}\cdot e^{i\cdot(-1)\cdot\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\cdot e^{-i\cdot\frac{\pi}{4}}$$

$$z^{-2} = 2^{-2}\cdot e^{i\cdot(-2)\cdot\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}\cdot e^{-i\cdot\frac{\pi}{2}}$$

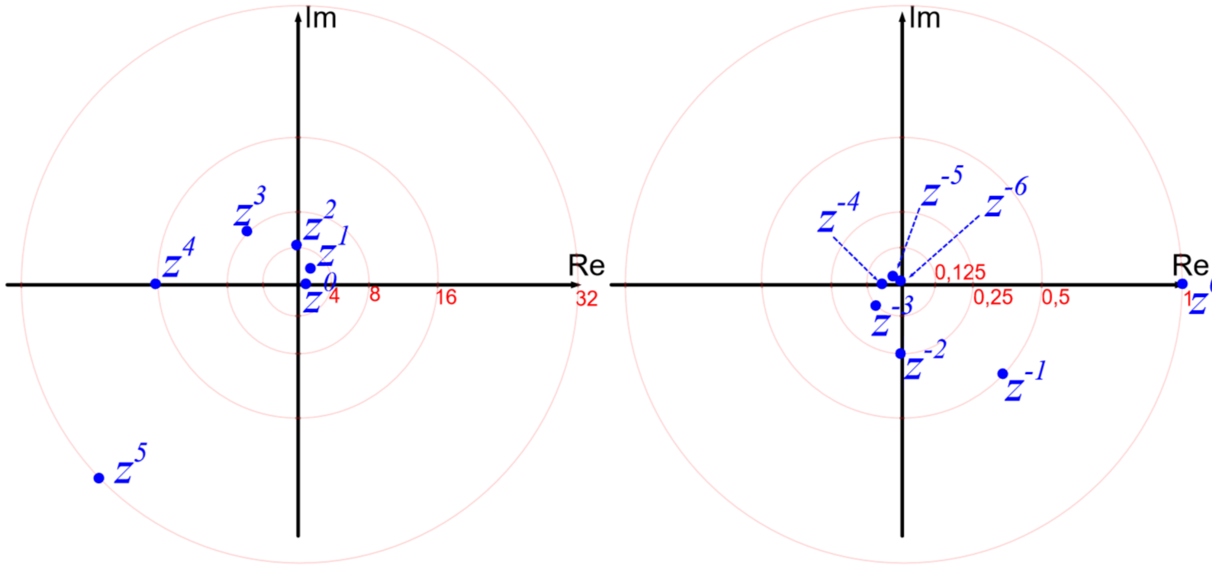
$$z^{-3} = 2^{-3}\cdot e^{i\cdot(-3)\cdot\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8}\cdot e^{-i\cdot\frac{3\pi}{4}}$$

$$z^{-4} = 2^{-4}\cdot e^{i\cdot(-4)\cdot\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{16}\cdot e^{-i\cdot\pi}$$

$$z^{-5} = 2^{-5}\cdot e^{i\cdot(-5)\cdot\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{32}\cdot e^{-i\cdot\frac{5\pi}{4}}$$

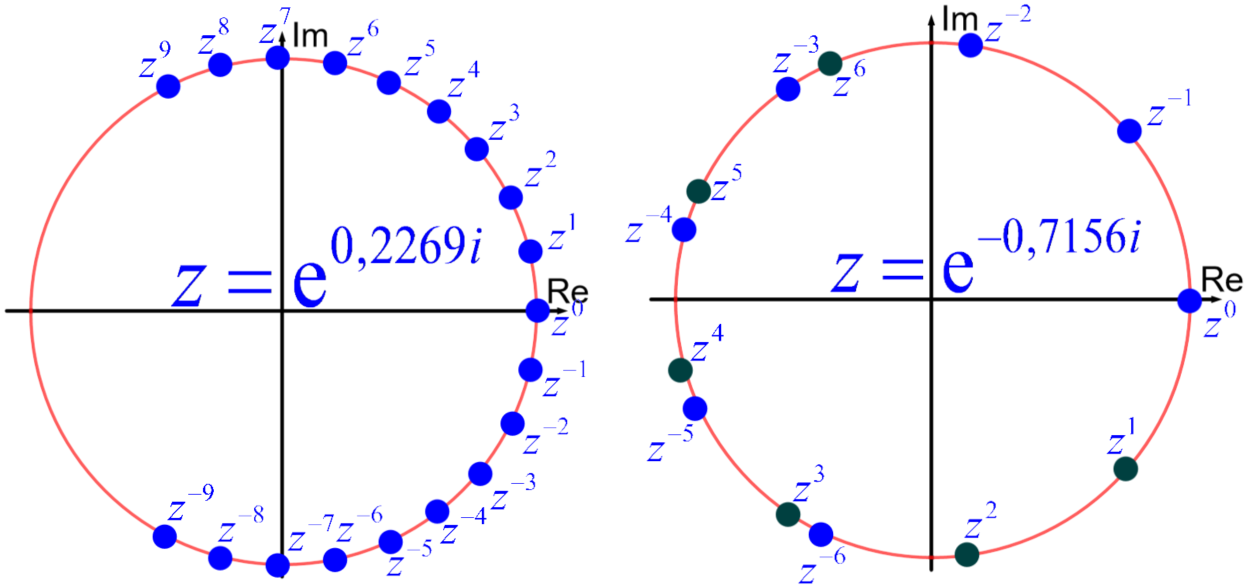
$$z^{-6} = 2^{-6}\cdot e^{i\cdot(-6)\cdot\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{64}\cdot e^{-i\cdot\frac{3\pi}{2}}$$

I den komplekse talplan ligger de forskellige potenser på følgende måde. Bemærk, at skalaerne på de to figurer er gjort forskellige for at skabe plads til både positive og negative eksponenter, dvs. figuren til højre kan placeres inden i den mindste cirkel på figuren til venstre (z^0 er indtegnet på begge figurer):



I ovenstående eksempel danner punkterne en spiral. Når man ser på komplekse tal med modulus 1, ligger alle potenserne på enhedscirklen (se Eksempel 21), og hvis hovedargumentet desuden kan skrives som $\frac{2\cdot\pi}{n}$, hvor $n\in\{3,4,5,6,7,\ldots\}$, danner potenserne hjørnerne i en regulær n-kant (se Eksempel 22).

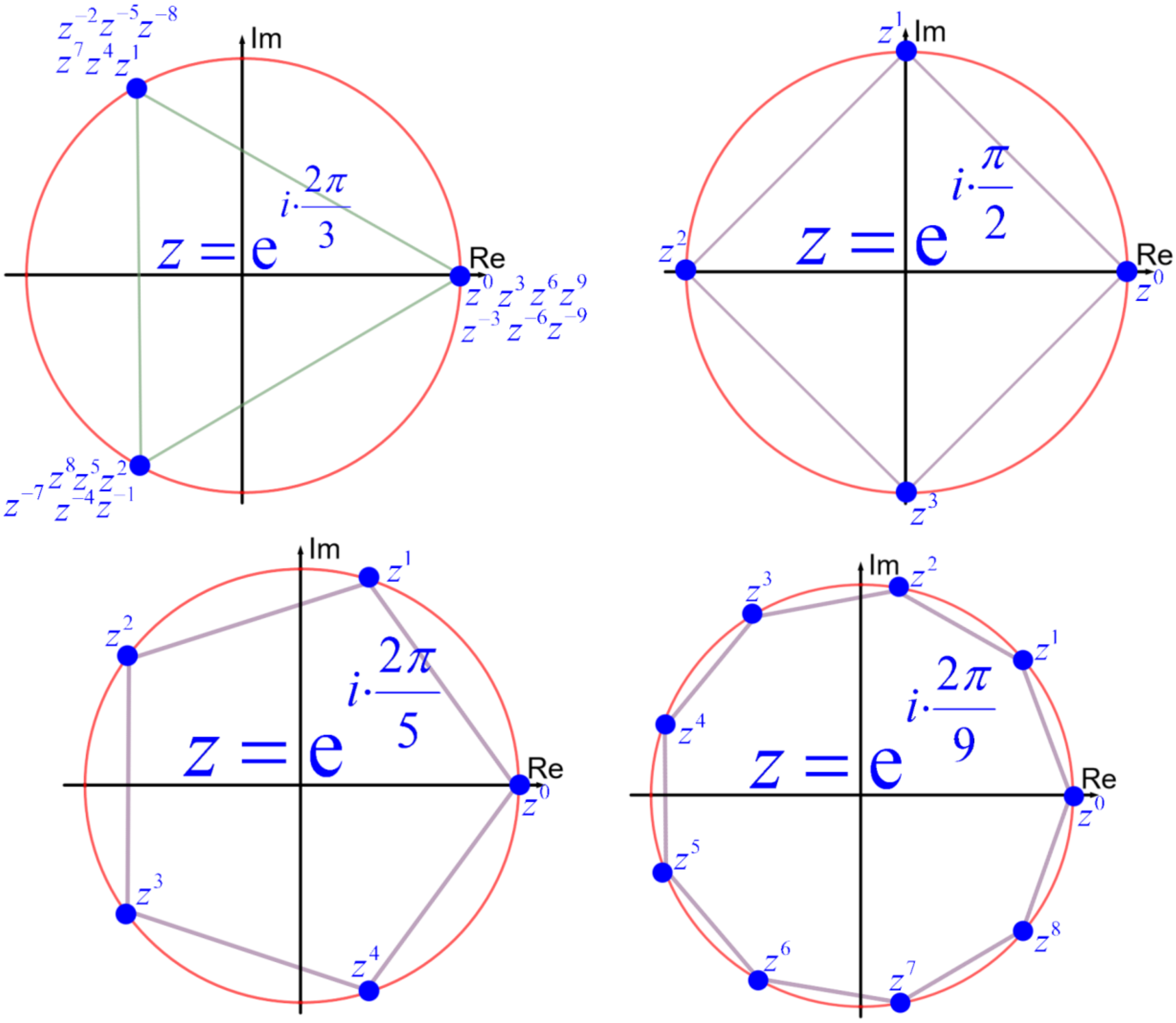
Eksempel 21: Nogle potenser af to komplekse tal **med modulus 1** illustreret grafisk (de røde cirkler er enhedscirkler):



Eksempel 22: Nogle potenser af komplekse tal **med modulus 1 og argument** $\frac{2\cdot\pi}{n}$ **:**

Bemærk, at nogle potenser ligger oven i hinanden. F.eks. er $z^{-3} = z^9$ og $z^5 = z^{-7}$.

Igen ligger nogle potenser oven i hinanden men det er ikke angivet på figuren.



Det med, at potenserne ligger oven i hinanden, må virke bekendt for enhver, der har beskæftiget sig med at udregne potenser af de to komplekse tal med modulus 1, der også er reelle tal, nemlig -1 og 1 $\left(\ldots,1^{-3},1^{-2},1^{-1},1^{0},1^{1},1^{2},1^{3},\ldots\right)$ og $\left(\ldots,(-1)^{-3},(-1)^{-2},(-1)^{-1},(-1)^{0},(-1)^{1},(-1)^{2},(-1)^{3},\ldots\right)$.

