

# OPGAVER 1.g

**Introduktion: Maple, funktioner og regression**

**Grundlæggende matematiske begreber (del 1)**

**Geometri og trigonometri**

**Introduktion til vektorer**

**Grundlæggende matematiske begreber (del 2&3)**

**Uendelighedsbegrebet**

**Funktioner**



FYSIK A

MATEMATIK A

KEMI B

**x-klasserne**

**Gammel Hellerup Gymnasium**

# Indholdsfortegnelse

Introduktion.....	3
Grundlæggende matematiske begreber (del 1) .....	5
Geometri og trigonometri.....	11
Introduktion til vektorer .....	19
Grundlæggende matematiske begreber (del 2&3) .....	27
Uendelighedsbegrebet .....	47
Funktioner .....	48
FACITLISTE .....	66

# Introduktion

Opgave 0010: Et tændt stearinlys står på en vægt, der angiver massen af stearinlyset. Med et ur måles tiden i minutter. Man får følgende målinger:

Tid målt i minutter	0	1	2	3	4	6	8	10
Vægt målt i gram	1,28	1,17	1,07	0,94	0,84	0,61	0,40	0,22

- Bestem ved hjælp af regression den lineære funktion, der bedst beskriver situationen.
- Hvad er massen af stearinlyset ifølge modellen efter 7 minutter?
- Hvornår er lyset brændt ned?
- Hvor mange gram af lyset afbrændes i minuttet?

Opgave 0012: Et termometer er baseret på ledningsevne. Følgende data er oplyst, og modellen, der beskriver spændingsforskellen (spændingsfaldet / spændingen) som funktion af temperaturen, er lineær:

Temperatur målt i grader celsius	25	40	60	75	85	95
Spændingsforskel målt i mV	2,1	2,7	3,5	4,2	4,6	5,0

- Bestem en funktionsforskrift, der angiver spændingsfaldet som funktion af temperaturen.
- Hvad er spændingsfaldet ifølge modellen, når temperaturen er 120 °C?
- Ved hvilken temperatur måles et spændingsfald på 3,1 mV?
- Ved hvilken temperatur måles et spændingsfald på 0 mV?
- Hvor meget skal temperaturen øges, for at spændingsfaldet øges med 0,5 mV?

Opgave 0014: Tag udgangspunkt i funktionsforskriften fra ovenstående opgave. Prøv ved hjælp af tegnene  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$  (tegnene findes under paletten 'Relational' i Maple eller kan indtastes ved at trykke et ulighedstegn efterfulgt af et lighedstegn) at benytte Maple til at svare på spørgsmål af typerne:

Ved hvilke temperaturer er spændingsfaldet **over** 4,0 mV?

Ved hvilke temperaturer er spændingsfaldet mindre end eller lig med 6,2 mV?

Prøv også med skrivemåden " $f(x) > 3$  and  $f(x) < 20$ " (der skal være mellemrum, når man indtaster 'and') at svare på et spørgsmål som:

Ved hvilke temperaturer ligger spændingsfaldet mellem 2,0 mV og 3,6 mV?

Bemærk forskellen i Maples notation mellem 'større end' og 'større end eller lig med'.

Opgave 0020: Indiens befolkningstal  $N$  (angivet i millioner) var til tiden  $t$  (angivet i antal år efter 1960) givet ved:

Antal år efter 1960	0	5	10	15	20	25
Befolkningstal i Indien i millioner	435	487	548	613	687	765

Det antages, at befolkningstallet i Indien kan beskrives ved en eksponentiel udvikling  $N(t) = b \cdot a^t$ .

- Bestem  $a$  og  $b$ .
- Hvor mange procent vokser Indiens befolkningstal med om året?
- Hvad er fordoblingstiden for Indiens befolkningstal ifølge modellen?
- Hvad var befolkningstallet i Indien ifølge modellen i 1977?
- Hvornår vil befolkningstallet i Indien ifølge modellen overstige 1 milliard?
- Hvad var befolkningstallet i Indien i år 0 ifølge modellen? Kommentér resultatet.
- Benyt Maple til at tegne punkter og regressionslinje. Gør andenaksen logaritmisk og bemærk, at punkterne nu danner en ret linje.

Opgave 0022: Opskriv følgende i Maple:  $F_{normal}$ ,  $X_2$ ,  $\Delta E_{mek}$ ,  $H_3PO_4$  og  $T_{\frac{1}{2}}$ .

Bemærk, at du for at skrive det sidste symbol ikke kan anvende indeks, men skal anvende listeplaceringshenvi sning.

Opgave 0024: Antallet  $N$  af radioaktive kerner til tiden  $t$  (målt i sekunder) ses i nedenstående tabel:

Tid målt i sekunder	0	1	2	3	5	8	10	15	20	25	30
Antal kerner	5845	5469	5280	4943	4634	3998	3560	2772	2261	1701	1346

- Plot punkterne uden tendenslinje i både et almindeligt og et enkeltlogaritmisk koordinatsystem og vurder i hvilket af koordinatsystemerne, at punkterne tilnærmelsesvis danner en ret linje.
- Bestem  $a$  og  $N_0$  i modellen  $N(t) = N_0 \cdot a^t$ .
- Hvor mange kerner er der ifølge modellen tilbage efter 60 sekunder?
- Efter hvor mange sekunder er der ifølge modellen 10 kerner tilbage?
- Bestem halveringstiden.
- Hvor mange procent falder antallet af kerner med for hvert sekund?
- Arbejd med grafen: Skriv aksetitler, anvend andre punkter, justér farven på tendenslinjen, ...

Opgave 0030: En oversigt over vægt og diameter af kirkeklokkerne i Saint Patrick's Cathedral i Dublin er givet i nedenstående tabel:

Diameter (i tommer)	29,5	31,5	34,0	35,0	38,0	42,0	47,0	49,5	55,0	62,0
Vægt (i pund)	801	925	1050	1116	1253	1638	2122	2467	3339	5089

Det antages, at vægten  $V$  (angivet i pund) er givet ved en potensvækst  $V(d) = b \cdot d^a$ , hvor  $d$  er diameteren (målt i tommer).

- Bestem konstanterne  $a$  og  $b$ .
- Hvor meget vejer ifølge modellen en kirkeklokke med diameteren 36,5 tommer?
- Hvor stor skal diameteren ifølge modellen være, for at vægten er 4000 pund?
- Med hvor mange procent øges vægten af en kirkeklokke, når diameteren øges med 30%?
- Hvor mange procent skal diameteren øges med, hvis vægten skal fordobles?

Opgave 0032: En funktion  $f$  har forskriften  $f(x) = 8,9 \cdot x^{0,43}$ .

- Hvor mange procent øges funktionsværdien med, når  $x$ -værdien øges med 25%?
- Hvor mange procent skal  $x$ -værdien øges med, for at funktionsværdien skal øges med 60%?
- Hvor mange procent falder funktionsværdien med, når  $x$ -værdien falder med 10%?
- Hvor mange procent skal  $x$ -værdien falde med, hvis funktionsværdien skal halveres?

Opgave 0034: En funktion  $g$  har forskriften  $g(x) = 17,9 \cdot x^{-1,25}$ .

- Hvordan ændres funktionsværdien, når  $x$ -værdien øges med 70%?
- Hvordan ændres funktionsværdien, når  $x$ -værdien falder med 40%?
- Hvordan skal  $x$ -værdien ændres, hvis funktionsværdien skal øges med 18%?
- Hvordan skal  $x$ -værdien ændres, hvis funktionsværdien skal falde med 54%?

# Grundlæggende matematiske begreber (del 1)

Opgave 1000: Se på følgende mængder:  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{3, 2, 1\}$ ,  $C = \{1, 2, 3, 4\}$ ,

$$D = \{\text{blå, gul, grøn}\}, E = \{\text{gul, grøn, rød}\}, F = \{\text{gul, grøn, dør}\}$$

Afgør følgende spørgsmål med "sandt/falsk" (tjek svarene i facitlisten):

a)  $A = B$    b)  $A = C$    c)  $D = E$    d)  $E = F$    e)  $A \neq B$    g)  $C \neq D$

Opgave 1002: Vi har mængderne:  $A = \{3, 7, 11\}$ ,  $B = \{a, d, f, q\}$ ,  $C = \{0\}$ ,  $D = \{ \}$  og  $E = \{\emptyset, A, B\}$

Afgør følgende med "sandt/falsk" (tjek løbende dine svar):

a)  $3 \in A$    b)  $3 \in B$    c)  $a \notin A$    d)  $a \notin B$    e)  $0 \in C$    f)  $0 \in D$

g)  $\emptyset \notin B$    h)  $\emptyset \notin C$    i)  $\emptyset \in D$    j)  $\emptyset \in E$    k)  $7 \in A$    l)  $11 \notin A$

m)  $\{7, 11\} \in A$    n)  $\{3, 7, 11\} \in A$    o)  $\{3, 7, 11\} = A$    p)  $\{a, d, f, q\} \notin E$    q)  $\{\emptyset\} = D$

Opgave 1004: Se på mængderne  $A = \emptyset$     $B = \{A\}$     $C = \{A, B\}$     $D = \{A, B, C\}$

Afgør følgende med "sandt/falsk":

a)  $\emptyset \in A$    b)  $\emptyset \in B$    c)  $\emptyset \notin C$    d)  $\emptyset \notin D$

e)  $\{\emptyset\} \in A$    g)  $\{\emptyset\} \in B$    h)  $\{\emptyset\} \notin C$    i)  $\{\emptyset\} \notin D$

Opgave 1010: Se på følgende mængder:  $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ,  $B = \emptyset$ ,  $C = \{3, 5, 7, 1\}$ ,  $D = \{1, 2, 3\}$ ,

$$E = \{1, 3, 5, 7, 9\}, F = \{5\}, G = \{1, 7\}$$

a) Hvilke af mængderne  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  og  $G$  er delmængder af  $A$ .

b) Hvilke af mængderne  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  og  $G$  er ægte delmængder af  $A$ .

Opgave 1012: Afgør følgende med "sandt/falsk":

a)  $\{1, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$    b)  $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$    c)  $\{1, 3\} = \{1, 2, 3\}$    d)  $\{1, 3\} \in \{1, 2, 3\}$

e)  $\emptyset \subseteq \{1, 2, 3\}$    f)  $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$    g)  $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$    h)  $\{1, 2, 3\} \in \{1, 2, 3\}$

i)  $2 \subseteq \{1, 2, 3\}$    j)  $\{2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$    k)  $2 \in \{1, 2, 3\}$    l)  $\{2\} \in \{1, 2, 3\}$

Opgave 1020: Bestem følgende mængder:

a)  $\{2, 3, 7, 9\} \cap \{1, 3, 6, 9\}$    b)  $\{2, 3, 7, 9\} \cap \{1, 3, 6, 11\}$    c)  $\{2, 3, 7, 9\} \cap \{1, 4, 6, 8\}$

d)  $\{1, 5, 8\} \cap \{1, 5, 8\}$    e)  $\{1, 3, 5\} \cup \{2, 4\}$    f)  $\{1, 3, 5\} \cup \{1, 3, 5\}$

g)  $\{1, 3, 5\} \cap \emptyset$    h)  $\{1, 3, 5\} \cup \emptyset$    i)  $(\{1, 3\} \cup \{2, 4\}) \cap \{2, 5\}$

Opgave 1022: Afgør, om følgende mængder er disjunkte (ja/nej):

a)  $\{1, 7\}$  og  $\{2, 5\}$    b)  $\{3, 4, 9\}$  og  $\{1, 4\}$    c)  $\{9, 15\}$  og  $\{9, 15\}$    d)  $\emptyset$  og  $\{6, 7\}$

Opgave 1024: Bestem følgende differensmængder:

a)  $\{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{2, 4\}$    b)  $\{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{2, 4, 6\}$    c)  $\{2, 4, 7\} \setminus \{1, 2, 4, 5, 7, 9\}$

d)  $\{1\} \setminus \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$    e)  $\{2, 3\} \setminus \emptyset$    f)  $(\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\}) \setminus (\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5\})$

Opgave 1026: Se på følgende mængder:  $A = \{1, 4, 9, 23\}$ ,  $B = \emptyset$ ,  $C = \{1, 2, 5, 9, 11\}$  og  $D = \{1, 2, 5\}$

Bestem følgende udtryk og tjek resultatet med Maple ( $\cap, \cup$  og  $\setminus$  findes under 'Common Symbols').

a)  $A \cap C$    b)  $A \cap D$    c)  $A \cap B$    d)  $A \cup C$    e)  $A \cup D$    f)  $A \cup B$    g)  $A \setminus C$    h)  $C \setminus A$

i)  $A \setminus B$    j)  $B \setminus A$    k)  $D \setminus C$    l)  $D \setminus A$    m)  $C \cap D$    n)  $B \cap D$    o)  $C \cup D$    p)  $B \cup D$

q)  $A \cap C \cap D$    r)  $A \cap B \cap C$    s)  $A \cup C \cup D$    t)  $A \cup B \cup C \cup D$

Opgave 1030: Lad grundmængden være  $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ , og lad

$$A = \{2, 3, 4, 7\}, B = \emptyset, D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \text{ og } E = \{1\}$$

a) Bestem komplementærmængderne til  $A$ ,  $B$ ,  $D$  og  $E$ .

Lad nu grundmængden være  $G_1 = \{1, 2, 3, \dots, 11\}$

b) Bestem komplementærmængderne til  $A$ ,  $B$ ,  $D$  og  $E$ .

Opgave 1032: Bestem følgende kartesiske produkter, når følgende mængder er givet:

$$A = \{1, 2\}, B = \{3, 4\}, C = \{4, 5, 6\} \text{ og } D = \emptyset$$

a)  $A \times B$  b)  $A \times C$  c)  $A \times A$  d)  $A \times D$  e)  $A \times A \times A$  f)  $C \times C \times C$

Opgave 1080: Udregn følgende udtryk eller angiv, at de ikke kan skrives simple (i.s.)

$$a) 4a + 11a \quad b) 3b + 5c \quad c) 3x^2 + 9x^2 \quad d) x^2 + 9x^2 \quad e) 5y^2 + 6x^2 \quad f) 2y^2 + 8y^2$$

$$g) 7 \cdot \ln(x) + 13 \cdot \ln(x) \quad h) 5 \sin(y) + 3 \sin(y) \quad i) \sin(x) + 5 \sin(y) \quad j) 2\sqrt{x^2 + y^2} + 4\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$k) 5(a^2 + b^2) + 3(b^2 + a^2) \quad l) 2\frac{x}{y \cdot z} + 9\frac{x}{z \cdot y} \quad m) 3 \cdot \log(\sin^2(\sqrt{x+y})) + 5 \cdot \log(\sin^2(\sqrt{x+y}))$$

$$n) 2 \text{ pærer} + 4 \text{ bananer}$$

Opgave 1090: Hvor mange elementer indeholder det kartesiske produkt  $\{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ?

Opgave 1092: Vi ser på grundmængden  $G = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$  og mængderne  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  og

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}.$$

a) Er  $A$  og  $B$  disjunkte?

b) Hvor mange elementer indeholder henholdsvis  $A$ ,  $B$  og  $A \cup B$ ?

c) Hvor mange elementer indeholder det kartesiske produkt  $A \times B$ ?

d) Hvor mange elementer indeholder komplementærmængden til  $A$ ?

e) Hvor mange elementer indeholder komplementærmængden til  $B$ ?

f) Hvor mange elementer indeholder henholdsvis  $A \setminus B$  og  $B \setminus A$ ?

Opgave 1094: Vi ser på grundmængden  $G = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$  og mængderne  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  og

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}.$$

a) Er  $A$  og  $B$  disjunkte?

b) Hvor mange elementer indeholder henholdsvis  $A$ ,  $B$  og  $A \cup B$ ?

c) Hvor mange elementer indeholder det kartesiske produkt  $A \times B$ ?

d) Hvor mange elementer indeholder komplementærmængden til  $A$ ?

e) Hvor mange elementer indeholder komplementærmængden til  $B$ ?

f) Hvor mange elementer indeholder henholdsvis  $A \setminus B$  og  $B \setminus A$ ?

Opgave 1100: a) Hvilket tal skal lægges til 8 for at få 17?

b) Hvilket tal skal lægges til 5 for at få 21?

c) Hvilket tal skal lægges til 6 for at få 6?

d) Hvilket tal skal lægges til 13 for at få 9?

Opgave 1102: a) Hvilket tal skal lægges til  $c$ , for at få  $d$ ?

b) Hvilket tal skal lægges til  $d$  for at få  $c$ ?

c) Hvilket tal skal lægges til  $-c$  for at få  $d$ ?

d) Hvilket tal skal lægges til  $-d$  for at få  $c$ ?

e) Hvilket tal skal lægges til  $c$  for at få  $-d$ ?

f) Hvilket tal skal lægges til  $d$  for at få  $-c$ ?

Opgave 1110: Omskriv følgende endelige decimalbrøker til brøker med hele tal i tæller og nævner.

Tjek dine facit med Maple ved højreklik på tallet og 'Conversions' og 'Exact Rational':

a) 8,3 b) 10,39 c) 0,01123 d) 2,3197 e) 0,000029017 f) 0,0128

Opgave 1120: Omskriv følgende periodiske uendelige decimalbrøker til brøker med hele tal i tæller og nævner.

a)  $53,\overline{2}$     b)  $2,\overline{73}$     c)  $0,\overline{16735}$     d)  $6,\overline{3914}$     e)  $34,\overline{730515932}$

Opgave 1122: Omskriv følgende decimalbrøker til brøker med hele tal i tæller og nævner:

a)  $43,719$     b)  $4,\overline{75}$     c)  $8,32131$

Opgave 1140: a) Opskriv intervallet  $]4,9]$  med notationen, hvor man anvender  $x$  og ulighedstegn.

b) Opskriv intervallet  $-3 \leq x < 7$  med firkantede parenteser.

c) Opskriv intervallet  $] -3,11[$  med ulighedstegn.

d) Opskriv intervallet  $x < 9$  med firkantede parenteser.

e) Opskriv intervallet  $] -\infty, 7]$  med ulighedstegn.

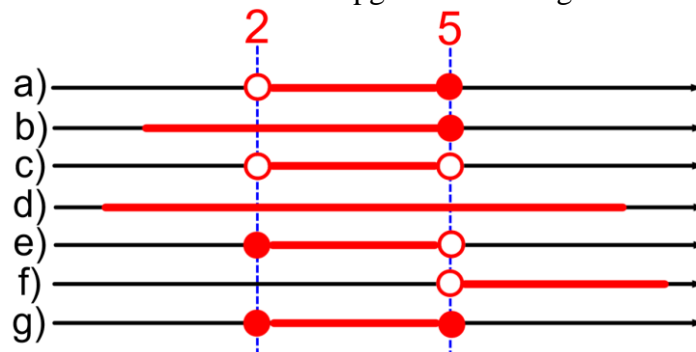
f) Opskriv intervallet  $x \geq 21$  med firkantede parenteser.

g) Opskriv intervallet  $]12, \infty[$  med ulighedstegn.

Opgave 1142: Se på intervallerne  $]2,5]$ ,  $] -\infty, 5]$ ,  $]2,5]$ ,  $] -\infty, \infty[$ ,  $]2,5[$ ,  $]5, \infty[$  og  $]2,5[$ . Find det interval blandt disse, der lever op til følgende:

- a) Det er lukket og indeholder ikke tallet 1.
- b) Det er begrænset og venstreåbent, men ikke højreåbent.
- c) Det er åbent og venstrebegrænset, men ikke begrænset.
- d) Det er begrænset og højreåbent, men ikke åbent.
- e) Det er højrebegrænset, men ikke begrænset og ikke højreåbent.
- f) Det er ubegrænset.
- g) Det er begrænset og åbent.

Opgave 1144: Se på de samme intervaller som i opgave 1142. Angiv det interval, der passer til:



Opgave 1146: Bestem det interval eller den mængde, der svarer til følgende fælles- eller foreningsmængder:

a)  $[-2, 7] \cap [4, 13]$     b)  $[13, 24] \cap [18, 38]$     c)  $[0, 7] \cap ]2, 12]$

d)  $[5, 8] \cap ]6, 7[$     e)  $]14, 28[ \cap ]8, 17[$     f)  $]3, 4[ \cap ]4, 5[$

g)  $[-2, 7] \cup [4, 13]$     h)  $[5, 11] \cup [11, 19]$     i)  $[5, 11] \cup ]11, 14[$

j)  $]3, 9[ \cup [6, 12[$     k)  $]1, 2[ \cup [1, 2]$     l)  $] -1, 3[ \cup [2, 4]$

Opgave 1190: Løs følgende ligninger med anvendelse af nulreglen. Tjek med facitliste og Maple:

a)  $(x+2) \cdot (x-5) = 0$

b)  $(x-7) \cdot (x+6) \cdot (x+11) = 0$

c)  $(x+2) \cdot (x-3) \cdot (x+5)^6 = 0$

d)  $(x-4)^2 \cdot (x+3) \cdot (x+5)^6 = 0$

Opgave 1192: Løs følgende ligninger (tjek med facitlisten og efterfølgende Maple-indtastning):

a)  $11 \cdot 78 \cdot 13254 \cdot x \cdot 1923 \cdot 9 = 0$

b)  $17 \cdot 234 \cdot 475252 \cdot 34321 \cdot 0 \cdot 34321 \cdot 673 = x$

c)  $584 \cdot 113 \cdot 0 \cdot 78 = x + 3$

d)  $(x^2 + 1) \cdot (x - 5) = 0$

e)  $(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) = 0$

f)  $(x^3 + 1) \cdot (x^3 - 8) = 0$

g)  $(x^2 + 27) \cdot (x^3 + 27) \cdot (x^4 + 27) = 0$

Opgave 1194: Løs følgende ligninger (husk nulreglen):

a)  $(x + 12) \cdot (x - 19) = 0$

b)  $(x - 14) \cdot x \cdot (x + 7) = 0$

c)  $(x^2 - 9) \cdot (x^2 + 4) = 0$

d)  $(x^4 - 1) \cdot (x^3 + 27) = 0$

Opgave 1200: Reducér følgende udtryk:

a)  $-(a \cdot b) \cdot (-a^2 \cdot b) \cdot (-a \cdot c)$       b)  $x \cdot y^2 \cdot (-x^2 \cdot z) \cdot (-x \cdot y \cdot z)$

c)  $a^2 \cdot b \cdot (-a) \cdot (-b) \cdot (-a)^2 \cdot b$       d)  $x \cdot z \cdot y^2 \cdot (-x)^2 \cdot z^3 \cdot (-y)^3$

Opgave 1202: Reducér følgende udtryk:

a)  $-5x^2 \cdot (-6xy^2) \cdot (-10y^3) \cdot x \cdot (-2)$       b)  $\sin(x) \cdot (-2\sin(x)) \cdot y^2 \cdot \sin(x) \cdot (-5y \cdot \sin(x))$

c)  $(1-x)^2 \cdot (-4y^2) \cdot (1-x)^2 \cdot (-z)^4 \cdot (1-x)$       d)  $(ab^2)^3 \cdot (-a^2bc)^2 \cdot (-c^3) \cdot (-ab^2c^3)^3 \cdot (-1)^6$

Opgave 1210: Reducér følgende udtryk:

a)  $(x + y) \cdot (2x - 3y)$       b)  $3 \cdot (a + 2 - 3 \cdot b)$       c)  $(2a - b) - (a - b)$

d)  $(2a - 3b) \cdot (4a - 2b)$       e)  $-(2x + y - 4z) \cdot 3$       f)  $(-x - y) \cdot (-x - y)$

g)  $-3ab^2 \cdot (4a - ab - 5 \cdot (-b))$       h)  $-((-3x^2y + 4xy^2) - 3xy \cdot (y - x))$

Opgave 1220: Reducér følgende udtryk til ét tal eller én brøk med hele tal i tæller og nævner:

a)  $\frac{9}{9}$       b)  $13 \cdot \frac{1}{7}$       c)  $\frac{1}{5} \cdot 4$       d)  $7 \cdot \frac{4}{5}$       e)  $\frac{9}{2} \cdot 5$       f)  $\frac{3}{7}$       g)  $\frac{5}{6}$       h)  $\frac{9}{8}$       i)  $\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{7}$       j)  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$

Opgave 1230: Reducér følgende udtryk til ét tal eller én brøk med hele tal i tæller og nævner:

a)  $\frac{2}{9} \cdot \frac{7}{5}$       b)  $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{4}$       c)  $\frac{2}{5}$       d)  $\frac{7}{3}$       e)  $\frac{5}{7}$       f)  $\frac{11}{3}$       g)  $\frac{3}{4}$       h)  $\frac{7}{12}$       i)  $\frac{15}{5}$       j)  $\frac{21}{3}$

Opgave 1240: Reducér følgende udtryk:

a)  $\frac{a^2 + a \cdot b + a}{a}$       b)  $\frac{3x + x \cdot y + x^2}{x}$       c)  $\frac{a}{3} + \frac{4a}{3}$       d)  $\frac{8}{x} + \frac{3}{x}$       e)  $\frac{4}{3} + \frac{11}{3}$       f)  $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$       g)  $\frac{7}{6} + \frac{1}{9}$

Opgave 1260: Udregn følgende (tjek først med facitliste og bagefter med indtastning i Maple):

a)  $(4 + 3i) + (2 + 5i)$       b)  $(1 + 7i) + (3 + 9i)$       c)  $(6 - 2i) + (-1 + 5i)$       d)  $(1 - i) + (3 + i)$

e)  $(2 + 5i) \cdot (1 + 3i)$       f)  $(9 + 2i) \cdot (3 + 4i)$       g)  $(2 - i) \cdot (3 + i)$       h)  $(-1 + 4i) \cdot (5 - 3i)$

j)  $(7 + 5i) - (4 + 2i)$       k)  $(9 + 2i) - (4 + i)$       l)  $(8 + 5i) + (6 - 5i)$       m)  $(7 - 3i) + (-7 + 3i)$

n)  $(4 + 7i) \cdot (4 - 7i)$       o)  $(3 - 5i) \cdot (3 + 5i)$       p)  $\frac{(3 + 4i) \cdot (3 - 4i)}{25}$       q)  $\frac{7 + 2i}{5 - 3i}$



Opgave 1300: Anvend potensregnerreglerne til at bestemme følgende:

$$\begin{array}{llllll} a) x^9 \cdot x^5 & b) \frac{13^{11}}{13^6} & c) \frac{11^{13}}{6^{13}} & d) 5^x \cdot 9^x & e) (a^3)^7 & f) \frac{c^9 \cdot c^5}{c^4} & g) \frac{3^a \cdot 4^a}{5^a} \\ h) \frac{f^{12}}{f^3 \cdot f^5} & i) 37^4 \cdot 37 \cdot 37^9 & j) \frac{(k^2)^7 \cdot k^5}{k^{11}} & k) \frac{s \cdot (s^4)^2}{(t^3)^3} & l) 6^x \cdot 9^y \cdot 3^x \cdot 2^y \end{array}$$

Opgave 1302: Anvend potensregnerregler til at reducere følgende udtryk:

$$a) a^{13} \cdot a^{17} \quad b) \frac{x^{11}}{x^4} \quad c) \frac{y^5 \cdot (y^7)^2}{y^3} \quad d) \frac{x^{14} \cdot x}{(x^5)^3} \quad e) \frac{x^{-7} \cdot x^4}{x}$$

Opgave 1310: Omregn (i hånden) følgende til uforkortede brøker:

$$a) 6^{-2} \quad b) 5^{-1} \quad c) 3 \cdot 7^{-1} \quad d) \frac{2^{-1}}{7^{-1}} \quad e) \frac{2^{-3}}{3^{-2}} \quad f) \frac{711^3 \cdot 711^{-3}}{5} \quad g) \frac{10^{-3}}{9^{-2}} \quad h) 8^5 \cdot 8^{-5} \cdot 13^{-1}$$

Opgave 1312: Omregn til uforkortede brøker:

$$a) 5^{-3} \quad b) 13^{-1} \quad c) \left(\frac{4}{7}\right)^{-1} \quad d) \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \quad e) 8^{-1} \cdot 3 \quad f) 2^{-5} \cdot 7 \quad g) \frac{1}{4^{-2} \cdot 5} \quad h) \frac{1}{7^{-1} \cdot 13}$$

Opgave 1320: Bestem (i hånden) følgende rødder (tjek med facitliste og Maple-indtastning):

$$\begin{array}{llllll} a) \sqrt[3]{27} & b) \sqrt{25} & c) \sqrt[4]{10000} & d) \sqrt[4]{14} & e) \sqrt[3]{\frac{1}{3}} & f) \sqrt[2]{\frac{1}{64}} & g) \sqrt[5]{-32} \\ h) \sqrt[9]{1} & i) \sqrt[4]{-1} & j) \sqrt[3]{8} & k) \sqrt[2]{9} & l) \sqrt[3]{-27} & m) \sqrt[5]{-32} \end{array}$$

Opgave 1322: Bestem følgende rødder:

$$a) \sqrt[4]{16} \quad b) \sqrt{144} \quad c) \sqrt[4]{19} \quad d) \sqrt[3]{17} \quad e) \sqrt[3]{27} \quad f) \sqrt[4]{\frac{1}{10000}} \quad g) \sqrt[5]{-100000}$$

Opgave 1330: Beregn følgende i hånden (tjek med facitliste og Maple-indtastning):

$$a) 9^{\frac{1}{2}} \quad b) 16^{\frac{1}{2}} \quad c) 25^{\frac{1}{2}} \quad d) 27^{\frac{1}{3}} \quad e) 125^{\frac{1}{3}} \quad f) 16^{\frac{1}{4}} \quad g) 81^{\frac{1}{4}} \quad h) 9^{-\frac{1}{2}} \quad i) \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad j) 81^{-\frac{1}{4}}$$

Opgave 1332: Beregn følgende:  $a) 81^{\frac{1}{2}} \quad b) 1^{\frac{1}{2}} \quad c) 25^{-\frac{1}{2}} \quad d) 27^{-\frac{1}{3}} \quad e) 64^{\frac{1}{6}} \quad f) \left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad g) 128^{-\frac{1}{7}}$

Opgave 1340: Beregn følgende i hånden (tjek med facitliste og Maple-indtastning)

$$a) 100^{\frac{3}{2}} \quad b) 1000^{\frac{2}{3}} \quad c) 25^{\frac{3}{2}} \quad d) (-1000)^{\frac{2}{3}} \quad e) 27^{\frac{4}{3}} \quad f) (-8)^{\frac{5}{3}} \quad g) 8^{-\frac{2}{3}} \quad h) \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}} \quad i) \left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

Opgave 1342: Beregn følgende:

$$a) 27^{\frac{2}{3}} \quad b) 16^{\frac{3}{2}} \quad c) 128^{\frac{3}{7}} \quad d) (-8)^{\frac{2}{3}} \quad e) 125^{-\frac{2}{3}} \quad f) (-8)^{-\frac{2}{3}} \quad g) \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}} \quad h) \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

Opgave 1350: Forudse, hvordan Maple vil omskrive følgende udtryk, og tjek det:

$$a) \sqrt{20} \quad b) \sqrt{18} \quad c) \sqrt{36} \quad d) \sqrt{100} \quad e) \sqrt{72}$$

Opgave 1352: Udregn følgende:

$$a) \sqrt{\frac{4}{9}} \quad b) \sqrt{\frac{49}{16}} \quad c) \sqrt{\frac{1}{64}} \quad d) \sqrt[3]{\frac{125}{8}} \quad e) \sqrt[3]{\frac{1}{27}} \quad f) \sqrt[5]{\frac{1}{32}}$$

Opgave 1354: Udregn følgende:

$$a) \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{13}} \quad b) \frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{270}} \quad c) \frac{\sqrt{200}}{\sqrt{72}} \quad d) \frac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}} \quad e) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{147}} \quad f) \frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{135}}$$



# Geometri og trigonometri

Opgave 2000: Placér følgende begreber i et skema som vist nederst i højre hjørne:

**Uligebenet trapez**  
Netop to af siderne er parallelle, og de to andre sider er ikke lige lange.

**Ikke-rektangel**  
Et parallelogram uden rette vinkler.

**Romboide**  
Modstående sider og modstående vinkler er lige store. Siderne er ikke alle lige lange. Ingen vinkler er rette.

**Ligebenet trapez**  
Netop to af siderne er parallelle, og de to andre sider er lige lange.

**Aflang**  
Alle vinkler er rette. Ikke alle sider er lige lange.

**Rombe**  
Alle sider er lige lange. Ingen vinkler er rette.

**Parallelogram**  
Modstående sider er parallelle

**Rektangel**  
Alle vinkler er rette.

**Kvadrat**  
Alle sider er lige lange, og alle vinkler er rette.

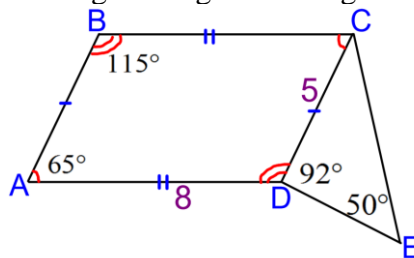
**Retlinede firkanter**  
Plan figur afgrænset af fire rette linjestykker, der ikke skærer hinanden.

**Trapez**  
Netop to af siderne er parallelle

**Trapezoide**  
Ingen af siderne er parallelle.

**Ikke-parallelogram**  
Mindst et par af modstående sider er ikke parallelle.

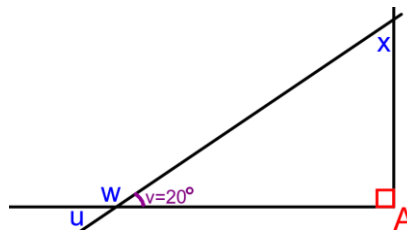
Opgave 2010: På figuren nedenfor er angivet nogle sidelængder og vinkler:



Bestem følgende størrelser:

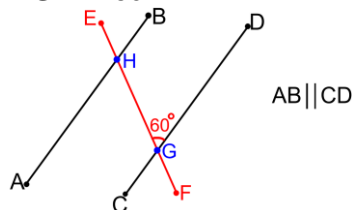
- a)  $|CD|$  b)  $\angle ABC$  c)  $|AB|$  d)  $\angle BCD$  e)  $|BC|$  f)  $\angle DCE$  g)  $\angle ADC$  h)  $\angle BCE$  i)  $\angle ADE$

Opgave 2011: En figur består af tre rette linjestykker, der bl.a. danner en ret vinkel A og en vinkel  $v$  på  $20^\circ$  (se figuren).



Bestem vinklerne  $u$ ,  $w$  og  $x$  og sæt navn på dem (f.eks. ”  $y = 340^\circ$  Eksplementvinkel til  $v$ ”)

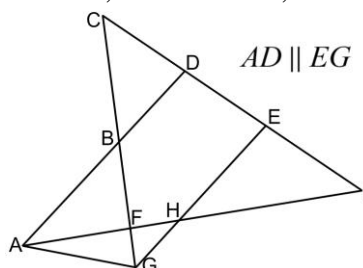
Opgave 2012: Linjestykkerne  $AB$  og  $CD$  er parallelle, og de skæres af linjestykket  $EF$  i punkterne  $G$  og  $H$ . Det oplyses, at  $\angle EGD = 60^\circ$ .



Bestem nedenstående vinkler. Husk, at du skal skrive begrundelser (argumentation).

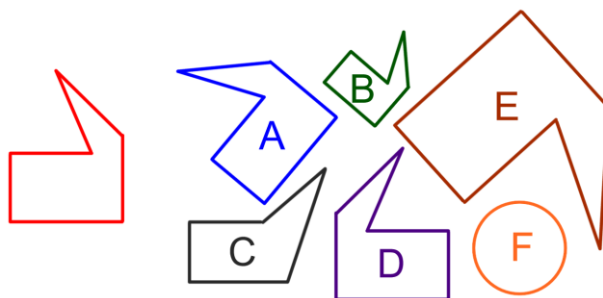
- a)  $\angle CGF$  . b)  $\angle CGE$ . c)  $\angle BHF$ .

Opgave 2013: På nedenstående figur er forbindelseslinjerne rette linjestykker.  $C$  er forbundet med  $I$ , og punkterne  $D$  og  $E$  ligger på  $CI$ .  $C$  er forbundet med  $G$ , og punkterne  $B$  og  $F$  ligger på  $CG$ . Linjestykkerne  $AD$  og  $EG$  er parallelle, og  $A$  er forbundet med  $I$ . Punktet  $B$  ligger på  $AD$ , og punkterne  $F$  og  $H$  ligger på  $AI$ .  
 Det oplyses, at  $\angle CBD = 50^\circ$ ,  $\angle EHI = 39^\circ$ ,  $\angle AGE = 122^\circ$  og  $\angle I = 43^\circ$ .



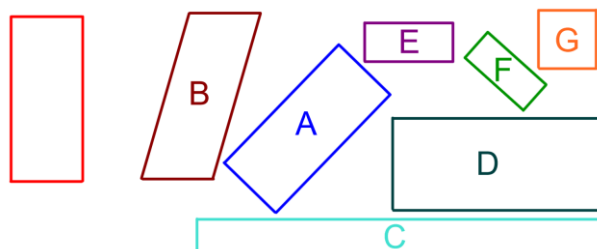
Bestem følgende vinkler (Der skal skrives argumentation og/eller mellemregning til alle svar):  
 a)  $\angle ABG$  b)  $\angle BAF$  c)  $\angle AHE$  d)  $\angle IEH$  e)  $\angle BDC$  f)  $\angle C$  g)  $\angle AGF$

Opgave 2020: Tag udgangspunkt i den røde figur blandt nedenstående figurer.



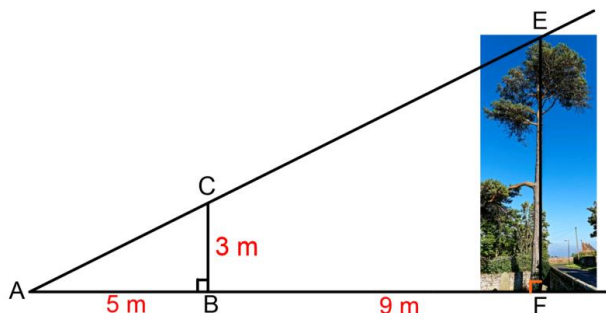
- Hvilke figurer er kongruente med den røde figur?
- Hvilke figurer er ligedannede med den røde figur?

Opgave 2022: Tag udgangspunkt i den røde figur.



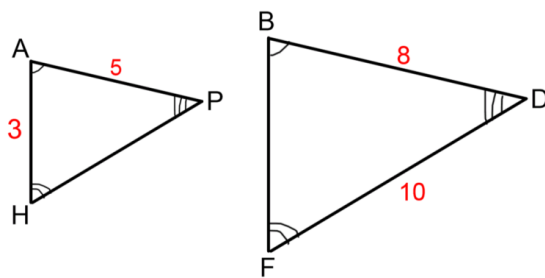
- Hvilke figurer er kongruente med den røde figur?
- Hvilke figurer er ligedannede med den røde figur?
- Hvilke figurer er ensvinklede med den røde figur?

Opgave 2030: Et ret højt træ kaster en ret lang skygge. En 3 m høj pæl placeres lodret 9 m fra træet, så deres skygger ender i samme punkt. Pælens skygge er 5 m lang. Som angivet på figuren gælder altså:  $|BC| = 3\text{ m}$ ,  $|AB| = 5\text{ m}$  og  $|BF| = 9\text{ m}$



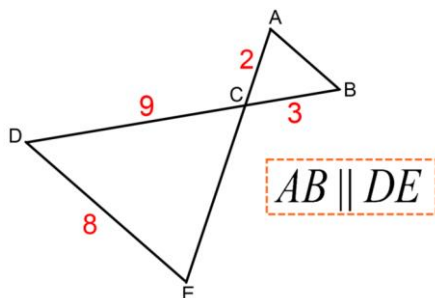
Bestem højden af træet.

