OPGAVER 2.g

INFINITESIMALREGNING
VEKTORGEOMETRI
VEKTORFUNKTIONER

FYSIK A

MATEMATIK A

KEMI B

x-klasserne
Gammel Hellerup Gymnasium

Marts 2024 ; Michael Szymanski ; mz@ghg.dk

Indholdsfortegnelse

INFINITESIMALREGNING

Opgave 0010: Du skal ved hjælp af formler i Excel finde de første 30 tal i de diskrete funktioner, der opfylder differensligningen $F(n+2)=F(n+1)+F(n)$, $n\in\mathbb{N}$ med nedenstående begyndelsesværdier. Begyndelsesværdierne skal stå i cellerne B1 og B2, mens alle tallene skal stå i cellerne A1-A30. Alle A-cellerne skal indledes med et lighedstegn "=", dvs. der skal stå formler i disse.

Tjek dit resultat med facitlisten, hvor $F(30)$ er angivet.

$a)\ F(1)=1$ og $F(2)=1$

$b)\ F(1)=4$ og $F(2)=7$

$c)\ F(1)=-2$ og $F(2)=3$

$d)\ F(1)=3$ og $F(2)=-2$

$e)\ F(1)=-8$ og $F(2)=5$

Opgave 0012: Anvend Excel til at bestemme kapitalerne op til K_{50} (dvs. til og med 50 fremskrivninger) ud fra differensligningen $K_{n+1}=K_n\cdot(1+r)$; $n\in\{0,1,2,3,4,5,...\}$ med nedenstående vækstrater og startkapitaler. Vækstraten og startkapitalen skal stå i cellerne B1 og B2, mens kapitalerne skal stå i cellerne A1-A50, hvor alle celler skal indledes med et "=".

Tjek dit resultat med facitlisten, hvor K_{50} er angivet.

$a)\ K_0=500 \quad r=27\%$

$b)\ K_0=900 \quad r=3\%$

$c)\ K_0=1582 \quad r=-19\%$

Opgave 0014: Anvend Excel til at bestemme $F(15)$ i de diskrete funktioner, der er løsninger til differensligningen $F(n+4)=F(n+3)\cdot F(n+1)-F(n+2)\cdot F(n)$; $n\in\mathbb{N}$ med nedenstående begyndelsesværdier:

$a)\ F(1)=2 \quad F(2)=1 \quad F(3)=1 \quad F(4)=2$

$b)\ F(1)=3 \quad F(2)=2 \quad F(3)=0 \quad F(4)=1$

Opgave 0016: Anvend Excel til at bestemme funktionsværdier for de diskrete funktioner, der er løsninger til differensligningen $P(n+3)=P(n+2)-P(n+1)+P(n)$; $n\in\mathbb{N}$ med nedenstående begyndelsesværdier. Angiv i facitlisten, hvilke funktionsværdier den pågældende funktion antager:

$a)\ P(1)=4 \quad P(2)=7 \quad P(3)=3$

$b)\ P(1)=-6 \quad P(2)=5 \quad P(3)=11$

$c)\ P(1)=14 \quad P(2)=-53 \quad P(3)=-119$

Opgave 0020: Anvend Maples symboler $\int_{x_1}^{x_2} f\,\mathrm{d}x$ og $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f$ (anvend 'Tab' til at bevæge dig fra den ene indtastning til den næste) til at bestemme følgende buelængder:

a) Delen af grafen for $f:x\mapsto x^2$ i intervallet $[0,1]$.

b) Én hel svingning på grafen for $g:x\mapsto \sin(x)$

c) Delen af grafen for $h:x\mapsto x$ i intervallet $[0,1]$.

Opgave 0022: Hvilket resultat giver Maple, hvis man prøver at bestemme buelængden for den del af grafen for $f: x \mapsto \frac{1}{x}$, der ligger i intervallet $]0,1]$? Giver det mening?

Opgave 0024: Hvad er buelængden for den del af parablen givet ved ligningen $y = x^2 + 2x - 15$; $G = \mathbb{R}^2$, der ligger under x-aksen?

Opgave 0026: Hvilken buelængde giver formlen for buelængde for en halv enhedscirkel?