Opgaverne 520*

Rødder

Med Sætning 13 fik vi helt styr på potenser med heltallige eksponenter, og det er forudsætningen for at kunne arbejde med rødder. For inden for de komplekse tal defineres rødder på (næsten) samme måde som inden for de reelle tal, således at vores rødder inden for reelle tal igen blot bliver et særtilfælde inden for de komplekse tal:

Definition 12: Lad $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Den *n'te rod* af det komplekse tal *z* skrives $\sqrt[n]{z}$ og er **de** komplekse tal, der opløftet i *n*'te potens giver *z*, dvs.:

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)^n = z$$

Som det fremgår af definitionen, er roduddragning ikke en entydig operation. Der er flere tal, der opfylder definitionen i en konkret situation. Men det er jo heller ikke noget nyt. Der er f.eks. også to tal, der opfylder $x^2 = 9$, og vi har så blot valgt at gøre kvadratroden entydig ved at udvælge det *positive* tal, der kvadreret giver 9. Vi kan også gøre de komplekse rødder entydige ved at indføre *hovedværdien* af roden. Men først skal vi have styr på, hvilke tal der opfylder Definition 12:

Sætning 14: Lad $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ og $z = r\cdot e^{i\cdot\varphi}$, hvor *r* er modulus og φ et argument af *z*. Så er:

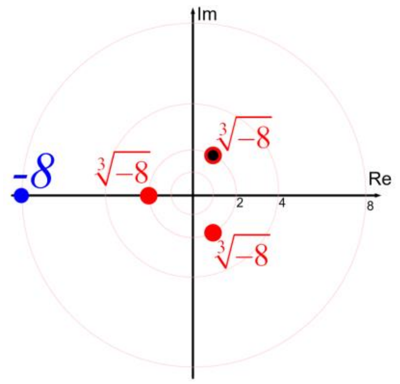
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\cdot e^{i\cdot\frac{\varphi+2\pi\cdot m}{n}} \quad , m \in \{0,1,2,3,\ldots,|n|-1\}$$

Hvor $\sqrt[n]{}$ er den komplekse *n*'te rod, mens $\sqrt[n]{}$ er den *n*'te rod inden for de reelle tal.

Eksempel 23: Sætning 14 anvendt på et negativt tal (bemærk, at vi allerede kendte den ene værdi):

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8\cdot e^{i\cdot\pi}} = \sqrt[3]{8}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi+2\cdot\pi\cdot m}{3}} \ \left(m\in\{0,1,2\}\right) = \begin{cases} 2\cdot e^{i\cdot\frac{\pi+2\cdot\pi\cdot 0}{3}} = 2\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{3}} \\ 2\cdot e^{i\cdot\frac{\pi+2\cdot\pi\cdot 1}{3}} = 2\cdot e^{i\cdot\frac{3\pi}{3}} = 2\cdot e^{i\cdot\pi} = -2 \\ 2\cdot e^{i\cdot\frac{\pi+2\cdot\pi\cdot 2}{3}} = 2\cdot e^{i\cdot\frac{5\pi}{3}} = 2\cdot e^{-i\cdot\frac{\pi}{3}} \end{cases}$$

På figuren til højre er det illustreret grafisk.
Tjek, at du kan se, hvordan det for alle de tre værdier af kubikroden gælder, at når de kuberes, giver det -8.
Prøv også at gennemskue, hvorfor der ikke er flere end disse tre tal, hvorom det gælder.
Den røde prik med en sort prik indeni angiver *hovedværdien* for roden, hvilket vi indfører senere.



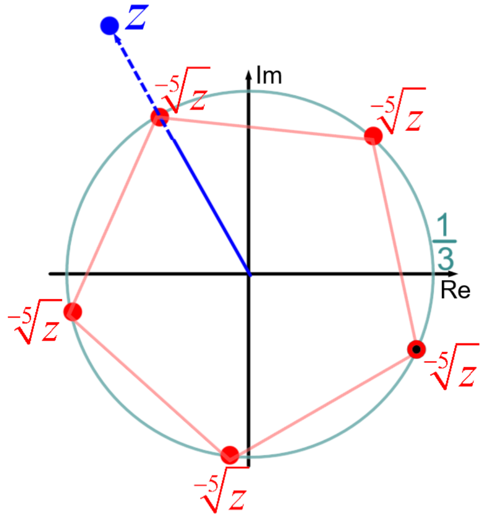
Eksempel 24: Ifølge Sætning 14 kan rodeksponenten godt være negativ, og argumentet behøver ikke at være hovedargumentet:

$$\sqrt[-5]{243\cdot e^{i\cdot\frac{8\pi}{3}}}=\sqrt[-5]{243}\cdot e^{\frac{i}{-5}\cdot\left(\frac{8\pi}{3}+2\pi\cdot m\right)}\quad\left(m\in\{0,1,2,3,4\}\right)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt[5]{243}}\cdot e^{\frac{i}{-5}\cdot\left(\frac{8\pi}{3}+2\pi\cdot 0\right)}=\frac{1}{3}\cdot e^{-i\cdot\frac{8\pi}{15}}\\ \frac{1}{\sqrt[5]{243}}\cdot e^{\frac{i}{-5}\cdot\left(\frac{8\pi}{3}+2\pi\cdot 1\right)}=\frac{1}{3}\cdot e^{-i\cdot\frac{14\pi}{15}}\\ \frac{1}{\sqrt[5]{243}}\cdot e^{\frac{i}{-5}\cdot\left(\frac{8\pi}{3}+2\pi\cdot 2\right)}=\frac{1}{3}\cdot e^{-i\cdot\frac{4\pi}{3}}=\frac{1}{3}\cdot e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}}\\ \frac{1}{\sqrt[5]{243}}\cdot e^{\frac{i}{-5}\cdot\left(\frac{8\pi}{3}+2\pi\cdot 3\right)}=\frac{1}{3}\cdot e^{-i\cdot\frac{26\pi}{15}}=\frac{1}{3}\cdot e^{i\cdot\frac{4\pi}{15}}\\ \frac{1}{\sqrt[5]{243}}\cdot e^{\frac{i}{-5}\cdot\left(\frac{8\pi}{3}+2\pi\cdot 4\right)}=\frac{1}{3}\cdot e^{-i\cdot\frac{32\pi}{15}}=\frac{1}{3}\cdot e^{-i\cdot\frac{2\pi}{15}}\end{cases}$$

Bemærk, at rødderne ligesom potenserne placerer sig i hjørnerne af en regulær polygon.

Modulus for *z* er så stor, at tallet ikke kan komme med på figuren, men den blå pil angiver retningen, der er sammenfaldende med den ene værdi for roden.

Igen er den røde prik med en sort prik indeni *hovedværdien* af roden.



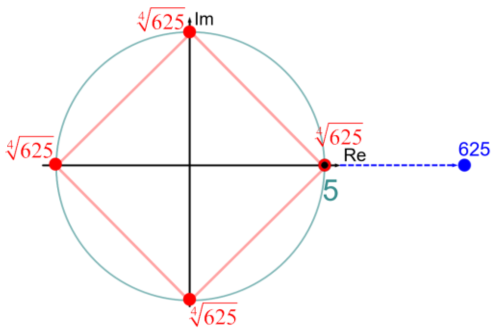
Eksempel 25: Vi ser nu på en rod, vi allerede kender fra arbejdet med reelle tal, men som nu ”udvides”, når der arbejdes med komplekse tal.

$$\sqrt[4]{625}=\sqrt[4]{625\cdot e^{i\cdot 0}}=\sqrt[4]{625}\cdot e^{i\cdot\frac{0+2\pi\cdot m}{4}}\quad\left(m\in\{0,1,2,3\}\right)=\begin{cases}5\cdot e^{i\cdot\frac{0+2\pi\cdot 0}{4}}=5\cdot e^{i\cdot 0}=5\ \text{Hovedværdien}\\ 5\cdot e^{i\cdot\frac{0+2\pi\cdot 1}{4}}=5\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}=5i\\ 5\cdot e^{i\cdot\frac{0+2\pi\cdot 2}{4}}=5\cdot e^{i\cdot\pi}=-5\\ 5\cdot e^{i\cdot\frac{0+2\pi\cdot 3}{4}}=5\cdot e^{i\cdot\frac{3\pi}{2}}=5\cdot e^{-i\cdot\frac{\pi}{2}}=-5i\end{cases}$$

Igen placerer rødderne sig som hjørnerne i en regulær polygon.

Og igen er den røde prik med en sort prik indeni *hovedværdien* af roden. Bemærk, at hovedværdien svarer til den værdi, vi får inden for de reelle tal.

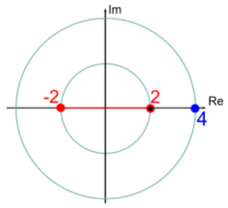
Vi kan nu forstå Maples løsning af nedenstående ligning:



$$z^4=625\xrightarrow{\text{solve for z}}[[z=5],[z=-5],[z=5\,I],[z=-5\,I]]$$

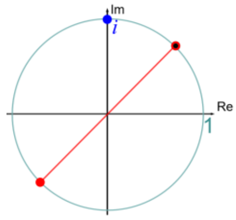
Eksempel 26: Vi ser nu på nogle kvadratrødder:
Først et positivt reelt tal:

$$\sqrt{4}=\sqrt{4\cdot e^{i\cdot 0}}=\begin{cases}\sqrt{4}\cdot e^{i\cdot\frac{0+2\pi\cdot 0}{2}}=2\cdot e^{i\cdot 0}=2 \quad \text{Hovedværdien}\\ \sqrt{4}\cdot e^{i\cdot\frac{0+2\pi\cdot 1}{2}}=2\cdot e^{i\cdot\pi}=-2\end{cases}$$



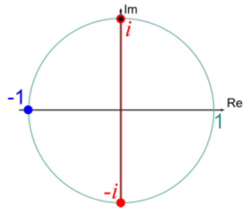
Så et (rent) imaginært tal:

$$\sqrt{i}=\sqrt{1\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}}=\begin{cases}\sqrt{1}\cdot e^{i\cdot\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot 0}{2}}=e^{i\cdot\frac{\pi}{4}} \quad \text{Hovedværdien}\\ \sqrt{1}\cdot e^{i\cdot\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot 1}{2}}=e^{i\cdot\frac{5}{4}\pi}=e^{-i\cdot\frac{3}{4}\pi}\end{cases}$$



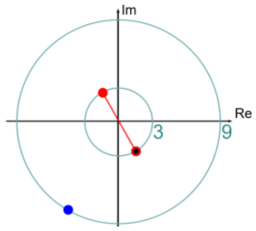
Så et negativt reelt tal:

$$\sqrt{-1}=\sqrt{1\cdot e^{i\cdot\pi}}=\begin{cases}\sqrt{1}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{2}}=e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}=i \quad \text{Hovedværdien}\\ \sqrt{1}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi+2\pi\cdot 1}{2}}=e^{i\cdot\frac{3\pi}{2}}=e^{-i\cdot\frac{\pi}{2}}=-i\end{cases}$$



Så et komplekst tal:

$$\sqrt{9e^{-i\cdot\frac{2\pi}{3}}}=\begin{cases}\sqrt{9}\cdot e^{i\cdot\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi\cdot 0}{2}}=3\cdot e^{-i\cdot\frac{\pi}{3}} \quad \text{Hovedværdien}\\ \sqrt{9}\cdot e^{i\cdot\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi\cdot 1}{2}}=3\cdot e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}}\end{cases}$$



Bemærk, at rødderne placerer sig som endepunkter på en diagonal i en cirkel med centrum i origo. Det svarer til en regulær 2-kant, hvis man regner 2-kanter med blandt polygonerne.