Opgave 2031: Trekkanterne  $AHP$  og  $BFD$  er ensvinklede med  $\angle A = \angle B$ ,  $\angle H = \angle F$  og  $\angle P = \angle D$ . Nogle af sidelængderne er angivet på figuren.



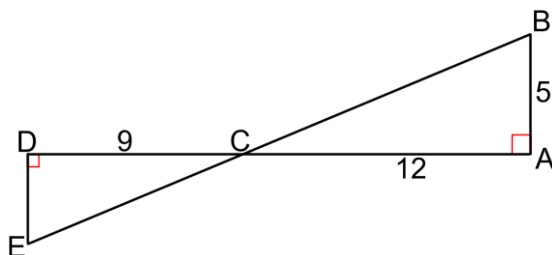
Bestem  $|HP|$  og  $|BF|$  (svarene kan med fordel angives som brøker).

Opgave 2032: På figuren er trekkanterne  $ABC$  og  $CDE$  tegnet mellem de parallelle linjestykker  $AB$  og  $DE$ :



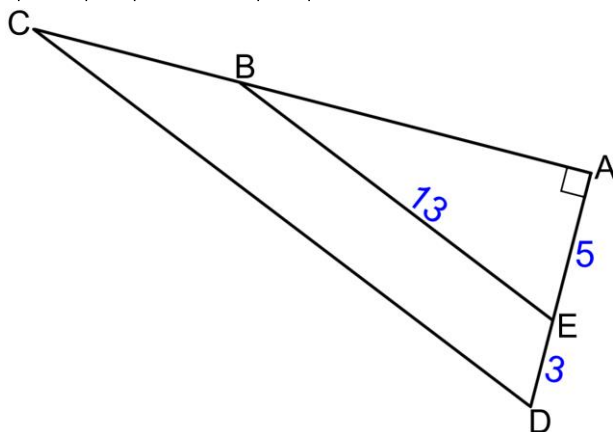
Begrund, at trekkanterne  $ABC$  og  $CDE$  er ensvinklede. Bestem de to manglende sidelængder i trekkanterne.

Opgave 2033: Trekkanterne  $ABC$  og  $CDE$  er retvinklede med de rette vinkler  $A$  og  $D$  (se figuren nedenfor). Det oplyses, at  $|AB|=5$ ,  $|AC|=12$  og  $|CD|=9$ .



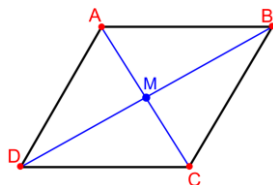
- Bestem  $|BC|$ .
- Bestem  $|DE|$ .
- Bestem arealerne af hver af trekkanterne  $ABC$  og  $CDE$ .

Opgave 2034: De retvinklede trekkanter  $BAE$  og  $CAD$  er ligedannede. Det oplyses, at  $|AE|=5$ ,  $|BE|=13$  og  $|ED|=3$



- Bestem  $|AB|$ .
- Bestem  $|AC|$ .
- Bestem arealet af firkanten  $BCDE$ .

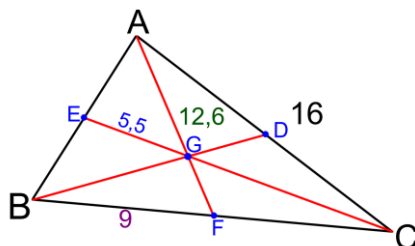
Opgave 2040:  $ABCD$  er et parallelogram, og på figuren er indtegnet diagonalerne  $AC$  og  $BD$ , og deres skæringspunkt  $M$  er markeret.



Hvilke af følgende kan man sige med sikkerhed (sæt krydser):

- a)  $|AD| = |AB|$     b)  $|AD| = |BC|$     c)  $|AM| = |CM|$     d)  $|AM| = |BM|$     e)  $|AB| = |BM|$   
 f)  $\angle AMB = 90^\circ$     g)  $\angle BAD = \angle BCD$

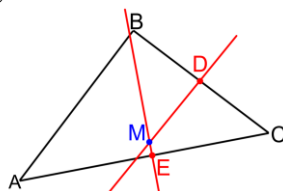
Opgave 2042: I  $\triangle ABC$  er indtegnet de tre medianer (de røde linjer). Medianernes fodpunkter er  $D$ ,  $E$  og  $F$ . Medianerne skærer hverandre i punktet  $G$ . Det oplyses, at  $|EG| = 5,5$ ,  $|BF| = 9$  og  $|AC| = 16$ , samt at arealet af trekant  $ADG$  er  $12,6$ .



Bestem nedenstående størrelser (husk at argumentere):

- a) Længden af linjestykket  $CF$ .    b) Længden af linjestykket  $CD$ .    c) Længden af linjestykket  $CG$ .  
 d) Arealet af trekant  $CGF$ .    e) Arealet af trekant  $ABF$ .    f) Højden fra  $G$  i trekant  $BFG$ .

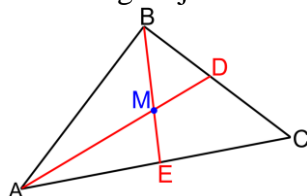
Opgave 2044: I  $\triangle ABC$  er tegnet  $AC$  og  $BC$ 's midtnormaler. Deres skæringspunkt er  $M$ .



Hvilke af følgende kan man sige med sikkerhed (sæt krydser):

- a)  $|BM| = |CD|$     b)  $|AE| = |CE|$     c)  $|AM| = |CM|$     d)  $|AM| = |DM|$     e)  $|AM| = 2 \cdot |DM|$   
 a)  $|AM| = \pi \cdot |DM|$     g)  $dist(M, AB) = dist(M, AC)$     h)  $\angle BAD = \angle CAD$     i)  $\angle AEM = 90^\circ$   
 j)  $M$  ligger på  $C$ 's vinkelhalveringslinje.    k)  $M$  ligger på højden fra  $C$ .  
 l)  $M$  ligger på medianen fra  $C$ .    m)  $M$  ligger på  $AB$ 's midtnormal.  
 n)  $M$  er centrum for den omskrevne cirkel.    o)  $M$  er centrum for den indskrevne cirkel.

Opgave 2046: I  $\triangle ABC$  er tegnet vinkelhalveringslinjerne  $AD$  og  $BE$ . Deres skæringspunkt er  $M$ .



Hvilke af følgende kan man sige med sikkerhed (sæt krydser):

- a)  $|BM| = |CD|$     b)  $|AE| = |CE|$     c)  $|BM| = |CM|$     d)  $|AM| = |DM|$     e)  $|AM| = 2 \cdot |DM|$   
 f)  $|AM| = \pi \cdot |DM|$     g)  $dist(M, AB) = dist(M, AC)$     h)  $\angle BAD = \angle CAD$     i)  $\angle AEB = 90^\circ$   
 j)  $M$  ligger på  $C$ 's vinkelhalveringslinje.    k)  $M$  ligger på højden fra  $C$ .  
 l)  $M$  ligger på medianen fra  $C$ .    m)  $M$  ligger på  $AB$ 's midtnormal.  
 n)  $M$  er centrum for den omskrevne cirkel.    o)  $M$  er centrum for den indskrevne cirkel.  
 p) Arealet af  $\triangle AEM$  er lig arealet af  $\triangle BDM$

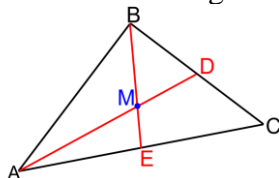
Opgave 2047: Opgaven omhandler linjer i trekanter. Først angives 14 egenskaber. Derefter skal du svare på hvilke af disse egenskaber, der gælder for forskellige linjer i trekanter.

- Har fodpunkt på eller skærer midten af siderne i trekanten.
- Er lige lange inde i trekanten.
- Deler trekanten i områder med lige store arealer.
- Står vinkelret på siderne.
- Skærer hverandre i ét punkt.
- Udgår fra en vinkelspids.
- Skæringspunktet er centrum for trekantens omskrevne cirkel.
- Skæringspunktet er centrum for trekantens indskrevne cirkel.
- Opdeles af skæringspunktet i stykker med forholdet 2:1 målt fra vinkelspidsen.
- Halverer vinklerne i trekanten.
- Er parallelle med en side i trekanten.
- Alle punkterne på hver linje ligger med samme afstand til to vinkelspidser.
- Alle punkter på hver linje ligger inde i trekanten med samme afstand til to sider i trekanten.
- Skæringspunktet ligger altid inden i trekanten.

Angiv, hvilke af ovenstående 14 egenskaber, der gælder for:

- Vinkelhalveringslinjerne.
- Midtnormalerne.
- Midtpunktstransversalerne.
- Medianerne.
- Højderne – evt. forlængelserne af disse.

Opgave 2048: I trekant  $ABC$  er tegnet medianerne  $AD$  og  $BE$ . Deres skæringspunkt er  $M$ .



Hvilke af følgende kan man sige med sikkerhed (sæt krydser):

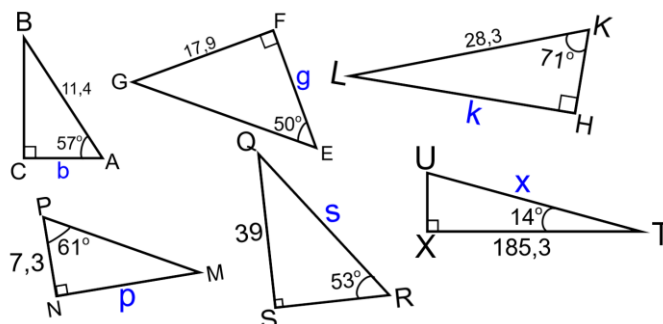
- $|BM| = |CD|$
- $|AE| = |CE|$
- $|BM| = |CM|$
- $|AM| = |DM|$
- $|AM| = 2 \cdot |DM|$
- $|AM| = \pi \cdot |DM|$
- $dist(M, AB) = dist(M, AC)$
- $\angle BAD = \angle CAD$
- $\angle AEB = 90^\circ$
- $M$  ligger på  $C$ 's vinkelhalveringslinje.
- $M$  ligger på højden fra  $C$ .
- $M$  ligger på medianen fra  $C$ .
- $M$  ligger på  $AB$ 's midtnormal.
- $M$  er centrum for den omskrevne cirkel.
- $M$  er centrum for den indskrevne cirkel.
- Arealet af  $\triangle AEM$  er lig arealet af  $\triangle BDM$

Opgave 2060: I nedenstående tabel står 16 størrelser, der hører sammen i par, der giver samme værdi (dvs. der er 8 forskellige værdier).

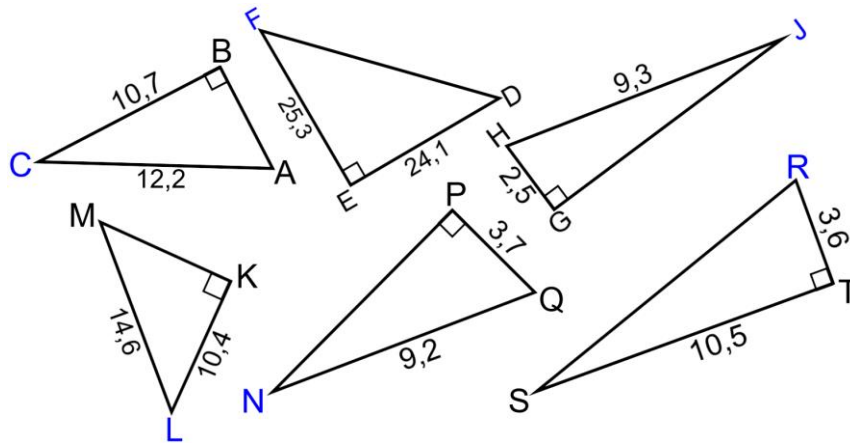
$\tan(17^\circ)$	$\cos(17^\circ)$	$\cos(180^\circ)$	$\sin(73^\circ)$
$\tan(45^\circ)$	$\cos(25^\circ)$	$\sin(0^\circ)$	$\sin(90^\circ)$
$\tan(135^\circ)$	$\cos(65^\circ)$	$\sin(17^\circ)$	$\sin(115^\circ)$
$\tan(197^\circ)$	$\cos(90^\circ)$	$\sin(25^\circ)$	$\sin(163^\circ)$

- Sæt de 16 størrelser sammen i par, der giver samme værdi.

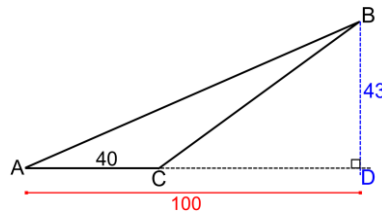
Opgave 2080: Bestem sidelængderne  $b, g, k, p, s$  og  $x$  i de retvinklede trekanter nedenfor:



Opgave 2082: Bestem vinklerne  $C, F, J, L, N$  og  $R$  i nedenstående trekanter.

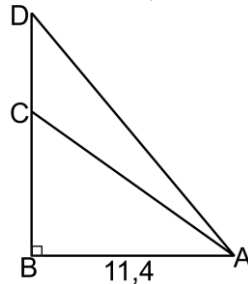


Opgave 2084: I trekant  $ABC$  er vinkel  $C$  stump, og højden fra  $B$  falder uden for trekanten og har fodpunkt i  $D$ . Det oplyses, at  $|AC| = 40$ ,  $|AD| = 100$  og  $|BD| = 43$



- Bestem  $\angle A$  og  $|AB|$ .
- Bestem  $\angle C$  i trekant  $ABC$ .

Opgave 2086: På nedenstående figur er vinkel  $B$  ret,  $\angle BAC = 35^\circ$  og  $\angle BAD = 50^\circ$ .



- Bestem  $|BC|$
- Bestem  $|AD|$
- Bestem  $|CD|$

Opgave 2087: Bestem de manglende sider og vinkler i følgende trekanter.

- $\triangle ABC$ :  $\angle C = 90^\circ$ ,  $a = 8$ ,  $\angle B = 29^\circ$
- $\triangle RPS$ :  $\angle P = 90^\circ$ ,  $p = 13$ ,  $s = 10$
- $\triangle QWA$ :  $\angle A = 90^\circ$ ,  $q = 15$ ,  $w = 17$

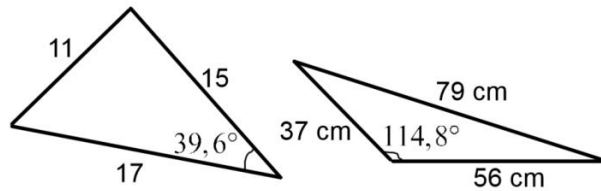
Opgave 2088: Bestem i hånden (på øjemål eller med matematiske ræsonnementer) følgende størrelser og tjek efterfølgende med Maples  $invSin$  ( $arcSin$ ),  $invCos$  ( $arcCos$ ),  $invTan$  ( $arcTan$ ) (vinkler i grader) og  $arcsin$ ,  $arccos$ ,  $arctan$  (vinkler i radianer):

Vinkler i grader: a)  $\tan^{-1}(1)$  b)  $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$  c)  $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$  d)  $\tan^{-1}(-1)$ .

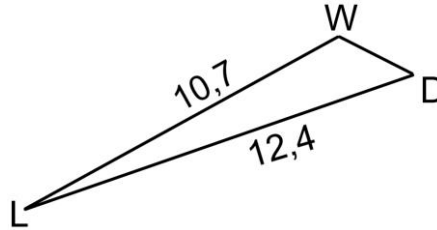
Vinkler i radianer: e)  $\tan^{-1}(1)$  f)  $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$  g)  $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$  h)  $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$



Opgave 2100: Bestem arealet af nedenstående trekanter:



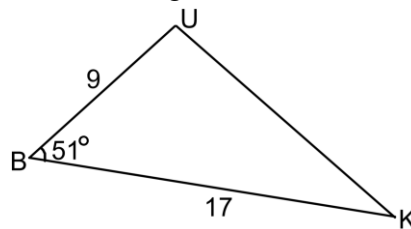
Opgave 2101: I trekant  $DLW$  er  $\angle D = 46^\circ$ , og det oplyses, at  $\angle W$  er stump.



a) Bestem  $\angle W$ .

Opgave 2102: I  $\triangle ADE$  er  $a = 14,7$ ,  $d = 11,3$  og  $e = 18,2$ . Bestem vinklerne i trekanten.

Opgave 2103: I trekant  $BKU$  er  $k = 9$ ,  $u = 17$  og  $\angle B = 51^\circ$ .



- Bestem arealet af trekant  $BKU$ .
- Bestem  $b$ .
- Bestem  $\angle K$ .

Opgave 2104a: I  $\triangle FST$  er  $\angle S = 56^\circ$ ,  $|FS| = 17,4$  og  $|ST| = 8,6$ . Bestem arealet af  $\triangle FST$ .

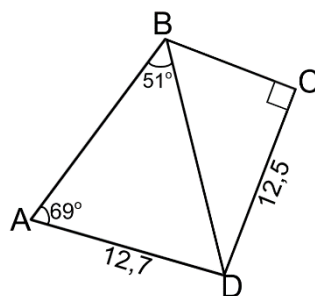
Opgave 2104b: I  $\triangle ADE$  er  $\angle A = 31^\circ$ ,  $\angle E = 67^\circ$  og  $e = 13,8$ . Bestem længden af siden  $a$ .

Opgave 2104c: I  $\triangle BKL$  er  $\angle B = 36^\circ$ ,  $b = 13,7$  og  $k = 16,2$ . Bestem den stump vinkel  $\angle K$ .

Opgave 2104d: I  $\triangle ABC$  er  $\angle B = 31^\circ$ ,  $a = 12,7$  og  $b = 18,2$ . Bestem  $\angle A$ .

Opgave 2104e:  $\triangle DEF$  har arealet 18, og  $d = 9$  og  $f = 5$ . Bestem  $\angle E$ , der er en stump vinkel.

Opgave 2105: I  $\square ABCD$  er  $\angle A = 69^\circ$ ,  $\angle ABD = 51^\circ$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $|AD| = 12,7$  og  $|CD| = 12,5$ .

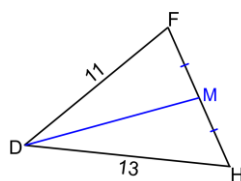


- Bestem  $|BD|$
- Bestem  $\angle CBD$
- Bestem omkredsen af  $\square ABCD$ .

Opgave 2106a: I  $\triangle AJM$  er  $\angle J = 117^\circ$ ,  $a = 23,9$  og  $m = 17,2$ . Bestem  $j$ .

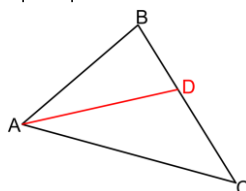
Opgave 2106b: I  $\triangle ABC$  er  $b = 2,5 \cdot a$  og  $c = 1,8 \cdot a$ . Bestem  $\angle A$ .

Opgave 2107a: I trekant  $DFH$  er  $\angle D = 46^\circ$ ,  $|DF| = 11$  og  $|DH| = 13$ . Medianen fra  $D$  rammer den modstående side i punktet  $M$ .



- Bestem arealet af trekant  $DFH$ .
- Bestem  $|DM|$ .

Opgave 2107b: I trekant  $ABC$  er indtegnet vinkelhalveringslinjen fra  $A$ . Den rammer siden  $BC$  i punktet  $D$ . Det oplyses, at  $|AB| = 9,3$ ,  $\angle A = 56^\circ$  og  $\angle C = 43^\circ$ .



- Bestem  $|BC|$
- Bestem  $\angle ADB$
- Bestem  $|AD|$

Opgave 2107c: I trekant  $ACE$  er  $a = 32$ ,  $c = 45$  og  $e = 61$ .

- Bestem  $\angle A$ .
- Bestem arealet af trekant  $ACE$ .
- Bestem længden af højden fra  $C$ .
- Bestem længden af  $\angle A$ 's vinkelhalveringslinje.

Opgave 2108a: I  $\triangle CGK$  er følgende stykker oplyst:  $\angle C = 68^\circ$ ,  $c = 9,3$  og  $\angle G = 43^\circ$ .  
Bestem de manglende stykker i trekanten.

Opgave 2108b: I  $\triangle ALP$  er  $h_l = 4$ ,  $l = 7$  og  $p = 6$ . Bestem  $\angle A$ , når det oplyses, at den er stump.

Opgave 2108c: I  $\triangle ABC$  er oplyst følgende stykker:  $a = 14,2$ ,  $b = 46,9$  og  $c = 39,8$ .  
Bestem vinklerne i trekanten samt arealet af trekanten.

Opgave 2109: Det hævdes, at en trekant har sider med længderne 4, 9 og 17. Bestem vinklerne.

Opgave 2180: En trekant har sidelængderne 23, 52, og 41. Bestem trekantens areal.

Opgave 2182: I  $\triangle BCN$  er  $b = 7,3$  og  $n = 9,1$ , og trekantens areal er 27,54. Bestem  $|BN|$ , når det oplyses, at  $BC$  er den længste side i trekanten.

Opgave 2184: Hvilket areal giver arealformlen, hvis den anvendes på følgende sidelængder:

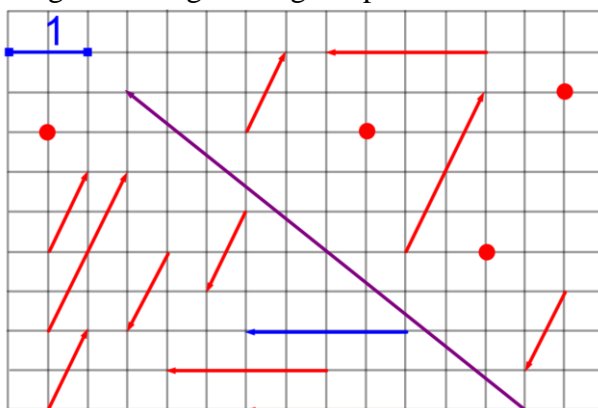
- 1, 2 og 3
- 1, 1 og 2
- 1, 2 og 4
- 3, 4 og 5

Opgave 2190 (Det dobbelttydige trekanttilfælde): Bestem i følgende tilfælde de manglende stykker i den eller de trekanten, der kan være tale om, eller afgør, at ingen trekanten opfylder betingelserne:

- $\angle A = 48^\circ$ ,  $a = 11$  og  $b = 8$
- $\angle A = 36^\circ$ ,  $a = 9$  og  $b = 12$
- $\angle A = 120^\circ$ ,  $a = 13$  og  $b = 6$
- $\angle A = 30^\circ$ ,  $a = 1$  og  $b = 2$
- $\angle A = 52^\circ$ ,  $a = 4$  og  $b = 7$
- $\angle A = 60^\circ$ ,  $a = 9$  og  $b = 9$
- $\angle A = 130^\circ$ ,  $a = 12$  og  $b = 13$

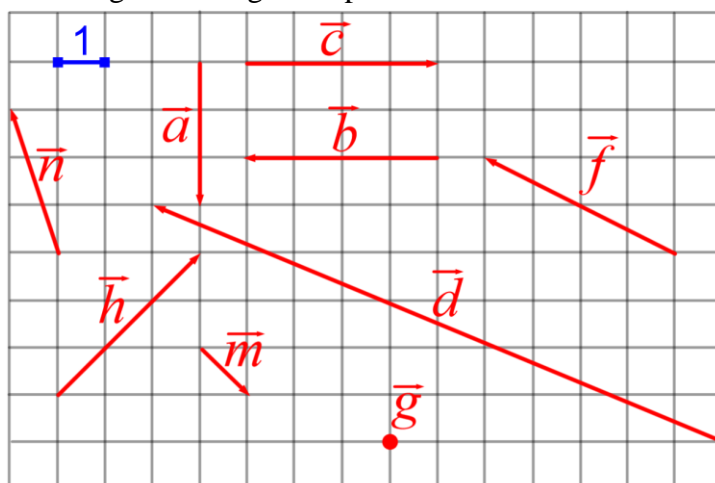
# Introduktion til vektorer

Opgave 3000: I nedenstående gitter er angivet nogle repræsentanter for vektorer.



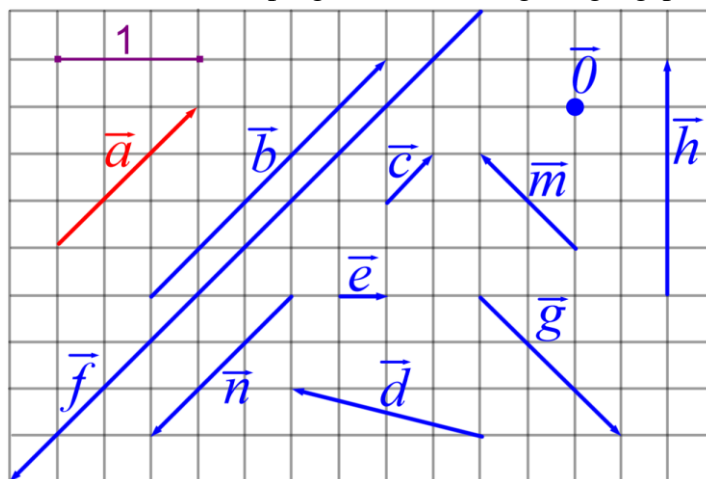
- Hvor mange vektorer er angivet?
- Hvor lang er vektoren, der bl.a. er repræsenteret af den blå pil?
- Hvor lang er vektoren repræsenteret af den violette pil?
- Hvor mange repræsentanter er angivet for den vektor, der bl.a. er repræsenteret ved den blå pil?
- Hvor mange nulvektorer er der?
- Hvor mange repræsentanter er angivet for nulvektoren?

Opgave 3002: I nedenstående gitter er angivet repræsentanter for 9 vektorer.



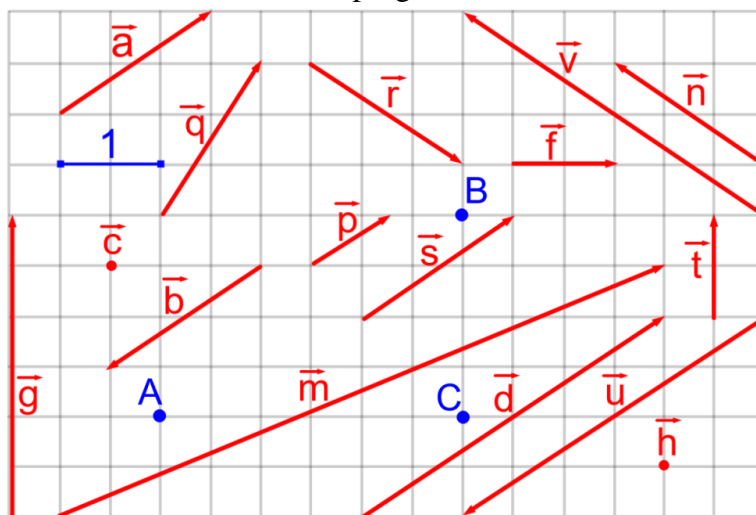
- Bestem længderne af de 9 vektorer.
- Hvad er vinklen mellem vektorerne  $\vec{a}$  og  $\vec{c}$ ?
- Hvad er vinklen mellem vektorerne  $\vec{b}$  og  $\vec{c}$ ?
- Hvad er vinklen mellem vektorerne  $\vec{h}$  og  $\vec{c}$ ?
- Hvad er vinklen mellem vektorerne  $\vec{h}$  og  $\vec{m}$ ?
- Hvad er vinklen mellem vektorerne  $\vec{b}$  og  $\vec{f}$ ?
- Hvad er vinklen mellem vektorerne  $\vec{b}$  og  $\vec{n}$ ?
- Hvad er vinklen mellem vektorerne  $\vec{h}$  og  $\vec{a}$ ?
- Hvad er vinklen mellem vektorerne  $\vec{h}$  og  $\vec{d}$ ?

Opgave 3010: I de fleste af nedenstående spørgsmål skal du tage udgangspunkt i vektoren  $\vec{a}$ .



- Hvilken eller hvilke vektorer er ensrettet med  $\vec{a}$ .
- Hvilken eller hvilke vektorer er modsatrettet  $\vec{a}$ .
- Hvilken eller hvilke vektorer er parallelle med  $\vec{a}$ .
- Hvilken vektor er den modsatte vektor til  $\vec{a}$ .
- Hvilken eller hvilke vektorer er ortogonale med  $\vec{a}$ .
- Er  $\vec{b} \parallel \vec{c}$ ?
- Er  $\vec{f} \perp \vec{n}$ ?
- Er  $\vec{b} \parallel \vec{f}$ ?
- Er  $\vec{h} \perp \vec{e}$ ?
- Er  $\vec{m} \perp \vec{o}$ ?
- Er  $\vec{d} \parallel \vec{g}$ ?

Opgave 3012: Bestem i hvert af nedenstående spørgsmål hvilken eller hvilke vektorer, der ...:



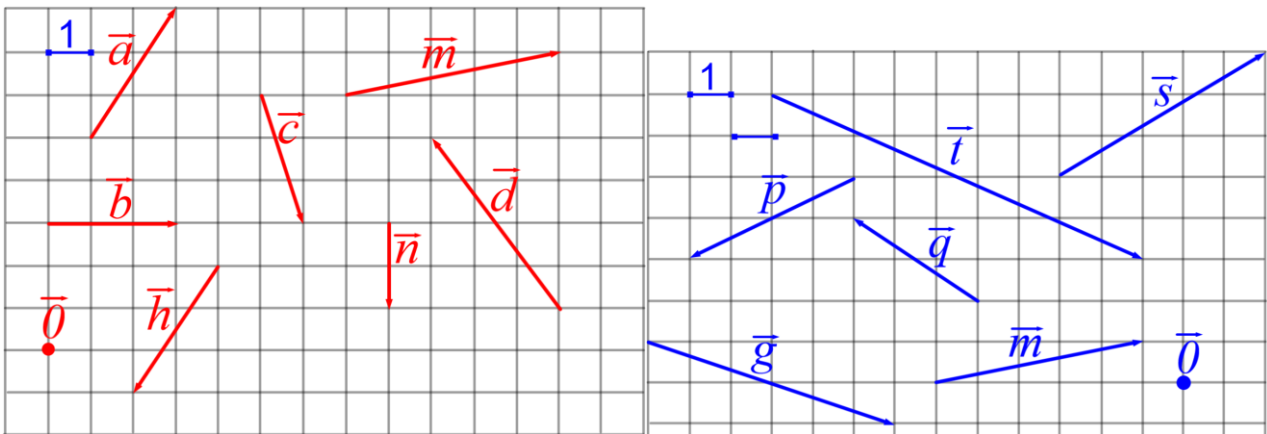
- Er lig med  $\vec{a}$ .
- Er ensrettet med  $\vec{a}$ .
- Er modsatrettet  $\vec{a}$ .
- Er en modsat vektor til  $\vec{a}$ .
- Er nulvektoren.
- Har samme længde som  $\vec{a}$ .
- Er parallelle med  $\vec{a}$ .
- Er en enhedsvektor.

- i) Har længden 6,5.
- j) Er ortogonal med  $\vec{q}$ .
- k) Ikke er egentlige vektorer.
- l) Er lig med  $\overline{AB}$ .
- m) Er lig med  $\overline{BA}$ .
- n) Er ortogonal med  $\overline{AC}$ .
- o) Er ortogonal med  $\overline{CA}$ .

Svar desuden på følgende spørgsmål:

- p) Er  $\vec{s} \parallel \vec{r}$ ?
- q) Er  $\overline{AC} \perp \overline{CB}$ ?
- r) Hvad er  $|\vec{g}|$ ?
- s) Er  $\overline{AA} = \vec{c}$ ?
- t) Er  $\vec{f} \parallel \vec{g}$ ?
- u) Er  $|\vec{a}| = |\vec{r}|$ ?
- v) Er  $\vec{b} \parallel \vec{d}$ ?
- w) På hvor mange af ovenstående spørgsmål ændres svaret, hvis samtlige vektorer ovenfor parallelforskydes vilkårligt på hver sin måde?

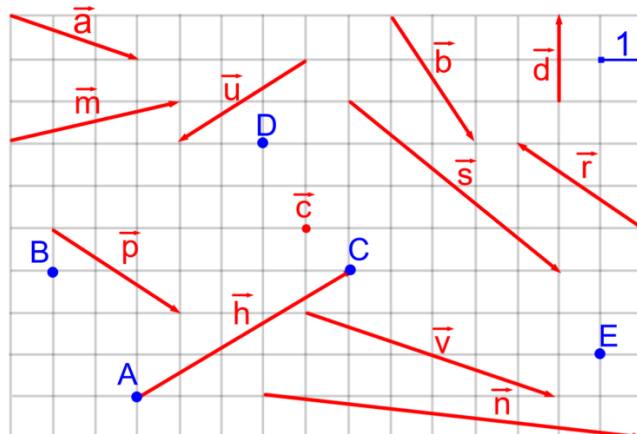
Opgave 3020: I denne opgave skal de røde vektorer adderes, og resultanten skal sammenlignes med de blå vektorer.



Hvilken af de blå vektorer svarer til følgende resultanter af de røde vektorer?

- a)  $\vec{a} + \vec{b}$
- b)  $\vec{c} + \vec{m}$
- c)  $\vec{n} + \vec{d}$
- d)  $\vec{a} + \vec{h}$
- e)  $\vec{m} + \vec{0}$
- f)  $\vec{c} + \vec{d} + \vec{h}$
- g)  $\vec{b} + \vec{n} + \vec{m} + \vec{c}$

Opgave 3022: Bestem for nedenstående vektorer og punkter følgende ...:

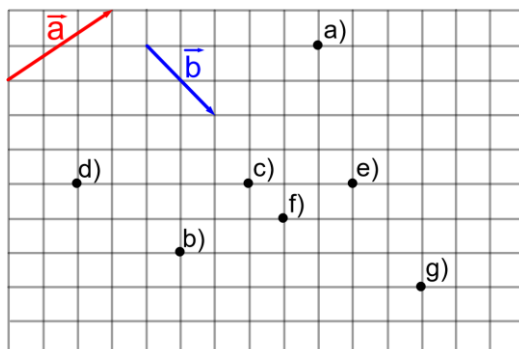


- a)  $\vec{a} + \vec{b}$
- b)  $\vec{r} + \vec{p}$
- c)  $\vec{b} + \vec{m}$
- d)  $\overline{AB} + \overline{BC}$
- e)  $\vec{s} + \vec{m} + \vec{d}$
- f)  $\overline{BC} + \overline{CA}$
- g)  $\vec{v} + \vec{r} + \vec{d} + \vec{u}$
- h)  $\overline{AB} + \overline{BD} + \overline{DC}$
- i)  $\overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} + \overline{AB}$
- j)  $\vec{s} + \vec{c}$
- k)  $\overline{AE} + \overline{EB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$

Opgave 3024: Det oplyses, at  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ , at  $|\vec{a}| = 7$  og  $|\vec{c}| = 9$  samt at vinklen mellem vektorerne  $\vec{a}$  og  $\vec{c}$  er  $37^\circ$ . Bestem  $|\vec{b}|$ .

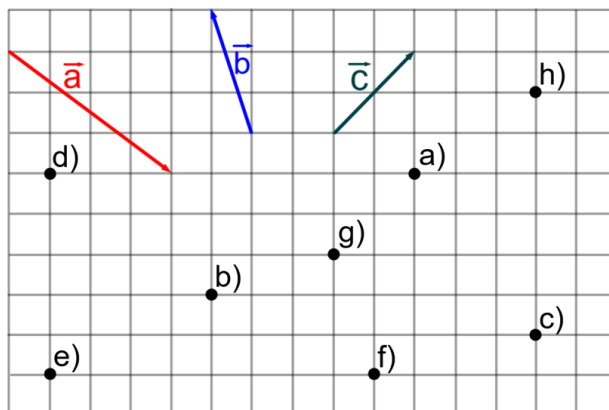
Opgave 3026: Det oplyses, at  $|\vec{a}| = 8$ ,  $|\vec{b}| = 6$  og  $|\vec{a} + \vec{b}| = 9$ . Bestem vinklen mellem  $\vec{a}$  og  $(\vec{a} + \vec{b})$ .

Opgave 3030: Indtegn i følgende skema de angivne vektorer med udgangspunkt i de sorte punkter, der er angivet som hørende til de enkelte spørgsmål.



a)  $2 \cdot \vec{b}$  b)  $-1 \cdot \vec{a}$  c)  $-2 \cdot \vec{b}$  d)  $2 \cdot \vec{a} + \vec{b}$  e)  $0 \cdot \vec{a}$  f)  $-2 \cdot \vec{b} + (-1 \cdot \vec{a})$  g)  $-4 \cdot \vec{b} + (-\vec{a})$

Opgave 3040: Indtegn i følgende skema de angivne vektorer med udgangspunkt i de sorte punkter, der er angivet som hørende til de enkelte spørgsmål.

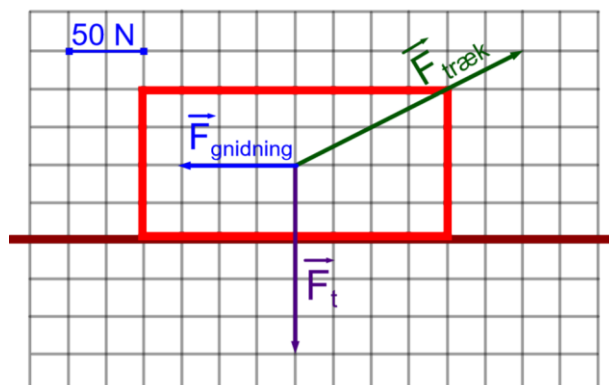


a)  $\vec{a} - \vec{c}$  b)  $\vec{c} - \vec{b}$  c)  $\vec{b} - \vec{a}$  d)  $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$  e)  $\vec{a} - \vec{a}$  f)  $-\vec{a} - \vec{b}$  g)  $\vec{c} - 2 \cdot \vec{b} - \vec{a}$  h)  $-3 \cdot \vec{c} + \vec{b} - \vec{a}$

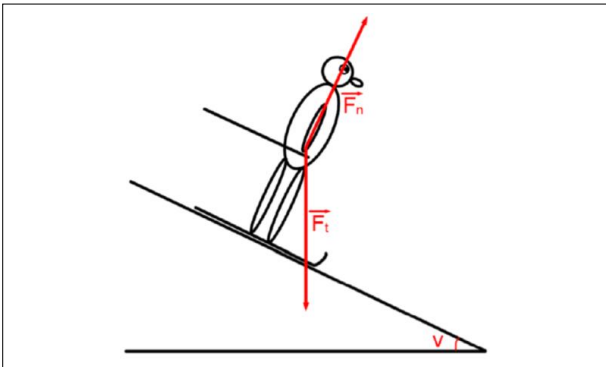
Opgave 3042: Det oplyses, at  $|\vec{a}| = 13$  og  $|\vec{b}| = 8$ , samt at vinklen mellem  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er  $114^\circ$ .

Bestem  $|\vec{a} - \vec{b}|$ .

Opgave 3050: Bestem længden (størrelsen) af normalkraften  $|\vec{F}_n|$  og den resulterende kraft  $|\vec{F}_{res}|$  i nedenstående situation, hvor en klods trækkes hen over et bord, og bestem den vinkel  $\nu$ , som trækraften danner med vandret



Opgave 3052: Skiløberen nedenfor er som vist på figuren udelukkende påvirket af tyngdekraften og normalkraften (dvs. der ses bort fra alle former for gnidning).

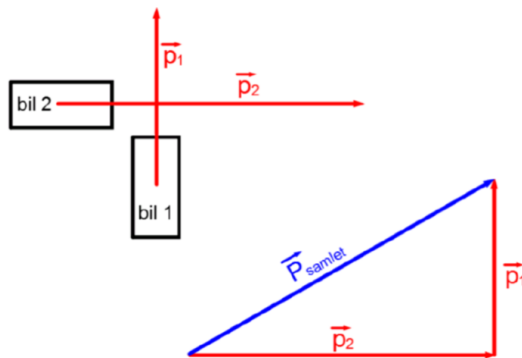


Vinkel med vandret er  $v = 4,3^\circ$  og  $|\vec{F}_t| = 659 \text{ N}$ .

- Bestem størrelserne af normalkraften og den resulterende kraft  $|\vec{F}_n|$  og  $|\vec{F}_{res}|$ .
- Hvor stor skal vinklen  $v$  være, før den resulterende kraft får længden 300 N?

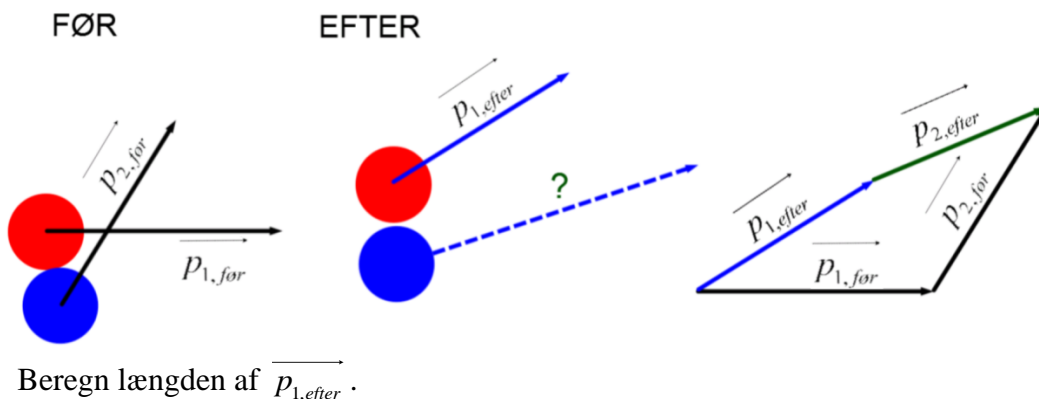
Opgave 3060: To biler støder sammen. De kører som vist på figuren langs retninger vinkelret på hinanden. Lige inden sammenstødet er  $|\vec{p}_1| = 400 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$  og  $|\vec{p}_2| = 700 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$ .

- Bestem størrelsen af den samlede bevægelsesmængde  $|\vec{p}_{samlet}|$ .
- Bestem vinklen mellem  $\vec{p}_2$  og  $\vec{p}_{samlet}$ .
- Hvad ville  $|\vec{p}_{samlet}|$  have været, hvis vinklen mellem  $\vec{p}_1$  og  $\vec{p}_2$  var  $40^\circ$ ?



Opgave 3062: To kugler støder sammen som vist på figuren. Alle bevægelsesmængder  $p$  er angivet i enheden  $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$ . Det oplyses, at  $|\vec{p}_{1,for}| = 1,6$ ,  $|\vec{p}_{2,for}| = 1,7$  og  $|\vec{p}_{2,efter}| = 1,2$ .

Desuden oplyses det, at vinklen  $v$  mellem  $\vec{p}_{2,for}$  og  $\vec{p}_{1,for}$  er  $63^\circ$ , samt at vinklen  $w$  mellem  $\vec{p}_{2,for}$  og  $\vec{p}_{2,efter}$  er  $34^\circ$ .

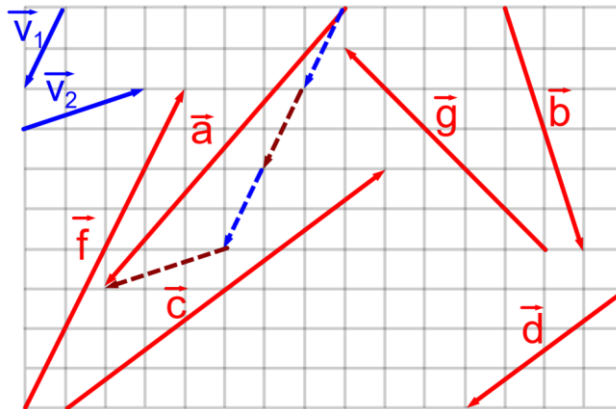


Opgave 3070: Angiv følgende udtryk som én vektor:

- a)  $\overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TP}$    b)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$    c)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$    d)  $\overrightarrow{VF} + \overrightarrow{FF} + \overrightarrow{FA}$    e)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DW} + \overrightarrow{WL} + \overrightarrow{LS} + \overrightarrow{SR}$   
 f)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$    g)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$    h)  $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{LE} + \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{EK} + \overrightarrow{SL}$    i)  $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{WF} + \overrightarrow{DC}$

Opgave 3080: Opløs nedenstående vektorer efter retninger givet ved sættet  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ .

Eksempel:  $\vec{a} = 3 \cdot \vec{v}_1 - 1 \cdot \vec{v}_2$



Opgave 3082: For hvilke af følgende talpar er det ikke muligt at finde en heltals-linearkombination, der giver 1:  $(2,13)$ ,  $(7,12)$ ,  $(4,18)$ ,  $(12,15)$ ,  $(8,25)$ ,  $(15,21)$  og  $(28,63)$ ?

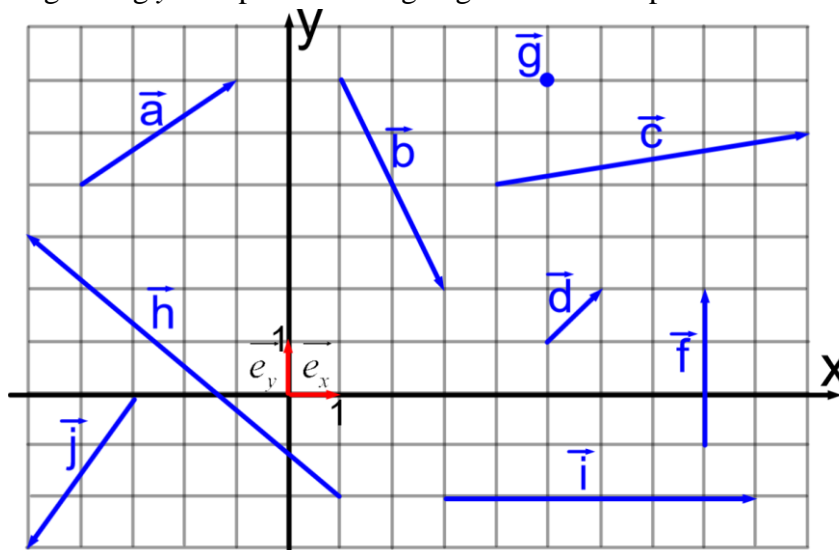
Opgave 3084: For vektorer i planen angivet ved koordinater gælder følgende regneregler:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \quad t \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} t \cdot a_1 \\ t \cdot a_2 \end{pmatrix}$$

Opløs de angivne vektorer efter retninger givet ved sættet  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ , hvor  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  og  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -5 \\ 24 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ -15 \end{pmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 10 \\ -15 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{h} = \begin{pmatrix} 13 \\ -69 \end{pmatrix}$$

Opgave 3090: Indtegn x- og y-komponenterne og angiv vektorerne på koordinatform:

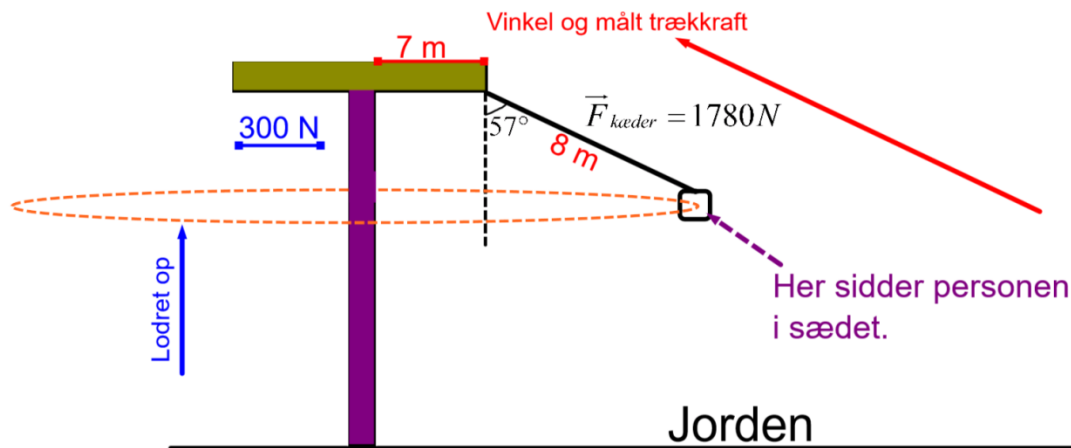


Opgave 3092: Hvilken sammenhæng skal gælde mellem koordinaterne i  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  og  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ , hvis

de to vektorer skal være ortogonale (dvs.  $\vec{a} \perp \vec{b}$ )?

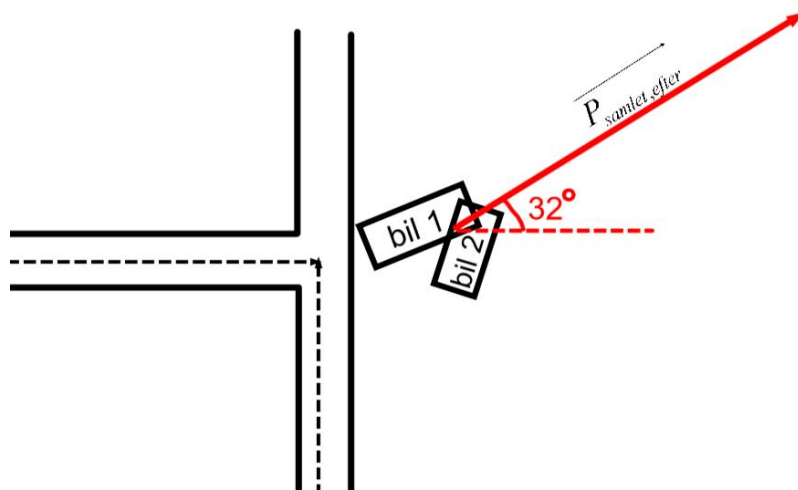


Opgave 3100: En person sidder i Tivolis forlystelse Himmelskibet. Han sidder i sædet og bevæger sig derfor i en cirkel rundt om den lille søjle på figuren. Der ses bort fra alle andre kræfter end tyngdekraften på person-og-sæde og trækraften fra kæderne. Som vist på figuren er trækraften fra kæden 1780 N, og kæden danner vinklen  $57^\circ$  med lodret.



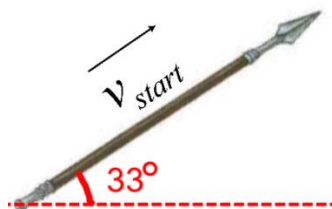
- Bestem størrelsen af tyngdekraften på person-og-sæde.
- Bestem størrelsen af den resulterende kraft (centripetalkraften).
- Bestem afstanden fra sædet til den lille søjle.

Opgave 3102: To biler støder sammen i et T-kryds. Den samlede bevægelsesmængde lige efter sammenstødet er  $9,3 \cdot 10^6 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$ . De stiplede linjer angiver bilernes bevægelser op til sammenstødet.



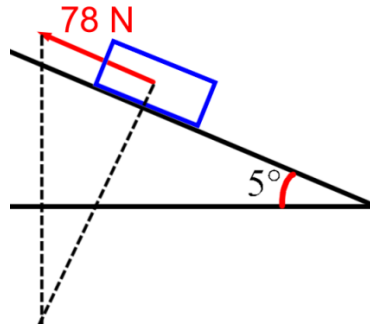
Bestem bevægelsesmængderne af de to biler lige inden sammenstødet.

Opgave 3104: Et spyd kastes med en vinkel på  $33^\circ$  med vandret og begyndeshastigheden  $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .



Bestem størrelserne af hastighedens  $x$ -og  $y$ -komponenter fra start.

Opgave 3106: En klods står stille på et skråplan med en hældning på  $5^\circ$ . Gnidningskraften er 78 N.



Bestem størrelserne af normalkraften og tyngdekraften på klodsen.

Opgave 3110: Vi lader  $A = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s}$ . Bestem  $A$  i følgende situationer.

- $|\vec{F}| = 50N$  og  $|\Delta \vec{s}| = 20m$ , og vinklen mellem de to vektorer er  $30^\circ$ .
- $|\vec{F}| = 80N$  og  $|\Delta \vec{s}| = 50m$ , og vinklen mellem de to vektorer er  $90^\circ$ .
- $|\vec{F}| = 25N$  og  $|\Delta \vec{s}| = 16m$ , og vinklen mellem de to vektorer er  $180^\circ$ .
- $|\vec{F}| = 170N$  og  $|\Delta \vec{s}| = 36m$ , og vinklen mellem de to vektorer er  $0^\circ$ .

# Grundlæggende matematiske begreber (del 2&3)

Opgave 4000: Afgør i hvert af nedenstående tilfælde, om der er tale om et algebraisk udtryk (ja/nej).

Hvis det er et algebraisk udtryk, skal du om muligt udregne eller reducere det.

a)  $\cdot 8 + 5$

b)  $6 + 5 \cdot 3$

c)  $5a + 7b - 3a + 12b$

d)  $3x + 5 = 7$

e)  $3 \cdot (x + y) - y \cdot (1 + 2)$

f)  $\frac{50}{8}$

g)  $\sqrt{98}$

h)  $5 \cdot 3^2 - 7 \cdot 2$

i)  $\sqrt{7 \cdot a - 3a + 6}$

j)  $\frac{\sqrt{8 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 2}}{7 \cdot (8a + 8 - 4 \cdot 2a)} \cdot (1 + 2 \cdot 3)$

Opgave 4010: Udregn følgende algebraiske udtryk i hånden. Tjek med facitlisten.

a)  $2 + 7 \cdot 3$  b)  $9 - 4 \cdot 2$  c)  $3 \cdot 5 - 2 \cdot 4$  d)  $2 \cdot 3^4$  e)  $3 \cdot 2 + 4^2$  f)  $8 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2$

g)  $5 \cdot 3 - \frac{2}{7} \cdot (3 + 4)$  h)  $2 \cdot (3 + 5)^2$  i)  $\frac{3^2}{2} - \frac{5}{2}$  j)  $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \cdot 5$  k)  $3 \cdot 5 \cdot 2 - 7 \cdot 4$

l)  $7 + 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3^2 + \frac{(2 \cdot 5^2)^2}{100}$  m)  $(3 + 5 \cdot 4 - 6)^2 - ((3 + 4) \cdot 2)^2$  n)  $(3 + 4) \cdot (1 + 5)^2$

Opgave 4020: Angiv de skjulte parenteser i disse algebraiske udtryk:

a)  $\sqrt{2 + 7 \cdot 3}$  b)  $\frac{7x + 4}{9}$  c)  $4^{2x-9}$  d)  $7 \cdot \sqrt{5 \cdot 9 + 2}$  e)  $\frac{5a + 3b}{2a - 4b}$  f)  $\frac{2 + 4^{6x+4}}{7}$

g)  $\sqrt{\frac{3x-2}{2x+9}} - 5$  h)  $\frac{3x+7}{5} - \frac{6x-2}{5}$  i)  $\sqrt{2 + 4^{3x+2}}$  j)  ${}^{x_2-x_1}\sqrt{\frac{4x+5}{7}}$  k)  $6^{3^{4+2}}$

Opgave 4021: Sæt de skjulte parenteser og udregn eller reducer de algebraiske udtryk:

a)  ${}^{5-2}\sqrt{12-4}$  b)  $\frac{7+19}{6+7}$  c)  $\frac{4x+2}{7} - \frac{9-3x}{7}$  d)  $10^{2^3}$  e)  $\frac{9x-2}{4} - \frac{3x+7}{4} - \frac{-6x-13}{4}$

Opgave 4022: Sæt først de skjulte parenteser og udregn eller reducer efterfølgende de algebraiske udtryk.

Tjek, at antallet af skjulte parenteser er det samme som værdien af udtrykket.

a)  ${}^{3 \cdot 5 - 13}\sqrt{\frac{8 - 5 \cdot (-2)}{11 - 3 \cdot 3} + 7}$  b)  $\frac{6^{8-2 \cdot 3} + 4}{\sqrt{64 + 17} + 1}$  c)  $2^{1^{2+1}}$  d)  ${}^{2+1}\sqrt{\frac{2002 - 1 \cdot 4^{-1} \sqrt{\frac{-2 + 6 \cdot 3}{1+1}}}{4 - 2 \cdot \sqrt[8+5]{9-4^2}}} - 2$

Opgave 4030: Angiv antallet af led i nedenstående algebraiske udtryk.

a)  $3 \cdot 4 + 7 - 8 \cdot 2$

b)  $5 \cdot (4 + 1) - 6 \cdot \sqrt{2 + 3 \cdot 5}$

c)  $3a + 4x \cdot (6 - 3y) - 4 \cdot (-3) \cdot (-5) \cdot y$

d)  $\frac{3 + 4 \cdot 5}{7 - 2 \cdot 6^{2+1}}$

e)  $6x \cdot \frac{4x - 3y}{2x - y} + 4x^2 \cdot (5y - 1)$

Opgave 4040: Angiv følgende algebraiske udtryk uden parenteser (Prøv også 'expand' i Maple).

- a)  $5 \cdot (7 - 3a + 8b)$                       b)  $6 \cdot (4 \cdot a - 2 \cdot y + c \cdot (-2))$   
c)  $(4 + a) \cdot (3 - a)$                       d)  $(2a + 3b) \cdot (3 - b)$   
e)  $(2a + b) \cdot (3 + 3a - 4b)$                       f)  $(a + b + c) \cdot (a + b + c)$   
g)  $(x + y)^4$                       h)  $(2 + a + x)^3$

Opgave 4050: Anvend kvadratsætningerne til at udregne nedenstående algebraiske udtryk (Tjek med facitlisten, men prøv også 'expand' i Maple).

- a)  $(2x + y)^2$                       b)  $(3a - 2b)^2$                       c)  $(3a - b) \cdot (3a + b)$   
d)  $(2x + 3y)^2$                       e)  $(5a - 2b) \cdot (5a + 2b)$                       f)  $(5 - x)^2$   
g)  $(-4x - 5y)^2$                       h)  $(2x^2 + 4y^2)^2$                       i)  $(6a - 2b^2)^2$

Opgave 4052: Anvend om muligt kvadratsætningerne til at udregne følgende algebraiske udtryk. Hvis det ikke er muligt, skal du anvende parentesregneregler.

- a)  $(3 + x)^2$                       b)  $(4a + 3b) \cdot (4a - 3b)$                       c)  $(3x - 2y) \cdot (2x - 3y)$   
d)  $(5x - 6) \cdot (5x - 6)$                       e)  $(5a + 2b) \cdot (5a + b)$                       f)  $(4 + b) \cdot (-b + 4)$   
g)  $(3a - b)^2$                       h)  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$                       i)  $(5a - 2b) \cdot (2b - 5a)$   
j)  $(x^2 + y^2)^2$                       k)  $(\sqrt{x+1} + \sqrt{y-4}) \cdot (\sqrt{x+1} - \sqrt{y-4})$

Opgave 4054: Reducér nedenstående udtryk.

- a)  $3a \cdot (4b - 2a) - 6a \cdot (2b + 3a)$                       b)  $4a \cdot (2a - b) - 8a^2$   
c)  $4x \cdot (y - 2x) - 4y \cdot (x + 2y)$                       d)  $(2x - y) \cdot (2x + y) - 4x \cdot (x + 1)$   
e)  $(3a + 2b)^2 - 6a \cdot (2b - a)$                       f)  $(x - 3y)^2 + 6x \cdot (y - 4x)$   
g)  $(2a - 3b)^2 + (5a - 3b) \cdot (a + 3b)$                       h)  $-(x + 2a)^2 + (2a + x)(2a - x) - 4ax$

Opgave 4060: Anvend kvadratsætningerne fra højre mod venstre og faktorisér nedenstående.

- a)  $a^2 + 36 + 12a$                       b)  $x^2 + 1 - 2x$   
c)  $9a^2 - 4b^2$                       d)  $9x^2 + 12xy + 4y^2$   
e)  $-9c^2 + 16$                       f)  $4a^2 - 16ay + 16y^2$   
g)  $9a^2b^4 + 4c^2 + 12ab^2c$                       h)  $4x^2 + 32xy + 64y^2$

Opgave 4062: Anvend om muligt kvadratsætningerne fra højre mod venstre og faktorisér:

- a)  $9x^2 + 4y^2 - 12xy$                       b)  $16a^2 - 25b^2$   
c)  $x^2 + 4y^2 + 8xy$                       d)  $9x^2 - 24x + 16$   
e)  $y^2 + 6y + 6$                       f)  $16s^2 - t^2$   
g)  $36x^2 + 25y^2 - 60xy$                       h)  $2x^2 - 4xy + 2y^2$

Opgave 4070: Foretag kvadratkomplettering på følgende algebraiske udtryk. Tjek med facitlisten og prøv også Maple-pakken *Student[Precalculus]* og kommandoen *CompleteSquare(...)*:

- a)  $x^2 + 8x$                       b)  $y^2 - 6y$                       c)  $z^2 + 16z$                       d)  $x^2 - 10x$                       e)  $y^2 + 4y$   
f)  $x^2 + 6x + y^2 - 4y$                       g)  $x^2 - 4x + y^2 + 12y + z^2 - 8z$                       h)  $x^2 + 14x + y^2 - 10y + z^2$   
i)  $x^2 + 12x + 8$                       j)  $x^2 + 6x - 4$                       k)  $x^2 + 4x - 10$   
l)  $4x^2 + 12x + 6$                       m)  $6x^2 - 14x + 9$                       n)  $25x^2 + 10x + 10$

Opgave 4071: Foretag kvadratkomplettering på følgende algebraiske udtryk og tjek med Maple-pakken *Student[Precalculus]* og kommandoen *CompleteSquare(...)*:

- a)  $x^2 - 20x$       b)  $y^2 + 12y$       c)  $z^2 + 2z$   
 d)  $x^2 + 4x$       e)  $y^2 - 6y$       f)  $x^2 - 10x + y^2 + 8y$   
 g)  $x^2 + 6x + y^2 - 2y$       h)  $x^2 + 8x + y^2 - 6y + z^2 - 4z$       i)  $x^2 + 14x - 5$   
 j)  $x^2 - 10x + 9$       k)  $x^2 + x$       l)  $6x^2 + 24x - 15$   
 m)  $x^2 + 10x + y^2 - 4y + 7$       n)  $x^2 + 8x + y^2 - 14y + z^2 - 6z + 10$

Opgave 4080: Faktorisér følgende algebraiske udtryk. Tjek med facitliste, og tjek også *d)* og *e)* med Maples 'factor' (Husk, at du skal skrive alle de skjulte gangetegn i Maple).

- a)  $5a^2 + 8a$       b)  $4x^3 + 12x^2$       c)  $x^2 \cdot y + x \cdot y^2$   
 d)  $6a^2b^3c^4 + 9abc^2$       e)  $15x^2y^3z^5 + 5x^3yz^3 - 10x^4y^2z^4$       f)  $6(x-1)^2y + 4(x-1)$   
 g)  $5(a-b) \cdot c + 20 \cdot (a-b) \cdot (a+b) \cdot c^2$

Opgave 4082: Faktorisér følgende algebraiske udtryk. Tjek med facitliste og tjek også *a)* og *b)* med Maples 'factor'.

- a)  $5a^2bc^3 - 15abc^2 + 20a^3b^2c^3$   
 b)  $-3xy^2z^3 + 9x^2yz^2 + 6xy$   
 c)  $4x^2y - 12x^3y + 8x^2y^3$   
 d)  $(a-3)^2 \cdot b^3 \cdot e^c - (a-3)^3 \cdot b^2 \cdot e^c + (a-3) \cdot b^4 \cdot e^c$

Opgave 4090: Faktorisér først tæller og nævner i brøkerne. Forkort derefter om muligt brøkerne.

- a)  $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9}$       b)  $\frac{4x^2y + 2xy^2}{18xz^2 + 9yz^2}$       c)  $\frac{x^2 - 10x + 25}{4x^2 - 20x}$       d)  $\frac{a^2 - 4b^2}{6a^2b - 12ab^2}$

Opgave 4092: Faktorisér først tæller og nævner i brøkerne og forkort derefter brøkerne.

- a)  $\frac{x^2 - 4}{xy + 2y}$       b)  $\frac{3x^2y + 12xy}{x^2 + 8x + 16}$       c)  $\frac{x^2 - 12x + 36}{x^2 - 6x}$       d)  $\frac{3x^3 - 15x^2}{x^2 - 25}$       e)  $\frac{x^2 + 6x + 9}{8x^2 + 24x}$

Opgave 4100: Løs følgende ligninger:

- a)  $3 + x = 9$       b)  $7 = 3$       c)  $0 = 0$       d)  $12 = -12$       e)  $x^2 = 9$   
 f)  $x^2 = -9$       g)  $(x+4)^2 = x^2 + 16 + 8x$       h)  $4 + 2x = 2x + 9$   
 i)  $(x+3)^2 = x^2 + 9$       j)  $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

Opgave 4102: Løs følgende ligninger:

- a)  $3 = 7$       b)  $3x = 7x$       c)  $3x^2 = 7x^2$       d)  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$       e)  $5x - 1 = -1 + 5x$   
 f)  $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$       g)  $(x-1)^2 + y^2 = 0$       h)  $(x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 0$

Opgave 4110: Afgør, om følgende ligninger er identiteter (I), absurditeter (A) eller bestemmelsesligninger (B):

- a)  $5 = 19$       b)  $19 = 19$       c)  $7x + 1 = 3x + 2$       d)  $5x + 3 = 3 + 5x$       e)  $4x = 4x$

Opgave 4112: Afgør, om følgende ligninger er identiteter (I), absurditeter (A) eller bestemmelsesligninger (B):

- a)  $6x = 19x$       b)  $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$       c)  $y = 7x + 5$       d)  $x^2 + y^2 = -9$   
 e)  $2x - 1 = 1 - 2x$       f)  $(x+2)^2 + (y-7)^2 = 16$       g)  $a^2 + b^2 = c^2$       h)  $3 \cdot 5 - 2 = 9$

Opgave 4114: Afgør, om følgende ligninger er identiteter (I), absurditeter (A) eller bestemmelsesligninger (B):

$$a) x=9 \quad b) x=0 \quad c) (a+b)^2 = a^2 + b^2 \quad d) 4a \cdot (a+b) = 4a-b \quad e) x^4 + x^2 + 1 = -2$$

$$f) 3^3 = 9 \quad g) x^2 + 3xy + y^2 = 4 \quad h) x^2 + x + 1 = 0 \quad i) x^2 + 2x + 1 = 0 \quad j) x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

Opgave 4120: Løs følgende ligninger. Anvend biimplikationer undervejs.

$$a) 2x+5=7x-4 \quad ; G = \mathbb{R} \quad b) 6-5x=2x-12 \quad ; G = \mathbb{R}$$

$$c) \frac{1}{2} \cdot (x+2) = 3x-1 \quad ; G = \mathbb{R} \quad d) \frac{1}{3} \cdot (2x-1) + x = 5-2x \quad ; G = \mathbb{R}$$

Opgave 4122: Løs følgende ligninger. Overvej, om du skal anvende faktorisering og vær i den forbindelse opmærksom på ikke at komme til at dividere med 0.

$$a) x^2 - 4 = 3x^2 + 6x \quad ; G = \mathbb{R} \quad b) x^2 + 6x + 9 = -5x^2 - 15x \quad ; G = \mathbb{R}$$

$$c) x^4 + 10x^3 + 25x^2 = 9x^3 + 45x^2 \quad ; G = \mathbb{R} \quad d) x^5 + 8x^4 + 16x^3 = 7x^4 + 28x^3 \quad ; G = \mathbb{R}$$

$$e) (x^2 - 9) \cdot (x^2 - 25) = (x^2 + 6x + 9) \cdot (x^2 - 10x + 25) \quad ; G = \mathbb{R}$$

Opgave 4140: Løs følgende ligninger. Tjek med facitliste og prøv også Maples *solve* på nogle:

$$a) 4x+7=9x-6 \quad ; G = \mathbb{R} \quad b) 2x-5=3x-9 \quad ; G = \mathbb{R}$$

$$c) 12-3x=-5x+7 \quad ; G = \mathbb{R} \quad d) \frac{1}{7} \cdot (4x+3) = 2x-1 \quad ; G = \mathbb{R}$$

Opgave 4142: Løs følgende ligninger. Tjek med facitlisten og prøv også Maples *solve* på nogle.

$$a) 3x+14=7x-10 \quad ; G = \mathbb{R} \quad b) 3 \cdot (2x+5) = -4x+7 \quad ; G = \mathbb{R}$$

$$c) 5 \cdot (3-2y) + 4 = 2-3y \quad ; G = \mathbb{R} \quad d) \frac{1}{3} \cdot (5x+2) + 2 = 9 \quad ; G = \mathbb{R}$$

$$e) \frac{1}{2} \cdot (3-8x) + 3x = 4-x \quad ; G = \mathbb{R} \quad f) \frac{1}{3} \cdot (4x+3) = \frac{1}{5} \cdot (4-2x) \quad ; G = \mathbb{R}$$

$$g) \frac{4}{3x+8} = 5 \quad ; G = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{8}{3} \right\} \quad h) \frac{3}{2x+5} = \frac{7}{3x-2} \quad ; G = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{5}{2}, \frac{2}{3} \right\}$$

Opgave 4145: Løs følgende ligninger. Tjek med facitlisten (evt. også med Maple).

$$a) (3x-2) \cdot (x+4) = 5 \cdot (x+4) \quad ; G = \mathbb{R}$$

$$b) (x+3) \cdot (x-2) = (x-5) \cdot (x+3) \quad ; G = \mathbb{R}$$

$$c) \frac{3x-12}{x-4} = 5 \quad ; G = \mathbb{R} \setminus \{4\}$$

$$d) \frac{x-3}{x+5} = \frac{-9+3x}{10+2x} \quad ; G = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$$

Opgave 4150: Løs følgende uligheder. Tjek med facitlisten.  $G = \mathbb{R}$  for alle ulighederne.

$$a) 5x+2 < 8x-6 \quad b) 5 \cdot (3x-1) \geq 8x+2 \quad c) \frac{1}{3} \cdot (2x-3) < 4x-1$$

Opgave 4152: Løs følgende uligheder. Tjek med facitlisten (husk at lægge godt mærke til, om ulighedstegnene vender rigtigt) og prøv også med Maple (bemærk notationen).

$$a) 3x+2 < 7x-3 \quad ; G = \mathbb{R} \quad b) 4x-1 \geq 9x+8 \quad ; G = \mathbb{R}$$

$$c) -5x+2 < 6x-14 \quad ; G = \mathbb{R} \quad d) \frac{3x}{-7} > 5 \quad ; G = \mathbb{R}$$

$$e) \frac{4}{x} < 8 \quad ; G = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad f) \frac{3}{2x-6} \geq 5 \quad ; G = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$g) \frac{5}{3x-9} \leq \frac{2}{-2x+8} \quad ; G = \mathbb{R} \setminus \{3, 4\}$$

Opgave 4154: Løs følgende uligheder. Tjek med facitliste og evt. også Maple:

a)  $6x - 8 < 11x + 3$  ;  $G = \mathbb{R}$       b)  $4 \cdot (2x - 3) \geq 3x - 1$  ;  $G = \mathbb{R}$

c)  $-\frac{1}{2}x + 5 < 5x - 13$  ;  $G = \mathbb{R}$       d)  $\frac{2x}{-3} > -8$  ;  $G = \mathbb{R}$

e)  $\frac{3}{x} < -4$  ;  $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$       f)  $\frac{7}{4x - 12} \geq 3$  ;  $G = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

g)  $\frac{9}{2x - 10} \leq \frac{-5}{5x + 5}$  ;  $G = \mathbb{R} \setminus \{-1, 5\}$

Opgave 4160: Løs følgende ligninger (brug forskellige solve-muligheder i Maple, inkl. *Numerically Solve from point*). Grundmængden er i alle tilfælde  $G = \mathbb{R}$ :

a)  $13x - 7 = 27x + 6$

b)  $-x^2 = -3x - 5$

c)  $2x^2 + 9x = -36$

d)  $\sin(x) + x = -0,7 \cdot x + 0,5$

e)  $2^x = x^2$

f)  $\sin(x) + x = 0,7 \cdot x + 0,5$

g)  $3^x = x^2 + 5x + 2$

h)  $4^x + \ln(x + 11) = \frac{3}{2} \cdot \sin(x) + \sqrt{x + 13}$

i)  $\cos(x) + 0,2 \cdot x = \sin(x) - 0,2 \cdot x$

j)  $\cos(\sin(x)) = 0,3 \cdot (e^{-0,3 \cdot x} + e^{0,3 \cdot x})$

Opgave 4170: Løs følgende ligninger. Tjek facitlisten, og prøv også med nogle af dem at løse ligningerne i Maple med *solve* og *abs* eller  $||$ .  $G = \mathbb{R}$ :

a)  $|x + 4| = 11$

b)  $|x + 5| = 9$

c)  $|x - 3| = 7$

d)  $|2x + 8| = 12$

e)  $|4x + 5| = |-3x + 1|$     f)  $|-2x + 7| = |4x + 2|$     g)  $\frac{1}{4} \cdot |3x + 7| = |-x + 1|$     h)  $|x + 7| + 3 = |4x - 5|$

Opgave 4180: Beregn diskriminanten for følgende andengradsligninger ( $G = \mathbb{R}$ ):

a)  $3x^2 + 2x + 5 = 0$

i)  $-3x^2 - 2x - 5 = 0$

b)  $2x^2 - 4x + 3 = 0$

j)  $-2x^2 + 4x - 3 = 0$

c)  $x^2 - 5x - 2 = 0$

k)  $x^2 = 4x + 2$

d)  $-x^2 + 2x - 4 = 0$

l)  $2x = x^2 - 7$

e)  $-3x^2 - 7x + 1 = 0$

m)  $6x^2 = 0$

f)  $x^2 + x - 1 = 0$

n)  $x^2 = 4$

g)  $4x^2 + 6x = 0$

o)  $x^2 = -4$

h)  $-x^2 + 9 = 0$

p)  $x^2 + 6x + 9 = 0$

Opgave 4200: Løs følgende andengradsligninger i hånden. Tjek med facitlisten ( $G = \mathbb{R}$ ):

a)  $2x^2 - 4x - 6 = 0$

b)  $3x^2 + 2x + 9 = 0$

c)  $-3x^2 + 12x - 12 = 0$

d)  $x^2 + 2x - 15 = 0$

e)  $2x^2 + 5x - 12 = 0$

f)  $x^2 + 7 = 0$

g)  $3x^2 + 2x - 8 = 0$

h)  $-2x^2 - 4x + 6 = 0$

i)  $5x + 14 = x^2$

j)  $x^2 + x - 1 = 0$

k)  $x^2 - 3x = -1$

l)  $-\frac{1}{15}x^2 - \frac{2}{15}x + 1 = 0$

Opgave 4202: Løs følgende andengradsligninger i hånden (tjek med facitlisten):

a)  $2x^2 + 2x - 4 = 0$  ;  $G = \mathbb{R}$

f)  $4x^2 + 8x - 21 = 0$  ;  $G = \mathbb{R}$

b)  $-3x^2 + 12x - 9 = 0$  ;  $G = \mathbb{R}$

g)  $x^2 + 2x - 15 = 0$  ;  $G = \mathbb{R}$

c)  $x^2 + x - 20 = 0$  ;  $G = \mathbb{R}$

h)  $-5x^2 + 3x - 2 = 0$  ;  $G = \mathbb{R}$

d)  $-2x^2 + 12x - 18 = 0$  ;  $G = \mathbb{R}$

i)  $x^2 + 4x - 21 = 0$  ;  $G = \mathbb{R}$

e)  $3x^2 - x + 4 = 0$  ;  $G = \mathbb{R}$

j)  $2x^2 - 4x - 6 = 0$  ;  $G = \mathbb{R}$

Opgave 4210: Løs følgende andengradsligninger ved at "gætte" faktoriseringen og anvende nulreglen. Tjek for hver opgave resultatet med facitlisten. I alle opgaver er  $G = \mathbb{R}$ :

a)  $x^2 - 2x - 24 = 0$     b)  $x^2 + 10x + 21 = 0$     c)  $x^2 + 3x - 10 = 0$     d)  $x^2 + 4x + 3 = 0$   
 e)  $x^2 + 2x - 63 = 0$     f)  $x^2 - 13x + 42 = 0$     g)  $x^2 - x - 2 = 0$     h)  $x^2 + 10x + 16 = 0$   
 i)  $x^2 - 6x + 9 = 0$     j)  $x^2 - x - 30 = 0$     k)  $x^2 - 5x - 50 = 0$     l)  $x^2 - 14x + 49 = 0$

Opgave 4212: Løs følgende andengradsligninger ved at "gætte" faktoriseringen og anvende nulreglen. Tjek for hver opgave resultatet med facitlisten. I alle opgaver er  $G = \mathbb{R}$ :

a)  $x^2 - 5x + 6 = 0$     b)  $x^2 + 2x - 35 = 0$     c)  $x^2 + 5x + 4 = 0$     d)  $x^2 - 3x - 18 = 0$   
 e)  $x^2 + 9x + 20 = 0$     f)  $x^2 - 7x - 18 = 0$     g)  $x^2 + 3x - 40 = 0$     h)  $x^2 + 11x - 12 = 0$   
 i)  $x^2 - 15x + 44 = 0$     j)  $x^2 - 18x + 81 = 0$

Opgave 4214: Foretag følgende for nedenstående andengradsligninger:

- 1) Omskriv dem ved (lovlige) ligningsoperationer til formen  $x^2 + b \cdot x + c = 0$ .
- 2) Kom frem til én af følgende konklusioner:
  - I. Ligningen har ingen reelle løsninger (diskriminanten negativ).
  - II. Ligningen har løsninger, men de er ikke heltallige.
  - III. Ligningen har heltallige løsninger, og de er ... (bestem disse)

Tjek din konklusion med facitlisten.

a) $2x^2 + 6x - 36 = 0$ ; $G = \mathbb{R}$	f) $3x^2 + 9x = -18$ ; $G = \mathbb{R}$
b) $-3x^2 - 18x - 15 = 0$ ; $G = \mathbb{R}$	g) $2x^2 + 10x - 14 = 0$ ; $G = \mathbb{R}$
c) $-2x = 2x^2 - 24$ ; $G = \mathbb{R}$	h) $\frac{2}{3}x^2 = -2x + \frac{80}{3}$ ; $G = \mathbb{R}$
d) $4x^2 + 16x + 80 = 0$ ; $G = \mathbb{R}$	i) $2x^2 + 6x - 12 = 0$ ; $G = \mathbb{R}$
e) $\frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{15}{2} = 0$ ; $G = \mathbb{R}$	j) $\frac{1}{3}x^2 + 2x = 7$ ; $G = \mathbb{R}$

Opgave 4220: Løs følgende trigonometriske ligninger ved at anvende *arcsin*, *arccos* og *arctan* og betragtninger på enhedscirklen. Tjek efterfølgende facit med *intervalsolve*.

a)  $\sin(x) = 0,45$  ;  $G = [0, 2\pi]$     b)  $\cos(x) = 0,17$  ;  $G = [-\pi, \pi]$   
 c)  $\tan(x) = -2,45$  ;  $G = [0, 2\pi]$     d)  $2 \cdot \sin(x) + 1,7 = 2,8$  ;  $G = [0, 4\pi]$   
 e)  $\sin(2x) = 0,87$  ;  $G = [0, \pi]$     f)  $4 \cdot \cos(-x) = 1,35$  ;  $G = [0, 2\pi]$     g)  $1,4 \cdot \tan(2x) + 3,7 = 2,9$  ;  $G = [0, \pi]$

Opgave 4240: Isolér i nedenstående formler den angivne variabel eller konstant. Tjek resultatet ved at opskrive formlen i Maple, højreklikke på den og vælge 'solve' → 'Isolate Expression for' → ...