Vi har nu set, hvordan rødderne placerer sig i forhold til hinanden og er klar til at fastsætte hovedværdien:

Definition 13: *Hovedværdien* af en rod er værdien svarende til $m=0$, når man i Sætning 14 lader φ være hovedargumentet af *z*.

Øvelse 4: Tjek, at Definition 13 passer med angivelsen af hovedværdien i eksemplerne 23-26 (bemærk, at du i Eksempel 24 først selv skal finde hovedargumentet).

Maple anvender den komplekse roduddragning og angiver kun hovedværdien (selvom resultaterne er angivet på rektangulær form, kan du godt sammenligne dem med de røde prikker med en sort prik indeni fra eksemplerne 23-26):

$$\sqrt[3]{-8.}=1.000000000+1.732050807\,I$$

$$\sqrt[-5.]{243.\cdot e^{\frac{I\cdot 8\cdot\pi}{3}}}\xrightarrow{\text{at 5 digits}}0.30451-0.13558\,I$$

$$\sqrt[4]{625}\xrightarrow{\text{at 5 digits}}5.0000$$

$$\sqrt{4}=2$$

$$\sqrt{I}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{I\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{-1}=I$$

$$\sqrt{9.\cdot e^{\frac{-I\cdot 2\cdot\pi}{3}}}\xrightarrow{\text{at 5 digits}}1.5000-2.5981\,I$$

Opgaverne 525*

Bevis 14: Vi ser på tal $z = r \cdot e^{i\cdot\varphi}$. Sætning 14 bevises ved at vise fire ting:

1) De angivne værdier opfylder Definition 12.
2) De angivne værdier er forskellige.
3) For ethvert heltal *m* gælder, at værdierne for *m* og $m + |n|$ er ens.
4) Hvis *m* ikke er et heltal, opfylder den pågældende værdi ikke Definition 12.

Ad 1: Vi ser på et tal på formen $\sqrt[n]{r} \cdot e^{i\cdot\frac{\varphi+2\pi\cdot m}{n}}$, hvor *m* er et helt tal (det begrænsede antal *m*-værdier er indeholdt i denne mængde). Sætning 11 anvendes til at opløfte et sådant tal:

$$\left(\sqrt[n]{r} \cdot e^{i\cdot\frac{\varphi+2\pi\cdot m}{n}}\right)^n = \left(\sqrt[n]{r}\right)^n \cdot e^{i\cdot\frac{\varphi+2\pi\cdot m}{n}\cdot n} = r \cdot e^{i\cdot(\varphi+2\pi\cdot m)} = r \cdot e^{i\cdot\varphi} = z$$

Undervejs blev det benyttet, at når *m* er et heltal, så er $2\pi m$ et multiplum af 2π.

Ad 2: Moduli er ens for de forskellige værdier, så når det skal vises, at disse er forskellige, skal der ses på argumenterne. Disse skal ikke blot være forskellige (det er de oplagt, da værdierne for *m* er forskellige), men må heller ikke afvige fra hinanden med et multiplum af 2π.

Da $\frac{\varphi+2\pi m}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi \cdot \frac{m}{n}$, og da $m < |n|$, vil man addere (eller subtrahere hvis *n* er negativ) et tal til $\frac{\varphi}{n}$, der er mindre end 2π, og dermed kan to værdier ikke afvige fra hinanden med et multiplum af 2π.

Ad 3: Lige som ovenfor bemærkes det, at moduli for værdierne er ens, så når det skal vises, at værdierne er ens, skal det vises, at de afviger fra hinanden med et multiplum af 2π:

$$\frac{\varphi+2\pi\left(m+|n|\right)}{n} = \frac{\varphi+2\pi m}{n} + \frac{2\pi\cdot|n|}{n} = \frac{\varphi+2\pi m}{n} + 2\pi\cdot\frac{|n|}{n} = \frac{\varphi+2\pi m}{n} \pm 2\pi \quad \left(\text{da } \frac{|n|}{n} = \pm 1\right)$$

Ad 4: Nu ses på situationen, hvor *m* ikke er heltal:

$$\left(\sqrt[n]{r} \cdot e^{i\cdot\frac{\varphi+2\pi\cdot m}{n}}\right)^n = \left(\sqrt[n]{r}\right)^n \cdot e^{i\cdot\frac{\varphi+2\pi\cdot m}{n}\cdot n} = r \cdot e^{i\cdot(\varphi+2\pi\cdot m)} \neq r \cdot e^{i\cdot\varphi} = z$$

Da *m* ikke er et heltal, afviger argumenterne ikke fra hinanden med et multiplum af 2π, og dermed er potensen ikke lig *z*.

I Definition 12 indførtes den n'te rod af et komplekst tal med $\left(\sqrt[n]{z}\right)^n = z$. Bemærk, at der **IKKE** gælder $\sqrt[n]{z^n} = z$ (←forkert), for højresiden er entydig, mens venstresiden er flertydig (venstresiden svarer til $|n|$ forskellige tal). Men igen kender vi allerede denne problemstilling fra de reelle tal, for her gælder jo $\sqrt[4]{(-2)^4} = 2 \neq -2$, da roden er defineret til at være et positivt tal. Så i denne problemstilling hjælper det altså hverken at gøre roduddragning entydig (reelle tal) eller flertydig (komplekse tal).

Man kan godt ligesom inden for de reelle tal udvide potensbegrebet for komplekse tal, så eksponenterne må være rationale og irrationale. Faktisk kan man gå hele vejen og opløfte komplekse tal i komplekse potenser. Men det ser vi ikke på her. Vi skal nu se lidt mere på kvadratrødder og derefter have set på tre udvidelser af funktioner, vi kender fra de reelle tal.

Kvadratrødder

Sætning 14 omhandler den n'te rod og dermed også kvadratroden $(n=2)$, så egentlig er der ikke brug for flere sætninger, men for at gøre arbejdet med andengradsligninger nemmere, tager vi her kvadratrødder for sig selv.

Sætning 15: For den flertydige komplekse kvadratrod ${\color{blue}\sqrt{\ }}$ gælder følgende, hvor ${\color{red}\sqrt{\ }}$ er den entydige reelle kvadratrod:

$${\color{blue}\sqrt{z}} = \pm{\color{red}\sqrt{z}}\text{, når } z \text{ er et positivt reelt tal.}$$

$${\color{blue}\sqrt{0}} = 0$$

$${\color{blue}\sqrt{z}} = \pm i\cdot{\color{red}\sqrt{-z}}\text{, når } z \text{ er et negativt reelt tal.}$$

$${\color{blue}\sqrt{z}} = \begin{cases} {\color{red}\sqrt{r}}\cdot \mathrm{e}^{i\cdot\frac{\varphi}{2}} \\ {\color{red}\sqrt{r}}\cdot \mathrm{e}^{i\cdot\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)} \end{cases}\text{, når } z = r\cdot\mathrm{e}^{i\cdot\varphi} \text{ er et komplekst tal } (z\neq 0)$$

Bevis 15: Sætning 14 giver, at for $z = r\cdot\mathrm{e}^{i\cdot\varphi}$ er ${\color{blue}\sqrt{z}} = {\color{blue}\sqrt[2]{z}} = {\color{red}\sqrt[2]{r}}\cdot\mathrm{e}^{i\cdot\frac{\varphi+2\cdot\pi\cdot m}{2}}\ \left(m\in\{0,1\}\right) = \begin{cases} {\color{red}\sqrt{r}}\cdot \mathrm{e}^{i\cdot\frac{\varphi}{2}} \\ {\color{red}\sqrt{r}}\cdot \mathrm{e}^{i\cdot\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)} \end{cases}.$

Hermed er sidste linje i Sætning 15 vist. Vi skal derfor kun se på de tre første udsagn:

Positivt reelt tal: Her er hovedargumentet 0, så man har:

$${\color{blue}\sqrt{z}} = \begin{cases} {\color{red}\sqrt{r}}\cdot \mathrm{e}^{i\cdot\frac{0}{2}} = {\color{red}\sqrt{r}}\cdot 1 = {\color{red}\sqrt{r}} \\ {\color{red}\sqrt{r}}\cdot \mathrm{e}^{i\cdot\left(\frac{0}{2}+\pi\right)} = {\color{red}\sqrt{r}}\cdot\mathrm{e}^{i\cdot\pi} = {\color{red}\sqrt{r}}\cdot(-1) = -{\color{red}\sqrt{r}} \end{cases}$$

Tallet 0: Her siger nulreglen, at hvis et tal kvadreret giver nul, så er tallet 0.

Negativt reelt tal: Her er hovedargumentet π, så man har:

$${\color{blue}\sqrt{z}} = \begin{cases} {\color{red}\sqrt{r}}\cdot \mathrm{e}^{i\cdot\frac{\pi}{2}} = {\color{red}\sqrt{r}}\cdot i = i\cdot{\color{red}\sqrt{r}} \\ {\color{red}\sqrt{r}}\cdot \mathrm{e}^{i\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)} = {\color{red}\sqrt{r}}\cdot\mathrm{e}^{i\cdot\frac{3\pi}{2}} = {\color{red}\sqrt{r}}\cdot\mathrm{e}^{-i\cdot\frac{\pi}{2}} = {\color{red}\sqrt{r}}\cdot(-i) = -i\cdot{\color{red}\sqrt{r}} \end{cases}$$

Bemærk, at uanset om z er et reelt, imaginært eller komplekst tal, er de to værdier for kvadratroden hinandens modsatte elementer (hvilket på polær form angives ved at addere argumentet med π).