1)  $M = \frac{m}{n}$  Isolér m

6)  $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$  Isolér v

2)  $M = \frac{m}{n}$  Isolér n

7)  $E_{term} = m \cdot c \cdot \Delta T$  Isolér c

3)  $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$  Isolér h

8)  $E_{term} = m \cdot c \cdot \Delta T$  Isolér  $T_{slut}$   $\Delta T = T_{slut} - T_{start}$

4)  $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$  Isolér m

9)  $F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$  Isolér r

5)  $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$  Isolér m



Opgave 4300: Afgør i hvert af nedenstående tilfælde, om punktet  $P$  er en del af det geometriske sted, der er givet ved den pågældende ligning ( $G = \mathbb{R}^2$ ):

Prøv i hvert tilfælde at indtaste punkt og ligning i Geogebra og se, om du har svaret rigtigt.

- a)  $P(2,3)$        $y = 5x - 7$
- b)  $P(4,9)$        $(x-7)^2 + (y-11)^2 = 13$
- c)  $P(-3,8)$        $x^2 + x \cdot y = -11$
- d)  $P(-5,-4)$     $x \cdot y = 20$
- e)  $P(0,10)$        $2 \cdot x^2 + 5 \cdot y^2 = 700$
- f)  $P(1,7)$        $x^2 + 2x + 3 \cdot x \cdot y - y^2 + 5y = 10$

Opgave 4310: Parallelforskyd kurverne angivet med nedenstående ligninger som angivet. Tjek dit svar med Geogebra, hvor du indtaster både ligningen for den oprindelige kurve og for den parallelforskudte kurve og ser, om sidstnævnte er forskudt som ønsket.

- a)  $y = x^2 + 3x - 7$       Forskydes med 4 langs x-aksen og -5 langs y-aksen.
- b)  $y^2 = x$       Forskydes med -3 langs x-aksen og 7 langs y-aksen.
- c)  $x^2 + y^2 = 9$       Forskydes med 6 langs x-aksen og 1 langs y-aksen.       $G = \mathbb{R}^2$
- d)  $2 \cdot x^2 + 5 \cdot y^2 = 16$       Forskydes med -8 langs x-aksen og 11 langs y-aksen.
- e)  $2x^2 - 5y^2 = 11$       Forskydes med 9 langs x-aksen og -2 langs y-aksen.
- f)  $y^3 - 2x^2 + 5 \cdot x \cdot y = -8$       Forskydes med 12 langs x-aksen og 17 langs y-aksen.

Opgave 4312: Spejl nedenstående kurver i både x-aksen og y-aksen. Tjek dit svar med Geogebra, hvor du indtaster både ligningen for den oprindelige kurve og for de spejlede kurver og ser, om sidstnævnte er spejlet som ønsket.

- a)  $y = x^2 + 3x - 7$       ;  $G = \mathbb{R}^2$       b)  $y^2 = x$       ;  $G = \mathbb{R}^2$
- c)  $x^2 + y^2 = 9$       ;  $G = \mathbb{R}^2$       d)  $2 \cdot x^2 + 5 \cdot y^2 = 16$       ;  $G = \mathbb{R}^2$
- e)  $2x^2 - 5y^2 = 11$       ;  $G = \mathbb{R}^2$       f)  $y^3 - 2x^2 + 5 \cdot x \cdot y = -8$  ;  $G = \mathbb{R}^2$

Opgave 4314: Rotér følgende kurver med den angivne vinkel omkring origo. Tjek dit svar med Geogebra, hvor du indtaster både ligningen for den oprindelige kurve og for den roterede kurve og ser, om sidstnævnte er roteret som ønsket.

- a)  $y = x^2 + 3x - 7$       ;  $G = \mathbb{R}^2$       Roteres 30 grader.
- b)  $y^2 = x$       ;  $G = \mathbb{R}^2$       Roteres -30 grader.
- c)  $2 \cdot x^2 + 5 \cdot y^2 = 16$       ;  $G = \mathbb{R}^2$       Roteres 45 grader.
- d)  $2x^2 - 5y^2 = 11$       ;  $G = \mathbb{R}^2$       Roteres -45 grader.
- e)  $y^3 - 2x^2 + 5 \cdot x \cdot y = -8$  ;  $G = \mathbb{R}^2$       Roteres 120 grader.

Opgave 4316: Angiv i nedenstående eksempler ligningen for det pågældende geometriske sted. Tjek dit resultat med Geogebra ved at indtaste den oprindelige ligning og din fundne ligning og se, om du har fået anvendt den ønskede isometri.

- Cirklen med ligningen  $x^2 + y^2 = 49$  ;  $G = \mathbb{R}^2$  parallelforskuet med 7 langs  $x$ -aksen og -4 langs  $y$ -aksen. Kald denne cirkel  $A$ .
- Cirkel  $A$  spejlet i  $x$ -aksen. Kald denne cirkel  $B$ .
- Cirkel  $B$  spejlet i  $y$ -aksen.
- Parablen med ligningen  $y = 2x^2 - 3x + 7$  ;  $G = \mathbb{R}^2$  parallelforskuet med -3 langs  $x$ -aksen og -6 langs  $y$ -aksen. Kald denne parabel for  $P$ .
- Parabel  $P$  spejlet i  $x$ -aksen. Kald denne parabel for  $Q$ .
- Parabel  $Q$  spejlet i  $y$ -aksen.
- Ellipsen med ligningen  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  ;  $G = \mathbb{R}^2$  parallelforskuet med 4 langs  $x$ -aksen og -8 langs  $y$ -aksen. Kald denne ellipse for  $E$ .
- Ellipsen  $E$  spejlet i  $x$ -aksen. Kald denne ellipse for  $F$ .
- Ellipsen  $F$  spejlet i  $y$ -aksen.

Opgave 4317: Det geometriske sted for de punkter, der er bestemt ved ligningen

$$x^2 + y^2 = 16 \quad ; \quad G = \mathbb{R}^2 \text{ er en cirkel med centrum i origo.}$$

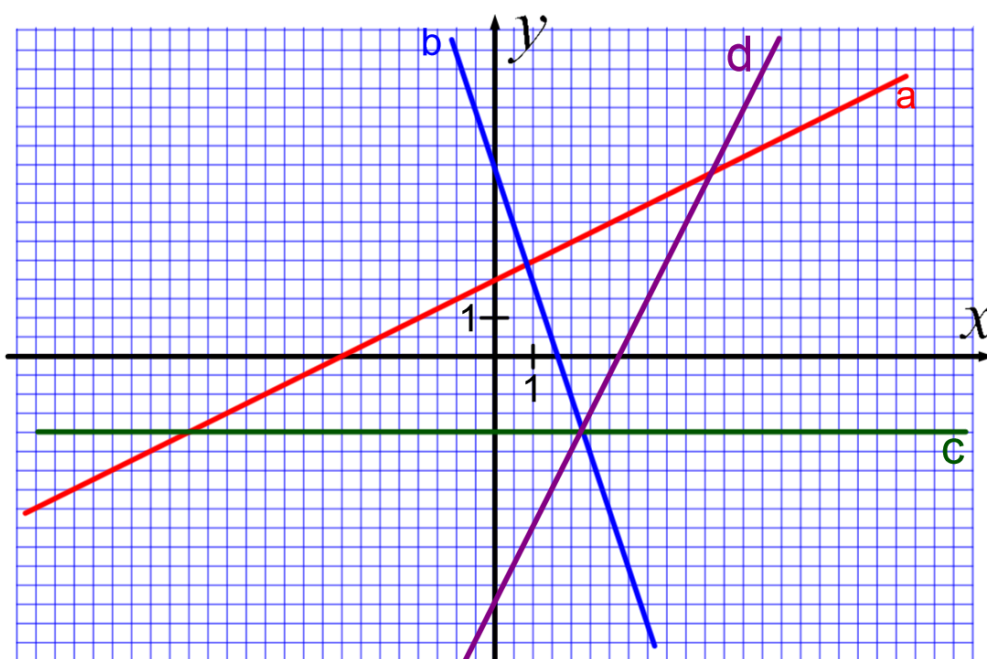
Angiv ligningen for den cirkel, der er en parallelforskydning af ovenstående cirkel med 6 langs  $x$ -aksen og -3 langs  $y$ -aksen.

Opgave 4318: Det geometriske sted for punkterne bestemt ved ligningen

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+5)^2}{4} = 1 \quad ; \quad G = \mathbb{R}^2 \text{ er en ellipse.}$$

Angiv ligningen for den ellipse, der er en spejling af ovenstående ellipse i  $x$ -aksen.

Opgave 4320: Hvis der er opgivet tal, så størrelser kan beregnes, må man aldrig aflæse dem på en graf. Men her er ingen tal (ud over skalaanvisningerne på akserne), så du skal for nedenstående fire rette linjer aflæse hældningen  $a$  og skæringen  $b$  med  $y$ -aksen og derefter angive ligningen for den pågældende rette linje:



Opgave 4330: Bestem ligningerne for de rette linjer, der går gennem de angivne punkter:

- a) (3,9) og (7,25)                      b) (-4,17) og (1,2)                      c) (6,11) og (-10,3)  
d) (5,1) og (-1,-3)                      e) (3,6) og (-7,6)

Opgave 4332: Bestem ligningerne for de rette linjer, der går gennem de angivne punkter:

- a)  $P(5,2)$   $Q(9,14)$                       d)  $P(3,11)$   $Q(-9,11)$   
b)  $P(-4,1)$   $Q(5,-17)$                       e)  $P(-5,2)$   $Q(9,16)$   
c)  $P(-2,-3)$   $Q(-7,12)$                       f)  $P(9,-5)$   $Q(2,21)$

Opgave 4334: Bestem ligningerne for de rette linjer, der går gennem de angivne punkter:

- a) (-3,-7) og (4,14)                      b) (4,-1) og (-5,17)  
c) (2,5) og (6,1)                      d) (-5,2) og (3,6)

Opgave 4340: Bestem ligningerne for de rette linjer, der går gennem de angivne punkter og har den angivne hældningskoefficient:

- a)  $P(5,-9)$   $a=3$                       b)  $P(-3,1)$   $a=-2$                       c)  $P(0,4)$   $a=9$   
d)  $P(8,3)$   $a=0$                       e)  $P(-1,-8)$   $a=-1$

Opgave 4342: Bestem ligningerne for de rette linjer, der går gennem de angivne punkter og har den angivne hældningskoefficient. Tjek resultatet ved at indtaste ligningen i Geogebra og se, om det angivne punkt ligger på linjen.

- a)  $P(-2,7)$   $a=3$                       b)  $P(5,-4)$   $a=-2$   
c)  $P(-1,-3)$   $a=5$                       d)  $P(8,5)$   $a=-4$

Opgave 4350: Angiv de to punkter, hvor de rette linjer angivet ved nedenstående ligninger skærer koordinataksene.

- a)  $y=2x-6$  ;  $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$                       b)  $y=-7x-21$  ;  $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$   
c)  $y=10x+5$  ;  $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$                       d)  $y=-3x+8$  ;  $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$   
e)  $y+9=-3x$  ;  $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$                       f)  $4x+y=-3$  ;  $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$   
g)  $\frac{1}{2}y=2x+8$  ;  $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Opgave 4360: De to rette linjer  $l$  og  $m$  er givet ved ligningerne  $l: y=\frac{6}{5}x+2$  og  $m: y=-\frac{3}{4}x+2$ .

- a) Bestem den spidse vinkel, som linjen  $l$  danner med  $x$ -aksen.  
b) Bestem den spidse vinkel, som linjen  $m$  danner med  $x$ -aksen.  
c) Bestem den spidse vinkel, som linjerne danner med hinanden, hvor de skærer.

Opgave 4362: De to rette linjer  $l$  og  $m$  er givet ved ligningerne  $l: y=\frac{3}{2}x-6$  og  $m: y=-5x+9$ .

- a) Bestem den spidse vinkel, som linjen  $l$  danner med  $x$ -aksen.  
b) Bestem den spidse vinkel, som linjen  $m$  danner med  $x$ -aksen.  
c) Bestem den spidse vinkel, som linjerne danner med hinanden, hvor de skærer.

Opgave 4364: De to rette linjer  $l$  og  $m$  er givet ved ligningerne  $l: y=x-6$  og  $m: y=\frac{2}{3}x+5$ .

- a) Bestem den spidse vinkel, som linjen  $l$  danner med  $x$ -aksen.  
b) Bestem den spidse vinkel, som linjen  $l$  danner med  $y$ -aksen.  
c) Bestem den spidse vinkel, som linjen  $m$  danner med  $x$ -aksen.  
d) Bestem den spidse vinkel, som linjen  $m$  danner med  $y$ -aksen.  
e) Bestem den spidse vinkel, som linjerne danner med hinanden, hvor de skærer.  
f) Bestem den stumpe vinkel, som linjerne danner med hinanden, hvor de skærer.

Opgave 4366: De to rette linjer  $l$  og  $m$  er givet ved ligningerne  $l: y = \frac{4}{7} \cdot x - 3$  og  $m: y = -\frac{7}{4}x + 2$ .

- Bestem den spidse vinkel, som linjen  $l$  danner med  $x$ -aksen.
- Bestem den spidse vinkel, som linjen  $m$  danner med  $x$ -aksen.
- Bestem den vinkel, som linjerne danner med hinanden, hvor de skærer.

Opgave 4368: En ret linje  $l$  er givet ved ligningen  $l: y = -\frac{5}{8} \cdot x + 1$  ;  $G = \mathbb{R}^2$ .

- Bestem den spidse vinkel, som linjen  $l$  danner med  $x$ -aksen.

En anden linje  $m$  er ortogonal med linjen  $l$ .

- Bestem den spidse vinkel, som linjen  $m$  danner med  $x$ -aksen.
- Bestem hældningskoefficienten for linjen  $m$ .

Opgave 4370: De to rette linjer  $l$  og  $k$  er ortogonale. De er givet ved ligningerne

$$y = -\frac{3}{5}x + 4 \text{ og } y = c \cdot x - 7 \quad ; \quad G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} . \text{ Bestem } c.$$

Opgave 4372: Den rette linje  $l$  er givet ved ligningen  $l: y = \frac{1}{4}x - 13$  ;  $G = \mathbb{R}^2$ .

Bestem ligningen for den rette linje  $m$ , der står vinkelret på  $l$  og går gennem punktet  $P(-3, 2)$ .

Opgave 4373: Den rette linje  $l$  er givet ved ligningen  $l: y = -\frac{3}{7}x + 18$  ;  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Bestem ligningen for den rette linje  $m$ , der står vinkelret på  $l$  og går gennem punktet  $P(6, -1)$ .

Opgave 4374: Den rette linje  $l$  er givet ved ligningen  $l: y = \frac{1}{3} \cdot x + 18$  ;  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Bestem ligningen for den rette linje  $m$ , der står vinkelret på  $l$  og går gennem punktet  $P(-7, 3)$ .

Opgave 4376: Den rette linje  $l$  er givet ved ligningen  $l: y = -\frac{5}{2}x + 11$  ;  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Bestem ligningen for den rette linje  $m$ , der står vinkelret på  $l$  og går gennem punktet  $P(8, -5)$ .

Opgave 4380: En cirkel har centrum i  $C(7, -2)$ , og punktet  $P(2, -1)$  ligger på cirklen.

Bestem en ligning for den tangent til cirklen, der går gennem punktet  $P$ .

Opgave 4382: En cirkel har centrum i  $C(-1, 6)$ , og punktet  $P(3, -2)$  ligger på cirklen.

Bestem en ligning for den tangent til cirklen, der går gennem punktet  $P$ .

Opgave 4384: En cirkel har centrum i  $C(-3, 7)$ , og punktet  $P(7, 2)$  ligger på cirklen.

Bestem en ligning for den tangent til cirklen, der går gennem punktet  $P$ .

Opgave 4390: En ret linje er givet ved ligningen  $3x - 6y + 7 = 0$  ;  $G = \mathbb{R}^2$ .

- Bestem hældningen for den rette linje.
- Bestem linjens to skæringspunkter med koordinataksene.

Opgave 4391: En ret linje er givet ved ligningen  $-2x + 5y - 8 = 0$  ;  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

- Bestem hældningen for den rette linje.
- Bestem linjens skæringspunkter med koordinataksene.
- Bestem den spidse vinkel, som linjen danner med  $x$ -aksen.

Opgave 4392: En ret linje er givet ved ligningen  $-6x + 15y - 24 = 0$  ;  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

- Bestem hældningen for den rette linje.
- Bestem linjens skæringspunkter med koordinataksene.
- Bestem den spidse vinkel, som linjen danner med  $x$ -aksen.

Opgave 4393: En ret linje er givet ved ligningen  $8x - 20y + 32 = 0$  ;  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

- Bestem hældningen for den rette linje.
- Bestem linjens skæringspunkter med koordinataksene.
- Bestem den spidse vinkel, som linjen danner med  $x$ -aksen.

Opgave 4394: De rette linjer  $l$  og  $m$  givet ved ligningerne  $l: 3x - 7y + 5 = 0$  og  $m: k \cdot x + 4y - 19 = 0$  er ortogonale. Bestem  $k$ .

Opgave 4395: De rette linjer  $l$  og  $m$  givet ved ligningerne  $l: 9x + 2y = 6$  og  $m: y = a \cdot x + 6$  er ortogonale. Bestem  $a$ .

Opgave 4396: En ret linje  $l$  er givet ved ligningen  $y = \frac{1}{5}x - 7$  ;  $G = \mathbb{R}^2$ .

- Bestem en ligning for den rette linje  $m$ , der går gennem punktet  $P(4,7)$  og er parallel med  $l$ .
- Bestem en ligning for den rette linje  $k$ , der går gennem punktet  $Q(-3,6)$  og er ortogonal med  $l$ .

Opgave 4397: En ret linje  $l$  er givet ved ligningen  $y = -4x + 2$  ;  $G = \mathbb{R}^2$ .

- Bestem en ligning for den rette linje  $m$ , der går gennem punktet  $P(1,9)$  og er parallel med  $l$ .
- Bestem en ligning for den rette linje  $k$ , der går gennem punktet  $Q(2,-5)$  og er ortogonal med  $l$ .

Opgave 4398: Nedenfor er angivet centrum  $C$  for en cirkel og et punkt  $P$  på cirklen. Bestem ligningen for den tangent til cirklen, der rører i punktet  $P$ :

- a)  $C(5,-2)$   $P(1,6)$       b)  $C(-3,-4)$   $P(6,-1)$       c)  $C(-1,7)$   $P(1,-3)$

Opgave 4400: Størrelsen  $y$  er proportional med  $x$ . Grafen for sammenhængen går gennem punktet  $P(5,30)$ .

- Hvilken værdi har proportionalitetskonstanten?
- Angiv en ligning, der beskriver sammenhængen.

Opgave 4401: Størrelsen  $y$  er proportional med  $x$ . Grafen for sammenhængen går gennem punktet  $P(14,9)$ .

- Hvilken værdi har proportionalitetskonstanten?
- Angiv en ligning, der beskriver sammenhængen.

Opgave 4402: Størrelserne  $x$  og  $y$  er proportionale. Udfyld tabellen.

$x$	2		12
$y$		20	48

Opgave 4403: Størrelserne  $x$  og  $y$  er proportionale. Udfyld tabellen.

$x$		7	11
$y$	19	31	

Opgave 4404: Størrelserne  $x$  og  $y$  er proportionale. Udfyld tabellen.

$x$		5	7
$y$	18		42

Opgave 4405: Størrelserne  $x$  og  $y$  er proportionale. Udfyld tabellen.

$x$		7	10
$y$	39	91	

Opgave 4410: Energien  $E$  af en foton er proportional dens frekvens  $f$ . Proportionalitetskonstanten kaldes  $h$ . Angiv en formel for sammenhængen.

Opgave 4411: Den varme  $Q$ , der tilføres et legeme, er proportional med forskellen mellem legemets temperatur  $T$  og dets starttemperatur  $T_0$ . Proportionalitetsfaktoren kaldes  $C$ . Angiv en formel, der beskriver sammenhængen.

Opgave 4412: Faldlængden  $s$  af en genstand, der tabes, er proportional med kvadratet på faldtiden  $t$ . Proportionalitetskonstanten kaldes  $k$ . Angiv en formel, der beskriver sammenhængen.

Opgave 4413: Farten  $v$  i en jævn cirkelbevægelse er proportional med kvotienten mellem radius  $r$  og perioden  $T$ . Proportionalitetskonstanten er  $2 \cdot \pi$ . Angiv en formel, der beskriver sammenhængen.

Opgave 4414: Opdriften  $F$  på et legeme, der nedsænkes i en væske, er proportional med produktet af legemets rumfang  $V$  og væskens densitet  $\rho$ . Proportionalitetsfaktoren kaldes  $g$ . Angiv en formel, der beskriver sammenhængen.

Opgave 4420:  $x$  og  $y$  er omvendt proportionale. Udfyld tabellen.

$x$	1	2		-3	
$y$		3	1		-1

Opgave 4421:  $x$  og  $y$  er omvendt proportionale. Udfyld tabellen.

$x$		4	6		-3
$y$	-12		-4	24	

Opgave 4422:  $x$  og  $y$  er omvendt proportionale. Grafen for sammenhængen mellem  $x$  og  $y$  går gennem punktet  $P(7,9)$ . Angiv en ligning for sammenhængen.

Opgave 4423:  $x$  og  $y$  er omvendt proportionale. Grafen for sammenhængen mellem  $x$  og  $y$  går gennem punktet  $P(3,-17)$ . Angiv en ligning for sammenhængen.

Opgave 4424:  $x$  og  $y$  er omvendt proportionale. Grafen for sammenhængen mellem  $x$  og  $y$  går gennem punktet  $P(-5,-13)$ . Angiv en ligning for sammenhængen.

Opgave 4425:  $x$  og  $y$  er omvendt proportionale. Grafen for sammenhængen mellem  $x$  og  $y$  går gennem netop tre af punkterne  $A(6,6)$ ,  $B(2,20)$ ,  $C(-4,12)$ ,  $D(-5,-8)$  og  $E(10,4)$ . Angiv en ligning for sammenhængen.

Opgave 4426: Angiv ligninger for sammenhængene angivet ved nedenstående informationer.

- $y$  er proportional med  $x$ . Grafen går gennem  $(4,24)$ .
- $x$  og  $y$  er omvendt proportionale. Grafen går gennem  $(7,6)$ .
- $y$  er proportional med  $x$ . Grafen går gennem  $(3,17)$ .
- $x$  og  $y$  er omvendt proportionale. Grafen går gennem  $(-2,9)$ .

Opgave 4427:  $x$  og  $y$  er omvendt proportionale. Udfyld tabellen.

$x$		4	8
$y$	28		7

Opgave 4428:  $x$  og  $y$  er omvendt proportionale. Udfyld tabellen.

$x$		15	9
$y$	-45		-5

Opgave 4430: Punktet  $A(3,7)$  ligger på hyperblen  $h_1$  med ligningen  $x \cdot y = 21$ .  $x$ -aksen er vandret asymptote til denne hyperbel, og  $y$ -aksen er lodret asymptote. Hvis hyperblen parallelforskydes med 5 i  $x$ -aksens retning og -6 i  $y$ -aksens retning, vil punktet  $A(3,7)$  forskydes over i  $B(8,1)$ , og desuden vil linjen med ligningen  $x = 5$  være lodret asymptote og ligningen med ligningen  $y = -6$  være vandret asymptote for den nye hyperbel  $h_2$ .

- Indtegn i Geogebra hyperblen med ligningen  $x \cdot y = 21$  og punktet  $A$ . Tjek, at punktet ligger på hyperblen.
- Indtegn punktet  $B$  samt linjerne med ligningerne  $x = 5$  og  $y = -6$ .
- Bestem ligningen for den nye hyperbel  $h_2$ . Indtegn den i Geogebra og tjek, at punktet  $B$  ligger på hyperblen, og at ovenstående linjer er asymptoter.

Opgave 4431: Hyperblen  $h_1$  har ligningen  $x \cdot y = -24$ .

- Find selv et punkt  $A$ , der ligger på hyperblen. Tjek ved hjælp af Geogebra, om det passer.
- Bestem det punkt  $B$ , som  $A$  forskydes over i, når man parallelforskyder hyperblen  $h_1$  med -3 langs  $x$ -aksen og 4 langs  $y$ -aksen over i en ny hyperbel  $h_2$ .
- Indtegn hyperblen  $h_2$  i Geogebra. Tjek, at  $B$  ligger på hyperblen.

Opgave 4432: Punktet  $A(8,4)$  ligger på hyperblen  $h_1$  med ligningen  $x \cdot y = 32$ .

- Bestem de to punkter  $B$  og  $C$ , som punktet  $A$  flyttes over i, når hyperblen spejles i henholdsvis  $x$ -aksen og  $y$ -aksen.
- Indtegn i Geogebra de to spejlede hyperbler. Tjek, om punkterne  $B$  og  $C$  ligger på disse.

Opgave 4433: Hyperblen  $h_1$  har ligningen  $x \cdot y = 37$ .

- Foretag en spejling i  $x$ -aksen samt en parallelforskydning med 5 langs  $x$ -aksen og -9 langs  $y$ -aksen. Tjek med Geogebra, om du har fundet den rigtige ligning.

Opgave 4434: Hyperblen  $h_1$  har ligningen  $x \cdot y = 12$ .

- Foretag en rotation af hyperblen med  $45^\circ$  omkring origo mod uret. Tjek med Geogebra, om du har fundet den rigtige ligning (husk, at Geogebra regner i radianer).
- Rotér  $h_1$  med  $60^\circ$  omkring origo med uret. Tjek med Geogebra, om du har fundet den rigtige ligning.

Opgave 4435: Hyperblen  $h_1$  har ligningen  $x \cdot y = 15$ . Foretag følgende operationer i den angivne rækkefølge og tjek med Geogebra:

- Spejl i  $y$ -aksen, rotér med  $30^\circ$  omkring origo mod uret og parallelforskyd med 4 langs  $x$ -aksen og -3 langs  $y$ -aksen.
- Spejl i  $y$ -aksen, parallelforskyd med 4 langs  $x$ -aksen og -3 langs  $y$ -aksen og rotér med  $30^\circ$  omkring origo mod uret.

Opgave 4440: Bestem toppunktets koordinatsæt samt  $a$ -værdien for parablerne givet ved nedenstående ligninger:

$$\begin{array}{ll} a) y = 3 \cdot (x-8)^2 + 5 & ; G = \mathbb{R}^2 \\ b) y = -4 \cdot (x+2)^2 - 7 & ; G = \mathbb{R}^2 \\ c) y = (x+1)^2 - 6 & ; G = \mathbb{R}^2 \\ d) y = -x^2 - 3 & ; G = \mathbb{R}^2 \\ e) y = 9 \cdot (x+11)^2 & ; G = \mathbb{R}^2 \\ f) 2y + 6 = 4 \cdot (x-3)^2 & ; G = \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Opgave 4450: Bestem ved hjælp af toppunktsformlen toppunkterne for parablerne angivet ved nedenstående ligninger.

$$\begin{array}{ll} a) y = x^2 - 6x + 14 & ; G = \mathbb{R}^2 \\ b) y = -3x^2 - 6x - 6 & ; G = \mathbb{R}^2 \\ c) y = 9x^2 + 6x + 3 & ; G = \mathbb{R}^2 \\ d) y = 4x^2 + 6x + 2 & ; G = \mathbb{R}^2 \\ e) y = 7x^2 - 14x + 8 & ; G = \mathbb{R}^2 \\ f) y = 6x^2 - 6x + 4 & ; G = \mathbb{R}^2 \end{array}$$

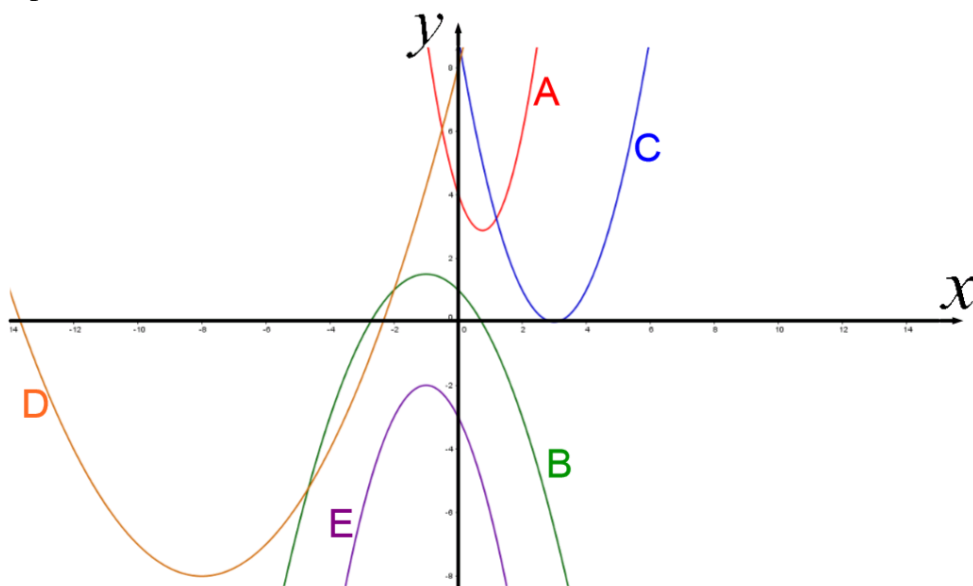
Opgave 4452: Bestem toppunktet for parablerne givet ved nedenstående ligninger (Tjek resultaterne ved at anvende Maples *maximize*, *minimize* og *location*):

$$\begin{array}{l} a) y = 3x^2 + 4x + 2 ; G = \mathbb{R}^2 \\ b) y = -2x^2 + 5x - 4 ; G = \mathbb{R}^2 \\ c) y = x^2 - 6x + 9 ; G = \mathbb{R}^2 \\ d) y = -5x^2 - x + 6 ; G = \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Opgave 4460: Bestem følgende for parablerne angivet ved nedenstående ligninger: Topunkt, skæringspunkt med  $y$ -aksen og evt. nulpunkter.

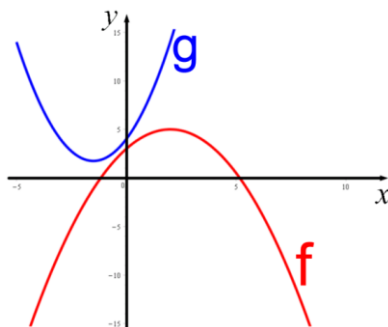
$$\begin{array}{ll} a) y = -3x^2 + 6x + 24 & ; G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ b) y = x^2 - x - 12 & ; G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ c) y = -2x^2 + 3x - 5 & ; G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ d) y = 3x^2 - 12x + 12 & ; G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ e) y = 4x^2 + 16x + 7 & ; G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ f) y = 5x^2 - 3x + 1 & ; G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \end{array}$$

Opgave 4470: Bestem fortegnene for  $a, b, c$  og  $d$  for nedenstående parabler (angivet ved ligninger på formen  $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ):

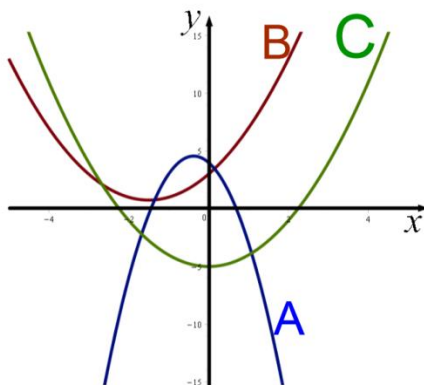




Opgave 4471: Bestem fortegnene for  $a$ ,  $b$ ,  $c$  og  $d$  for nedenstående parabler, der er angivet ved ligninger på formen  $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ;  $a \neq 0$ ;  $G = \mathbb{R}^2$ , og hvor  $d$  er diskriminanten:



Opgave 4472: Bestem fortegnene for  $a$ ,  $b$ ,  $c$  og  $d$  for nedenstående parabler, der er angivet ved ligninger på formen  $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ;  $a \neq 0$ ;  $G = \mathbb{R}^2$ , og hvor  $d$  er diskriminanten:



Opgave 4500: Angiv radius og koordinatsæt til centrum for nedenstående cirkler:

a)  $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 25$  ;  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

b)  $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 16$  ;  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

c)  $(x+1)^2 + (y+10)^2 = 100$  ;  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

d)  $(x-12)^2 + y^2 = 4$  ;  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

e)  $x^2 + (y-5)^2 = 49$  ;  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

f)  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+2)^2 = 7$  ;  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

g)  $x^2 + y^2 = 1$  ;  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Opgave 4502: Angiv ligningerne for cirklerne med følgende centre og radier:

a)  $C(4,9)$   $r = 3$                       b)  $C(-2,8)$   $r = 8$

c)  $C(-9,-13)$   $r = 2$                       d)  $C(3,1)$   $r = 5$

e)  $C(6,0)$   $r = 1$                       f)  $C(0,-3)$   $r = \sqrt{13}$                       g)  $C(0,0)$   $r = \sqrt{87}$

Opgave 4504: Angiv radius og koordinatsæt til centrum for nedenstående cirkler:

a)  $\frac{1}{2} \cdot (x+8)^2 + \frac{1}{2} \cdot (y-5)^2 = 18$  ;  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

b)  $\frac{1}{5} \cdot (x-1)^2 + \frac{y^2}{5} - 5 = 0$  ;  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

c)  $-x^2 - y^2 + 64 = 0$  ;  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

d)  $-\frac{2}{3} \cdot (x+5)^2 - \frac{2}{3} \cdot (y-2)^2 = -6$  ;  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

e)  $(x+8)^2 = 13 - (y-3)^2$  ;  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Opgave 4510: Angiv centrum og radius for nedenstående cirkler:

a)  $x^2 + 8x + y^2 - 6y = -16$  ;  $G = \mathbb{R}^2$

b)  $x^2 - 2x + y^2 + 10y = 10$  ;  $G = \mathbb{R}^2$

c)  $x^2 + 12x + y^2 + 16y = 0$  ;  $G = \mathbb{R}^2$

d)  $x^2 - 4x + y^2 - 14y - 28 = 0$  ;  $G = \mathbb{R}^2$

e)  $x^2 + y^2 + 8y - 37 = 0$  ;  $G = \mathbb{R}^2$

Opgave 4512: Angiv centrum og radius for nedenstående cirkler:

a)  $x^2 + 4x + y^2 = -3$  ;  $G = \mathbb{R}^2$

b)  $-x^2 + 8x - y^2 - 12y = 16$  ;  $G = \mathbb{R}^2$

c)  $\frac{x^2}{2} + 5x + \frac{y^2}{2} + 7y + 5 = 0$  ;  $G = \mathbb{R}^2$

d)  $x^2 = -6x - y^2 + 10y - 9$  ;  $G = \mathbb{R}^2$

e)  $3x^2 + 12x + 3y^2 - 18y - 9 = 0$  ;  $G = \mathbb{R}^2$

Opgave 4513: Angiv centrum og radius for nedenstående cirkler:

a)  $x^2 + 4x + y^2 + 6y - 12 = 0$  ;  $G = \mathbb{R}^2$

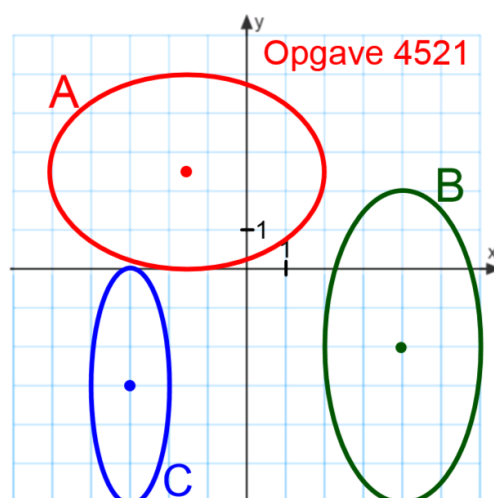
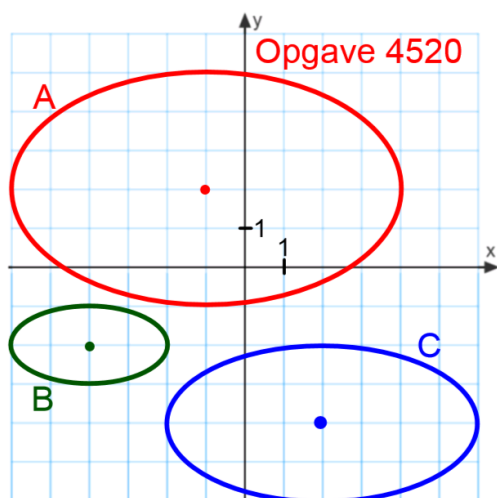
b)  $x^2 + 12x + y^2 - 2y + 1 = 0$  ;  $G = \mathbb{R}^2$

c)  $x^2 - 4x + y^2 + 14y - 28 = 0$  ;  $G = \mathbb{R}^2$

Opgave 4520: Angiv ligninger for nedenstående cirkler, hvor  $C$  er centrum for cirklen, og  $P$  er et punkt på cirklen.

a)  $C(4, -2)$   $P(-1, 5)$       b)  $C(1, 5)$   $P(7, -2)$       c)  $C(-3, 6)$   $P(4, -5)$

Opgave 4530: Angiv ligningerne for ellipserne  $A$ ,  $B$  og  $C$  på figuren til venstre nedenfor:



Opgave 4531: Angiv ligningerne for ellipserne  $A$ ,  $B$  og  $C$  på figuren til højre ovenfor:

Opgave 4535: Indtast svarene på følgende opgaver i Geogebra og tjek på den måde, om du har fundet de rigtige ligninger.

- Angiv ligningen for ellipsen  $A$  med centrum i  $(4, -7)$  og den halve storakse 5 og den halve lilleakse 3.
- Angiv ligningen for den ellipse  $B$ , der er en spejling af ellipsen  $A$  i  $x$ -aksen.
- Angiv ligningen for den ellipse  $C$ , der er en parallelforskydning af ellipsen  $A$  med  $-6$  langs  $x$ -aksen og  $3$  langs  $y$ -aksen.
- Angiv ligningen for den ellipse  $D$ , der er en rotation af ellipsen  $A$  med  $45^\circ$  omkring origo.

Opgave 4537: Tjek dine svar ved at indtaste ligningerne i Geogebra.

- Angiv ligningen for ellipsen  $A$  med den halve storakse 7, den halve lilleakse 4 og centrum i  $(-5,2)$ .
- Angiv ligningen for den ellipse  $B$ , der er en spejling af ellipsen  $A$  i  $y$ -aksen.
- Angiv ligningen for ellipsen  $C$ , der er en rotation af ellipsen  $A$  med  $-60^\circ$  omkring origo.
- Angiv ligningen for ellipsen  $D$ , der er en parallelforskydning af ellipsen  $A$  med 4 langs  $x$ -aksen og  $-1$  langs  $y$ -aksen og en efterfølgende rotation med  $60^\circ$  omkring origo.
- Angiv ligningen for ellipsen  $E$ , der er en rotation af ellipsen  $A$  med  $60^\circ$  omkring origo og efterfølgende en parallelforskydning med 4 langs  $x$ -aksen og  $-1$  langs  $y$ -aksen.

Opgave 4540: I **hvilken eller hvilke** af planerne  $xy$ -planen,  $xz$ -planen og  $yz$ -planen ligger nedenstående punkter? Hvis et punkt ikke ligger i nogen af disse tre planer, angives dette.

- a)  $A(3,0,-6)$    b)  $B(0,7,2)$    c)  $C(3,-1,1)$    d)  $D(-2,-2,0)$    e)  $E(0,8,0)$   
f)  $F(1,1,1)$    g)  $G(0,0,0)$    h)  $H(4,0,0)$    i)  $I(0,-7,13)$    j)  $J(0,0,1)$

Opgave 4550: Hvilke af punkterne  $A(2,7,3)$ ,  $B(1,6,-4)$ ,  $C(-5,5,5)$ ,  $D(-1,-3,-3)$  og  $E(0,0,0)$  ligger i planen bestemt ved ligningen  $2x-3y+4z+5=0$  ;  $G = \mathbb{R}^3$  ?

Opgave 4552: Bestem de tre punkter i planen med ligningen  $5x-2y+3z-30=0$  ;  $G = \mathbb{R}^3$ , der ligger på en af koordinataksene. Eller med andre ord: Bestem skæringspunkterne mellem planen og koordinataksene.

Opgave 4554: Bestem skæringspunkterne mellem koordinataksene og planerne med ligningerne

- a)  $3x-y+4z=12$  ;  $G = \mathbb{R}^3$   
b)  $-5x+4y-2z-20=0$  ;  $G = \mathbb{R}^3$  .  
c)  $x+y+z-7=0$  ;  $G = \mathbb{R}^3$

Opgave 4556: Bestem skæringspunkterne mellem koordinataksene og planen med ligningen  $5x-2z+20=0$  ;  $G = \mathbb{R}^3$  .

Opgave 4558: Planen  $\alpha: 4x-5y+2z=0$  ;  $G = \mathbb{R}^3$  indeholder origo  $O(0,0,0)$ . Angiv en ligning for planen  $\beta$ , der er en parallelforskydning af  $\alpha$  langs  $z$ -aksen og indeholder punktet  $A(0,0,8)$ .

Opgave 4560: Aflæs centrum og radius for kuglerne bestemt ved følgende ligninger:

- a)  $(x+5)^2 + (y-3)^2 + (z+10)^2 = 25$  ;  $G = \mathbb{R}^3$   
b)  $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+4)^2 = 9$  ;  $G = \mathbb{R}^3$   
c)  $(x+8)^2 + y^2 + (z-6)^2 = 1$  ;  $G = \mathbb{R}^3$   
d)  $x^2 + (y-13)^2 + z^2 = 17$  ;  $G = \mathbb{R}^3$

Opgave 4562: Angiv ligningerne for kuglerne med følgende centre og radier:

a)  $C(6, -1, 7)$   $r = 2$                       b)  $C(-8, -3, 5)$   $r = 7$

c)  $C(0, 3, -1)$   $r = 9$                       d)  $C(-4, 0, 0)$   $r = 1$

Opgave 4564: Aflæs centrum og radius for kuglerne bestemt ved følgende ligninger:

a)  $\frac{(x-3)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(z+2)^2}{2} = 8$                       ;  $G = \mathbb{R}^3$

b)  $-3 \cdot (x+7)^2 - 3 \cdot (y-1)^2 - 3 \cdot (z+9)^2 + 12 = 0$                       ;  $G = \mathbb{R}^3$

c)  $x^2 + (z-1)^2 = 19 - y^2$                       ;  $G = \mathbb{R}^3$

d)  $1 - x^2 = y^2 + z^2$                       ;  $G = \mathbb{R}^3$

Opgave 4566: Angiv ligningerne for kuglerne med følgende centre og radier:

a)  $C(-11, -17, 16)$   $r = 11$                       b)  $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{7}{6}\right)$   $r = 12$

c)  $C\left(0, \frac{3}{4}, -\frac{1}{6}\right)$   $r = \frac{2}{3}$                       d)  $C(\pi, e, \varphi)$   $r = \sqrt{2}$

Opgave 4580: Bestem centrum og radius for kuglerne bestemt ved følgende ligninger:

a)  $x^2 - 6x + y^2 + 4y + z^2 - 8z - 7 = 0$                       ;  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

b)  $x^2 + 2x + y^2 - 10y + z^2 + 12z = 2$                       ;  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

c)  $x^2 - 14x + y^2 + z^2 + 6z - 23 = 0$                       ;  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

d)  $x^2 - 20x + y^2 + 20y + z^2 - 20z - 24 = 0$                       ;  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Opgave 4582: Bestem centrum og radius for kuglerne bestemt ved følgende ligninger:

a)  $x^2 + 4x + y^2 + 6y + z^2 + 8z + 4 = 0$                       ;  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

b)  $x^2 - 16x + y^2 + 2y + z^2 + 10z - 10 = 0$                       ;  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

c)  $x^2 + 12x + y^2 - 6y + z^2 - 4 = 0$                       ;  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

d)  $x^2 + 6x + y^2 - 10y + z^2 + 4z - 11 = 0$                       ;  $G = \mathbb{R}^3$

Opgave 4584: Bestem centrum og radius for kuglerne bestemt ved følgende ligninger:

a)  $-x^2 + 8x - y^2 - 4y - z^2 + 6z - 4 = 0$                       ;  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

b)  $2x^2 + 12x + 2y^2 - 8y + 2z^2 + 16z = -26$                       ;  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

c)  $\frac{x^2}{3} - 2x + \frac{y^2}{3} = -\frac{z^2}{3} + 4z + 7$                       ;  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Opgave 4600: Løs følgende ligningssystemer ( $G = \mathbb{R}^2$ ) med substitutionsmetoden. Tjek resultatet med Maple.

a)  $y = 5x - 3$   
 $y = 2x + 4$

b)  $2x + 5y = 9$   
 $x + 3y = 6$

c)  $y = 3x - 4$   
 $6x - 2y = 7$

d)  $2y - 4x = 6$   
 $2x - y = -3$

e)  $x + 7y = 4$   
 $5x - 4y = -2$

f)  $4x + 3y = 9$   
 $2x + y = 0$

Opgave 4610: Anvend lige store koefficienters metode til at løse nedenstående ligningssystemer ( $G = \mathbb{R}^2$ ) og tjek med Maple.

a) $5x - 4y = -7$ $10x - 3y = 1$	b) $3x + 2y = 4$ $-8x - 6y = -14$	c) $8x - 3y = -7$ $-4x + 2y = 5$
-------------------------------------	--------------------------------------	-------------------------------------

d) $4x + 2y = 10$ $-3x + 3y = 15$	e) $3x - 6y = -3$ $-x + 2y = 1$	f) $x + 5y = -6$ $-2x + 4y = -16$
--------------------------------------	------------------------------------	--------------------------------------

Opgave 4620: Anvend efter eget valg substitutionsmetoden eller lige store koefficienters metode og løs følgende ligningssystemer. Tjek resultatet med Maple.

a)  $3y - x = 13$  ;  $G = \mathbb{R}^2$       b)  $2y + 4x = 2$  ;  $G = \mathbb{R}^2$       c)  $y + 6x = 33$  ;  $G = \mathbb{R}^2$   
 $-2y + 4x = 2$  ;  $G = \mathbb{R}^2$        $-5y - 7x = -7$  ;  $G = \mathbb{R}^2$        $-5y + 2x = -15$  ;  $G = \mathbb{R}^2$

d)  $6x - 8y - 10 = 0$  ;  $G = \mathbb{R}^2$       e)  $2y - 8x = 6$  ;  $G = \mathbb{R}^2$       f)  $-y + 5x = 18$  ;  $G = \mathbb{R}^2$   
 $-3x + 5y + 7 = 0$  ;  $G = \mathbb{R}^2$        $4x + 3 = y$  ;  $G = \mathbb{R}^2$        $3y - 15x = 7$  ;  $G = \mathbb{R}^2$

Opgave 4622: Løs ligningssystemerne (tjek med Maples 'solve'):

a)  $3x + 7y = 3$  ;  $G = \mathbb{R}^2$       b)  $5x - 3y = 5$  ;  $G = \mathbb{R}^2$       c)  $6x + 5y = 5$  ;  $G = \mathbb{R}^2$   
 $-6x - 9y = -21$  ;  $G = \mathbb{R}^2$        $3x + 2y = 22$  ;  $G = \mathbb{R}^2$        $-2x + 3y = 31$  ;  $G = \mathbb{R}^2$

Opgave 4630: Anvend lige store koefficienters metode til at få fjernet  $x$ -værdierne og dannet to ligninger med variablene  $y$  og  $z$ . Anvend derefter lige store koefficienters metode eller substitutionsmetoden og find værdien af  $z$  eller  $y$ . Tjek til sidst dit resultat med Maple.

$9x + 5y - 2z = -6$        $2x - 4y + z = -16$   
a)  $3x - 4y - z = 13$  ;  $G = \mathbb{R}^3$       b)  $3x + 5y - 2z = 13$  ;  $G = \mathbb{R}^3$   
 $-3x + 2y + 5z = 13$        $-6x + 2y - 7z = 0$

Opgave 4640: Bestem determinanterne  $d$ ,  $d_x$  og  $d_y$  for følgende ligningssystemer:

a) $5x - 4y = -7$ $10x - 3y = 1$	b) $3x + 2y = 4$ $-8x - 6y = -14$	c) $8x - 3y = -7$ $-4x + 2y = 5$
-------------------------------------	--------------------------------------	-------------------------------------

d) $4x + 2y = 10$ $-3x + 3y = 15$	e) $3x - 6y = -3$ $-x + 2y = 1$	f) $x + 5y = -6$ $-2x + 4y = -16$
--------------------------------------	------------------------------------	--------------------------------------

Opgave 4650: Bestem ved hjælp af determinantmetoden løsningerne til følgende ligningssystemer. Tjek resultatet med Maple.

a)  $4x - 2y = 2$  ;  $G = \mathbb{R}^2$       b)  $-3x + 2y = 14$  ;  $G = \mathbb{R}^2$       c)  $10x - 2y = 6$  ;  $G = \mathbb{R}^2$   
 $-3x + 5y = 16$  ;  $G = \mathbb{R}^2$        $2x + 5y = -3$  ;  $G = \mathbb{R}^2$        $-5x + y = -9$  ;  $G = \mathbb{R}^2$

d)  $6x - y = -4$  ;  $G = \mathbb{R}^2$       e)  $3x + 4y = -1$  ;  $G = \mathbb{R}^2$       f)  $x - y = 1$  ;  $G = \mathbb{R}^2$   
 $-3x + 2y = -10$  ;  $G = \mathbb{R}^2$        $-12x - 16y = 4$  ;  $G = \mathbb{R}^2$        $-x - y = -1$  ;  $G = \mathbb{R}^2$

Opgave 4652: Se på ligningssystemet  $5x + 3y = 1$  ;  $G = \mathbb{R}^2$   
 $-2x + t \cdot y = -7$

- a) Bestem den værdi for  $t$ , hvor ligningssystemet ikke har nogen løsning. Tjek med Maple.  
b) Bestem den værdi for  $t$ , hvor ligningssystemet har løsningen  $(2, -3)$ . Tjek med Maple.

Opgave 4653: Bestem skæringspunktet mellem linjerne  $l$  og  $m$  angivet ved nedenstående ligninger (Tjek facit med Maple):

$$\begin{array}{lll} a) \quad l: y = -2x + 7 ; G = \mathbb{R}^2 & b) \quad l: y = x - 5 ; G = \mathbb{R}^2 & c) \quad l: y = 3x - 8 ; G = \mathbb{R}^2 \\ m: y = 3x - 3 ; G = \mathbb{R}^2 & m: y = -7x + 11 ; G = \mathbb{R}^2 & m: y = -5x + 4 ; G = \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Opgave 4660: Bestem eventuelle skærings- eller røringspunkter mellem følgende geometriske steder. Tjek resultaterne med Maple.

- Parablen givet ved ligningen  $y = -x^2 + 2x + 5 ; G = \mathbb{R}^2$  og den rette linje givet ved ligningen  $y = -x + 1 ; G = \mathbb{R}^2$ .
- Parablen givet ved ligningen  $y = x^2 - 6x + 10 ; G = \mathbb{R}^2$  og parablen givet ved ligningen  $y = -2x^2 + 12x - 5 ; G = \mathbb{R}^2$ .
- Den rette linje givet ved ligningen  $y = x + 8 ; G = \mathbb{R}^2$  og cirklen givet ved ligningen  $(x + 4)^2 + (y - 7)^2 = 9 ; G = \mathbb{R}^2$ .

Opgave 4662: Bestem eventuelle skærings- eller røringspunkter mellem følgende geometriske steder. Tjek resultaterne med Maple.

- Den rette linje givet ved ligningen  $y = 2x + 2 ; G = \mathbb{R}^2$  og hyperblen givet ved ligningen  $y = \frac{12}{x} ; G = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ .
- Den rette linje givet ved ligningen  $y = -\frac{5}{2}x + \frac{11}{2} ; G = \mathbb{R}^2$  og ellipsen givet ved ligningen  $\frac{(x-3)^2}{8} + \frac{(y+2)^2}{50} = 1 ; G = \mathbb{R}^2$ .
- Hyperblen givet ved ligningen  $y = \frac{24}{x} ; G = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$  og cirklen givet ved ligningen  $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 80 ; G = \mathbb{R}^2$ .
- Hyperblen givet ved ligningen  $y \cdot x = 2 ; G = \mathbb{R}^2$  og parablen givet ved ligningen  $y = x^2 - 4x + 5 ; G = \mathbb{R}^2$ .

Opgave 4664: Bestem eventuelle skærings- eller røringspunkter mellem følgende geometriske steder. Tjek resultaterne med Maple.

- Cirklen givet ved ligningen  $(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = 26 ; G = \mathbb{R}^2$  og parablen givet ved ligningen  $y = \frac{1}{4}x^2 + x + \frac{7}{4} ; G = \mathbb{R}^2$ . Du må gerne bruge Maple til at løse fjerdegradsligningen, der fremkommer.
- Cirklen givet ved ligningen  $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 65 ; G = \mathbb{R}^2$  og cirklen givet ved ligningen  $(x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 40 ; G = \mathbb{R}^2$ .
- Cirklen givet ved ligningen  $(x - 8)^2 + (y + 1)^2 = 130 ; G = \mathbb{R}^2$  og cirklen givet ved ligningen  $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 50 ; G = \mathbb{R}^2$ .

# Uendelighedsbegrebet

Opgave 5000: Opskriv følgende udtryk som summer eller produkter.

$$a) \sum_{i=1}^4 (3+i) \quad b) \prod_{i=2}^6 (i-1) \quad c) \sum_{j=4}^5 j^2 \quad d) \prod_{n=2}^5 \sqrt[n]{7} \quad e) \sum_{m=4}^7 m \quad f) \sum_{i=-2}^3 5^i$$

Opgave 5002: Opskriv følgende udtryk ved hjælp af sumtegn eller produkttegn (Bemærk, at facit ikke er entydigt, da man kan bruge forskellige bogstaver, og da forskellige udtryk kan give samme række (eller produkt) - se f.eks. a) og e) i opgave 5000.)

a)  $7 + 8 + 9 + 10 + \dots + 27$

b)  $3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 18 \cdot 21 \cdot 24$

c)  $10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4$

d)  $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$

e)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{100}$

f)  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$

g)  $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10 + 11$

h)  $2 - 6 + 18 - 54 + 162 - 486$

i)  $-8 + 4 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

Opgave 5004: I Maple findes sumtegn og produkttegn under 'Expression'. Benyt dem til at udregne rækkesummerne og værdierne af produkterne i opgave 5000.

Benyt derefter Maple til at bestemme eventuelle rækkesummer for nedenstående rækker (du skal først finde en måde at opskrive dem med sumtegn):

a) Den alternerende række  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$

b) Den alternerende række  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$

c) Den harmoniske række  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$

d) Rækken  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots$

Opgave 5020: Benyt metoden til at beregne rækkesummerne for rækkerne (sørg for først at få styr på, hvad  $q$  og  $a$  er i det pågældende tilfælde):

a)  $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187$

b)  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024}$

c)  $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32} + \frac{3}{64} + \frac{3}{128} + \frac{3}{256} + \frac{3}{512} + \frac{3}{1024}$

d)  $7 + \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{7}{10000} + \frac{7}{100000} + \frac{7}{1000000} + \frac{7}{10000000}$

Opgave 5040: Benyt Sætning 1 til at beregne rækkesummerne i 5020.

Opgave 5060: Bestem for  $f(n) = n^2$  funktionsværdierne  $f(1)$ ,  $f(3)$ ,  $f(4)$ ,  $f(7)$  og  $f(10)$ .

Bestem værdierne af  $n$ , således  $f(n) = 1$ ,  $f(n) = 4$ ,  $f(n) = 16$  og  $f(n) = 100$ .

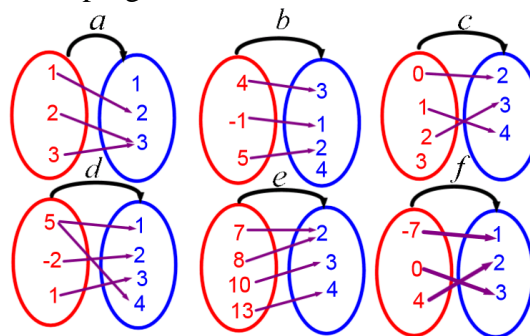
# Funktioner

Opgave 6000: Svar på følgende for funktionerne  $f$  og  $g$ :



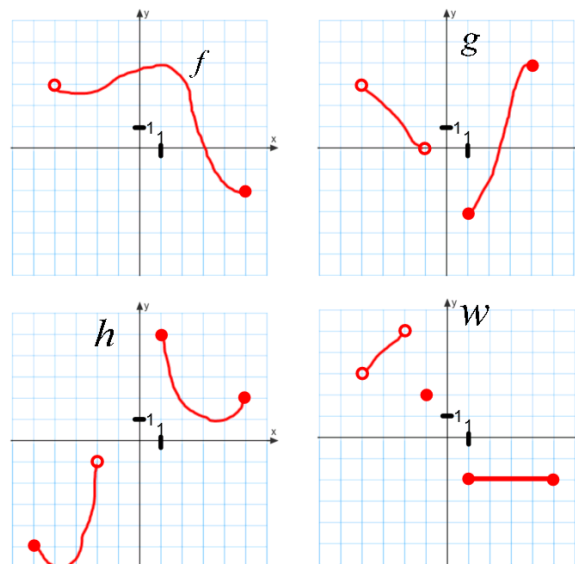
- a) Hvad er definitionsmængden?
- b) Hvad er kodomænet?
- c) Hvilken værdi er knyttet til argumentet 5?
- d) Hvad er værdimængden?
- e) Hvad er  $f(1)$ ?
- f) Hvad er  $f(A)$ ?
- g) Hvilket argument  $x$  opfylder  $f(x)=1$ ?
- h) Hvad er  $g(C)$ ?
- i) Hvad er kodomænet?
- j) Hvad er  $g(2)$ ?

Opgave 6002: Svar på følgende spørgsmål omhandlede nedenstående 6 relationer:



- a) Hvilke af ovenstående relationer er funktioner?
- b) Hvilke af ovenstående relationer er injektioner?
- c) Hvilke af ovenstående relationer er surjektioner?
- d) Hvilke af ovenstående relationer er bijektioner?

Opgave 6004: Angiv definitions- og værdimængder for følgende funktioner:





Opgave 6010: Bestem definitions­mængder og værdimængder for følgende funktioner:

$$\begin{array}{lll} a) f_1 : x \mapsto \sqrt{x+2} & b) f_2 : x \mapsto x^2 & c) f_3 : x \mapsto \frac{1}{2} \cdot x - 3 \\ d) f_4 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-3}} & e) f_5 : x \mapsto x^3 & f) f_6 : x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{x^2-9}} \end{array}$$

Opgave 6020: Se på funktionen  $f$  givet ved gaffelforskriften

$$f(x) = \begin{cases} 5x-2 & , \text{ for } x < -4 \\ x^2+3 & , \text{ for } -4 \leq x < \pi \\ \cos(x) & , \text{ for } \pi \leq x \end{cases}$$

Bestem følgende funktions­værdier:

$$f(-7), f(2), f(2\pi), f(-4), f(\pi) \text{ og } f(0)$$

Opgave 6022: Indtast gaffelforskriften fra Opgave 6020 i Maple.

- Tjek, at Maple giver de samme funktions­værdier som facitlisten i Opgave 6020.
- Tegn en rød graf af funktionen i intervallet  $[-10,10]$  med strektykkelsen 3, hvor der ikke er "falske" lodrette linjer.

Opgave 6024: Bestem i hånden følgende værdier og tjek med Maples *floor* og *ceil*:

- $floor(3,92)$ ,  $floor(8,3)$ ,  $floor(-2,75)$ ,  $floor(-4,12)$ ,  $floor(-0,23)$ ,  $floor(7)$ ,  $floor(\pi)$
- $ceiling(5,29)$ ,  $ceiling(2,84)$ ,  $ceiling(-1,47)$ ,  $ceiling(-0,2)$ ,  $ceiling(\sqrt{2})$ ,  $ceiling(7)$

- Opgave 6026: a) For hvilke tal giver *floor* og *integer* samme værdier?  
 b) For hvilke tal giver *ceiling* og *integer* samme værdier?  
 c) For hvilke tal giver *floor* og *ceiling* samme værdier?

Opgave 6028: Et firma, der sælger hybenpulver, har følgende priser:

De første 100 g koster 4 kr. pr. gram. De næste 200 g koster 2 kr. pr. gram. Derefter koster det 1 kr. pr. gram. Fragtprisen er 80 kr., men hvis man køber for mere end 1000 kr. hybenpulver, er der gratis fragt.

Opstil en gaffelforskrift, der viser prisen  $p$  for købet (målt i kr.) som funktion af den købte mængde hybenpulver (målt i g).

Tegn grafen for  $p$  (i Maple).

Opgave 6029: Find selv situationer fra en mere eller mindre konstrueret virkelighed, hvor der optræder gaffelforskrifter.

Opgave 6030: Bestem ved hjælp af grafen og kommandoerne *minimize* og *maximize* monotoniforholdene for følgende funktioner:

$$\begin{array}{l} a) f : x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 - 11x^2 + 56x - 4 \\ b) g : x \mapsto -x^3 + 2x^2 + 3x - 4 \\ c) h : x \mapsto \frac{1}{5}x^5 - \frac{19}{105}x^4 - \frac{2641}{1575}x^3 + \frac{1384}{525}x^2 + \frac{64}{75}x + 3 \end{array}$$

Opgave 6040: Angiv for hver af nedenstående funktioner, om de er lige, ulige eller ingen af delene.

$$\begin{array}{llll} a) f_1 : x \mapsto x^4 & b) f_2(x) = x^3 & c) f_3 : x \mapsto 3x + 9 & d) f_4(x) = x \\ e) f_5 : x \mapsto \sin(x) & f) f_6(x) = \cos(x) & g) f_7 : x \mapsto \tan(x) & h) f_8(x) = 2^x \\ i) f_9(x) = 9 & j) f_{10} : x \mapsto -2 & k) f_{11}(x) \mapsto e^x & l) f_{12} : x \mapsto \sqrt{x} \\ m) f_{13} : x \mapsto x^3 + 2x^2 - 3x & n) f_{14}(x) = \frac{1}{x^2} & o) f_{15} : x \mapsto x^2 + 5x - 7 & p) f_{16}(x) = x^3 - x \end{array}$$

Opgave 6050: Lad  $f : x \mapsto x^2 + 1$ ,  $g(x) = \sqrt{x+3}$  og  $h(x) = x + 4$ .

Bestem forskrifter for følgende funktioner og angiv definitionsmængden for dem.

$$a) (f+h)(x) \quad b) (f-h)(x) \quad c) (f+g)(x) \quad d) (f \cdot h)(x) \quad e) \left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

$$i) \left(\frac{g}{h}\right)(x) \quad j) (f \circ h)(x) \quad k) (h \circ f)(x) \quad l) (f \circ g)(x) \quad m) (g \circ h)(x)$$

Opgave 6052: Se på de lige funktioner  $f : x \mapsto x^2$  og  $g : x \mapsto \cos(x)$  og de ulige funktioner

$h : x \mapsto x$  og  $k : x \mapsto \sin(x)$ . Bestem forskriften for følgende produktfunktioner og en enkelt kvotientfunktion og afgør, om de er lige eller ulige funktioner.

$$f \cdot h, f \cdot f, h \cdot h, f \cdot k, f \cdot g, h \cdot g, h \cdot k \text{ og } \frac{k}{g}$$

Opgave 6060: Følgende funktioner er givet:  $f(x) = x^2 + 5$ ,  $g : x \mapsto x - 3$ ,  $h(x) = 3^x$  og  $a(x) = \sqrt{x}$ .

Bestem følgende sammensatte funktioner og tjek med Maple:

$$b) f \circ g \quad c) g \circ f \quad d) f \circ h \quad e) h \circ f \quad i) f \circ a \quad j) a \circ f \\ k) h \circ a \quad l) a \circ h \quad m) h \circ h \quad n) f \circ f \quad o) a \circ h \circ g \quad p) a \circ a \circ f$$

Opgave 6062: Lad  $f : x \mapsto x^2 + 5$ ,  $g : x \mapsto \sqrt{x-5}$ ,  $h(x) = 7x + 4$  og  $a(x) = \frac{1}{7}x - \frac{4}{7}$ .

Bestem følgende sammensatte funktioner og tjek med Maple:

$$b) f \circ g \quad c) g \circ f \quad d) h \circ a \quad e) a \circ h$$

Opgave 6064: Lad  $f(x) = x^2 + 3$ ,  $g(x) = \sqrt{x-3}$ ,  $h(x) = 5x + 7$ ,  $i(x) = \frac{1}{5}x - \frac{7}{5}$  og  $j(x) = \frac{1}{x}$

Bestem følgende sammensatte funktioner og tjek med Maple ( $f(g(x))$ ):

$$1) g \circ j \quad 2) j \circ g \quad 3) g \circ f \quad 4) f \circ g \quad 5) h \circ i \quad 6) i \circ h \quad 7) h \circ h \quad 8) j \circ j$$

Opgave 6070: Afkod følgende sammensatte funktioner i en indre funktion og en ydre funktion (svaret er ikke entydigt).

$$a) f_1 : x \mapsto \sqrt{x^3 - 7} \quad b) f_2(x) = e^{\sin(x)} \quad c) f_3(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 7}$$

$$d) f_4 : x \mapsto 5 \cdot (x^2 + 4)^7 \quad e) f_5(x) = \cos(\sqrt{x}) \quad f) f_6(x) = 3 \cdot \tan^2(x) - 2 \cdot \tan(x) + 5$$

Opgave 6072: Afkod følgende sammensatte funktioner i tre funktioner (indre, mellem, ydre): (svaret er ikke entydigt).

$$a) f_1(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} \quad b) f_2(x) = \sqrt{e^{3 \cdot \cos(x)}} \quad c) f_3(x) = 4 \cdot \tan(\sqrt{4x+7})$$

$$d) f_4(x) = \frac{\sin(x^3)}{2 \cdot \sin^2(x^3) + 3 \cdot \sin(x^3) - 5} \quad e) f_5(x) = (2\sqrt{x} + 1) \cdot 5^{(2\sqrt{x}+1)} \quad f) f_6(x) = 4^{5^{6x}}$$

Opgave 6080: Bestem de omvendte funktioner til følgende funktioner og tjek med Maple ved at definere funktionerne og undersøge, om sammensætningen af funktionerne giver en identitetsfunktion og/eller om graferne for funktionerne er hinandens spejlinger i linjen med ligningen  $y = x$ :

$$a(x) = 3x - 12 \quad ; \quad a: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

$$b(x) = \frac{1}{4}x + 8 \quad ; \quad b: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

$$c(x) = x^3 - 7 \quad ; \quad c: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

$$d(x) = \sqrt[4]{x+3} \quad ; \quad d: [-3, \infty[ \mapsto [0, \infty[$$

$$e(x) = \cos(x) - 9 \quad ; \quad e: [0, \pi[ \mapsto [-10, -8]$$

$$f(x) = \sin^{-1}(x) + \frac{\pi}{2} \quad ; \quad f: [-1, 1] \mapsto [0, \pi[$$

$$g(x) = 4^x \quad ; \quad g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$$

Opgave 6100: Grafen for en lineær funktion  $f$  går gennem punkterne  $(-2, -5)$  og  $(7, 16)$ .

- Bestem for forskrift for  $f$ .
- Er  $f$  voksende, aftagende eller konstant?
- Hvad sker der med funktionsværdien, hver gang man lægger 1 til argumentet?
- Hvad sker der med funktionsværdien, hver gang man lægger 6 til argumentet?
- Bestem en forskrift for  $f^{-1}$ .

Opgave 6102: Grafen for den lineære funktion  $g$  har hældningen  $-2$  og går gennem punktet  $(4, 9)$ .

- Bestem en forskrift for  $g$ .
- Er  $g$  voksende, aftagende eller konstant?
- Hvad sker der med funktionsværdien, hver gang man lægger 5 til argumentet?
- Bestem en forskrift for  $g^{-1}$ .
- Bestem koordinatsættene til grafen for  $g$ 's skæringer med  $x$ -aksen og  $y$ -aksen.
- Bestem koordinatsættene til grafen for  $g^{-1}$ 's skæringer med  $x$ -aksen og  $y$ -aksen.

Opgave 6110: Danske pigers gennemsnitshøjde  $h$  (målt i cm) som funktion af alderen  $t$  (målt i antal år efter piger er fyldt 4 år) kan inden for en vis periode med god tilnærmelse beskrives ved funktionsforskriften:

$$h(t) = 6,25 \cdot t + 104 \quad ; \quad Dm(h) = [0, 8]$$

- Hvad fortæller konstanterne om danske pigers gennemsnitshøjde?
- Hvad fortæller definitionsmængden om modellen?

Opgave 6112: Det antal nyfødte danske drenge  $N$ , der det pågældende år fik tildelt navnet Casper, kan med god tilnærmelse beskrives ved en (diskret) funktion af tiden  $t$  (målt i antal år efter 1996):

$$N(t) = -25 \cdot t + 496 \quad ; \quad 0 \leq t \leq 18$$

- Hvad fortæller konstanterne om tildelingen af navnet Casper til danske drenge?
- Hvad fortæller definitionsmængden om modellen?

Opgave 6114: Den samlede masse  $m$  (målt i kg) af en lastvogn, der læsses med grus, er givet ved følgende funktionsforskrift, hvor  $x$  er rumfanget af gruset (målt i  $m^3$ ):

$$m(x) = 2450 \cdot x + 5100 \quad ; \quad 0 \leq x \leq 100$$

- Hvad fortæller konstanterne om lastbilen og gruset?
- Hvad fortæller definitionsmængden om pålæsningen?

Opgave 6120: Placeringen i en telefonkø kan antages at kunne beskrives ved en lineær funktion. Man befinder sig fra start som nummer 50 i køen, og man kommer igennem efter 10 minutter. Indfør passende variable og angiv en funktionsforskrift, der kan beskrive situationen.

Opgave 6130: Afgør for hver af nedenstående funktioner, **om** det er en eksponentialfunktion (ja/nej) og i så fald, om den er strengt voksende eller strengt aftagende:

$$\begin{aligned}
 a: x \mapsto 7^x & \quad b: x \mapsto x^7 & \quad c: x \mapsto \left(\frac{1}{7}\right)^x & \quad d: x \mapsto 3^x + 1 & \quad e: x \mapsto 1^x \\
 f: x \mapsto 105^x & \quad g: x \mapsto 0.32^x & \quad h: x \mapsto (-5)^x & \quad i: x \mapsto \sqrt{2}^x & \quad j: x \mapsto 1,42^x \\
 k: x \mapsto 0^x & \quad l: x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^x & \quad m: x \mapsto x^{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} & \quad n: x \mapsto \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)^x & \quad o: x \mapsto (2^{-3})^x \\
 p: x \mapsto (e-1)^x & \quad q: x \mapsto (e-2)^x & \quad r: x \mapsto (e-3)^x & \quad s: x \mapsto \left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}\right)^x & \quad t: x \mapsto x^x
 \end{aligned}$$

Opgave 6140: Tænk dig frem til værdien af følgende udtryk og tjek værdien med Maple (en konklusion kan godt være, at udtrykket er ulovligt, hvilket så tjekkes med Maple):

$$\begin{aligned}
 a) \log_{10}(100) & \quad b) \log_{10}(10) & \quad c) \log_{10}(0,0001) & \quad d) \log_{10}(0) & \quad e) \log_{10}(-10) \\
 f) \log_6(36) & \quad g) \log_4(64) & \quad h) \log_2(32) & \quad i) \log_{0,25}\left(\frac{1}{16}\right) & \quad j) \log_7(7) \\
 k) \log_5(1) & \quad l) \log_e(e^9) & \quad m) \log_e(e^{-5}) & \quad n) \log_e(1) & \quad o) \log_2\left(\frac{1}{4}\right) \\
 p) \log_2(1) & \quad q) \log_3\left(\frac{1}{27}\right) & \quad r) \log_{\frac{1}{7}}(49) & \quad s) \log_{0,01}(0,0001) & \quad t) \log_{0,001}(1)
 \end{aligned}$$

Opgave 6142: Tænk dig frem til værdien af følgende udtryk og tjek værdien med Maple:

$$a) 7^{\log_7(133)} \quad b) 4^{\log_4(71)} \quad c) e^{\log_e(10)} \quad d) 4^{\log_2(7)} \quad e) 2^{\log_4(7)}$$

Opgave 6150: Tænk dig frem til værdien af følgende udtryk og tjek værdien med Maple:

$$\begin{aligned}
 a) \log(10000000) & \quad b) \ln(e) & \quad c) \log(0,1) & \quad d) \ln(e^{-3}) \\
 e) \log(1) & \quad f) \ln(1) & \quad g) \log\left(\frac{1}{1000}\right) & \quad h) \ln\left(\frac{1}{e^4}\right)
 \end{aligned}$$

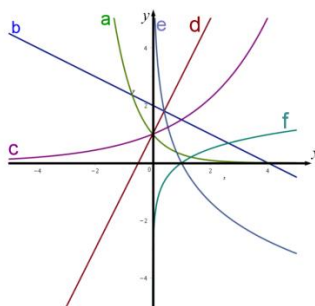
Opgave 6152: Tænk dig frem til værdien af følgende udtryk og tjek værdien med Maple:

$$a) 10^{\log(9)} \quad b) e^{\ln(13)} \quad c) 10^{\log(714)} \quad d) e^{\ln(2)} \quad e) 10^{\log(0,3)} \quad f) e^{\ln(5)}$$

Opgave 6154: Tænk dig frem til værdien af følgende udtryk og tjek værdien med Maple (en konklusion kan godt være, at udtrykket er ulovligt, hvilket så tjekkes med Maple):

$$a) \log(10^{5,13}) \quad b) 10^{\log(5,13)} \quad c) \log(10^{-2,4}) \quad d) 10^{\log(-2,4)}$$

Opgave 6160: Nedenfor ses grafer for funktioner, der enten er lineære funktioner, eksponentialfunktioner eller logaritmefunktioner. Angiv for hver af dem, hvilke type funktion der er tale om.



Opgave 6170: Løs følgende ligninger ved at isolere  $x$  og anvende Maple til at udregne udtrykket, som  $x$  er lig med. Tjek dit facit ved at anvende *solve* på den oprindelige ligning.

$$a) 6^x = 9 \quad b) \log_7(x) = 13 \quad c) 10^x = 32 \quad d) \log(x) = 146 \quad e) e^x = 5$$

$$f) \ln(x) = 17 \quad g) 6 \cdot 5^x = 27 \quad h) 5 \cdot \log_3(x) = 29 \quad i) 12 \cdot \log_{0,73}(x) = 14,3 \quad j) 7 \cdot 0,61^x = 11,9$$

Opgave 6180: Dan par af de udtryk, der har samme værdi (UDEN brug af Maple):

$$a) \log(500) - \log(5) \quad b) \log(5) + \log(2) \quad c) \ln(9) \quad d) \log(36) - 2 \cdot \log(6)$$

$$e) \log(1) - \log(10) \quad f) 2 \cdot \ln(3) \quad g) \log_4(39) - \log_4(13) \quad h) \log_2(64) - \log_2(\sqrt{8})$$

$$i) \log(10) - \log(1000) \quad j) \ln(e^2) \quad k) \log_4\left(\frac{2}{9}\right) + \log_4\left(\frac{9}{2}\right) \quad l) \frac{1}{2} \cdot \log_2(3)$$

$$m) \ln(e^4) - \ln(e^5) \quad n) \ln\left(e^{\frac{9}{2}}\right) \quad o) \log_7(56) - \log_7(8) \quad p) \log_9\left(\frac{1}{81}\right)$$

Opgave 6190: Løs følgende ligninger ved at isolere  $x$  og udregn udtrykket med Maple. Tjek svaret ved at anvende *solve* på den oprindelige ligning.

$$a) 4 \cdot 3^x = 19 \quad b) 9 \cdot 10^x = 18 \quad c) 3 \cdot \log(x) - 2 = 4 \quad d) 5 \cdot \ln(x) = 13$$

$$e) 4 \cdot e^x = 11 \quad f) \log_{58}(x^6) - 5 \cdot \log_{58}(x) = 1 \quad g) 4 \cdot \ln(\sqrt{x}) = -1$$

$$h) \log(x^3) - \log(x^5) = -2 \quad i) \log(8x) - \log(4x) = \log(x)$$

Opgave 6200: Det oplyses, at der med 4 decimalers nøjagtighed gælder  $\ln(10) = 2,3026$ .

Bestem værdien af følgende udtryk og tjek efterfølgende dit facit ved hjælp af Maple:

$$a) \ln(100) \quad b) \ln(10000) \quad c) \ln(1) \quad d) \ln(0,01) \quad e) \ln(0,00001) \quad f) \ln(10)$$

Opgave 6202: Følgende størrelser er angivet med 4 decimalers nøjagtighed:

$$\ln(7) = 1,9459 \quad \log_7(e) = 0,5139 \quad \log_{10}(e) = 0,4343$$

$$\ln(10) = 2,3026 \quad \log_3(8) = 1,8928 \quad \log_8(3) = 0,5283$$

Bestem værdien af følgende udtryk og tjek efterfølgende dit facit ved hjælp af Maple:

$$a) \ln(49) \quad b) \log_7(e^3) \quad c) \log_3\left(\frac{1}{8}\right) \quad d) \log_8(27)$$

Opgave 6210: Følgende brøker er angivet med 4 decimalers nøjagtighed:

$$\frac{\ln(29)}{\ln(8)} = 1,6193 \quad \frac{\log(13)}{\log(6)} = 1,4315 \quad \frac{\log_7(11)}{\log_7(38)} = 0,6592 \quad \frac{\log_3(7)}{\log_3(16807)} = 0,2$$

Bestem værdien af følgende udtryk og tjek efterfølgende dit facit ved hjælp af Maple:

$$a) \frac{\log_{13}(29)}{\log_{13}(8)} \quad b) \frac{\log_{0,4}(11)}{\log_{0,4}(38)} \quad c) \frac{\ln(13)}{\ln(6)} \quad d) \frac{\log_{19,7}(16807)}{\log_{19,7}(7)}$$

Opgave 6220:

- Hvordan ændres funktionsværdien for  $f_1 : x \rightarrow \ln(x)$ , når argumentet gøres 3 gange større?
- Hvordan ændres funktionsværdien for  $f_2 : x \rightarrow \log(x)$ , når argumentet gøres 7 gange større?
- Hvordan ændres funktionsværdien for  $f_3 : x \rightarrow \log_6(x)$ , når argumentet fordobles?
- Hvordan ændres funktionsværdien for  $f_4 : x \rightarrow \log_2(x)$ , når argumentet halveres?
- Hvordan ændres funktionsværdien for  $f_5 : x \rightarrow \log(x)$ , når argumentet øges med 30%?
- Hvordan ændres funktionsværdien for  $f_6 : x \rightarrow \ln(x)$ , når argumentet mindskes med 20%?