Eksempel 27 (Fortsættes på næste side): Nogle komplekse kvadratrødder udregnes:

$${\color{blue}\sqrt{9}} = \pm{\color{red}\sqrt{9}} = \pm 3 \qquad {\color{blue}\sqrt{625}} = \pm{\color{red}\sqrt{625}} = \pm 25 \qquad {\color{blue}\sqrt{1}} = \pm{\color{red}\sqrt{1}} = \pm 1 \qquad {\color{blue}\sqrt{17}} = \pm{\color{red}\sqrt{17}}$$

$${\color{blue}\sqrt{-9}} = \pm i\cdot{\color{red}\sqrt{9}} = \pm 3i \qquad {\color{blue}\sqrt{-625}} = \pm i\cdot{\color{red}\sqrt{625}} = \pm 25i \qquad {\color{blue}\sqrt{-1}} = \pm\cdot i{\color{red}\sqrt{1}} = \pm i \qquad {\color{blue}\sqrt{-17}} = \pm i\cdot{\color{red}\sqrt{17}}$$

I nedenstående udregninger omregnes til hovedargumentet:

$${\color{blue}\sqrt{16\cdot\mathrm{e}^{i\cdot\frac{2\pi}{3}}}} = \begin{cases} {\color{red}\sqrt{16}}\cdot\mathrm{e}^{i\cdot\frac{2\pi}{3\cdot 2}} = 4\cdot\mathrm{e}^{i\cdot\frac{\pi}{3}} \\ {\color{red}\sqrt{16}}\cdot\mathrm{e}^{i\cdot\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)} = 4\cdot\mathrm{e}^{i\cdot\frac{4\pi}{3}} = 4\cdot\mathrm{e}^{-i\cdot\frac{2\pi}{3}} \end{cases} \qquad {\color{blue}\sqrt{23\cdot\mathrm{e}^{0,3i}}} = \begin{cases} {\color{red}\sqrt{23}}\cdot\mathrm{e}^{0,15i} \\ {\color{red}\sqrt{23}}\cdot\mathrm{e}^{i\cdot(0,15+\pi)} = {\color{red}\sqrt{23}}\cdot\mathrm{e}^{i\cdot(0,15-\pi)} \end{cases}$$

Eksempel 27 (fortsat):

Hvis det komplekse tal er på rektangulær form, skal man udregne modulus og et argument for at kunne uddrage kvadratroden. Vi ønsker at bestemme $\sqrt{3+7i}$:

Modulus beregnes: $|3+7i| = \sqrt{3^2+7^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58} = 7{,}616$

Argumentet beregnes $(a>0)$: $Arg(3+7i) = \tan^{-1}\left(\frac{7}{3}\right) = 1{,}166$

Så er $\sqrt{3+7i} = \begin{cases} \sqrt{7{,}616}\cdot \mathrm{e}^{i\cdot\frac{1{,}166}{2}} = 2{,}76\cdot \mathrm{e}^{0{,}58i} = 2{,}30+1{,}52i \\ \sqrt{7{,}616}\cdot \mathrm{e}^{i\cdot(0{,}58+\pi)} = 2{,}76\cdot \mathrm{e}^{3{,}72i} = -2{,}30-1{,}52i \end{cases}$

Opgaverne 530*

Den komplekse logaritmefunktion

Igen er det sådan, at når vi snakker om *den komplekse logaritmefunktion*, så er det egentlig *den naturlige komplekse logaritmefunktion*, dvs. det er udvidelsen af vores naturlige logaritmefunktion fra de reelle tal.

Vi tager udgangspunkt i vores komplekse tal $z = r\cdot \mathrm{e}^{i\cdot\varphi}$ på polær form med modulus *r* og argument φ. Hvis vi anvender vores logaritmedefinition og den første logaritmeregneregel fra de reelle tal, får vi følgende, når vi tager logaritmen på begge sider:

$$\ln(z) = \ln\left(r\cdot \mathrm{e}^{i\cdot\varphi}\right) = \ln(r) + \ln\left(\mathrm{e}^{i\cdot\varphi}\right) = \ln(r) + i\cdot\varphi$$

Og på denne måde definerer vi den komplekse logaritmefunktion:

Definition 14: *Den komplekse logaritmefunktion* angives *ln* og virker på et komplekst tal *z* forskelligt fra 0 ved:

$$\ln(z) = \ln(r) + i\cdot\varphi$$

Her er *r* modulus og φ et argument af *z*.

ln på højresiden er den naturlige logaritmefunktion fra de reelle tal.

Hovedværdien af den komplekse logaritmefunktion angives *Ln* og er givet ved:

$$Ln(z) = \ln(r) + i\cdot\varphi_{hoved}\,,$$

hvor φ_{hoved} er hovedargumentet af *z*.

Bemærk følgende:

- Den komplekse logaritmefunktion giver ligesom roduddragning ikke entydige funktionsværdier. Faktisk er der uendelig mange funktionsværdier, der afviger fra hverandre med et multiplum af $2\pi i$, fordi argumenterne afviger med et multiplum af 2π. Dvs. hvis vi kender én funktionsværdi *w* for logaritmefunktionen, vil enhvert af tallene $w+2\pi i\cdot p$, $p\in\mathbb{Z}$ også være en funktionsværdi for logaritmefunktionen.
- Hvis man vil have en entydig logaritmefunktion, skal man arbejde med hovedværdien, der er baseret på, at man anvender hovedargumentet af det komplekse tal.
- Når man anvender hovedværdien af den komplekse logaritmefunktion på et reelt tal, får man samme værdi, som den naturlige logaritmefunktion giver (hvilket jo også er et krav, hvis det skal fungere som en udvidelse).

Eksempel 28: Vi tager logaritmen af et positivt reelt tal, et (rent) imaginært tal, et negativt reelt tal og et komplekst tal:

Positivt reelt tal (bemærk, at det i første skridt omskrives til komplekst tal):

$$Ln(\mathrm{e}) = Ln\left(\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{i\cdot 0}\right) = ln(\mathrm{e}) + i\cdot 0 = 1$$

$$\ln(\mathrm{e}) = 1 + 2\pi i\cdot p \quad , \quad p\in\mathbb{Z}$$

Imaginært tal:

$$Ln(\mathrm{i}) = Ln\left(1\cdot\mathrm{e}^{i\cdot\frac{\pi}{2}}\right) = ln(1) + i\cdot\frac{\pi}{2} = i\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\ln(\mathrm{i}) = i\cdot\frac{\pi}{2} + 2\pi i\cdot p \quad , \quad p\in\mathbb{Z}$$

Negativt reelt tal:

$$Ln\left(-\mathrm{e}^7\right) = Ln\left(\mathrm{e}^7\cdot\mathrm{e}^{i\cdot\pi}\right) = ln\left(\mathrm{e}^7\right) + i\cdot\pi = 7 + i\cdot\pi$$

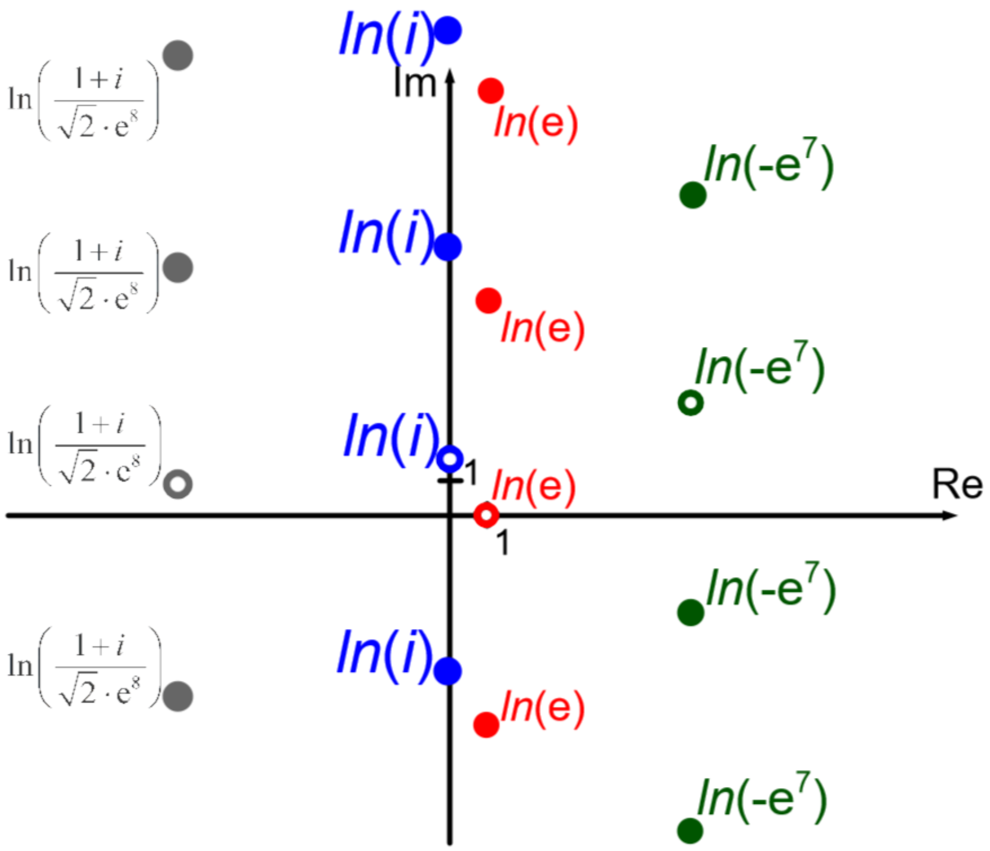
$$\ln\left(-\mathrm{e}^7\right) = 7 + i\cdot\pi + 2\pi i\cdot p \quad , \quad p\in\mathbb{Z}$$

Komplekst tal:

$$Ln\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}\cdot\mathrm{e}^8}\right) = Ln\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\mathrm{e}^8}\cdot\mathrm{e}^{i\cdot\frac{\pi}{4}}\right) = ln\left(\mathrm{e}^{-8}\right) + i\cdot\frac{\pi}{4} = -8 + i\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$\ln\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}\cdot\mathrm{e}^8}\right) = -8 + i\cdot\frac{\pi}{4} + 2\pi i\cdot p \quad , \quad p\in\mathbb{Z}$$

Nogle af ovenstående værdier er angivet i den komplekse talplan nedenfor (hovedværdierne er markeret med en hvid prik i midten). Bemærk, hvordan alle værdierne for et konkret komplekst tal har samme realdel, mens imaginærdelene afviger fra hverandre med et multiplum af 2π (den blå og røde farve på figuren har ikke noget med farverne ovenfor at gøre).

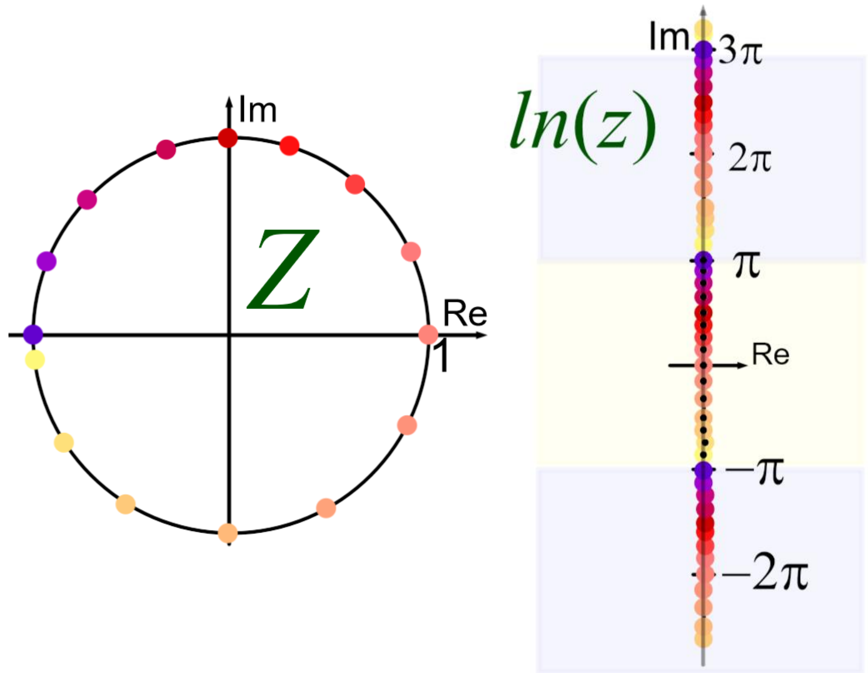


Eksempel 29: Vi ser på nogle værdier for logaritmen virkende på tal placeret på enhedscirklen:

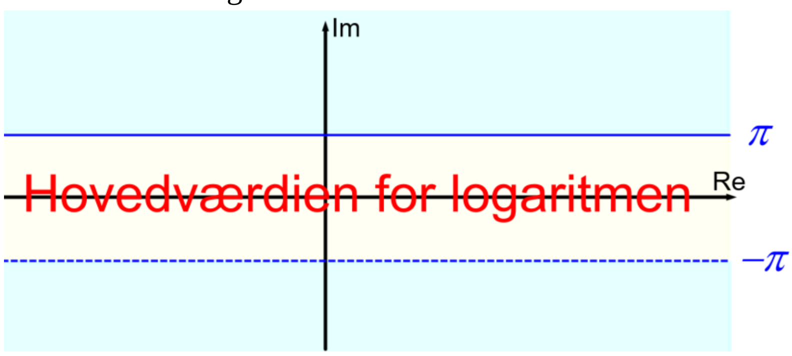
$$Ln\left(e^{-i\cdot\frac{11\pi}{12}}\right)=\ln(1)-i\cdot\frac{11\pi}{12}=0-i\cdot\frac{11\pi}{12}=-i\cdot\frac{11\pi}{12}$$

$$Ln\left(e^{-i\cdot\frac{5\pi}{6}}\right)=-i\cdot\frac{5\pi}{6}\qquad Ln\left(e^{-i\cdot\frac{3\pi}{4}}\right)=-i\cdot\frac{3\pi}{4}\qquad Ln\left(e^{-i\cdot\frac{2\pi}{3}}\right)=-i\cdot\frac{2\pi}{3}\qquad Ln\left(e^{-i\cdot\frac{\pi}{2}}\right)=-i\cdot\frac{\pi}{2}\quad osv...$$

Når z har modulus 1, vil logaritmen til z altså være imaginært, hvilket er illustreret nedenfor:



Som man kan se ud fra Definition 14 (og ovenstående eksempel), ligger hovedværdierne for logaritmefunktionen i et bånd omkring førsteaksen:



Maple angiver hovedværdien, når man tager logaritmen af både reelle og komplekse tal. Da Maple fortolker *log* som *ln*, kan man anvende begge dele. Nogle gange kan det være nødvendigt at højreklikke på udtrykket og vælge *Complex Maps* for at finde værdien:

$$\log(I)=\frac{I}{2}\pi$$

$$\log(-e^7)\xrightarrow{\text{a + bI form}}7+I\pi$$

$$\ln\left(\frac{1+I}{\sqrt{2}\cdot e^8}\right)\xrightarrow{\text{a + bI form}}-\frac{\ln(2)}{2}+\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{e^8}\right)+\frac{I\pi}{4}\overset{\text{simplify}}{=}-8+\frac{I\pi}{4}$$

$$\ln\left(e^{-\frac{I\cdot\pi}{2}}\right)=-\frac{I}{2}\pi$$

Opgaverne 535*

De komplekse sinus- og cosinusfunktioner

Vi udvider sinus- og cosinusfunktionerne til de komplekse tal ved igen at tage udgangspunkt i taylorrækkerne inden for de reelle tal. Dvs. vi siger:

Definition 15: De komplekse funktioner *sin* og *cos* er givet ved:

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - \frac{z^{11}}{11!} + \frac{z^{13}}{13!} - \frac{z^{15}}{15!} + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \frac{z^{10}}{10!} + \frac{z^{12}}{12!} - \frac{z^{14}}{14!} + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{z^{2m}}{(2m)!}$$

Med Definition 15 sikres det, at de komplekse *sin* og *cos* giver det samme som de reelle *sin* og *cos*, når de virker på reelle tal.

I Sætning 8 fandt vi en sammenhæng mellem de trigonometriske funktioner og den komplekse eksponentialfunktion, når denne virker på et (rent) imaginært tal. Vi skal nu se, at en lignende sammenhæng gælder generelt for komplekse tal. Der tages udgangspunkt i definitionerne 11 og 15:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} + \ldots \qquad \text{(Definition 11)}$$

$$e^{i\cdot z} = 1 + i\cdot z - \frac{z^2}{2!} - i\cdot\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\cdot\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - i\cdot\frac{z^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} + \ldots \text{ (Her udnyttes } i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \ldots)$$

$$e^{-i\cdot z} = 1 - i\cdot z - \frac{z^2}{2!} + i\cdot\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - i\cdot\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} + i\cdot\frac{z^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} + \ldots \text{ (Her udnyttes sætningerne 2.3 og 2.4)}$$

$$i\cdot\sin(z) = i\cdot z - i\cdot\frac{z^3}{3!} + i\cdot\frac{z^5}{5!} - i\cdot\frac{z^7}{7!} + i\cdot\frac{z^9}{9!} - \ldots \text{(Identiteten i Definition 15 er forlænget med } i\text{)}$$

Øvelse 5: Tjek, at du har styr på, hvor *i*'erne og fortegnene kommer fra i ovenstående.

Vi kan nu se, at der gælder følgende (tjek igen, at du kan se, at fortegnene og *i*'erne passer):

Sætning 16: For ethvert komplekst tal *z* gælder:

$$e^{i\cdot z} = \cos(z) + i\cdot\sin(z)$$

$$e^{-i\cdot z} = \cos(z) - i\cdot\sin(z)$$

Hvis man i stedet ønsker at isolere *cos* eller *sin*, kan det ske ved at addere eller subtrahere de to ligninger:

$$e^{i\cdot z} + e^{-i\cdot z} = \left(\cos(z) + i\cdot\sin(z)\right) + \left(\cos(z) - i\cdot\sin(z)\right) \Leftrightarrow e^{i\cdot z} + e^{-i\cdot z} = 2\cdot\cos(z) \Leftrightarrow \cos(z) = \frac{e^{i\cdot z} + e^{-i\cdot z}}{2}$$

$$e^{i\cdot z} - e^{-i\cdot z} = \left(\cos(z) + i\cdot\sin(z)\right) - \left(\cos(z) - i\cdot\sin(z)\right) \Leftrightarrow e^{i\cdot z} - e^{-i\cdot z} = 2\cdot i\cdot\sin(z) \Leftrightarrow \sin(z) = \frac{e^{i\cdot z} - e^{-i\cdot z}}{2i}$$

Da $\frac{1}{i} = \frac{1\cdot(-i)}{i\cdot(-i)} = \frac{-i}{1} = -i$, kan det sidste udtryk omskrives: $\sin(z) = \frac{e^{i\cdot z} - e^{-i\cdot z}}{2}\cdot(-i) = i\cdot\frac{e^{-i\cdot z} - e^{i\cdot z}}{2}$

Vi har altså vist, at der gælder følgende udtryk for de komplekse trigonometriske funktioner:

Sætning 17: For ethvert komplekst tal z gælder:

$$\cos(z) = \frac{e^{i\cdot z} + e^{-i\cdot z}}{2} \qquad \sin(z) = i \cdot \frac{e^{-i\cdot z} - e^{i\cdot z}}{2}$$

Ved hjælp af Sætning 17 kan vi nu forholdsvis let finde sinus- og cosinusværdier for (rent) imaginære tal:

Eksempel 30: Sætning 17 benyttes til at beregne følgende:

$$\cos(i) = \frac{e^{i\cdot i} + e^{-i\cdot i}}{2} = \frac{e^{-1} + e^{1}}{2} = \frac{\frac{1}{e} + e}{2} \approx 1{,}5431 \qquad \cos(2i) = \frac{e^{i\cdot 2i} + e^{-i\cdot 2i}}{2} = \frac{e^{-2} + e^{2}}{2} \approx 3{,}7623$$

$$\sin(i) = i \cdot \frac{e^{-i\cdot i} - e^{i\cdot i}}{2} = i \cdot \frac{e^{1} - e^{-1}}{2} = i \cdot \frac{e - \frac{1}{e}}{2} \approx 1{,}1753i \qquad \sin(2i) = i \cdot \frac{e^{-i\cdot 2i} - e^{i\cdot 2i}}{2} = i \cdot \frac{e^{2} - e^{-2}}{2} \approx 3{,}6269i$$

I Maple indtastes det helt almindeligt, men Maple omskriver som udgangspunkt udtrykket ved hjælp af de hyperbolske funktioner $\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ og $\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$:

$$\cos(I) = \cosh(1) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 1.5431$$
$$\sin(I) = \mathrm{I}\sinh(1) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 1.1752\ \mathrm{I}$$
$$\cos(2.\ I) = 3.762195691$$
$$\sin(2.\ I) = 3.626860408\ \mathrm{I}$$

Opgaverne 540*

Ved at benytte Sætning 17 og regne løs, kan man se, at nogle af vores velkendte sammenhænge fra de reelle tal også gælder inden for de komplekse tal:

$$\cos(-z) = \frac{e^{i\cdot(-z)} + e^{-i\cdot(-z)}}{2} = \frac{e^{-i\cdot z} + e^{i\cdot z}}{2} = \frac{e^{i\cdot z} + e^{-i\cdot z}}{2} = \cos(z)$$

$$\sin(-z) = i \cdot \frac{e^{-i\cdot(-z)} - e^{i\cdot(-z)}}{2} = i \cdot \frac{e^{i\cdot z} - e^{-i\cdot z}}{2} = -i \cdot \frac{e^{-i\cdot z} - e^{i\cdot z}}{2} = -\sin(z)$$

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = \left(\frac{e^{i\cdot z} + e^{-i\cdot z}}{2}\right)^2 + \left(i \cdot \frac{e^{-i\cdot z} - e^{i\cdot z}}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{\left(e^{i\cdot z}\right)^2 + \left(e^{-i\cdot z}\right)^2 + 2\cdot e^{i\cdot z}\cdot e^{-i\cdot z}}{4} + i^2 \cdot \frac{\left(e^{-i\cdot z}\right)^2 + \left(e^{i\cdot z}\right)^2 - 2\cdot e^{-i\cdot z}\cdot e^{i\cdot z}}{4} =$$

$$\frac{\left(e^{i\cdot z}\right)^2 + \left(e^{-i\cdot z}\right)^2 + 2\cdot e^{i\cdot z}\cdot e^{-i\cdot z}}{4} - \frac{\left(e^{-i\cdot z}\right)^2 + \left(e^{i\cdot z}\right)^2 - 2\cdot e^{-i\cdot z}\cdot e^{i\cdot z}}{4} =$$

$$\frac{\left(e^{i\cdot z}\right)^2 + \left(e^{-i\cdot z}\right)^2 + 2\cdot e^{i\cdot z}\cdot e^{-i\cdot z} - \left(e^{-i\cdot z}\right)^2 - \left(e^{i\cdot z}\right)^2 + 2\cdot e^{-i\cdot z}\cdot e^{i\cdot z}}{4} =$$

$$\frac{4\cdot e^{i\cdot z}\cdot e^{-i\cdot z}}{4} = e^{i\cdot z}\cdot e^{-i\cdot z} = e^{i\cdot z - i\cdot z} = e^{0} = 1$$

Sætning 18: For ethvert komplekst tal z gælder: **GRUNDRELATIONEN**

$$\cos(-z)=\cos(z) \qquad \sin(-z)=-\sin(z) \qquad \cos^2(z)+\sin^2(z)=1$$

Eksempel 31: Med tallene fra Eksempel 30 afprøver vi grundrelationen i to konkrete situationer:

$$\cos^2(i)+\sin^2(i)=1{,}5431^2+(i\cdot 1{,}1752)^2=2{,}3811-1{,}3811=1$$

$$\cos^2(2i)+\sin^2(2i)=3{,}7622^2+(i\cdot 3{,}6269)^2=14{,}1541-13{,}1541=1$$

Det er værd at bemærke, at vores komplekse sinus- og cosinusfunktioner godt kan give værdier med både realdel og imaginærdel uden for intervallet [-1,1]. Men grundrelationen holder alligevel.