Opgave 6222:

- a) Hvordan ændres funktionsværdien for  $f : x \rightarrow 3 \cdot \log(x)$ , når argumentet fordobles?
- b) Hvordan ændres funktionsværdien for  $g : x \rightarrow 5 \cdot \ln(x)$ , når argumentet halveres?
- c) Hvordan ændres funktionsværdien for  $h : x \rightarrow 7 \cdot \log(x) + 5$ , når argumentet øges med 34%?
- d) Hvordan ændres funktionsværdien for  $i : x \rightarrow -4 \cdot \ln(x) + 9$ , når argumentet øges med 12%?

Opgave 6224:

- a) Hvor mange gange skal argumentet gøres større, hvis der i  $f : x \rightarrow 10 \cdot \log(x)$  skal lægges 3 til funktionsværdien?
- b) Hvor mange gange skal argumentet gøres større, hvis der i  $g : x \rightarrow 5 \cdot \ln(x) + 7,3$  skal lægges 1 til funktionsværdien?

Opgave 6300: Udfyld nedenstående tabel:

Procenttal	Vækstrate	Fremskrivningsfaktor
	0,27	
82		
		1,36
	-0,40	
-61		
		0,29
	1,38	
293		
		2,09
		0,5
	1	
-100		
		5
1200		

- Opgave 6302:
- a) Hvis vækstraten er 62%, hvad er så fremskrivningsfaktoren?
  - b) Hvis fremskrivningsfaktoren er 0,29, hvad er så vækstraten?
  - c) Hvis vækstraten er -38%, hvad er så fremskrivningsfaktoren?
  - d) Hvis fremskrivningsfaktoren er 1,84, hvad er så vækstraten?
  - e) Hvis vækstraten er 159%, hvad er så fremskrivningsfaktoren?
  - f) Hvis fremskrivningsfaktoren er 4,217, hvad er så vækstraten?

- Opgave 6304:
- a) Hvad er vækstraten, hvis man fordobler en størrelse?
  - b) Hvad er fremskrivningsfaktoren, hvis man fordobler en størrelse?
  - c) Hvad er vækstraten, hvis man halverer en størrelse?
  - d) Hvad er fremskrivningsfaktoren, hvis man halverer en størrelse?

- Opgave 6310:
- a) Hvad er 37% af 460?
  - b) Hvad er resultatet, hvis man lægger 19% til 354?
  - c) Hvad er resultatet, hvis man trækker 28% fra 690?

- Opgave 6312:
- a) Hvad er resultatet, hvis man øger 217 med 45%?
  - b) Hvad er resultatet, hvis man gør 173 fire gange større?
  - c) Hvad er det dobbelte af 250?
  - d) Hvad får man, hvis man fordobler 740?
  - e) Hvad får man, hvis man mindsker 813 med en tredjedel?
  - f) Hvad får man, hvis man halverer 80?

Opgave 6320:

- 100 kr. indsættes på en bankkonto med rentefoden 2% p.a. Hvor meget er saldoen efter 1 år?
- En lommeregner købes for 650 kr. og sælges igen med en fortjeneste på 27%. Hvad er salgsprisen?
- En lommeregner til en værdi af 1293 kr. mister på et år 15% af værdien. Hvad er værdien efter et år?
- Et beløb indsat til 4% p.a. er efter et år steget til 26840 kr. Hvad var det oprindelige beløb?
- Efter en slankekur med et vægttab på 9% vejer en nisse 27 kg. Hvad vejede nissen inden slankekuren?
- 1 kg tomater sælges i Føtex for 20 kr. De har købt dem for 7 kr. kiloet. Hvad er den %-vise fortjeneste?
- En bil er faldet fra 210000 kr. til 163000 kr. Hvad har vækstraten været?

Opgave 6322:

- Der indsættes 21000 kr. på en konto til 2,5% p.a. Hvad er saldoen efter 7 år?
- Et Rembrandt-maleri har forøget sin værdi med 6% om året i perioden 1995-2002. I 1995 kostede det 4,5 millioner kr. Hvad kostede det i 2002?
- En bil taber 7% i værdi om året. Hvad er en bil til 300000 kr. værd efter 8 år?
- Efter 7 år i banken til 1,5% p.a. er et beløb steget til 37635 kr. Hvad var det oprindelige beløb?
- En bil, der har tabt 5% i værdi om året i de 9 år efter købet, er nu 123000 kr. værd. Hvad kostede den?
- En person har tabt sig 1,2% om måneden i 2 år og vejer nu 87 kg. Hvad vejede personen tidligere?

Opgave 6324:

- På 8 år er et beløb indsat til fast rentefod p.a. steget fra 12000 kr. til 18700 kr. Hvad er den årlige rentefod?
- En bil er faldet med en fast procentdel gennem de sidste 18 år fra 210000 kr. til 52000 kr. Hvad har den årlige vækstrate været?
- En statue mister pga. syreregn en fast procentdel af sin højde om året. Den er gennem de seneste 10 år gået fra en højde på 15,3 m til 14,6 m. Hvor stor har den faste vækstrate været?
- En aktie ændrer sig over 6 måneder med følgende vækstrater: 6%, -3%, -8%, 4%, -13%, 14%. Hvor stor har den samlede vækstrate været?
- En tomat til 0,2 kr. oplever gennem 5 handelsled følgende vækstrater på prisen: 24%, 18%, 32%, 74%, 49%. Hvad koster den efter sidste led?
- En person på 89 kg. har gennem de sidste 8 måneder ændret sin vægt med følgende vækstrater: -4%, 5%, 6%, 4%, -8%, -5%, -2%, 9%. Hvad vejede personen oprindeligt?

Opgave 6330: En akties værdi har på et halvt år haft vækstraterne 8%, 3%, -7%, 12%, 9% og -5%.  
Find den gennemsnitlige månedlige vækstrate.

Opgave 6331: To grupper A og B har i et fysikforsøg forsøgt at bestemme bølgelængden af lyset fra en laser, der er oplyst at være 632,8 nm.  
Gruppe A måler 659,7 nm.  
Gruppe B måler 621,0 nm.  
Bestem gruppernes relative afvigelser.

Opgave 6332: Et lån optages til den nominelle rente 8% p.a. Der tilskrives renter 4 gange om året.  
Beregn den effektive rente.

Opgave 6333: Et lån optages til den pålydende rente 12% p.a. Der tilskrives renter månedligt.  
Beregn den effektive rente.

Opgave 6336:

- En 4 år gammel bil til en værdi af 89000 kr. kostede oprindeligt 120000 kr. Hvad har den gennemsnitlige årlige vækstrate været?
- En aktie ændrer sig med de månedlige vækstrater: 4%, -12%, 9%, 2%, 3%, 2%, -4%, 6%.  
Hvad er den gennemsnitlige månedlige vækstrate?
- En ufaglært arbejder tjener 90 kroner i timen. Hver dags morgen i en måned (22 arbejdsdage) sænker chefen lønnen med 10%, men hæver den igen om aftenen med 10% efter protester fra arbejderne. Hvor meget tjener den ufaglærte arbejder i timen efter den pågældende måned?
- Hvilken gennemsnitlig vækstrate svarer til følgende vækstrater: 5%, -4%, 7%, 24%, -13%, 19%?

Opgave 6337:

- Et beløb til 4% p.a. er steget fra 34000 kr. til 38000 kr. Hvor mange år har det stået i banken?
- Et maleri, hvis værdi er steget med 6% om året, har øget sin værdi fra 118000 kr. til 245000 kr. Hvor mange år har det taget?
- En bil har nu værdien 113000 kr. Den kostede oprindeligt 277000 kr., og er faldet i værdi med 12% om året. Hvor gammel er bilen?
- En haj har grundet dårlige tider tabt sig 1% om året fra 478 kg til 436 kg. Hvor mange år har det taget?

Opgave 6338:

- En udefineret genstands værdi ændres over 5 år med følgende vækstrater: 8%, -3%, -5%, 7%, 9%. Hvad skal vækstraten være det 6. år, hvis genstandens værdi over de 6 år skal være øget med 50%?
- Hvor stor skal vækstraten været det andet år, hvis man over en 2 års periode ønsker en vækst på 30%, og den det første år har været -18%?
- En hunds vægt ændres over 4 år med følgende vækstrater: 6%, -4%, 9%, -13%. Hvad skal vækstraten det 5. år være, hvis den gennemsnitlige vækstrate skal være 2%?

Opgave 6340: Hvor meget er 700 kr. vokset til efter ét år i nedenstående tilfælde, når den nominelle rentefod er 5% p.a.:

- Der er én årlig rentetilskrivning.
- Der er 4 årlige rentetilskrivninger.
- Der er 12 årlige rentetilskrivninger.
- Der er 365 årlige rentetilskrivninger.
- Der er kontinuert rentetilskrivning.

Opgave 6342: Hvor meget er 1300 kr. faldet til efter 4 år i nedenstående tilfælde, når den nominelle rentefod er -17% p.a.

- Der er én årlig rentetilskrivning.
- Der er 4 årlige rentetilskrivninger.
- Der er 12 årlige rentetilskrivninger.
- Der er 365 årlige rentetilskrivninger.
- Der er kontinuert rentetilskrivning.

Opgave 6344: Forklar, hvorfor man både i opgaverne 6340 og 6342 oplever, at slutresultatet bliver højere, jo tættere man kommer på kontinuert rentetilskrivning.

Opgave 6350: På en børneopsparing kan man få rentefoden 1,4% p.a.

- Hvor stort et beløb vil en person kunne hæve på sin 21 års fødselsdag, hvis der hvert år fra og med personens 2 års fødselsdag bliver indbetalt 5000 kr.?
- Hvor meget skal der indbetales i stedet for de 5000 kr. hvert år, hvis personen skal kunne hæve 100000 kr.?

Opgave 6352: En person ønsker at spare 15000 kr. op til en rejse og finder et pengeinstitut, der har den noget usædvanlige rentefod 0,2% pr. måned.

- Hvor stor skal den månedlige indbetaling være, hvis personen har to år efter første indbetaling til at spare op?
- Hvor lang tid vil opsparingen tage, hvis personen indbetaler 400 kr. om måneden?
- Hvilken rentefod skal personen forsøge at forhandle sig frem til, hvis vedkommende skal klare opsparingen på 2 år, men kun er i stand til at indsætte 550 kr. om måneden?

Opgave 6360: Et 30-årigt huslån med hovedstolen 2,9 millioner optages med rentefoden 4,3% p.a og fire terminer pr. år. Bestem den kvartalsvise ydelse.

Opgave 6361: Hvor stort et 20-årigt lån kan man optage, hvis rentefoden er 2,6% p.a. med fire terminer om året, hvis man har råd til at betale 40000 kr. pr. termin?

Opgave 6362: Et 30-årigt huslån med hovedstolen 4,6 millioner optages med rentefoden 3,2% p.a. og kvartalsvise terminer.

- Hvor meget skal man afsætte om måneden for at kunne betale terminsydelsen?
- Hvor stort et beløb ender man med at have betalt på de 30 år?
- Hvad er den relative afvigelse fra det samlede indbetalte beløb til hovedstolen?



Opgave 6363: Et 30-årigt huslån med hovedstolen 5,4 millioner tilbagebetales med kvartalsvise ydelser på 72000 kr. Hvad er den nominelle årlige rentefod?

Opgave 6364: Et firma reklamerer med rentefrit lån og mener det alvorligt. Hvis man låner 20000 kr. til et fjernsyn, betaler man i 2 år en månedlig ydelse, således at man ender med at have tilbagebetalt 20899 kr., fordi der er et oprettelsesgebyr på 899 kr.  
Hvad bliver den årlige nominelle rentefod, hvis oprettelsesgebyret omregnes til renter?

Opgave 6365: Lav et Excel-ark med rente, afdrag og restgæld over tallene fra opgave 6360. Tjek, at restgælden ved termin nr. 120 er 0.

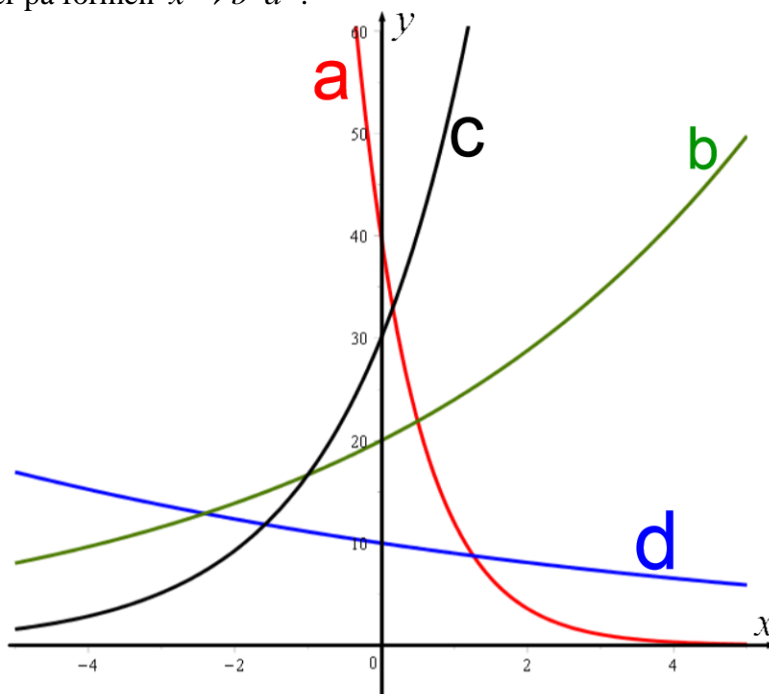
Opgave 6370: Udfyld de manglende felter i følgende tabel over priserne på en vare og indekstallet. Basisåret er 2003.

Årstal	2000	2003	2006	2009
Værdi	117,11 kr.	124,84 kr.		
Indekstal			123	87

Opgave 6372: I nedenstående tabel anvendes 1995 som basisår. Udfyld tabellen og overvej, om det giver mening af sammenligne disse indekstal.

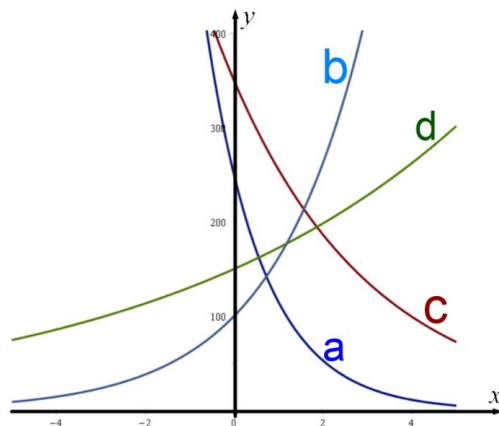
Årstal	1995	2000	2005
Antal hulahop-ringe pr. dansker	0,173		0,248
Arbejdsløshedsprocenten i Armenien		8,5%	
Gennemsnitsvægten af en amerikaner	87 kg	92 kg	
Indekstal hulahop-ringe		93	
Indekstal arbejdsløshed		109	106
Indekstal gennemsnitsvægt			127

Opgave 6400: Nedenfor er angivet graferne  $a$ ,  $b$ ,  $c$  og  $d$ , der alle er grafer for eksponentielle udviklinger på formen  $x \rightarrow b \cdot a^x$ :



- Angiv graferne i rækkefølge, således at grafernes funktioner har faldende  $b$ -værdier.
- Angiv graferne i rækkefølge, således at grafernes funktioner har faldende  $a$ -værdier.

Opgave 6402: Nedenfor er angivet graferne  $a$ ,  $b$ ,  $c$  og  $d$  for fire eksponentielle udviklinger  $f$ ,  $g$ ,  $h$  og  $i$  på formen  $x \mapsto b \cdot a^x$



$f$  har fremskrivningsfaktoren 1,15,  $g$  har vækstraten -0,27,  $h$ 's funktionsværdi vokser med 62%, hver gang  $x$ -værdien øges med 1, og for  $i$  er grundtallet 0,46. Alle  $b$ -værdierne er pæne tal (de ligger i 50-tabellen). Bestem forskrifter for de fire funktioner  $f$ ,  $g$ ,  $h$  og  $i$ .

Opgave 6404: Forklar, hvad der sker med funktionsværdierne i nedenstående funktioner, hver gang  $x$ -værdien øges med 1:

$$a) f: x \mapsto 37 \cdot 1,34^x \quad b) g: x \mapsto 118 \cdot 0,83^x \quad c) h: x \mapsto 0,91 \cdot 2,17^x \quad d) i: x \mapsto 8 \cdot 0,5^x$$

Opgave 6406: Bestem en forskrift for den omvendte funktion til den eksponentielle udvikling angivet på formen  $f(x) = b \cdot a^x$ .

Opgave 6410: Antallet  $N$  af kerner af en bestemt radioaktiv isotop kan som funktion af tiden  $t$  (målt i minutter) beskrives ved forskriften  $N(t) = 360000 \cdot 0,93^t$ .

Forklar, hvad konstanterne i forskriften fortæller om antallet af kerner.

Opgave 6412: Koncentrationen af stoffet  $R$  (målt i mg pr. liter) i blodet på en person er som funktion af tiden  $t$  (målt i minutter efter indsprøjtningen af stoffet) givet ved funktionsforskriften  $R(t) = 17 \cdot 0,84^t$ .

Forklar, hvad konstanterne fortæller om koncentrationen af stoffet  $R$  i blodet på personen.

Opgave 6420: Anvend metoden (ikke formlerne) til at bestemme en forskrift for de eksponentielle udviklinger, hvis graf går gennem følgende punkter.

a) (1,6) og (4,48)

b) (4,1) og (2,9)

c) (2,80) og (3,320)

d) (-1,24) og (2,3)

Opgave 6422: Anvend formlerne til at bestemme forskrifter for de eksponentielle udviklinger, hvis graf går gennem nedenstående punkter. Tjek resultatet ved bede Maple løse to ligninger med to ubekendte eller lave eksponentiel regression, og tjek **efterfølgende** ved at kigge i facitlisten:

a) (1,2) og (4,250)

b) (-2,160) og (3,5)

c) (3,7) og (5,63)

d)  $\left(1, \frac{3}{2}\right)$  og (2,5)

Opgave 6424: Bestem en forskrift for den eksponentielle udvikling  $f$ , hvor  $f(3) = 17$  og  $f(8) = 2$ .

Opgave 6425: Bestem en forskrift for den eksponentielle udvikling  $f : x \mapsto b \cdot a^x$ , der har  $b$ -værdien 12, og hvis graf går gennem punktet  $(2, 75)$ .

Opgave 6426: Bestem en forskrift for den eksponentielle udvikling  $g : x \mapsto b \cdot a^x$ , hvor  $g(3) = 54$ , og hvis funktionsværdi vokser med 50%, hver gang der lægges 1 til argumentet.

Opgave 6430: Nedenfor er angivet 4 funktioner:

$$f : x \mapsto 45 \cdot 1,37^x \quad g : x \mapsto 0,71 \cdot 0,84^x \quad h : x \mapsto 2,3 \cdot 5,7^x \quad i : x \mapsto 42 \cdot 0,017^x$$

- Hvor meget skal der lægges til  $x$ -værdien, hvis funktionsværdien for  $f$  skal øges med 80%?
- Hvor meget skal der lægges til argumentet, for at funktionsværdien for  $g$  skal falde med 60%?
- Hvor meget skal lægges til  $x$ -værdien, for at funktionsværdien for  $h$  bliver 12 gange større?
- Hvor meget skal lægges til argumentet, hvis funktionsværdien for  $i$  skal halveres?

Opgave 6432: Anvend samme funktioner som i opgave 6430.

- Hvor mange procent øges  $f$ 's funktionsværdi, hver gang man lægger 8 til argumentet?
- Hvor mange procent falder  $g$ 's funktionsværdi, hver gang man lægger 5 til  $x$ -værdien?
- Hvor mange gange større bliver  $h$ 's funktionsværdi, hver gang man lægger 3 til argumentet?
- Hvor mange procent falder  $i$ 's funktionsværdi, hver gang man lægger 0,1 til  $x$ -værdien?

Opgave 6434: En eksponentiel udvikling  $f$  har den egenskab, at hver gang, man lægger 4 til argumentet, øges funktionsværdien med 43%, og grafen for funktionen går gennem punktet  $(3, 7)$ . Bestem en forskrift for  $f$ .

Opgave 6440: Bestem halverings- eller fordoblingskonstanter for nedenstående eksponentielle udviklinger (afhængig af hvilken af dem der giver mening for den pågældende funktion):

$$\begin{array}{ll} a) x \mapsto 6 \cdot 1,26^x & b) x \mapsto 4,3 \cdot 0,82^x \\ c) x \mapsto 10,6 \cdot 0,963^x & d) x \mapsto 0,72 \cdot 1,57^x \end{array}$$

Opgave 6442: Om den eksponentielle udvikling  $f$  oplyses det, at  $f(2) = 12$  og  $T_{\frac{1}{2}} = 7$ .

Bestem  $f(16)$ .

Opgave 6444: Om den eksponentielle udvikling  $g$  oplyses det, at  $g(2) = 9$  og  $T_2 = 4$ .

Bestem  $g(14)$ .

Opgave 6446: Om den eksponentielle udvikling  $f$  oplyses det, at  $f(5) = 8$  og  $T_{\frac{1}{2}} = 3$ .

Bestem  $f(-1)$ .

Opgave 6450: Bestem halverings- eller fordoblingskonstanter for nedenstående eksponentielle udviklinger (afhængig af hvilken af dem der giver mening for den pågældende funktion):

$$\begin{array}{lll} a) x \mapsto 59325 \cdot e^{0,134 \cdot x} & b) x \mapsto 542 \cdot e^{-0,52 \cdot x} & c) x \mapsto 0,015 \cdot e^{-0,00529 \cdot x} \\ d) x \mapsto 0,192 \cdot e^{2,9 \cdot x} & e) x \mapsto 5 \cdot e^{-x} & f) x \mapsto e^x \end{array}$$

Opgave 6452: Omskriv følgende eksponentielle udviklinger til formen  $x \mapsto b \cdot a^x$ :

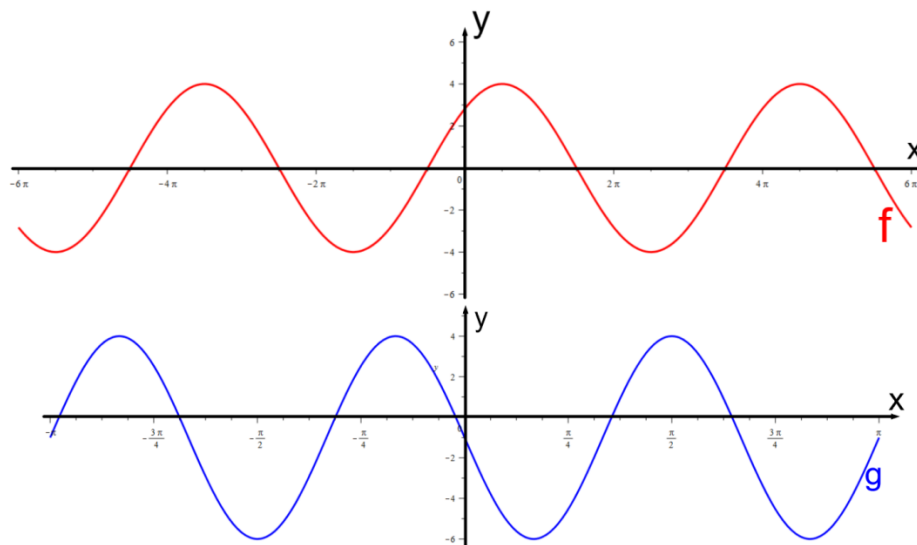
$$\begin{array}{ll} a) x \mapsto 59325 \cdot e^{0,134 \cdot x} & b) x \mapsto 542 \cdot e^{-0,52 \cdot x} \\ c) x \mapsto 0,015 \cdot e^{-0,00529 \cdot x} & d) x \mapsto 0,192 \cdot e^{2,9 \cdot x} \end{array}$$

Opgave 6460: Hvor meget skal  $x$ -værdien over, før den afviger med mere end 2% fra  $\sin(x)$ ?

Opgave 6470: Se på den harmoniske svingning angivet ved  $f : x \mapsto 3 \cdot \sin(2 \cdot x + \pi) - 1$ .

- Bestem den største og den mindste værdi, som funktionen antager.
- Angiv faseforskydningen.

Opgave 6472: Bestem ved aflæsninger på graferne nedenfor  $A, k, \varphi$  og  $c$  for  $f$  og  $g$ :



Opgave 6480: Bestem størsteværdi, mindsteværdi, periode og frekvens for bølgerne  $A, B$  og  $C$ , når  $t$  er tiden målt i sekunder.

$$A: f(t) = 4 \cdot \sin(0,037 \cdot t + 1,82) + 3$$

$$B: g(t) = 13 \cdot \sin(250 \cdot t - 18,5) + 28$$

$$C: h(t) = 7,4 \cdot \sin(t + 5) - 2,5$$

Opgave 6482: Bestem størsteværdi, mindsteværdi og bølgelængde for bølgerne  $A$  og  $B$ , når  $x$  er stedet angivet i enheden meter.

$$A: f(x) = 6 \cdot \sin(17 \cdot x + 8) - 2$$

$$B: g(x) = 14,7 \cdot \cos(0,013 \cdot x + 0,29) + 5,9$$

Opgave 6484: Bestem størsteværdi, mindsteværdi, periode, frekvens og bølgelængde for bølgerne  $A$  og  $B$ , når tiden  $t$  er angivet i sekunder og stedet  $x$  er angivet i meter.

$$A: f(x, t) = 15 \cdot \sin(1382,3 \cdot t + 4,03 \cdot x + 32,9) + 5$$

$$B: g(x, t) = 8,2 \cdot \sin(0,589 \cdot x + 63 \cdot t + 12) - 6,7$$

Opgave 6486: Strømstyrken  $I$  (målt i A) gennem et elektrisk apparat er givet ved følgende udtryk, hvor  $t$  er tiden målt i sekunder:  $I(t) = 0,27 \cdot \sin(100 \cdot \pi \cdot t)$

- Bestem den største strømstyrke, der løber gennem apparatet.
- Bestem strømmens frekvens.
- Bestem strømstyrken gennem apparatet til  $t = 0,007s$ .
- Bestem, hvornår strømstyrken for første gang efter  $0,007$  sekunder antager samme værdi som til  $t = 0,007s$ .

Opgave 6487: En tone udsendes og trykket  $p$  måles i pascal. Tiden  $t$  måles i sekunder, og stedet  $x$  måles i meter. Følgende angiver  $p$  udtrykt ved  $t$  og  $x$ :

$$p(t, x) = 0,0417 \cdot \sin(3,622 \cdot x + 1231,5 \cdot t + 0,896) + 101298$$

- Bestem trykforskellen mellem det største og det mindste tryk.
- Bestem tonens frekvens.
- Bestem bølgens bølgelængde.

Opgave 6488: Følgende er en tabel fra wikipedia over toner og deres frekvenser målt i Hz:

C5	523.251
H4	493.883
A#4/B4	466.164
A4 Kammertonen	440.000
G#4/Ab4	415.305
G4	391.995
F#4/Gb4	369.994
F4	349.228
E4	329.628
D#4/Eb4	311.127
D4	293.665

I det følgende skal du for nemheds skyld arbejde med amplituder på 1 (ukendt enhed), se bort fra faseforskydning (sæt  $\phi$  til 0) og sætte  $c$ -værdien til 0. Desuden ses der kun på tiden (dvs. man står ét sted i rummet og lytter), så der arbejdes ikke med  $x$ -værdier.

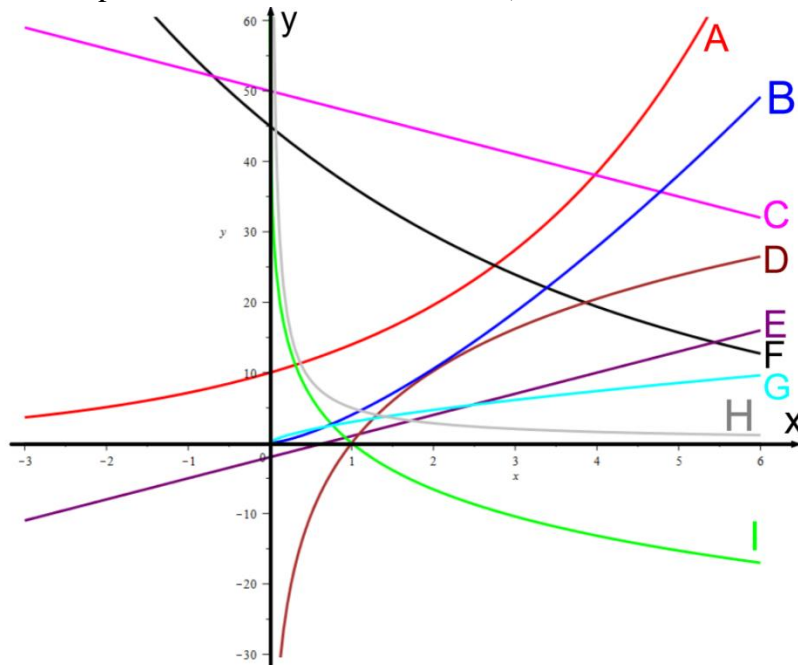
Funktionsudtrykkene bliver altså:

$$p(t) = \sin(\omega \cdot t)$$

Grafer tegnes i intervallet fra 0 til 0,1 (sekunder).

- Tegn grafen for kammertonen.
- Tegn grafen for tonen D4.
- Tegn grafen for kammertonen og D4, der spilles samtidigt.
- Tegn grafen for C5 og H4 spillet samtidigt.
- Tegn grafen for F4, A4 og C5 spillet samtidigt.
- Tegn grafen for F4, G#4 og C5 spillet samtidigt.
- Tegn grafen for E4 og F4 spillet samtidigt.

Opgave 6490: Angiv for hver af graferne A, B, C, D, E, F, G, H og I, om der er tale om potensvækst, en logaritmefunktion, en eksponentiel udvikling eller lineær vækst (alle graferne repræsenterer en af de fire nævnte):



Opgave 6500: Bestem en forskrift for den potensvækst, hvis graf går gennem nedenstående punkter. Anvend skiftevis metode og formel.

- $(2,1)$  og  $(4,16)$
- $(8,10)$  og  $(125,25)$
- $(9,4)$  og  $(36,2)$
- $(4,56)$  og  $(9,189)$
- $(2,25)$  og  $(5,4)$
- $(4,22)$  og  $(16,44)$

Opgave 6510: Brudstyrken  $B$  (målt i kg) af et kokosreb kan som funktion af rebets diameter  $d$  (målt i cm) med god tilnærmelse beskrives ved forskriften  $B(d) = 150 \cdot d^{1,98}$ .

- Med hvor mange procent øges brudstyrken, når rebets diameter øges med 20%?
- Hvor mange procent skal rebets diameter øges med, hvis brudstyrken skal øges med 10%?
- Hvor mange procent øges brudstyrken, når rebets diameter fordobles?
- Hvor mange procent skal diameteren øges med, hvis brudstyrken skal fordobles?

Opgave 6512: Svingningstiden  $T$  (målt i sekunder) for et matematisk pendul er som funktion af snorlængden  $l$  (målt i meter) givet ved forskriften  $T(l) = 2 \cdot l^{\frac{1}{2}}$ .

- Hvor mange procent skal snorlængden øges, hvis svingningstiden skal fordobles?
- Hvor mange procent øges svingningstiden, når snorlængden øges med 60%?

Opgave 6514: Den kinetiske energi  $E$  (målt i J) af en bold kan som funktion af boldens tempo  $p$  (målt i sekunder pr. meter) beskrives ved forskriften  $E(p) = 3,7 \cdot p^{-2}$ .

- Hvor mange procent falder den kinetiske energi, når tempoet øges med 40%.
- Hvor mange procent skal tempoet øges, hvis den kinetiske energi skal halveres?

Opgave 6516: Arealet  $A$  (målt i  $m^2$ ) af et olieudslip kan som funktion af tiden  $t$  (målt i minutter efter udslippet) beskrives ved funktionsforskriften  $A(t) = 6 \cdot t^{1,5}$ ;  $t > 0$ .

- Hvor mange procent øges olieudslippet, når tiden efter udslippet fordobles?
- Hvor mange procent skal tiden efter udslippet øges med, hvis arealet af udslippet skal øges med 200%?

Opgave 6520: Faktoriser om muligt følgende polynomier ved at regne i hånden (dvs. angiv det faktorerede polynomium eller skriv, at det ikke kan faktoreres). Tjek resultatet med Maples *factor*:

a)  $3x^2 + 3x - 6$     b)  $5x^2 - 20x + 20$     c)  $4x^2 - 7x + 9$     d)  $x^2 + 4x - 21$   
e)  $-x^2 + 6x - 9$     f)  $7x^2 + 7x$     g)  $-x^2 - x - 1$     h)  $9x^2 - 144$

Opgave 6522: Bestem uden hjælp af Maple rødderne til følgende polynomier:

a)  $31 \cdot (x - 7) \cdot (x + 5)$     b)  $-13 \cdot (x + 11) \cdot (x - 19)$     c)  $24 \cdot (x + 27) \cdot (x + 27)$

Opgave 6524: Bestem ved udregninger i hånden førstekoordinaten til toppunktet for parablerne, der er grafer for følgende polynomier. Tjek resultatet ved at anvende Maples *maximize* og *minimize* tilføjet *location*.

a)  $-137 \cdot (x + 4) \cdot (x - 2)$     b)  $89 \cdot (x + 11) \cdot (x + 3)$     c)  $11 \cdot (x - 5) \cdot (x - 2)$     d)  $4 \cdot (x + 7) \cdot (x + 7)$

Opgave 6530: Bestem de andengradspolynomier, hvis grafer går gennem de angivne tre punkter:

a)  $(-3, 46)$ ,  $(1, 6)$  og  $(2, 11)$     b)  $(-4, -90)$ ,  $(-2, -28)$  og  $(3, -48)$   
c)  $(-3, 32)$ ,  $(2, -8)$  og  $(5, -8)$     d)  $(-5, -20)$ ,  $(-1, 4)$  og  $(0, 5)$   
e)  $(-2, 20)$ ,  $(1, 11)$  og  $(3, 75)$     f)  $(-1, 1)$ ,  $(0, 0)$  og  $(1, 1)$

Opgave 6540: Nedenfor ses udklip fra graferne for nedenstående funktioner. Man kan ikke se alle nulpunkter og vendinger på graferne, men kun området omkring 0. Bestem ud fra dette (UDEN hjælpemidler) hvilken graf, der hører til hvilken funktion.

$$f_1 : x \mapsto x^4 - x^3 + 5x^2 - 7x + 1$$

$$f_2 : x \mapsto x^4 - x^3 - 5x^2 - 7x + 1$$

$$f_3 : x \mapsto x^4 - x^3 + 5x^2 + 7x + 1$$

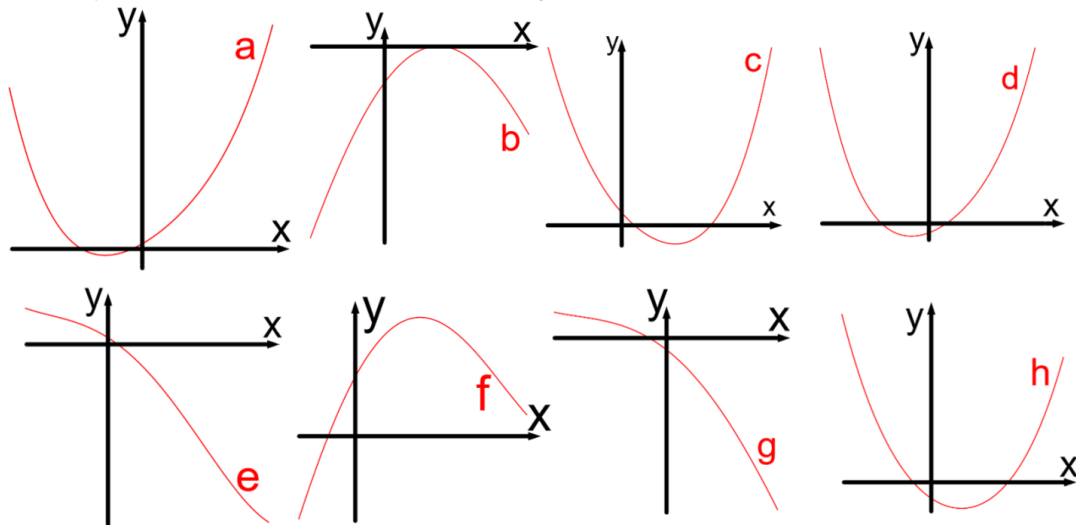
$$f_4 : x \mapsto x^4 - x^3 + 6x^2 + 4x - 2$$

$$f_5 : x \mapsto x^4 - x^3 - 5x^2 + 4x - 2$$

$$f_6 : x \mapsto x^4 - x^3 - 6x^2 - 7x - 1$$

$$f_7 : x \mapsto x^4 - x^3 + 6x^2 - 4x - 1$$

$$f_8 : x \mapsto x^4 - x^3 - 6x^2 + 7x + 2$$



Opgave 6550: En logistisk vækst er givet ved funktionen  $f$  med forskriften:

$$f(x) = \frac{6100}{1 + 99 \cdot e^{-0.017 \cdot x}}$$

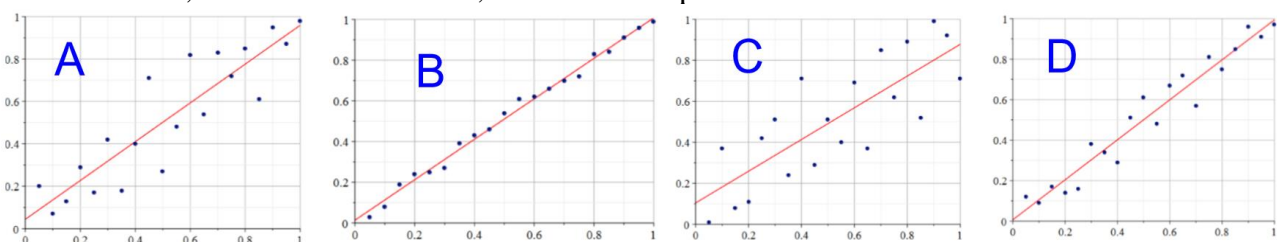
- Bestem værdimængden for  $f$ .
- Hvad er funktionsværdien, når væksthastigheden er størst?
- Hvilket sted er væksthastigheden størst?
- Bestem koordinatsættet til grafens skæring med andenaksen.

Opgave 6552: En logistisk vækst er givet ved funktionen  $f$  med forskriften:

$$f(x) = \frac{19572}{37 + 584 \cdot e^{-0.19 \cdot x}}$$

- Bestem den øvre grænse for funktionsværdierne.
- Bestem funktionsværdien det sted, hvor væksthastigheden er størst.
- Bestem det sted, hvor væksthastigheden er størst.
- Bestem  $f(16)$
- Bestem det sted, hvor  $f(x) = 300$
- Bestem det interval, hvor  $f(x) < 100$
- Bestem det sted, hvor væksthastigheden er den samme som i  $x = 17$

Opgave 6560: Vurder r-kvadraterne ved nedenstående lineære regressioner (to decimaler). Vurder selv, om du er tilfreds med, hvor tæt du er på facit.



Opgave 6562: Gå ind på [www.guessthecorrelation.com](http://www.guessthecorrelation.com) og prøv at gætte korrelationskoefficienter (dvs. kun  $r$  og ikke  $r$ -kvadrater).

Opgave 6570: Foretag forskellige former for regression (*LinReg*, *ExpReg*, *PowReg*, *PolyReg* – graderne 2, 3 og 4 samt *LogistReg*) på følgende datasæt og ranger for hvert datasæt de 7  $r$ -kvadrater efter størrelse:

a)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	131	167	208	252	295	336	372	402	427	446	461

b)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	5	15	37	76	136	220	334	481	666	893	1166

c)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	5	7	9	11	15	19	25	33	42	55	72

Opgave 6580: Rwandas befolkningstal angivet i tusinder er givet i nedenstående tabel:

År	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010	2012
Befolkningstal	2072	2386	2771	3221	3749	4390	5179	6081	7110	5570	8098	9202	10624	10516

- Bestem en forskrift for en eksponentiel model  $N(t) = b \cdot a^t$ , der beskriver befolkningstallet  $N$  målt i tusinder som funktion af tiden  $t$  målt i antal år efter 1950.
- Lav et residualplot baseret på ovenstående model.
- Er afvigelserne overvejende tilfældige?

Opgave 6582: Karaktererne ved skriftlig eksamen på A-niveau ses i nedenstående tabel:

Årstal	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Gennemsnit	6,3	6,2	6,5	6,6	6,1	6,7	7,1	6,4	6,8	7,1	6,5

- Bestem en forskrift for en lineær model  $G(t) = a \cdot t + b$ , hvor  $G$  er gennemsnittet og  $t$  er tiden målt i år efter 2008.
- Lav et residualplot baseret på ovenstående model.
- Er afvigelserne overvejende tilfældige?

Opgave 6600 Lydtryksniveauet  $L_p$  (målt i enheden dB) er givet ved formlen

$$L_p = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right),$$

hvor  $p$  er lydtrykket (målt i Pa), og  $p_0 = 20 \cdot 10^{-6}$  er referencelydtrykket (målt i Pa).

- Hvilket lydtryk svarer til lydtryksniveauet 70 dB?
- Hvad sker der med lydtryksniveauet, når lydtrykket øges med 30%?

Opgave 6601: Stjerner kan opdeles i størrelsesklasser, hvor de klareste stjerner svarer til de mindste størrelsesklasser.

Sammenhængen mellem en stjernes absolutte størrelsesklasse  $M$  og dens tilsyneladende størrelsesklasse  $m$  er givet ved formlen

$$M = m - 5 \cdot \log(r) + 5,$$

hvor  $r$  er afstanden til stjernen målt i enheden parsec.

Stjernen Sirius er med sin tilsyneladende størrelsesklasse  $-1,46$  den klareste stjerne på nattehimmelen. Afstanden til Sirius er 2,64 parsec.

- Bestem stjernen Sirius' absolutte størrelsesklasse.
- Isolér  $r$  i formlen og bestem afstanden til stjernen Canopus, der har den tilsyneladende størrelsesklasse  $-0,72$  og den absolutte størrelsesklasse  $-5,65$ .
- Hvad sker der med en stjernes tilsyneladende størrelsesklasse, hvis afstanden til den fordobles?



Opgave 6602: For gedder (*Esox lucius*) kan længden  $L$  og vægten  $W$  beskrives ved Bertalanffys model:

$$L(t) = a(1 - e^{-k \cdot t})$$

$$W(t) = b(1 - e^{-k \cdot t})^3,$$

hvor  $a$ ,  $b$  og  $k$  er konstanter.  $L$  og  $W$  måles i henholdsvis cm og kg, og  $t$  er geddens alder i dage.

For gedder i Esrum sø har man bestemt følgende værdier for  $a$ ,  $b$  og  $k$ :

$$a = 158; b = 26,4; k = 0,00163.$$

- a) Bestem længden af en 200 dage gammel gedde i Esrum sø.
- b) Bestem vægten af en 120 cm lang gedde i Esrum sø.

Kilde: *Journal of European Freshwater Ecology*, 2003 (34), 107.

Opgave 6603:

For at vurdere forureningen fra et dambrug med plettede skægbrosmer (*Urophycis regia*), der udleder spildevand i en nærliggende å, har man i en bestemt periode målt, hvor meget ammoniak der er i vandet i forskellige afstande fra dambruget.

Afstand fra dambruget (m)	29	44	87	127	267
Mængde ammoniak (mg/L)	6,0	4,5	3,0	2,4	1,4

Funktionen  $f(x) = b \cdot x^a$ ,  $x > 5$ , beskriver mængden af ammoniak (målt i milligram pr. liter) som funktion af afstanden  $x$  (målt i meter) fra dambruget.

- a) Bestem tallene  $a$  og  $b$ .
- b) Beregn hvor stor en mængde ammoniak, er der i 150 meters afstand fra dambruget.
- c) Bestem afstanden hvor mængden er mindre end 1 mg/L.

# FACITLISTE

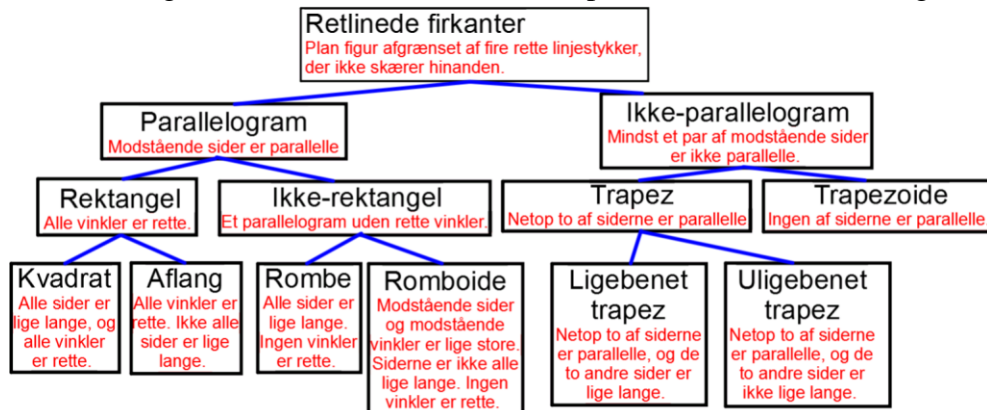
- 0010: a)  $V(t) = -0,107 \cdot t + 1,274$  b)  $V = 0,52 \text{ g}$  c)  $t = 11,8 \text{ min}$  d)  $0,108 \text{ g}$
- 0012: a)  $S(T) = 0,042 \cdot T + 1,037$  b)  $6,05 \text{ mV}$  c)  $49,4^\circ\text{C}$  d)  $-24,8^\circ\text{C}$  e)  $12,0^\circ\text{C}$
- 0020: a)  $a = 1,023$  b)  $435,6$  b)  $2,3\%$  c)  $T_2 = 30,6 \text{ år}$  d)  $640 \text{ mio.}$  e)  $1997$   
 f)  $0,00000000002$  personer. Det giver ikke mening. Modellen holder ikke så langt tilbage.
- 0024: b)  $N_0 = 5816$  a)  $0,9525$  c)  $314$  d)  $131 \text{ s}$  e)  $14,3 \text{ s}$  f)  $4,7\%$
- 0030: a)  $a = 2,413$  b)  $0,211$  b)  $1241 \text{ pund}$  c)  $59,3 \text{ tommer}$  d)  $88\%$  e)  $33\%$
- 0032: a)  $10,1\%$  b)  $198\%$  c)  $4,43\%$  d)  $80,1\%$
- 0034: a) Falder med  $48,5\%$  b) Øges med  $89,4\%$  c) Falder med  $12,4\%$  d) Øges med  $86,1\%$
- 1000: a) s b) f c) f d) f e) f g) s
- 1002: a) s b) f c) s d) f e) s f) f g) s h) s i) f j) s k) s l) f m) f n) f o) s p) f q) f
- 1004: a) f b) s c) f d) f e) f g) f h) f i) f
- 1010: a) B, C, F og G b) B, F og G
- 1012: a) s b) s c) f d) f e) s f) s g) f h) f i) f j) s k) s l) f
- 1020: a)  $\{3,9\}$  b)  $\{3\}$  c)  $\emptyset$  d)  $\{1,5,8\}$  e)  $\{1,2,3,4,5\}$  f)  $\{1,3,5\}$  g)  $\emptyset$  h)  $\{1,3,5\}$  i)  $\{2\}$
- 1022: a) Ja b) Nej c) Nej d) Ja
- 1024: a)  $\{1,3,5\}$  b)  $\{1,3,5\}$  c)  $\emptyset$  d)  $\{1\}$  e)  $\{2,3\}$  f)  $\{1,2,4,5\}$
- 1030: a)  $A^C = \{1,5,6,8,9,10\}$ ,  $B^C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ ,  $D^C = \emptyset$  og  $E^C = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$   
 $A^C = \{1,5,6,8,9,10,11\}$ ,  $B^C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ ,  $D^C = \{11\}$  og  $E^C = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$
- 1032: a)  $\{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$  b)  $\{(1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6)\}$  c)  $\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$   
 d)  $\emptyset$  e)  $\{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,1), (2,2,2)\}$   
 f)  $\{(4,4,4), (4,4,5), (4,4,6), (4,5,4), (4,5,5), (4,5,6), (4,6,4), (4,6,5), (4,6,6), \dots, (6,6,6)\}$
- 1080: a)  $15a$  b) *i.s.* c)  $12x^2$  d)  $10x^2$  e) *i.s.* f)  $10y^2$  g)  $20 \ln(x)$  h)  $8 \sin(y)$  i) *i.s.* j)  $6\sqrt{x^2 + y^2}$   
 k)  $8(a^2 + b^2)$  l)  $11 \frac{x}{y \cdot z}$  m)  $8 \log(\sin^2(\sqrt{x+y}))$  n) *i.s.*
- 1090: 24
- 1092: a) Ja b) 5, 6 og 11 c) 30 d) 15 e) 14 f) 5 og 6
- 1094: a) Nej b) 5, 8 og 8 c) 40 d) 15 e) 12 f) 0 og 3
- 1100: a) 9 b) 16 c) 0 d) -4
- 1102: a)  $d - c$  b)  $c - d$  c)  $d + c$  d)  $c + d$  e)  $-d - c$  f)  $-c - d$
- 1120: a)  $\frac{479}{9}$  b)  $\frac{271}{99}$  c)  $\frac{16735}{99999}$  d)  $\frac{63851}{9990}$  e)  $\frac{17365240601}{499999500}$
- 1122: a)  $\frac{43719}{1000}$  b)  $\frac{471}{99}$  c)  $\frac{831299}{99900}$
- 1140: a)  $4 < x \leq 9$  b)  $[-3, 7[$  c)  $-3 < x < 11$  d)  $]-\infty, 9[$  e)  $x \leq 7$  f)  $[21, \infty[$  g)  $x > 12$
- 1142: a)  $[2, 5]$  b)  $]2, 5]$  c)  $]5, \infty[$  d)  $[2, 5[$  e)  $]-\infty, 5]$  f)  $]-\infty, \infty[$  g)  $]2, 5[$
- 1144: a)  $]2, 5]$  b)  $]-\infty, 5]$  c)  $]2, 5[$  d)  $]-\infty, \infty[$  e)  $[2, 5[$  f)  $]5, \infty[$  g)  $[2, 5[$
- 1146: a)  $[4, 7]$  b)  $[18, 24]$  c)  $]2, 7]$  d)  $]6, 7[$  e)  $]14, 17[$  f)  $\emptyset$   
 g)  $[-2, 13]$  h)  $[5, 19]$  i)  $[5, 14]$  j)  $]3, 12[$  k)  $[1, 2]$  l)  $]-1, 4]$
- 1190: a)  $x = -2 \vee x = 5$  b)  $x = -11 \vee x = -6 \vee x = 7$  c)  $x = -5 \vee x = -2 \vee x = 3$  d)  $x = -5 \vee x = -3 \vee x = 4$
- 1192: a)  $x = 0$  b)  $x = 0$  c)  $x = -3$  d)  $x = 5$  e)  $x = -1 \vee x = 1$  f)  $x = -1 \vee x = 2$  g)  $x = -3$
- 1194: a)  $x = -12 \vee x = 19$  b)  $x = -7 \vee x = 0 \vee x = 14$  c)  $x = -3 \vee x = 3$  d)  $x = -3 \vee x = -1 \vee x = 1$
- 1200: a)  $-a^4 \cdot b^2 \cdot c$  b)  $x^4 \cdot y^3 \cdot z^2$  c)  $a^5 \cdot b^3$  d)  $-x^3 \cdot y^5 \cdot z^4$

- 1202: a)  $600 \cdot x^4 \cdot y^5$  b)  $10 \cdot (\sin(x))^4 \cdot y^3$  c)  $-4 \cdot (1-x)^5 \cdot y^2 \cdot z^4$  d)  $a^{10} \cdot b^{14} \cdot c^{14}$
- 1210: a)  $2x^2 - 3y^2 - xy$  b)  $3a + 6 - 9b$  c)  $a$  d)  $8a^2 + 6b^2 - 16ab$  e)  $-6x - 3y + 12z$   
 f)  $x^2 + y^2 + 2xy$  g)  $-12a^2b^2 + 3a^2b^3 - 15ab^3$  h)  $-xy^2$
- 1220: a) 1 b)  $\frac{13}{7}$  c)  $\frac{4}{5}$  d)  $\frac{28}{5}$  e)  $\frac{45}{2}$  f)  $\frac{2}{21}$  g)  $\frac{7}{30}$  h)  $\frac{9}{16}$  i)  $\frac{5}{28}$  j)  $\frac{1}{15}$
- 1230: a)  $\frac{14}{45}$  b)  $\frac{15}{32}$  c)  $\frac{6}{5}$  d)  $\frac{28}{3}$  e)  $\frac{6}{35}$  f)  $\frac{28}{33}$  g)  $\frac{3}{2}$  h)  $\frac{2}{3}$  i) 6 j) 28
- 1240: a)  $a + b + 1$  b)  $3 + y + x$  c)  $\frac{5a}{3}$  d)  $\frac{11}{x}$  e) 5 f)  $\frac{5}{6}$  g)  $\frac{23}{18}$   
 a)  $6 + 8i$  b)  $4 + 16i$  c)  $5 + 3i$  d) 4 e)  $-13 + 11i$  f)  $19 + 42i$  g)  $7 - i$  h)  $7 + 23i$
- 1260: j)  $3 + 3i$  k)  $5 + i$  l) 14 m) 0 n) 65 o) 34 p) 1 q)  $\frac{29}{34} + \frac{31}{34}i$
- 1300: a)  $x^{14}$  b)  $13^5$  c)  $\left(\frac{11}{6}\right)^{13}$  d)  $45^x$  e)  $a^{21}$  f)  $c^{10}$  g)  $\left(\frac{12}{5}\right)^a$  h)  $f^4$  i)  $37^{14}$  j)  $k^8$  k)  $\left(\frac{s}{t}\right)^9$  l)  $18^{x+y}$
- 1302: a)  $a^{30}$  b)  $x^7$  c)  $y^{16}$  d) 1 e)  $x^{-4}$
- 1310: a)  $\frac{1}{36}$  b)  $\frac{1}{5}$  c)  $\frac{3}{7}$  d)  $\frac{7}{2}$  e)  $\frac{9}{8}$  f)  $\frac{1}{5}$  g)  $\frac{81}{1000}$  h)  $\frac{1}{13}$
- 1312: a)  $\frac{1}{125}$  b)  $\frac{1}{13}$  c)  $\frac{7}{4}$  d)  $\frac{9}{4}$  e)  $\frac{3}{8}$  f)  $\frac{7}{32}$  g)  $\frac{16}{5}$  h)  $\frac{7}{13}$
- 1320: a) 3 b) 5 c) 10 d) 14 e) 3 f) 8 g) -2 h) 1 i) -1 j)  $\frac{1}{2}$  k)  $\frac{1}{3}$  l)  $-\frac{1}{3}$  m)  $-\frac{1}{2}$
- 1322: a) 2 b) 12 c) 19 d)  $\frac{1}{17}$  e)  $\frac{1}{3}$  f) 10 g)  $-\frac{1}{10}$
- 1330: a) 3 b) 4 c) 5 d) 3 e) 5 f) 2 g) 3 h)  $\frac{1}{3}$  i) 4 j)  $\frac{1}{3}$
- 1332: a) 9 b) 1 c)  $\frac{1}{5}$  d)  $\frac{1}{3}$  e) 2 f) 7 g)  $\frac{1}{2}$
- 1340: a) 1000 b) 100 c) 125 d) 100 e) 81 f) -32 g)  $\frac{1}{4}$  h)  $\frac{1}{4}$  i)  $\frac{9}{4}$
- 1342: a) 9 b) 64 c) 8 d) 4 e)  $\frac{1}{25}$  f)  $\frac{1}{4}$  g)  $\frac{9}{4}$  h) 25
- 1352: a)  $\frac{2}{3}$  b)  $\frac{7}{4}$  c)  $\frac{1}{8}$  d)  $\frac{5}{2}$  e)  $\frac{1}{3}$  f)  $\frac{1}{2}$
- 1354: a) 2 b)  $\frac{1}{3}$  c)  $\frac{5}{3}$  d) 2 e)  $\frac{1}{7}$  f)  $\frac{2}{3}$
- 1356: a) 2 b) 5 c)  $\frac{1}{2}$  d)  $\frac{1}{3}$  e)  $\frac{1}{3}$
- 1360: a) 4 b) 8 c) 27 d) 49 e)  $\frac{1}{100}$  f)  $\frac{1}{625}$  g) 4 h)  $\frac{1}{16}$  i) -27
- 1362: a) 4 b) 9 c)  $\frac{1}{27}$  d)  $\frac{1}{169}$  e) 100 f)  $\frac{4}{9}$
- 1912: a)  $x = -16 \vee x = 16$  b)  $x = -6 \vee x = 4$  c)  $L = \emptyset$  d)  $x = -7 \vee x = 7$  e)  $x = -7 \vee x = 4$
- 1920:  $\bar{x} = 11,7$   $x_H = 9,3$   $x_G = 10,4$   $x_Q = 12,9$

- 1922: a)  $\bar{x} = 5$   $x_H = 3,18$   $x_G = 4,15$   $x_Q = 5,63$     b)  $\bar{x} = 5$   $x_H = 1,8$   $x_G = 3$   $x_Q = 6,4$   
 c)  $\bar{x} = 5$   $x_H = 1,24$   $x_G = 1,84$   $x_Q = 9,43$     d)  $\bar{x} = 5$   $x_H = 1,07$   $x_G = 1,32$   $x_Q = 15,78$   
 e)  $\bar{x} = 50$   $x_H = 31,8$   $x_G = 41,5$   $x_Q = 56,3$

- 1930: a)  $\bar{x} = 7,6$  b)  $\bar{x} = 72,5 \frac{\text{km}}{\text{t}}$  c)  $x_H = 69,1 \frac{\text{km}}{\text{t}}$  d)  $x_G = 1,183$  e)  $\bar{x} = 5 \frac{\text{min}}{\text{km}}$  f)  $x_H = 4,87 \frac{\text{min}}{\text{km}}$  g)  $x_G = 41,2 \text{ cm}$

2000: Der er flere muligheder (f.eks. er der ikke forskel på, om kvadrat eller aflang står til venstre)



- 2010: a) 5    b)  $115^\circ$     c) 5    d)  $65^\circ$     e) 8    f)  $38^\circ$     g)  $115^\circ$     h)  $103^\circ$     i)  $153^\circ$  eller  $207^\circ$

2011:  $u = 20^\circ$  (v og u er topvinkler).  $w = 160^\circ$  (v og w er supplementvinkler).

$x = 70^\circ$  (x og v er komplementvinkler)

- 2012: a) a)  $\angle CGF = 60^\circ$     b)  $\angle CGE = 120^\circ$     c)  $\angle BHF = 120^\circ$

- 2013: a)  $50^\circ$     b)  $39^\circ$     c)  $141^\circ$     d)  $98^\circ$     e)  $82^\circ$     f)  $48^\circ$     g)  $72^\circ$

- 2020: a) A og D    b) A, B, D og E

- 2022: a) A    b) A, D, E og F    c) A, C, D, E, F og G

2030: 8,4 m

2031:  $|HP| = \frac{25}{4}$      $|BF| = \frac{24}{5}$

2032: Topvinklerne ved C er kongruente. B og D er vekselvinkler dannet ved parallelle linjer, dvs.

de er kongruente (og det er A og E også).  $|CE| = 6$      $|AB| = \frac{8}{3}$

2033: a)  $|BC| = 13$     b)  $|DE| = \frac{15}{4}$     c)  $T_{ABC} = 30$      $T_{CDE} = \frac{135}{8}$

2034: a)  $|AB| = 12$     b)  $|AC| = \frac{96}{5}$     c)  $A_{BCDE} = \frac{234}{5}$

2040: b, c og g

- 2042: a) 9    b) 8    c) 11    d) 12,6    e) 37,8    f) 2,8

2044: b, c, i, m og n

2046: g, h, j og o

2047: V : e, f, h, j, m, n    M : a, d, e, g, l    M : a, c, k    M : a, c, e, f, i, n    H : d, e, f

2048: 248: b, e, l og p

2060:  $\tan(17^\circ) = \tan(197^\circ)$  ;  $\tan(45^\circ) = \sin(90^\circ)$  ;  $\tan(135^\circ) = \cos(180^\circ)$  ;  $\cos(17^\circ) = \sin(73^\circ)$

$\cos(25^\circ) = \sin(115^\circ)$  ;  $\cos(65^\circ) = \sin(25^\circ)$  ;  $\cos(90^\circ) = \sin(0^\circ)$  ;  $\sin(17^\circ) = \sin(163^\circ)$

2080: b = 6,2    g = 15,0    k = 26,8    p = 13,2    s = 49    x = 191,0

2082:  $\angle C = 28,7^\circ$      $\angle F = 43,6^\circ$      $\angle J = 15,6^\circ$      $\angle L = 44,6^\circ$      $\angle N = 23,7^\circ$      $\angle R = 71,1^\circ$

2084: a)  $\angle A = 23,27^\circ$      $|AB| = 108,85$     b)  $\angle C = 144,37^\circ$

2086: a) 7,982    b) 17,735    c) 5,604

2087: a)  $\angle A = 61^\circ$  ,  $c = 9,15$  ,  $b = 4,43$

b)  $\angle R = 39,72^\circ$  ,  $\angle S = 50,28^\circ$  ,  $r = 8,31$

c)  $\angle Q = 41,42^\circ$  ,  $\angle W = 48,58^\circ$  ,  $a = 22,67$

2100:  $T = 81,3$      $T = 940,5 \text{ cm}^2$

2101: a)  $123,53^\circ$

2102:  $A = 53,8^\circ$  ,  $D = 38,3^\circ$  og  $E = 87,8^\circ$

2103: a)  $T = 59,45$     b) 13,32    c)  $31,67^\circ$

2104a:  $T = 62,0$

2104b:  $a = 7,7$

2104c:  $\angle K = 135,97^\circ$

2104d:  $\angle A = 21,1^\circ$

2104e:  $\angle E = 126,87^\circ$

2105: a)  $|BD| = 15,256$     b)  $\angle CBD = 55,017^\circ$     c)  $O = 48,099$

2106a:  $j = 35,2$

2106b:  $\angle A = 19,4^\circ$

2107a: a)  $T = 51,43$     b)  $|DM| = 11,05$

2107b: a) 11,305    b)  $71^\circ$     c) 9,715

2107c: a)  $\angle A = 30,67^\circ$     b)  $T = 700,13$     c)  $h_c = 31,12$     d)  $l_A = 49,95$

2108a:  $\angle K = 69^\circ$  ,  $g = 6,8$  og  $k = 9,4$

2108b:  $\angle A = 138,19^\circ$

2108c:  $\angle A = 16,4^\circ$  ,  $\angle B = 111,5^\circ$  og  $\angle C = 52,2^\circ$      $T_{ABC} = 262,95$

2109: En sådan trekant eksisterer ikke (vinklerne er komplekse tal). Den opfylder ikke trekantuligheden.

2180:  $T = 455$

2182:  $|BN| = 7,863$

2184: a)  $T = 0$     b)  $T = 0$     c) Imaginært tal (komplekst tal)    d)  $T = 6$

2190: a)  $\angle B = 32,72^\circ$  ,  $\angle C = 99,28^\circ$  og  $c = 14,61$

b) 2 mulige trekanter:  $\angle B_1 = 51,60^\circ$  ,  $\angle C_1 = 92,40^\circ$  og  $c_1 = 15,30$      $\angle B_2 = 128,40^\circ$  ,  $\angle C_2 = 15,60^\circ$  og  $c_2 = 4,12$

c)  $\angle B = 23,56^\circ$  ,  $\angle C = 36,44^\circ$  og  $c = 8,92$     d)  $\angle B = 90^\circ$  ,  $\angle C = 60^\circ$  og  $c = \sqrt{3}$

e) Ingen trekant    f)  $\angle B = 60^\circ$  ,  $\angle C = 60^\circ$  og  $c = 9$     g) Ingen trekant

3000: a) 6    b) 2    c)  $\sqrt{41}$     d) 4    e) 1    f) 4

3002: a)  $|\vec{a}| = 3$      $|\vec{b}| = 4$      $|\vec{c}| = 4$      $|\vec{d}| = 13$      $|\vec{f}| = \sqrt{20}$      $|\vec{g}| = 0$      $|\vec{h}| = \sqrt{18}$      $|\vec{m}| = \sqrt{2}$      $|\vec{n}| = \sqrt{10}$

b)  $90^\circ$     c)  $180^\circ$     d)  $45^\circ$     e)  $90^\circ$     f)  $26,57^\circ$     g)  $71,57^\circ$     h)  $135^\circ$     i)  $112,38^\circ$

3010: a)  $\vec{b}, \vec{c}$     b)  $\vec{f}, \vec{n}$     c)  $\vec{b}, \vec{c}, \vec{f}, \vec{n}$     d)  $\vec{n}$     e)  $\vec{m}$  og  $\vec{g}$     f) Ja    g) Nej    h) Ja    i) Ja    j) Nej    k) Nej

3012: a)  $\vec{s}$     b)  $\vec{d}, \vec{p}$  og  $\vec{s}$     c)  $\vec{b}$  og  $\vec{u}$     d)  $\vec{b}$     e)  $\vec{c}$  og  $\vec{h}$     f)  $\vec{b}, \vec{n}, \vec{q}, \vec{r}$  og  $\vec{s}$     g)  $\vec{b}, \vec{d}, \vec{p}, \vec{s}$  og  $\vec{u}$     h)  $\vec{f}$  og  $\vec{t}$     i)  $\vec{m}$

j)  $\vec{n}, \vec{r}$  og  $\vec{v}$     k)  $\vec{c}$  og  $\vec{h}$     l)  $\vec{d}$     m)  $\vec{u}$     n)  $\vec{g}$  og  $\vec{t}$     o)  $\vec{g}$  og  $\vec{t}$     p) Nej    q) Ja    r) 3    s) Ja    t) Nej    u) Ja    v) Ja    w) 0

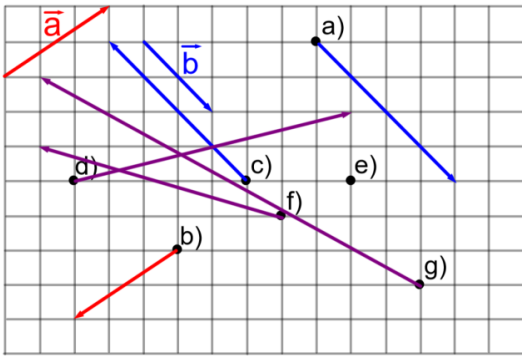
3020: a)  $\vec{s}$     b)  $\vec{g}$     c)  $\vec{q}$     d)  $\vec{0}$     e)  $\vec{m}$     f)  $\vec{p}$     g)  $\vec{t}$

3022: a)  $\vec{s}$     b)  $\vec{c}$     c)  $\vec{v}$     d)  $\vec{h}$     e)  $\vec{n}$     f)  $\vec{b}$     g)  $\vec{c}$     h)  $\vec{h}$     i)  $\vec{c}$     j)  $\vec{s}$     k)  $\vec{c}$

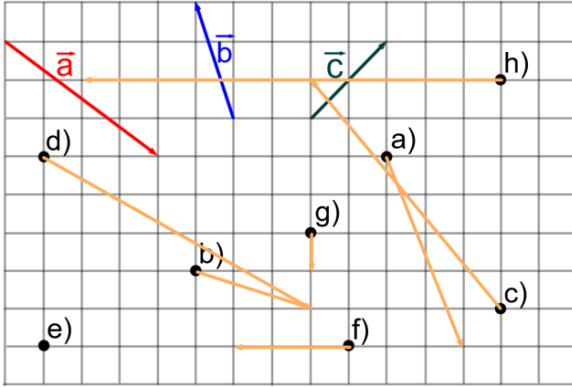
3024:  $|\vec{b}| = 5,42$

3026:  $40,80^\circ$

3030:



3040:



3042:  $|\vec{a} - \vec{b}| = 17,82$

3050:  $|\vec{F}_n| = 50 \text{ N}$  og  $|\vec{F}_{res}| = 75 \text{ N}$  og  $v = 26,6^\circ$

3052: a)  $|\vec{F}_n| = 657,1 \text{ N}$   $|\vec{F}_{res}| = 49,4 \text{ N}$  b)  $v = 27,1^\circ$

3060: a)  $|\vec{p}_{samlet}| = 806 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$  b)  $v = 29,7^\circ$  c)  $|\vec{p}_{samlet}| = 1039 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$

3062:  $|\vec{p}_{1, \text{efter}}| = 1,618$

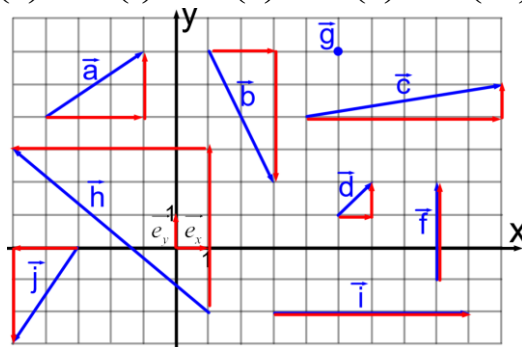
3070: a)  $\vec{SP}$  b)  $\vec{OB}$  c)  $\vec{AD}$  d)  $\vec{VA}$  e)  $\vec{AR}$  f)  $\vec{0}$  g)  $\vec{AD}$  h)  $\vec{DK}$  i)  $\vec{WK}$

3080:  $\vec{b} = 4 \cdot \vec{v}_1 + 2 \cdot \vec{v}_2$ ,  $\vec{c} = -2 \cdot \vec{v}_1 + 2 \cdot \vec{v}_2$ ,  $\vec{d} = 1 \cdot \vec{v}_1 - 1 \cdot \vec{v}_2$ ,  $\vec{f} = -4 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2$ ,  $\vec{g} = -4 \cdot \vec{v}_1 - 3 \cdot \vec{v}_2$

3082:  $(4,18), (12,15), (15,21)$  og  $(28,63)$

3084:  $\vec{c} = 2 \cdot \vec{v}_1 + 1 \cdot \vec{v}_2$ ,  $\vec{d} = -4 \cdot \vec{v}_1 + 3 \cdot \vec{v}_2$ ,  $\vec{f} = 1 \cdot \vec{v}_1 - 3 \cdot \vec{v}_2$ ,  $\vec{g} = 5 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2$ ,  $\vec{h} = 11 \cdot \vec{v}_1 - 9 \cdot \vec{v}_2$

3090:  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{h} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{i} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{j} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$



3092:  $\frac{a_1}{a_2} = -\frac{b_2}{b_1}$  eller  $a_1 \cdot b_1 = -a_2 \cdot b_2$

3100: a)  $F_t = 969,5 \text{ N}$  b)  $F_{res} = 1492,8 \text{ N}$  c)  $13,7 \text{ m}$

$$3102: p_{bil,1} = 7,9 \cdot 10^6 \frac{kg \cdot m}{s} \quad p_{bil,2} = 4,9 \cdot 10^6 \frac{kg \cdot m}{s}$$

$$3104: v_x = 16,8 \frac{m}{s} \quad v_y = 10,9 \frac{m}{s}$$

$$3106: F_t = 894,9N \quad F_n = 891,5N$$

$$3110: a) A = 866J \quad b) A = 0J \quad c) A = -400J \quad d) A = 6120J$$

$$4000: a) \text{Nej} \quad b) 21 \quad c) 2a + 19b \quad d) \text{Nej} \quad e) 3x \quad f) \frac{25}{4} \quad g) 7 \cdot \sqrt{2} \quad h) 31 \quad i) \text{Nej} \quad j) 1$$

$$4010: a) 23 \quad b) 1 \quad c) 7 \quad d) 162 \quad e) 22 \quad f) 54 \quad g) 13 \quad h) 128 \quad i) 2 \quad j) \frac{45}{16} \quad k) 2 \quad l) 2 \quad m) 93 \quad n) 252$$

$$4020: a) \sqrt{(2+7 \cdot 3)} \quad b) \frac{(7x+4)}{9} \quad c) 4^{(2x-9)} \quad d) (7-2)\sqrt{(5 \cdot 9+2)} \quad e) \frac{(5a+3b)}{(2a-4b)} \quad f) \frac{(2+4^{(6x+4)})}{7}$$

$$g) \sqrt{\left(\frac{(3x-2)}{(2x+9)} - 5\right)} \quad h) \frac{(3x+7)}{5} - \frac{(6x-2)}{5} \quad i) \sqrt{(2+4^{(3x+2)})} \quad j) (x_2-x_1) \sqrt{\left(\frac{(4x+5)}{7}\right)} \quad k) 6^{(3^{(4+2)})}$$

$$4021: a) (5-2)\sqrt{(12-4)} = 2 \quad b) \frac{(7+19)}{(6+7)} = 2 \quad c) \frac{(4x+2)}{7} - \frac{(9-3x)}{7} = x-1$$

$$d) 10^{(2^3)} = 100000000 \quad e) \frac{(9x-2)}{4} - \frac{(3x+7)}{4} - \frac{(-6x-13)}{4} = 3x+1$$

$$4022: a) 4 \quad b) 4 \quad c) 2 \quad d) 8$$

$$4030: a) 3 \quad b) 2 \quad c) 3 \quad d) 1 \quad e) 2$$

$$4040: a) 35 - 15a + 40b \quad b) 24a - 12y - 12c \quad c) 12 - a^2 - a \quad d) 6a - 2ab + 9b - 3b^2$$

$$e) 6a + 6a^2 - 5ab + 3b - 4b^2 \quad f) a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \quad g) x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$h) 8 + a^3 + x^3 + 12a + 6a^2 + 12x + 6x^2 + 3a^2x + 3ax^2 + 12ax$$

$$4050: a) 4x^2 + y^2 + 4xy \quad b) 9a^2 + 4b^2 - 12ab \quad c) 9a^2 - b^2 \quad d) 4x^2 + 9y^2 + 12xy$$

$$e) 25a^2 - 4b^2 \quad f) 25 + x^2 - 10x \quad g) 16x^2 + 25y^2 + 40xy \quad h) 4x^4 + 16y^4 + 16x^2y^2 \quad i) 36a^2 + 4b^4 - 24ab^2$$

$$4052: a) 9 + x^2 + 6x \quad b) 16a^2 - 9b^2 \quad c) 6x^2 - 13xy + 6y^2 \quad d) 25x^2 + 36 - 60x \quad e) 25a^2 + 15ab + 2b^2$$

$$f) 16 - b^2 \quad g) 9a^2 + b^2 - 6ab \quad h) x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \quad i) -25a^2 + 20ab - 4b^2$$

$$j) x^4 + y^4 + 2x^2y^2 \quad k) x + 5 - y$$

$$4054: a) -24a^2 \quad b) -4ab \quad c) -8x^2 - 8y^2 \quad d) -y^2 - 4x \quad e) 15a^2 + 4b^2 \quad f) -23x^2 + 9y^2 \quad g) 9a^2 \quad h) -2x^2 - 8ax$$

$$4060: a) (a+6)^2 \quad b) (x-1)^2 \quad c) (3a+2b) \cdot (3a-2b) \quad d) (3x+2y)^2 \quad e) (4+3c) \cdot (4-3c)$$

$$f) (2a-4y)^2 \quad g) (3ab^2+2c)^2 \quad h) (2x+8y)^2$$

$$4062: a) (3x-2y)^2 \quad b) (4a+5b) \cdot (4a-5b) \quad c) \text{Ikke muligt} \quad d) (3x-4)^2 \quad e) \text{Ikke muligt}$$

$$f) (4s+t) \cdot (4s-t) \quad g) (6x-5y)^2 \quad h) (\sqrt{2}x - \sqrt{2}y)^2$$

$$4070: a) (x+4)^2 - 16 \quad b) (y-3)^2 - 9 \quad c) (z+8)^2 - 64 \quad d) (x-5)^2 - 25 \quad e) (y+2)^2 - 4 \quad f) (x+3)^2 + (y-2)^2 - 13$$

$$g) (x-2)^2 + (y+6)^2 + (z-4)^2 - 56 \quad h) (x+7)^2 + (y-5)^2 + (z-0)^2 - 74 \quad i) (x+6)^2 - 28$$

$$j) (x+3)^2 - 13 \quad k) (x+2)^2 - 14 \quad l) 4 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 3 \quad m) 6 \cdot \left(x - \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{5}{6} \quad n) 25 \cdot \left(x + \frac{1}{5}\right)^2 + 9$$

4080:

$$a) a \cdot (5a+8) \quad b) 4x^2 \cdot (x+3) \quad c) xy \cdot (x+y) \quad d) 3abc^2 \cdot (2ab^2c^2+3) \quad e) 5x^2yz^3 \cdot (3y^2z^2+x-2x^2yz)$$

$$f) 2 \cdot (x-1) \cdot (3y \cdot (x-1) + 2) \quad g) 5 \cdot (a-b) \cdot c \cdot (1+4 \cdot (a+b) \cdot c)$$

4082: a)  $5abc^2 \cdot (ac - 3 + 4a^2bc)$  b)  $3xy \cdot (-yz^3 + 3xz^2 + 2)$  c)  $4x^2y \cdot (1 - 3x + 2y^2)$

d)  $e^c \cdot (a - 3) \cdot b^2 \cdot ((a - 3) \cdot b - (a - 3)^2 + b^2)$

4090: a)  $\frac{x+3}{x-3}$  b)  $\frac{2xy}{9z^2}$  c)  $\frac{x-5}{4x}$  d)  $\frac{a+2b}{6ab}$

4092: a)  $\frac{x-2}{y}$  b)  $\frac{3xy}{x+4}$  c)  $\frac{x-6}{x}$  d)  $\frac{3x^2}{x+5}$  e)  $\frac{x+3}{8x}$

4100: a)  $x=6$  b) *Falsk* c) *Sandt* d) *Falsk* e)  $x=-3 \vee x=3$  f) *Falsk* g) *Sandt* h) *Falsk*  
i)  $x=0$  j) *Sandt*

4102: a) *Falsk* b)  $x=0$  c)  $x=0$  d)  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  e) *Sandt* f) *Sandt*  
g)  $(x, y) = (1, 0)$  h)  $(x, y, z) = (2, -1, 0)$

4110: a) *A* b) *I* c) *B* d) *I* e) *I*

4112: a) *B* b) *I* c) *B* d) *A* e) *B* f) *B* g) *B* h) *A*

4114: a) *B* b) *B* c) *B* d) *B* e) *A* f) *A* g) *B* h) *A* i) *B* j) *I*

4120: a)  $x = \frac{9}{5}$  b)  $x = \frac{18}{7}$  c)  $x = \frac{4}{5}$  d)  $x = \frac{16}{11}$