Man kan benytte sætningerne 17 og 11 til at beregne sinus- og cosinusværdier for komplekse tal, selvom det ikke er så nemt som for imaginære tal:

Eksempel 32: Beregninger på en række komplekse tal:

$$\cos(3+5i)=\frac{e^{i\cdot(3+5i)}+e^{-i\cdot(3+5i)}}{2}=\frac{e^{-5+3i}+e^{5-3i}}{2}=\frac{e^{-5}\cdot(\cos(3)+i\cdot\sin(3))+e^{5}\cdot(\cos(-3)+i\cdot\sin(-3))}{2}=$$

$$\frac{(e^{-5}+e^{5})\cdot\cos(3)}{2}+i\cdot\frac{(e^{-5}-e^{5})\cdot\sin(3)}{2}=-73{,}467-10{,}472i$$

$$\sin(3+5i)=i\cdot\frac{e^{-i\cdot(3+5i)}-e^{i\cdot(3+5i)}}{2}=i\cdot\frac{e^{5-3i}-e^{-5+3i}}{2}=i\cdot\frac{e^{5}\cdot(\cos(-3)+i\cdot\sin(-3))-e^{-5}\cdot(\cos(3)+i\cdot\sin(3))}{2}=$$

$$i\cdot\frac{(e^{5}-e^{-5})\cdot\cos(3)}{2}-i^2\cdot\frac{(e^{5}+e^{-5})\cdot\sin(3)}{2}=\frac{(e^{5}+e^{-5})\cdot\sin(3)}{2}+i\cdot\frac{(e^{5}-e^{-5})\cdot\cos(3)}{2}=$$

$$10{,}473-73{,}461i$$

Grundrelationen testes endnu engang:

$$\cos^2(3+5i)+\sin^2(3+5i)=(-73{,}467-10{,}472i)^2+(10{,}473-73{,}461i)^2=$$

$$(5287{,}790+1538{,}634i)+(-5286{,}790-1538{,}634i)=1$$

Og så en enkelt – ikke helt tilfældig beregning – der antyder, at der også for de komplekse funktioner optræder en periodicitet:

$$\cos(\pi+2i)=\frac{e^{i\cdot(\pi+2i)}+e^{-i\cdot(\pi+2i)}}{2}=\frac{e^{-2+i\cdot\pi}+e^{2-i\cdot\pi}}{2}=\frac{e^{-2}\cdot(\cos(\pi)+i\cdot\sin(\pi))+e^{2}\cdot(\cos(-\pi)+i\cdot\sin(-\pi))}{2}=$$

$$\frac{e^{-2}\cdot(-1+i\cdot 0)+e^{2}\cdot(-1+i\cdot 0)}{2}=\frac{-e^{-2}-e^{2}}{2}=-3{,}762$$

Sammenlign med Eksempel 30.

Opgaverne 542*

Eksemplerne og opgaverne har antydet, at der både optræder en form for periodicitet, og at der muligvis ikke er nogen øvre grænse for modulus af cosinus- og sinusværdierne.

Vi undersøger dette ved at arbejde videre med Sætning 17. Vi angiver det komplekse tal z på rektangulær form, dvs. $z=a+i\cdot b$:

$$\cos(z)=\frac{e^{i\cdot(a+i\cdot b)}+e^{-i\cdot(a+i\cdot b)}}{2}=\frac{e^{-b+i\cdot a}+e^{b-i\cdot a}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{-b}\cdot(\cos(a)+i\cdot\sin(a))+e^{b}\cdot(\cos(-a)+i\cdot\sin(-a))\right)=$$

$$\frac{e^{-b}+e^{b}}{2}\cdot\cos(a)+i\cdot\frac{e^{-b}-e^{b}}{2}\cdot\sin(a)$$

$$\sin(z) = i\cdot\frac{e^{-i\cdot(a+i\cdot b)} - e^{i\cdot(a+i\cdot b)}}{2} = i\cdot\frac{e^{b-i\cdot a} - e^{-b+i\cdot a}}{2} =$$

$$\frac{i}{2}\cdot\left(e^{b}\cdot\left(\cos(-a)+i\cdot\sin(-a)\right) - e^{-b}\cdot\left(\cos(a)+i\cdot\sin(a)\right)\right) =$$

$$\frac{e^{b}+e^{-b}}{2}\cdot\sin(a) + i\cdot\frac{e^{b}-e^{-b}}{2}\cdot\cos(a)$$

Vi har altså vist:

Sætning 18 + *i*: For det komplekse tal $z = a + i\cdot b$, hvor $a,b\in\mathbb{R}$, gælder:

$$\cos(z) = \frac{e^{-b}+e^{b}}{2}\cdot\cos(a) + i\cdot\frac{e^{-b}-e^{b}}{2}\cdot\sin(a)$$

$$\sin(z) = \frac{e^{b}+e^{-b}}{2}\cdot\sin(a) + i\cdot\frac{e^{b}-e^{-b}}{2}\cdot\cos(a)$$

Det ses, at det er realdelen af *z*, der optræder i de reelle *cos* og *sin*, mens imaginærdelen optræder i eksponenterne i den naturlige eksponentialfunktion.
Dvs. de komplekse sinus- og cosinusværdier ændrer sig ikke, når der lægges et multiplum af 2π til realdelen, dvs. $\cos(z+2\pi p) = \cos(z)$ og $\sin(z+2\pi p) = \sin(z)$. Periodiciteten er altså koblet til realdelen.
Det er imaginærdelen af *z*, der fører til de store moduli.

Vi har nu set eksempler på udvidelser af funktioner fra de reelle tal til de komplekse tal. Nogle var flertydige (rødder og logaritmer), og andre var entydige (eksponentialfunktionen og de trigonometriske funktioner).
Men vi har egentlig slet ikke fået set på selve funktionsbegrebet. Det er et helt emne for sig, og vi skal kun meget kort berøre det her.

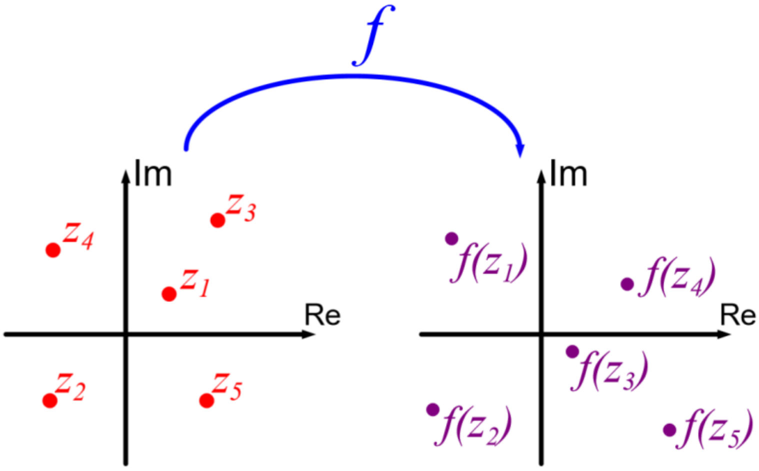
Funktioner

Inden for de reelle tal viste vi med $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, at funktionen *f* afbilder fra de reelle tal ind i de reelle tal. På samme måde skriver vi inden for de komplekse tal $f:\mathbb{C}\mapsto\mathbb{C}$ og viser dermed, at funktionen *f* afbilder fra de komplekse tal ind i de komplekse tal. Vi kan også skrive $f:z\mapsto f(z)$, når vi arbejder med en konkret funktion, f.eks. $f:z\mapsto\cos(z)$.

Vi har arbejdet med både flertydige og entydige funktioner inden for de komplekse tal, mens vi inden for de reelle tal gjorde meget ud af, at funktioner skulle være entydige (der må ikke være flere funktionsværdier, der svarer til den samme *x*-værdi). Det er dog vigtigt at bemærke, at der ikke er forskel på de to tilfælde, for inden for de reelle tal definerede vi os om nødvendigt til entydigheden. Kvadratrødder definerede vi som de **positive** tal, der kvadreret giver radikanden (hvilket svarer til en begrænsning af definitionsmængden for $f:x\mapsto x^2$), og *arcsin*, *arccos* og *arctan* gjorde vi entydige ved at begrænse definitionsmængderne for *cos*, *sin* og *tan*.
Inden for de komplekse tal kan vi gøre funktionerne entydige ved at kigge på hovedværdier eller hovedargumenter, hvilket vi som bekendt har gjort ved at anvende stort begyndelsesbogstav, *Ln* og *Arg* (kvadratroden har vi angivet med symbolet $\sqrt{\ }$, men vi kunne også skrive *sqrt* og *Sqrt*).

Vi skal nu se på en markant forskel på komplekse og reelle funktioner.

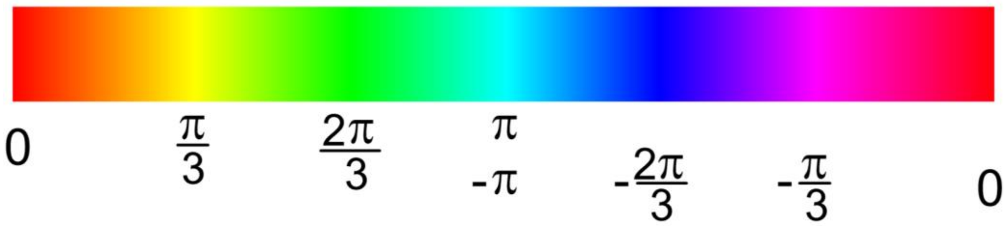
En kompleks funktion afbilder fra den komplekse talplan til den komplekse talplan:



Vi skulle altså have haft 4 rumlige dimensioner til rådighed, hvis vi skulle have tegnet grafer på sædvanlig vis. Af mangel på rumlige dimensioner har man fundet på noget andet.

I den komplekse talplan placeres punkter med en vis farve og lysstyrke. Punktets placering angiver vores uafhængige variabel (dvs. venstre del af figuren ovenfor er udgangspunktet), mens funktionsværdien angives med farve og lysstyrke (dvs. punkterne på højresiden af figuren ovenfor afbildes ikke, men deres placering er omformet til farve og lysstyrke af de tilsvarende punkter på venstresiden. Dvs. placeringen af punktet $f\left(z_1\right)$ omformes til farve og lysstyrke for punktet z_1).

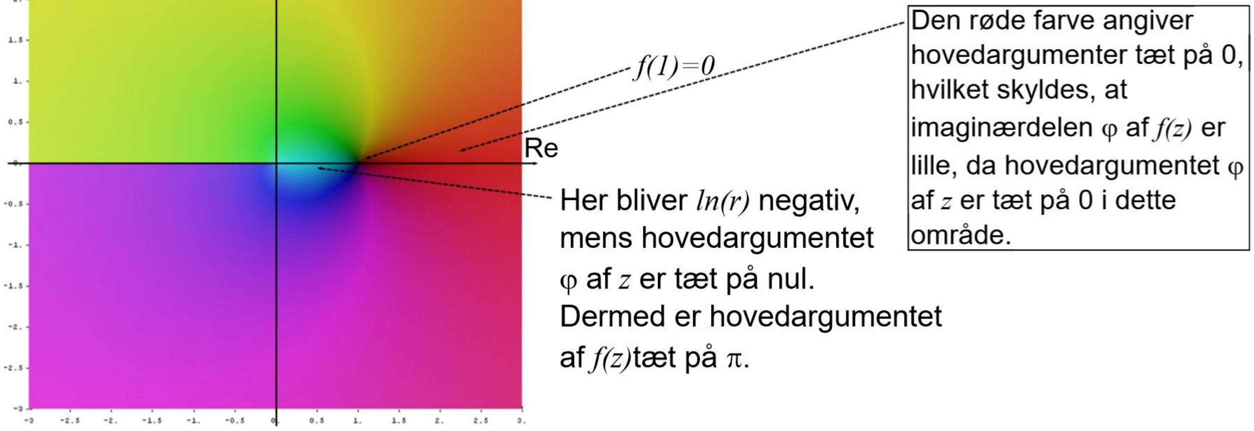
Farven angiver hovedargumentet af funktionsværdien ud fra nedenstående skala:



Lysstyrken angiver modulus af funktionsværdien. Sort er nul, mørke farver er små moduli, lyse farver er store moduli og hvid er rigtig store moduli (mit **gæt** er, at lysstyrken kan skaleres op og ned præcis som en almindelige *y*-akse, således at ”rigtig store moduli” kan dække over vidt forskellige værdier afhængig af den konkrete situation).

Grafen for den komplekse logaritmefunktion $f: z \mapsto Ln\left(z\right)$ ser således ud:

$$z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$$
$$f\left(z\right) = \ln\left(r\right) + i \cdot \varphi$$



Infinitesimalregning:

Også for komplekse funktioner indføres *differentiabilitet* i et givet punkt ved at se på, om *differenskvotienten* $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ har en grænseværdi for $z \to z_0$, og denne grænseværdi kaldes i så fald *differentialkvotienten* i punktet, og denne skrives $f'(z_0)$. Her skal man være opmærksom på, at z nu kan nærme sig z_0 fra alle retninger og ikke kun 2 retninger, som inden for de reelle tal.

Vores regneregler for differentialkvotienter (produktreglen, sammensat funktion, sum, …) gælder inden for de komplekse tal, men der er også masser af forskelle og nye egenskaber, som vi ikke berører her.

Når man arbejder med komplekse funktioner inden for fysik, vil de fysiske størrelser ofte afhænge af tiden, der ikke er kompleks. Her gælder der så, at **man differentierer realdel og imaginærdel hver for sig**.

Andengradsligninger

Vi ved, at inden for de reelle tal kan andengradsligninger have 0, 1 eller 2 løsninger, og vi bruger diskriminantens fortegn til at skelne mellem de tre tilfælde.

Vi skal nu se, at inden for de komplekse tal har alle andengradsligninger mindst én løsning. Alle vores kendte situationer med 0 løsninger (negativ diskriminant) forvandles til situationer med 2 løsninger inden for de komplekse tal.

Vi indleder med selve sætningen. Bemærk, at der arbejdes med komplekse koefficienter (situationerne med reelle koefficienter er indeholdt i disse), og bemærk, at der arbejdes med den komplekse kvadratrod, dvs. vores kvadratrod er flertydig (og derfor har vi ikke brug for vores $\pm$ foran kvadratroden):

Sætning 19: Andengradsligningen $a \cdot z^2 + b \cdot z + c = 0$, $G = \mathbb{C}$, hvor $a, b, c \in \mathbb{C}$ og $a \neq 0$, har løsningerne:

$$z = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Hvor $\sqrt{}$ er den (flertydige) komplekse kvadratrod.

Der indgår ikke nogen diskriminant i sætningen, fordi man ikke længere behøver først at bestemme dens fortegn, men man kan godt indføre $d = b^2 - 4ac$, så udsagnet bliver:

$$z = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}$$

Beviset for sætningen vil langt hen ad vejen ligne det tilsvarende bevis fra de reelle tal, fordi vi ifølge Sætning 2 har de samme parentes- og brøkregneregler. Bemærk, hvordan beviset til sidst, når kvadratroden inddrages, faktisk bliver nemmere end det tilsvarende bevis inden for de reelle tal, da vi ikke behøver at forholde os til radikandens fortegn (dvs. vi springer diskriminantskridtet over):

Bevis 19: Vi omskriver andengradsligningen, så z isoleres:

$$az^2+bz+c=0 \quad \overset{\text{Da } a\neq 0\text{, må ligningen forlænges med } 4a}{\Leftrightarrow}$$

$$4a^2z^2+4abz+4ac=0 \quad \overset{\text{Kvadratkomplettering}}{\Leftrightarrow}$$

$$(2az+b)^2=b^2-4ac \quad \overset{\text{Den flertydige komplekse kvadratrod uddrages (Definition 12 sikrer biimplikationen)}}{\Leftrightarrow}$$

$$2az+b=\sqrt{b^2-4ac} \quad \Leftrightarrow$$

$$z=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Eksempel 33: Følgende andengradsligninger med reelle koefficienter løses (Sætning 15 anvendes ved de komplekse kvadratrødder):

1) $2z^2-6z-20=0$:

$$z=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-6)+\sqrt{(-6)^2-4\cdot 2\cdot(-20)}}{2\cdot 2}=\frac{6+\sqrt{196}}{4}=\begin{cases}\dfrac{6+14}{4}=5\\[2mm] \dfrac{6-14}{4}=-2\end{cases}$$

2) $z^2+2z+5=0$: $z=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-2+\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1}=\dfrac{-2+\sqrt{-16}}{2}=\begin{cases}\dfrac{-2+4i}{2}=-1+2i\\[2mm] \dfrac{-2-4i}{2}=-1-2i\end{cases}$

Da Maple regner med komplekse tal, er der ikke noget nyt i at løse andengradsligninger inden for de komplekse tal med Maple. Man anvender helt almindeligt 'solve':

$$2\,z^2-6\,z-20=0 \xrightarrow{\text{solve for z}} [[z=5],[z=-2]]$$

$$z^2+2\,z+5=0 \xrightarrow{\text{solve for z}} [[z=-1+2\,\mathrm{I}],[z=-1-2\,\mathrm{I}]]$$

$$solve(z^2-7\,z+13=0)=\frac{7}{2}+\frac{\mathrm{I}\sqrt{3}}{2},\ \frac{7}{2}-\frac{\mathrm{I}\sqrt{3}}{2}$$

Det er (selvfølgelig) stadig tilladt at faktorisere og anvende nulreglen i stedet for at anvende diskriminantmetoden. Faktisk vil faktoriseringsmetoden altid kunne bruges inden for de komplekse tal, da der altid er løsninger til ligningen, men det er bare blevet væsentligt sværere at gennemskue, hvordan man faktoriserer, hvilket begrænser anvendeligheden af metoden.

Opgaverne 550*

Generelt om andengradsligninger med REELLE koefficienter:

Når man har løst nogle andengradsligninger med reelle koefficienter inden for de komplekse tal, bemærker man nok, at når løsningerne er komplekse, er de altid hinandens konjugerede. Det ses hurtigt ud fra Sætning 19, når man opdeler højresiden i to brøker: $z = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{d}}{2a}$.

Første brøk giver et reelt tal, når koefficienterne er reelle, og for den anden brøk gælder:

$d > 0$: Den komplekse kvadratrod giver to reelle tal, så hele udtrykket svarer til to reelle tal.

$d < 0$: Ifølge Sætning 15 får man så $z = \frac{-b}{2a} \pm i \cdot \frac{\sqrt{-d}}{2a}$, hvor $-d$ er positiv. Imaginærdelene bliver altså hinandens modsatte elementer. Og da realdelen $\frac{-b}{2a}$ er den samme i begge komplekse tal, er der altså tale om komplekst konjugerede tal.

Vi ved altså, at løsningerne til andengradsligninger med reelle koefficienter er komplekst konjugerede, **hvis** de er komplekse.

I opgave 5504 blev det – med andre bogstaver - vist, at $(z+p+i\cdot q)\cdot(z+p-i\cdot q) = z^2+2pz+p^2+q^2$, hvilket fortæller os, at $a\cdot(z-w)\cdot\left(z-\overline{w}\right)=0$ giver os en andengradsligning på formen fra Sætning 19, men med **reelle** koefficienter (bemærk, at den imaginære enhed forsvinder, når de to parenteser multipliceres).

Vi har altså vist, at der gælder:

Sætning 20: Andengradsligningen $a\cdot z^2 + b\cdot z + c = 0$, $G = \mathbb{C}$, hvor $a,b,c \in \mathbb{R}$ og $a \neq 0$, har enten 1 eller 2 reelle løsninger eller to komplekse løsninger, der er hinandens komplekst konjugerede.

For alle komplekse tal w er $a\cdot(z-w)\cdot\left(z-\overline{w}\right)=0$; $a \neq 0$ en andengradsligning med reelle koefficienter.

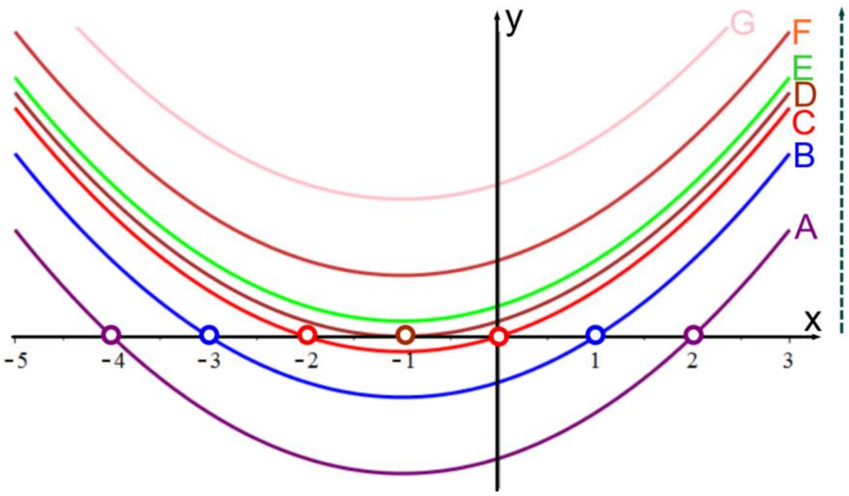
På figuren på næste side illustreres, hvordan man går fra reelle nulpunkter til komplekse nulpunkter, når en parabel parallelforskydes lodret. Bemærk, at figuren til venstre er et almindeligt koordinatsystem inden for de **reelle** tal, mens figuren til højre illustrerer vores komplekse talplan.

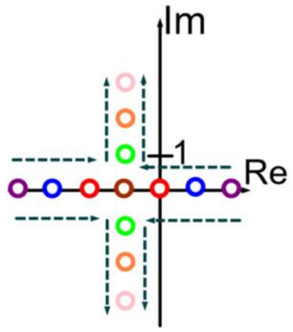
Til venstre ses 7 parabler, der er grafer for polynomier på formen x^2+2x+c. Alle parablerne har altså samme form, og alle parablernes toppunkt har førstekoordinaten -1.

Ved at øge *c*, forskydes parablerne lodret opad, og du skal forestille dig, at vi begynder med parabel *A* og forskyder den trinvis opad, indtil parabel *G*.