4122: a)  $x = -2 \vee x = -1$  b)  $x = -\frac{1}{2} \vee x = -3$  c)  $x = -5 \vee x = 0 \vee x = -4$

d)  $x = -4 \vee x = 0 \vee x = 3$  e)  $x = -3 \vee x = 0 \vee x = 5$

4140: a)  $x = \frac{13}{5}$  b)  $x = 4$  c)  $x = -\frac{5}{2}$  d)  $x = 1$

4142: a)  $x = 6$  b)  $x = -\frac{4}{5}$  c)  $y = \frac{17}{7}$  d)  $x = \frac{19}{5}$  e)  $L = \emptyset$  f)  $x = -\frac{3}{26}$  g)  $x = -\frac{12}{5}$  h)  $x = -\frac{41}{5}$

4145: a)  $x = -4 \vee x = \frac{7}{3}$  b)  $x = -3$  c)  $L = \emptyset$  d)  $x = 3$

4150: a)  $x > \frac{8}{3}$  b)  $x \geq 1$  c)  $x > 0$

4152: a)  $x > \frac{5}{4}$  b)  $x \leq -\frac{9}{5}$  c)  $x > \frac{16}{11}$  d)  $x < -\frac{35}{3}$  e)  $x < 0 \vee x > \frac{1}{2}$  f)  $3 < x \leq \frac{33}{10}$  g)  $x < 3 \vee \frac{29}{8} \leq x < 4$

4154: a)  $x > -\frac{11}{5}$  b)  $x \geq \frac{11}{5}$  c)  $x > \frac{36}{11}$  d)  $x < 12$  e)  $-\frac{3}{4} < x < 0$  f)  $3 < x \leq \frac{43}{12}$  g)  $x < -1 \vee \frac{1}{11} \leq x < 5$

a)  $x = -\frac{13}{14}$  b)  $x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{29}}{2}$  ( $x = -1,1926 \vee x = 4,1926$ ) c)  $L = \emptyset$  d)  $x = 0,18558$

4160: e)  $x = -0,7667 \vee x = 2 \vee x = 4$  f)  $x = 0,3923 \vee x = 3,8596 \vee x = 4,9250$

g)  $x = -4,5632 \vee x = -0,2644 \vee x = 2,9439$

h)  $x = -8,4931 \vee x = -7,0743 \vee x = -2,3498 \vee x = -0,4471 \vee x = 0,4630$

i)  $x = -1,8166 \vee x = 1,1025 \vee x = 2,9434$  j)  $x = \pm 3,4563 \vee x = \pm 2,3437 \vee x = \pm 1,0892$

4170: a)  $x = -15 \vee x = 7$  b)  $x = -14 \vee x = 4$  c)  $x = -4 \vee x = 10$  d)  $x = -10 \vee x = 2$

e)  $x = -6 \vee x = -\frac{4}{7}$  f)  $x = -\frac{9}{2} \vee x = \frac{5}{6}$  g)  $x = -\frac{3}{7} \vee x = 11$  h)  $x = -1 \vee x = 5$

4180: a) **-56** b) **-8** c) **33** d) **-12** e) **61** f) **5** g) **36** h) **36**

i) **-56** j) **-8** k) **24** l) **32** m) **0** n) **16** o) **-16** p) **0**

4200: a)  $x = -1 \vee x = 3$  b)  $L = \emptyset$  c)  $x = 2$  d)  $x = -5 \vee x = 3$  e)  $x = -4 \vee x = \frac{3}{2}$  f)  $L = \emptyset$

g)  $x = -2 \vee x = \frac{4}{3}$  h)  $x = -3 \vee x = 1$  i)  $x = -2 \vee x = 7$  j)  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$  k)  $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$  l)  $x = -5 \vee x = 3$

4202: a)  $x = -2 \vee x = 1$  b)  $x = 1 \vee x = 3$  c)  $x = -5 \vee x = 4$  d)  $x = 3$  e)  $L = \emptyset$

f)  $x = -\frac{7}{2} \vee x = \frac{3}{2}$  g)  $x = -5 \vee x = 3$  h)  $L = \emptyset$  i)  $x = -7 \vee x = 3$  j)  $x = -1 \vee x = 3$



4210: a)  $x = -4 \vee x = 6$  b)  $x = -7 \vee x = -3$  c)  $x = -5 \vee x = 2$  d)  $x = -3 \vee x = -1$  e)  $x = -9 \vee x = 7$  f)  $x = 6 \vee x = 7$   
 g)  $x = -1 \vee x = 2$  h)  $x = -8 \vee x = -2$  i)  $x = 3$  j)  $x = -5 \vee x = 6$  k)  $x = -5 \vee x = 10$  l)  $x = 7$

4212: a)  $x = 2 \vee x = 3$  b)  $x = -7 \vee x = 5$  c)  $x = -4 \vee x = -1$  d)  $x = -3 \vee x = 6$  e)  $x = -5 \vee x = -4$   
 f)  $x = -2 \vee x = 9$  g)  $x = -8 \vee x = 5$  h)  $x = -12 \vee x = 1$  i)  $x = 4 \vee x = 11$  j)  $x = 9$

4214: a)  $x = -6 \vee x = 3$  b)  $x = -5 \vee x = -1$  c)  $x = -4 \vee x = 3$  d)  $L = \emptyset$  e)  $x = 3 \vee x = 5$   
 f)  $L = \emptyset$  g) II h)  $x = -8 \vee x = 5$  i) II j) II

4300: a) Ja b) Ja c) Nej d) Ja e) Nej f) Ja

4320: a)  $y = \frac{1}{2}x + 2$  b)  $y = -3x + 5$  c)  $y = -2$  d)  $y = 2x - \frac{13}{2}$

4330: a)  $y = 4x - 3$  b)  $y = -3x + 5$  c)  $y = \frac{1}{2}x + 8$  d)  $y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$  e)  $y = 6$

4332: a)  $y = 3x - 13$  b)  $y = -2x - 7$  c)  $y = -3x - 9$  d)  $y = 11$  e)  $y = x + 7x$  f)  $y = -\frac{26}{7}x + \frac{199}{7}$

4334: a)  $y = 3x + 2$  b)  $y = -2x + 7$  c)  $y = -x + 7$  d)  $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

4340: a)  $y = 3x - 24$  b)  $y = -2x - 5$  c)  $y = 9x + 4$  d)  $y = 3$  e)  $y = -x - 9$

4350: a)  $(3,0)$  og  $(0,-6)$  b)  $(-3,0)$  og  $(0,-21)$  c)  $\left(-\frac{1}{2},0\right)$  og  $(0,5)$  d)  $\left(\frac{8}{3},0\right)$  og  $(0,8)$

e)  $(-3,0)$  og  $(0,-9)$  f)  $\left(-\frac{3}{4},0\right)$  og  $(0,-3)$  g)  $(-4,0)$  og  $(0,16)$

4360: a)  $50,1944^\circ$  b)  $36,8699^\circ$  c)  $87,0643^\circ$

4362: a)  $56,3099^\circ$  b)  $78,6901^\circ$  c)  $45^\circ$

4364: a)  $45^\circ$  b)  $45^\circ$  c)  $33,6901^\circ$  d)  $56,3099^\circ$  e)  $11,3099^\circ$  f)  $168,6901^\circ$

4366: a)  $29,7449^\circ$  b)  $60,2551^\circ$  c)  $90^\circ$

4368: a)  $32,0054^\circ$  b)  $57,9946^\circ$  c)  $\frac{8}{5}$

4370:  $c = \frac{5}{3}$ .

4372:  $y = -4x - 10$

4373:  $y = \frac{7}{3}x - 15$

4374:  $y = -3x - 18$

4376:  $y = \frac{2}{5} \cdot x - \frac{41}{5}$

4380:  $y = 5x - 11$

4382:  $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$

4384:  $y = 2x - 12$

4390: a)  $\frac{1}{2}$  b)  $\left(0, \frac{7}{6}\right)$  &  $\left(-\frac{7}{3}, 0\right)$

4391: a)  $\frac{2}{5}$  b)  $\left(0, \frac{8}{5}\right)$  &  $(-4,0)$  c)  $21,8014^\circ$

4392: a)  $\frac{2}{5}$  b)  $\left(0, \frac{8}{5}\right)$  &  $(-4,0)$  c)  $21,8014^\circ$

4393: a)  $\frac{2}{5}$  b)  $\left(0, \frac{8}{5}\right)$  &  $(-4,0)$  c)  $21,8014^\circ$

4394:  $k = \frac{28}{3}$

4395:  $a = \frac{2}{9}$

4396: a)  $y = \frac{1}{5}x + \frac{31}{5}$     b)  $y = -5x - 9$

4397: a)  $y = -4x + 13$     b)  $y = \frac{1}{4}x - \frac{11}{2}$

4398: a)  $y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}; G = \mathbb{R}^2$     b)  $y = -3x + 17; G = \mathbb{R}^2$     c)  $y = \frac{1}{5}x - \frac{16}{5}; G = \mathbb{R}^2$

4400: a) 6    b)  $y = 6x$

4401: a)  $\frac{9}{14}$     b)  $y = \frac{9}{14}x$

4402:

<b>x</b>	2	5	12
<b>y</b>	8	20	48

4403:

<b>x</b>	$\frac{133}{31}$	7	11
<b>y</b>	19	31	$\frac{341}{7}$

4404:

<b>x</b>	3	5	7
<b>y</b>	18	30	42

4405:

<b>x</b>	3	7	10
<b>y</b>	39	91	130

4410:  $E = h \cdot f$

4411:  $Q = C \cdot (T - T_0)$

4412:  $s = k \cdot t^2$

4413:  $v = 2 \cdot \pi \cdot \frac{r}{T}$

4414:  $F = g \cdot V \cdot \rho$

4420:

<b>x</b>	1	2	6	-3	-6
<b>y</b>	6	3	1	-2	-1

4421:

<b>x</b>	2	4	6	-1	-3
<b>y</b>	-12	-6	-4	24	8

4422:  $y \cdot x = 63$

4423:  $y \cdot x = -51$

4424:  $y \cdot x = 65$

4425:  $y \cdot x = 40$

4426: a)  $y = 6 \cdot x$     b)  $x \cdot y = 42$     c)  $y = \frac{17}{3} \cdot x$     d)  $x \cdot y = -18$

4427:

<b>x</b>	2	4	8
<b>y</b>	28	14	7

4428:

<b>x</b>	1	15	9
<b>y</b>	-45	-3	-5

4440: a)  $a = 3$   $T(8,5)$     b)  $a = -4$   $T(-2,-7)$     c)  $a = 1$   $T(-1,-6)$   
d)  $a = -1$   $T(0,-3)$     e)  $a = 9$   $T(-11,0)$     f)  $a = 2$   $T(3,-3)$

4450: a)  $T(3,5)$  b)  $T(-1,-3)$  c)  $T\left(-\frac{1}{3},2\right)$  d)  $T\left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{4}\right)$  e)  $T(1,1)$  f)  $T\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$

4460: a)  $T(1,27)$  Skæring med y-aksen:  $(0,24)$  Nulpunkter:  $x = -2 \vee x = 4$

b)  $T\left(\frac{1}{2},-\frac{49}{4}\right)$  Skæring med y-aksen:  $(0,-12)$  Nulpunkter:  $x = -3 \vee x = 4$

c)  $T\left(\frac{3}{4},-\frac{31}{8}\right)$  Skæring med y-aksen:  $(0,-5)$  Nulpunkter: Ingen

d)  $T(2,0)$  Skæring med y-aksen:  $(0,12)$  Nulpunkt:  $x = 2$

e)  $T(-2,-9)$  Skæring med y-aksen:  $(0,7)$  Nulpunkter:  $x = -\frac{1}{2} \vee x = -\frac{7}{2}$

f)  $T\left(\frac{3}{10},\frac{11}{20}\right)$  Skæring med y-aksen:  $(0,1)$  Nulpunkter: Ingen

4470: A)  $a > 0; b < 0; c > 0; d < 0$  B)  $a < 0; b < 0; c > 0; d > 0$  C)  $a > 0; b < 0; c > 0; d = 0$

D)  $a > 0; b > 0; c > 0; d > 0$  E)  $a < 0; b < 0; c < 0; d < 0$

4471: f)  $a < 0; b > 0; c > 0; d > 0$  g)  $a > 0; b > 0; c > 0; d < 0$

4472: A)  $a < 0; b < 0; c > 0; d > 0$  B)  $a > 0; b > 0; c > 0; d < 0$  C)  $a > 0; b = 0; c < 0; d > 0$

4500: a)  $C(5,-3) r = 5$  b)  $C(-4,2) r = 4$  c)  $C(-1,-10) r = 10$  d)  $C(12,0) r = 2$

e)  $C(0,5) r = 7$  f)  $C\left(\frac{1}{2},-2\right) r = \sqrt{7}$  g)  $C(0,0) r = 1$

4502: a)  $(x-4)^2 + (y-9)^2 = 9$  b)  $(x+2)^2 + (y-8)^2 = 64$  c)  $(x+9)^2 + (y+13)^2 = 4$

d)  $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$  e)  $(x-6)^2 + y^2 = 1$  f)  $x^2 + (y+3)^2 = 13$  g)  $x^2 + y^2 = 87$

4504: a)  $C(-8,5) r = 6$  b)  $C(1,0) r = 5$  c)  $C(0,0) r = 8$  d)  $C(-5,2) r = 3$  e)  $C(-8,3) r = \sqrt{13}$

4510: a)  $C(-4,3) r = 3$  b)  $C(1,-5) r = 6$  c)  $C(-6,-8) r = 10$  d)  $C(2,7) r = 9$  e)  $C(0,-4) r = \sqrt{53}$

4512: a)  $C(-2,0) r = 1$  b)  $C(4,-6) r = 6$  c)  $C(-5,-7) r = 8$  d)  $C(-3,5) r = 5$  e)  $C(-2,3) r = 4$

4513: a)  $C(-2,-3) r = 5$  b)  $C(-6,1) r = 6$  c)  $C(2,-7) r = 9$

4520: a)  $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 74$  b)  $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 85$  c)  $(x+3)^2 + (y-6)^2 = 170$ ;  $G = \mathbb{R}^2$

4530: A:  $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$  B:  $\frac{(x+4)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1$  C:  $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{4} = 1$

4531: A:  $\frac{4 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right)^2}{49} + \frac{4 \cdot \left(y - \frac{5}{2}\right)^2}{25} = 1$  B:  $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$  C:  $\frac{(x+3)^2}{1} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$

4540: a)  $xz$ -planen b)  $yz$ -planen c) Ingen d)  $xy$ -planen e)  $yz$ -planen og  $xy$ -planen

f) Ingen g) Alle tre h)  $xz$ -planen og  $xy$ -planen i)  $yz$ -planen j)  $yz$ -planen og  $xz$ -planen

4550: A, C og D.

4552:  $(6,0,0)$ ,  $(0,-15,0)$  og  $(0,0,10)$ .

4554: a)  $(4,0,0)$ ,  $(0,-12,0)$  og  $(0,0,3)$  b)  $(-4,0,0)$ ,  $(0,5,0)$  og  $(0,0,-10)$  c)  $(7,0,0)$ ,  $(0,7,0)$  og  $(0,0,7)$

4556:  $(-4,0,0)$  og  $(0,0,10)$

4558:  $\beta: 4x - 5y + 2(z-8) = 0$ ;  $G = \mathbb{R}^3$

4560: a)  $C(-5,3,-10) r = 5$  b)  $C(1,-2,-4) r = 3$  c)  $C(-8,0,6) r = 1$  d)  $C(0,13,0) r = \sqrt{17}$

4562: a)  $(x-6)^2 + (y+1)^2 + (z-7)^2 = 4$ ;  $G = \mathbb{R}^3$  b)  $(x+8)^2 + (y+3)^2 + (z-5)^2 = 49$ ;  $G = \mathbb{R}^3$

c)  $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 81$ ;  $G = \mathbb{R}^3$  d)  $(x+4)^2 + y^2 + z^2 = 1$ ;  $G = \mathbb{R}^3$

4564: a)  $C(3,1,-2) r=4$  b)  $C(-7,1,-9) r=2$  c)  $C(0,0,1) r=\sqrt{19}$  d)  $C(0,0,0) r=1$

4566: a)  $(x+11)^2 + (y+17)^2 + (z-16)^2 = 121 ; G = \mathbb{R}^3$  b)  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{7}{6}\right)^2 = 144 ; G = \mathbb{R}^3$

c)  $x^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{4}{9} ; G = \mathbb{R}^3$  d)  $(x-\pi)^2 + (y-e)^2 + (z-\varphi)^2 = 2 ; G = \mathbb{R}^3$

4580: a)  $C(3,-2,4) r=6$  b)  $C(-1,5,-6) r=8$  c)  $C(7,0,-3) r=9$  d)  $C(10,-10,10) r=18$

4582: a)  $C(-2,-3,-4) r=5$  b)  $C(8,-1,-5) r=10$  c)  $C(-6,3,0) r=7$  d)  $C(-3,5,-2) r=7$

4584: a)  $C(4,-2,3) r=5$  b)  $C(-3,2,-4) r=4$  c)  $C(3,0,6) r=\sqrt{66}$

4640: a)  $d = 25 \quad d_x = 25 \quad d_y = 75$

b)  $d = -2 \quad d_x = 4 \quad d_y = -10$

c)  $d = 4 \quad d_x = 1 \quad d_y = 12$

d)  $d = 18 \quad d_x = 0 \quad d_y = 90$

e)  $d = 0 \quad d_x = 0 \quad d_y = 0$

f)  $d = 14 \quad d_x = 56 \quad d_y = -28$

5000: a)  $4+5+6+7$  b)  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$  c)  $4^2 + 5^2$  d)  $\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[5]{7}$  e)  $4+5+6+7$

f)  $5^{-2} + 5^{-1} + 5^0 + 5^1 + 5^2 + 5^3 = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5} + 1 + 5 + 5^2 + 5^3$

5002: a)  $\sum_{i=7}^{27} i$  b)  $\prod_{i=1}^8 3 \cdot i$  c)  $\sum_{i=1}^7 (11-i)$  d)  $\prod_{i=1}^6 \frac{1}{i}$  e)  $\sum_{i=1}^{50} \frac{1}{2 \cdot i}$

f)  $\sum_{i=0}^7 \frac{1}{2^i}$  g)  $\sum_{i=1}^{11} i \cdot (-1)^{i+1}$  h)  $\sum_{i=0}^5 2 \cdot 3^i \cdot (-1)^i$  i)  $\sum_{i=-3}^4 \frac{1}{2^i} \cdot (-1)^i$

5020: a) 3280 b)  $\frac{2047}{1024}$  c)  $\frac{6141}{1024}$  d)  $\frac{77777777}{10000000}$

5060:  $f(1) = 1, f(3) = 9, f(4) = 16, f(7) = 49, f(10) = 100 \quad n=1, n=2, n=4, n=10$

6000: a)  $Dm(f) = \{1, 4, 5, 7\}$  b)  $\{1, 2, 3, 5, 9\}$  c) 9 d)  $Vm(f) = \{1, 3, 5, 9\}$  e) 3 f)  $f(A) = \{1, 3, 5, 9\}$

g) 4 h)  $\{4\}$  i)  $\{3, 4, 7\}$  j) 4

6002: a) a,b,e,f b) b,f c) e,f d) f

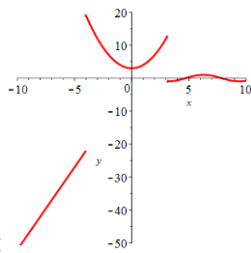
6004:  $Dm(f) = ]-4, 5]$   $Vm(f) = [-2, 4]$   $Dm(g) = ]-4, -1[ \cup ]1, 4]$   $Vm(g) = [-3, 4]$

$Dm(h) = [-5, -2[ \cup ]1, 5]$   $Vm(h) = [-6, -1[ \cup ]1, 5]$   $Dm(w) = ]-4, -2[ \cup \{-1\} \cup ]1, 5]$   $Vm(w) = \{-2, 2\} \cup ]3, 5[$

6010: a)  $Dm(f_1) = [-2, \infty[$   $Vm(f_1) = [0, \infty[$  b)  $Dm(f_2) = \mathbb{R}$   $Vm(f_2) = [0, \infty[$  c)  $Dm(f_3) = \mathbb{R}$   $Vm(f_3) = \mathbb{R}$

d)  $Dm(f_4) = ]3, \infty[$   $Vm(f_4) = ]0, \infty[$  e)  $Dm(f_5) = \mathbb{R}$   $Vm(f_5) = \mathbb{R}$  f)  $Dm(f_6) = ]-\infty, -3[ \cup ]3, \infty[$   $Vm(f_6) = \mathbb{R}_-$

6020:  $f(-7) = -37$  ,  $f(2) = 7$  ,  $f(2\pi) = 1$  ,  $f(-4) = 19$  ,  $f(\pi) = -1$  ,  $f(0) = 3$



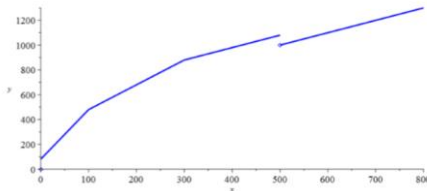
6022:

6026: a) a)  $x > 0 \vee x \in \mathbb{Z}$

b)  $x < 0 \vee x \in \mathbb{Z}$

c)  $x \in \mathbb{Z}$

$$6028: p(x) = \begin{cases} 4x + 80 & , \text{ for } 0 < x \leq 100 \\ 2x + 280 & , \text{ for } 100 < x \leq 300 \\ x + 580 & , \text{ for } 300 < x < 500 \\ x + 500 & , \text{ for } x \geq 500 \end{cases}$$



6030: a)  $f$  er aftagende i intervallerne  $]-\infty, -4]$  og  $[2, 7]$  og voksende i intervallerne  $[-4, 2]$  og  $[7, \infty[$

b)  $g$  er aftagende i intervallerne  $]-\infty, \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{13}}{3}]$  og  $[\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{13}}{3}, \infty[$  og voksende i intervallet

$$\left[ \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{13}}{3}, \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{13}}{3} \right]$$

c)  $h$  er voksende i intervallerne  $]-\infty, -\frac{7}{3}]$  og  $[-\frac{1}{7}, \infty[$  og  $h$  er aftagende i intervallet  $[-\frac{7}{3}, -\frac{1}{7}]$

6040: a) Lige b) Ulige c) --- d) Ulige e) Ulige f) Lige g) Ulige h) ---  
i) Lige j) Lige k) --- l) --- m) --- n) Lige o) --- p) Ulige

6050: a)  $(f+h)(x) = x^2 + x + 5$  ;  $Dm = \mathbb{R}$       b)  $(f-h)(x) = x^2 - x - 3$  ,  $Dm = \mathbb{R}$

c)  $(f+g)(x) = x^2 + 1 + \sqrt{x+3}$  ;  $Dm = [-3, \infty[$       d)  $(f \cdot h)(x) = x^3 + 4x^2 + x + 4$  ;  $Dm = \mathbb{R}$

e)  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x+3}}$  ;  $Dm = ]-3, \infty[$       i)  $\left(\frac{g}{h}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x+4}$  ;  $Dm = [-3, \infty[$

j)  $(f \circ h)(x) = x^2 + 8x + 17$  ;  $Dm = \mathbb{R}$       k)  $(h \circ f)(x) = x^2 + 5$  ;  $Dm = \mathbb{R}$

l)  $(f \circ g)(x) = x + 4$  ;  $Dm = [-3, \infty[$       m)  $(g \circ h)(x) = \sqrt{x+7}$  ;  $Dm = [-7, \infty[$

6052:  $(f \cdot h)(x) = x^3$  ulige ,  $(f \cdot f)(x) = x^4$  lige ,  $(h \cdot h)(x) = x^2$  lige ,  $(f \cdot k)(x) = x^2 \cdot \sin(x)$  ulige

$(f \cdot g)(x) = x^2 \cdot \cos(x)$  lige ,  $(h \cdot g)(x) = x \cdot \cos(x)$  ulige ,  $(h \cdot k)(x) = x \cdot \sin(x)$  lige ,  $\left(\frac{k}{g}\right)(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$  ulige

6070: a)  $f_{1,indre}(x) = x^3 - 7$      $f_{1,ydre}(x) = \sqrt{x}$       b)  $f_{2,indre}(x) = \sin(x)$      $f_{2,ydre}(x) = e^x$

c)  $f_{3,indre}(x) = x^2 + 2x - 7$      $f_{3,ydre}(x) = \frac{1}{x}$       d)  $f_{4,indre}(x) = x^2 + 4$      $f_{4,ydre}(x) = 5 \cdot x^7$

e)  $f_{5,indre}(x) = \sqrt{x}$      $f_{5,ydre}(x) = \cos(x)$     f)  $f_{6,indre}(x) = \tan(x)$      $f_{6,ydre}(x) = 3x^2 - 2x + 5$

6072: a)  $f_{1,indre}(x) = \sin(x)$      $f_{1,mellem}(x) = x^2$      $f_{1,ydre}(x) = \frac{1}{x}$

b)  $f_{2,indre}(x) = \cos(x)$      $f_{2,mellem}(x) = e^{3 \cdot x}$      $f_{2,ydre}(x) = \sqrt{x}$

c)  $f_{3,indre}(x) = 4x + 7$      $f_{3,mellem}(x) = \sqrt{x}$      $f_{3,ydre}(x) = 4 \cdot \tan(x)$

d)  $f_{4,indre}(x) = x^3$      $f_{4,mellem}(x) = \sin(x)$      $f_{4,ydre}(x) = \frac{x}{2x^2 + 3x - 5}$

e)  $f_{5,indre}(x) = \sqrt{x}$      $f_{5,mellem}(x) = 2x + 1$      $f_{5,ydre}(x) = x \cdot 5^x$

f)  $f_{6,indre}(x) = 6^x$      $f_{6,mellem}(x) = 5^x$      $f_{6,ydre}(x) = 4^x$

6100: a)  $f(x) = \frac{7}{3}x - \frac{1}{3}$     b) Voksende    c) Der lægges  $\frac{7}{3}$  til.    d) Der lægges 14 til.    e)  $f^{-1}(x) = \frac{3}{7}x + \frac{1}{7}$

6102: a)  $g(x) = -2x + 17$     b) Aftagende    c) Der trækkes 10 fra.    d)  $g^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{17}{2}$

e)  $\left(\frac{17}{2}, 0\right)$  og  $(0, 17)$     f)  $(17, 0)$  og  $\left(0, \frac{17}{2}\right)$

6130:  $a$ :Ja,voksende  $b$ :Nej  $c$ :Ja,aftagende  $d$ :Nej  $e$ :Nej

$f$ :Ja,voksende  $g$ : Ja, aftagende  $h$ : Nej

$i$ : Ja, voksende  $j$ : Ja, voksende  $k$ :Nej  $l$ : Ja, aftagende  $m$ : Nej  $n$ : Nej  $o$ : Ja, aftagende

$p$ :Ja, voksende  $q$ : Ja, aftagende  $r$ : Nej  $s$ : Ja, voksende  $t$ : Nej

6160: a) Eksponentiel b) Lineær c) Eksponentiel d) Lineær e) Logaritme f) Logaritme

6180:  $(a, j), (b, o), (c, f), (d, k), (e, m), (g, l), (h, n)$  og  $(i, p)$

6220: a) Der lægges 1,099 til. b) Der lægges 0,8451 til. c) Der lægges 0,3869 til.

d) Der trækkes 1 fra. e) Der lægges 0,1139 til f) Der trækkes 0,2231 fra.

6222: a) Der lægges 0,9031 til. b) Der trækkes 3,4657 fra. c) Der lægges 0,8897 d) Der trækkes 0,4533 fra.

6224: a) 1,9953 gange (ca. en fordobling) b) 1,2214 gange

6300:

Procenttal	Vækstrate	Fremskrivningsfaktor
27	0,27	1,27
82	0,82	1,82
36	0,36	1,36
-40	-0,40	0,6
-61	-0,61	0,39
-71	-0,71	0,29
138	1,38	2,38
293	2,93	3,93
109	1,09	2,09
-50	-0,5	0,5
100	1	2
-100	-1	0
400	4	5
1200	12	13

6302: a)  $a = 1,62$  b)  $r = -71\%$  c)  $a = 0,62$  d)  $r = 84\%$  e)  $a = 2,59$  f)  $r = 321,7\%$

6304: a)  $r = 100\%$  b)  $a = 2$  c)  $r = -50\%$  d)  $a = 0,5$

6310: a) 170,2 b) 421,26 c) 496,8

6312: a) 314,65 b) 692 c) 500 d) 1480 e) 542 f) 40

6320: a) 102 kr. b) 825,5 kr. c) 1099 kr. d) 25807,69 kr. e) 29,67 kg f) 185,7% g) -22,4%

6322: a) 24962,4 kr. b) 6,8 millioner kr. c) 167874 kr. d) 33910 kr. e) 195161 kr. f) 116,24kg

6324: a) 5,7% b) -7,5% c) -0,47% d) -2,4% e) 1,00 kr. f) 85,79 kg.

6330:  $r_g = 3,1\%$

6331: A:4% B: -1,9%

6332:  $r_e = 8,2\%$

6333:  $r_e = 12,7\%$

6336: a) -7,2% b) 1,06% c) 72,15 kr. d) 5,6%

6337: a) 2,8 år b) 12,5 år c) 7,0 år d) 9,2 år.

6338: a) 29,2% b) 58,5% c) 14,4%

6340 a) 735kr b) 735,66kr c) 735,81kr d) 735,887kr e) 735,8898kr

6342: a) 616,96kr b) 648,88kr c) 655,41kr d) 658,498kr e) 658,6021kr

6350: a) 114486,76 kr. b) 4367,32 kr.

6352: a) 585,72 kr. b) 3 år (37 indbetalinger) c) 0,72% pr. måned.

6360: 43129,23 kr.

6361: 2,489 millioner kr.

6362: a) 19925,01 kr. b) 7,173 millioner kr. c) 56%

6363: 3,4%

6364: 4,26%

6370:

Årstal	2000	2003	2006	2009
Værdi	117,11 kr.	124,84 kr.	<b>153,55 kr.</b>	<b>108,61 kr.</b>
Indekstal	<b>94</b>	<b>100</b>	123	87

6372:

Årstal	1995	2000	2005
Antal hulahop-ringe pr. dansker	0,173	<b>0,161</b>	0,248
Arbejdsløshedsprocenten i Armenien	<b>7,8%</b>	8,5%	<b>8,3%</b>
Gennemsnitsvægten af en amerikaner	87 kg	92 kg	<b>110 kg</b>
Indekstal hulahop-ringe	<b>100</b>	93	<b>143</b>
Indekstal arbejdsløshed	<b>100</b>	109	106
Indekstal gennemsnitsvægt	<b>100</b>	<b>106</b>	127

6400: a) a, c, b, d    b) c, b, d, a

6402:  $f(x) = 150 \cdot 1,15^x$      $g(x) = 350 \cdot 0,73^x$      $h(x) = 100 \cdot 1,62^x$      $i(x) = 250 \cdot 0,46^x$

6404: a) Den øges med 34%    b) Den falder med 17%    c) Den øges med 117%    d) Den halveres.

6406:  $f^{-1}(x) = \log_a(x) - \log_a(b)$

6410: Fra start er der 360000 radioaktive kerner af denne isotop, og antallet falder med 7% i minuttet.

6412: Lige efter indsprøjtningen er koncentrationen af stoffet R i blodet på personen 17 mg pr. liter, og koncentrationen falder efterfølgende med 16% i minuttet.

6420: a)  $x \mapsto 3 \cdot 2^x$     b)  $x \mapsto 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$     c)  $x \mapsto 5 \cdot 4^x$     d)  $x \mapsto 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

6422: a)  $x \mapsto \frac{2}{5} \cdot 5^x$     b)  $x \mapsto 40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$     c)  $x \mapsto \frac{7}{27} \cdot 3^x$     d)  $x \mapsto \frac{9}{20} \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^x$

6424:  $f(x) = 61,39 \cdot 0,6518^x$

6425:  $f(x) = 12 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x$

6426:  $g(x) = 16 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$

6430: a)  $\Delta x = 1,867$     b)  $\Delta x = 5,255$     c)  $\Delta x = 1,428$     d)  $\Delta x = 0,170$

6432: a) 1141%    b) 58,2%    c) 185,19    d) 33,5%

6434:  $f(x) = 5,353 \cdot 1,0935^x$

6440: a)  $X_2 = 3,00$     b)  $X_{\frac{1}{2}} = 3,49$     c)  $X_{\frac{1}{2}} = 18,38$     d)  $X_2 = 1,54$

6442:  $f(16) = 3$

6444:  $g(14) = 72$

6446:  $f(-1) = 32$

6450: a)  $X_2 = 5,17$     b)  $X_{\frac{1}{2}} = 1,333$     c)  $X_{\frac{1}{2}} = 131,03$     d)  $X_2 = 0,239$     e)  $X_{\frac{1}{2}} = 0,6931$     f)  $X_2 = 0,6931$

6452: a)  $x \mapsto 59325 \cdot 1,1434^x$     b)  $x \mapsto 542 \cdot 0,5945^x$     c)  $x \mapsto 0,015 \cdot 0,99472^x$     d)  $x \mapsto 0,192 \cdot 18,174^x$

6460: 0,344

6470: a)  $f_{\max} = 2$ ,  $f_{\min} = -4$     b)  $-\frac{\pi}{2}$

6472:  $A_f = 4$ ,  $k_f = \frac{1}{2}$ ,  $\varphi_f = \frac{\pi}{4}$ ,  $c_f = 0$ ,  $A_g = 5$ ,  $k_g = 3$ ,  $\varphi_g = 3\pi$ ,  $c_g = -1$

6480: A:  $f_{\max} = 7$ ;  $f_{\min} = -1$ ;  $T_f = 169,8s$ ,  $f = 0,005889\text{Hz}$

B:  $g_{\max} = 41$  ;  $g_{\min} = 15$  ;  $T_g = 0,02513\text{s}$  ,  $f_g = 39,79\text{Hz}$

C:  $h_{\max} = 4,9$  ;  $h_{\min} = -9,9$  ;  $T_h = 2\pi\text{s}$  ,  $h = 0,1592\text{Hz}$

6482: A:  $f_{\max} = 4$  ;  $f_{\min} = -8$  ;  $\lambda = 0,3696\text{m}$

B:  $g_{\max} = 20,6$  ;  $g_{\min} = -8,8$  ;  $\lambda = 483,3\text{m}$

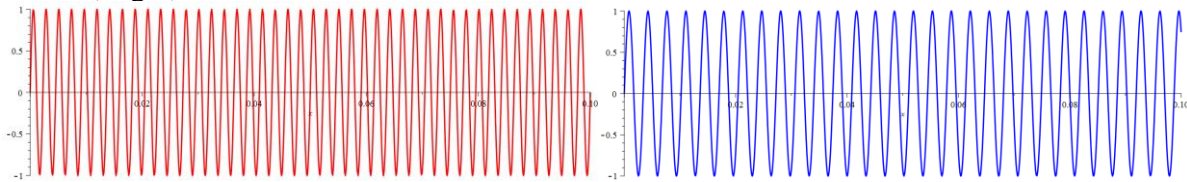
6484: A:  $f_{\max} = 20$  ;  $f_{\min} = -10$  ;  $T_f = 0,004545\text{s}$  ,  $f = 220\text{Hz}$  ;  $\lambda = 1,559\text{m}$

B:  $g_{\max} = 1,5$  ;  $g_{\min} = -14,9$  ;  $T_g = 0,09973\text{s}$  ,  $f_g = 10,027\text{Hz}$  ;  $\lambda = 10,668\text{m}$

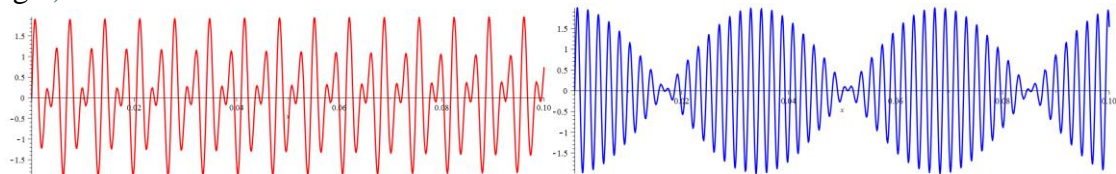
6486: a)  $I_{\max} = 0,27\text{A}$     b)  $f = 50\text{Hz}$     c)  $I = 0,2184\text{A}$     d)  $t = 0,023\text{s}$

6487: a)  $\Delta p = 0,0834\text{ Pa}$     b)  $f = 196,0\text{Hz}$     c)  $\lambda = 1,7347\text{m}$

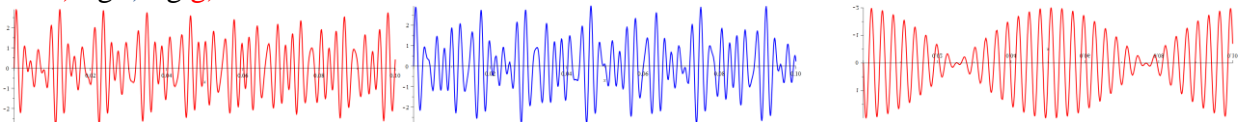
6488: a) og b)



c) og d)



e) og f) og g)



6490: a) Eksponentiel    b) Potens    c) Lineær    d) Logaritme    e) Lineær    f) Eksponentiel  
g) Potens    h) Potens    i) Logaritme

6500: a)  $x \mapsto \frac{1}{16} \cdot x^4$     b)  $x \mapsto 5 \cdot x^3$     c)  $x \mapsto 12 \cdot x^{\frac{1}{2}}$     d)  $x \mapsto 7 \cdot x^{\frac{3}{2}}$     e)  $x \mapsto 100 \cdot x^{-2}$     f)  $x \mapsto 11 \cdot x^{\frac{1}{2}}$

6510: a) 43,5%    b) 4,9%    c) 294,5%    d) 41,9%

6512: a) 300%    b) 26,5%

6514: a) 49,0%    b) 41,4%

6516: a) 182,8%    b) 108,0%

6522: a)  $r_1 = 7$  og  $r_2 = -5$     b)  $r_1 = 19$  og  $r_2 = -11$     c)  $r = -27$

6530: a)  $3x^2 - 4x + 7$     b)  $-5x^2 + x - 6$     c)  $x^2 - 7x + 2$     d)  $-x^2 + 5$     e)  $7x^2 + 4x$     f)  $x^2$

6540:  $c \sim f_1$  ,  $e \sim f_2$  ,  $a \sim f_3$  ,  $d \sim f_4$  ,  $b \sim f_5$  ,  $g \sim f_6$  ,  $h \sim f_7$  og  $f \sim f_8$ .

6550: a)  $V_m = ]0,6100[$     b) 3050    c)  $x = 270,3$     d) (0,61)

6552: a) 528,97    b) 264,49    c)  $x = 14,52$     d) 301,41    e)  $x = 15,94$     f)  $]0,6.86[$     g)  $x = 12,04$

6560: A) 0,80    B) 0,99    C) 0,64    D) 0,94

6570: a) 0,925, 0,981, 0,988, 0,998, 0,9998, 1, 1

b) 0,879, 0,947, 0,990, 0,998, 0,999, 1, 1

c) 0,886, 0,903, 0,994, 0,999, 0,9997, 0,99976, 0,99981

6580: a)  $N(t) = 2183 \cdot 1,0265^t$     c) Nej

6582: a)  $G(t) = 0,0555 \cdot t + 6,295$     c) Ja

6600: a)  $p = 0,063\text{ Pa}$     b) Lydtryksniveauet øges med 2,3 dB

6601: a)  $M = 1,43$     b)  $r = 10^{\frac{m-M+5}{5}}$      $r = 96,8\text{ parsec}$     c) Stiger med 1,51