Parabel *A* skærer førsteaksen i -4 og 2, parabel *B* skærer i -3 og 1, parabel *C* i -2 og 0, mens endelig parabel *D* rører førsteaksen i -1. Disse nulpunkter for polynomierne er reelle, og på billedet til højre er de placeret på førsteaksen i den komplekse talplan.

Men herefter "slipper" parablerne jo førsteaksen, dvs. parablerne *E*, *F* og *G* skærer ikke førsteaksen, og vi ved, at det betyder, at de tilsvarende polynomier ikke har nogen reelle nulpunkter. Men vi ved også, at der til gengæld er komplekse nulpunkter. Og spørgsmålet er så, hvor de ligger i den komplekse talplan? Dette er illustreret på billedet til højre. Her ses det, at realdelen ikke ændrer sig, men ligger fast på -1, hvilket var det sted, hvor parablerne "slap" førsteaksen. Til gengæld kommer der en imaginærdel på nulpunkterne, og dens numeriske værdi øges, jo mere parablen forskydes opad (hvilket er forsøgt illustreret med de stiplede pile).





Det er altså ikke sådan, at man pludselig havner et andet sted i den komplekse talplan, når parablerne "slipper" førsteaksen, og polynomierne ikke længere har reelle nulpunkter. Man begynder bare at bevæge sig i en anden retning i den komplekse talplan.

Andengradsligninger med komplekse koefficienter:

Eksempel 34: Sætning 19 anvendes til at løse $i\cdot z^2-(1+5i)\cdot z+(1+8i)=0$:

$$z=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{1+5i+\sqrt{(-1-5i)^2-4\cdot i\cdot(1+8i)}}{2\cdot i}=\frac{1+5i+\sqrt{1-25+10i-4i+32}}{2\cdot i}=$$

$$\frac{1+5i+\sqrt{8+6i}}{2\cdot i}=\frac{1+5i\pm(3+i)}{2i}=-i\cdot\frac{1+5i\pm(3+i)}{2}=\begin{cases}3-2i\\2+i\end{cases}$$

Kvadratroden blev udregnet med Maple.

Maple kan selvfølgelig også løse ligningen med 'solve':

$$\mathrm{I}\,z^2-5\,\mathrm{I}\,z-z+1+8\,\mathrm{I}=0\xrightarrow{\text{solve for z}}[[z=3-2\,\mathrm{I}],[z=2+\mathrm{I}]]$$

Det bemærkes, at når koefficienterne er komplekse, er løsningerne til andengradsligningen ikke nødvendigvis hinandens konjugerede. Faktisk er de det som udgangspunkt ikke. Det er kun, hvis man som med f.eks. $(2+3i)\cdot z^2-(16+24i)\cdot z+(34+51i)=0$ kan forkorte ligningen – i dette tilfælde med $(2+3i)$ – så den får reelle koefficienter – i dette tilfælde $z^2-8z+17=0$.

I Eksempel 34 var der problemer med at udregne kvadratroden, fordi vi kun har set på, hvordan det gøres på polær form, mens andengradsligninger typisk anvender rektangulær form. Hvis der arbejdes med pæne, hele tal (dvs. træningsopgaver), kan man dog godt "gætte" sig til rødderne på en måde, der minder om faktoriseringen af andengradspolynomier.

Hvis vi skal bestemme værdierne for $\sqrt{a+i\cdot b}$, skal vi finde de talpar (c,d), der opfylder:

$$\begin{aligned}
&(c+i\cdot d)^2=a+i\cdot b && \Leftrightarrow\\
&c^2-d^2+i\cdot 2cd=a+i\cdot b && \Leftrightarrow\\
&c^2-d^2=a\ \wedge\ cd=\frac{b}{2} && \Leftrightarrow\\
&(c+d)\cdot(c-d)=a\ \wedge\ cd=\frac{b}{2}
\end{aligned}$$

Bemærk, at man i betingelserne for c og d genfinder pointen, at de to værdier af kvadratroden er hinandens modsatte elementer, for hvis man finder et talpar (c,d), der opfylder betingelserne, vil $(-c,-d)$ også gøre det, da kvadraterne c^2 og d^2 samt produktet $c \cdot d$ ikke ændrer sig, når man skifter fortegn på begge størrelser.

Vi har altså vist:

Sætning 21: $\sqrt{a+i\cdot b}$ er tallene $c+i\cdot d$, der opfylder $c^2-d^2=a \ \wedge \ cd=\frac{b}{2}$

Eksempel 35: Vi skal udregne $\sqrt{35-12i}$.

Da $b=-12$, skal vi altså finde to tal c og d med forskellige fortegn, hvis produkt skal være -6. Vi kan frit lade c være positivt og d negativt, for vi skal efterfølgende også bruge det modsatte tal, når begge værdier skal angives.

Hvis det er hele tal, kan der altså være tale om talparrene $(6,1)$ og $(3,2)$, og da $c^2-d^2=35$, ses det, at det første talpar kan bruges. Dvs.:

$$\sqrt{35-12i}=\begin{cases} 6-i \\ -6+i \end{cases}$$

Nu skal $\sqrt{-60-32i}$ udregnes.

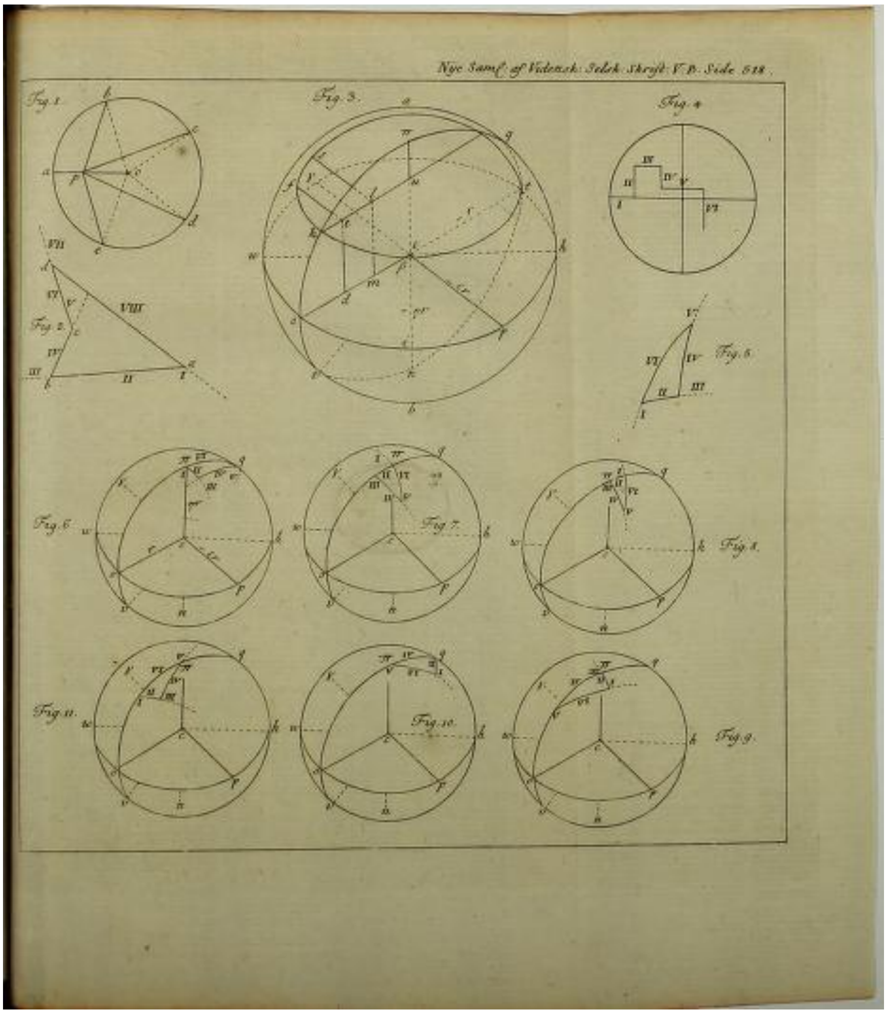
Da $b=-32$, skal c og d igen have forskellige fortegn, og da $\frac{b}{2}=-16$, er de mulige hele talpar $(1,16)$, $(2,8)$ og $(4,4)$. Da $c^2-d^2=-60$, skal d være numerisk størst, og det ses, at det er talparret $(2,8)$, der kan bruges:

$$\sqrt{-60-32i}=\begin{cases} 2-8i \\ -2+8i \end{cases}$$

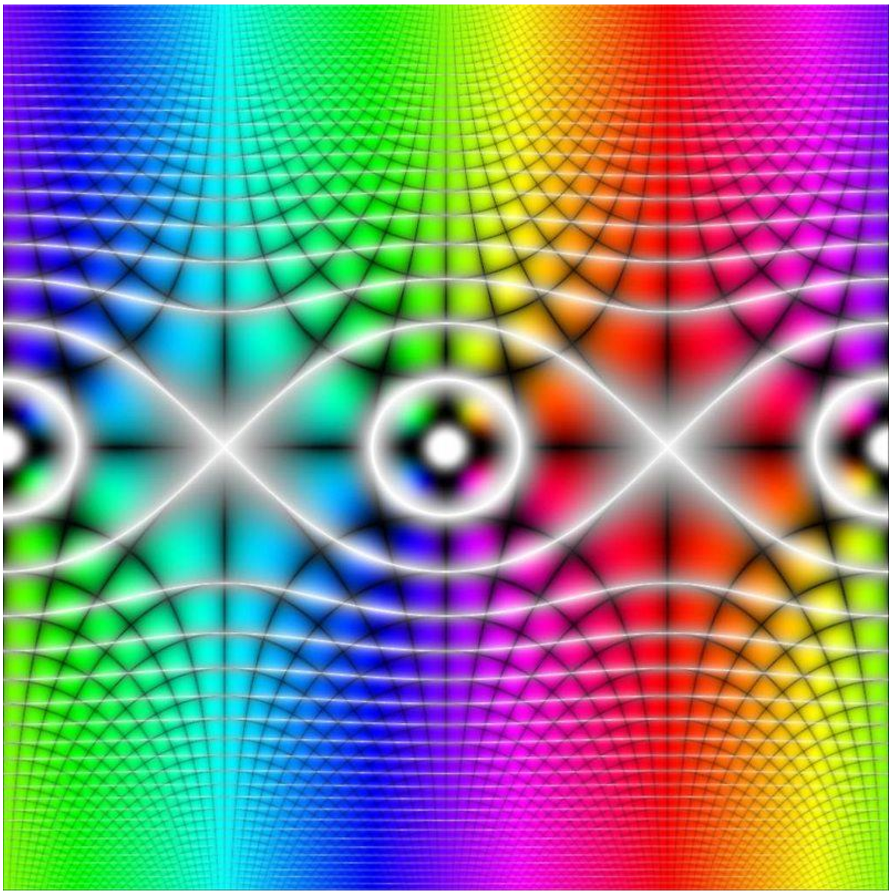
Opgaverne 552*

Du skulle nu gerne være i stand til at foretage udregninger med komplekse tal og kan samtidig tænke over, om du anser dem som virkelige tal.

Herfra kan du f.eks. gå videre med tredjegradsligninger, fjerdegradsligninger, kvaternioner, holomorfe funktioner og Algebraens Fundamentalsætning.



Figurer til Caspar Wessels værk *Om directionens analytiske betegning* publiceret i 1799



Afbildning af den komplekse sinusfunktion