Opgave 0100: Angiv for nedenstående mængder $\min A, \inf A, \max A$ og $\sup A$, eller angiv med --, at de ikke findes:

Mængden A	$\min A$	$\inf A$	$\max A$	$\sup A$
$[-3,7]$				
$[0,10[$				
$]-\infty,1[$				
$\mathbb{R}$				
$\mathbb{R}_-$				
$\{2,9,3,-4,11\}$				
$\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\ldots\right\}$				
$\mathbb{N}$				
$Vm\left(e^x\right)$				
$Vm(\sin(x))$				
$Vm\left(\frac{1}{x}\right)$				
$\{42\}$				

Opgave 0110: Bestem, hvad funktionen $f: x \mapsto \ln(x)$ med $Dm(f) = \mathbb{R}_+ \setminus \{1, e\}$ går mod for følgende grænseovergange (tegn evt. grafen i Maple som hjælp):

$a)\ x \to \infty \qquad b)\ x \to 1 \qquad c)\ x \to e$

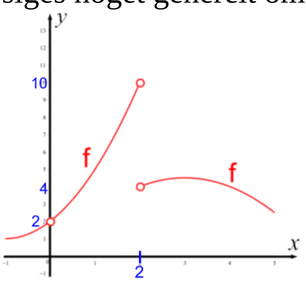
Opgave 0112: Bestem, hvad funktionen $f: x \mapsto \cos(x),\ x \neq 0 \wedge x \neq \frac{\pi}{2}$ går mod for følgende grænseovergange, eller afgør, at der ikke kan siges noget generelt om dette:

$a)\ x \to 0 \quad b)\ x \to \infty \quad c)\ x \to \frac{\pi}{2} \quad d)\ x \to -\infty$

Opgave 0114: Bestem, hvad funktionen $f: x \mapsto -\frac{1}{x}$ går mod i følgende situationer:

$a)\ x \to 0_+ \quad b)\ x \to 0_- \quad c)\ x \to \infty \quad d)\ x \to -\infty$

Opgave 0116: Bestem, hvad funktionen f går mod i følgende situationer, eller afgør, at der ikke kan siges noget generelt om det:



$a)\ x \to 0_+$

$b)\ x \to 0_-$

$c)\ x \to 0$

$d)\ x \to 2_+$

$e)\ x \to 2_-$

$f)\ x \to 2$

Opgave 0120: Du vil for $f: x \mapsto e^x$ vise $f(x) \to 1$ for $x \to 0$.

Angiv det største δ, du kan forsvare dig med, når fjenden kommer med følgende ε:

$a)\ \varepsilon = 0.005 \quad b)\ \varepsilon = 0.00001 \quad c)\ \varepsilon = 10^{-8}$

Opgave 0122: Du vil for $f: x \mapsto e^{-x}$ vise, at $f(x) \to 0$ for $x \to \infty$.

Angiv det mindste *M*, du kan forsvare dig med, når fjenden kommer med følgende ε:

$$a)\ \varepsilon = 0.005 \quad b)\ \varepsilon = 0.00001 \quad c)\ \varepsilon = 10^{-30}$$

Opgave 0124: Vis ved hjælp af Definition 6 (dvs. find *M*), at $\frac{1}{x} \to 0$ for $x \to \infty$.

Opgave 0126: Vis ved hjælp af Definition 5 (dvs. find δ), at $e^x \to e$ for $x \to 1$

Opgave 0130: Bestem grænseværdier for følgende udtryk ved grænseovergangen $x \to 2$.

$$a)\, 6 \cdot x + 9 \quad b)\ \frac{6}{x} - 3 \quad c)\, \frac{x+8}{5} \quad d)\, -9$$

Opgave 0132: Bestem om muligt grænseværdierne for følgende udtryk ved grænseovergangen $\Delta x \to 0$ eller afgør, at en grænseværdi ikke findes.

$$a)\ 6 \cdot \Delta x + 4 \qquad b)\, 2^{\Delta x} + 5 \qquad c)\, \frac{4}{\Delta x} - 11 \qquad d)\, (5 + \Delta x) \cdot \Delta x$$

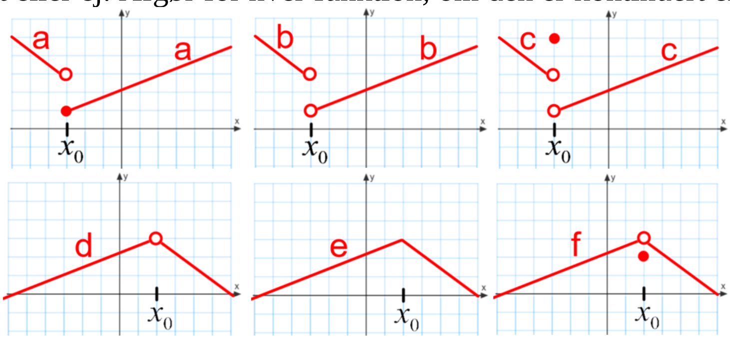
$$e)\ \frac{(3 + \Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} \qquad f)\, \frac{e^{\Delta x + 7}}{1 + \Delta x} \qquad g)\, -\frac{\Delta x}{3 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2} \qquad h)\, \frac{1}{\sqrt{\Delta x}}$$

$$i)\ \frac{5 \cdot (\Delta x)^2 + 8 \cdot \Delta x}{\Delta x} \qquad j)\, \frac{\Delta x}{\Delta x \cdot \sqrt{3 + \Delta x} + \sqrt{3} \cdot \Delta x}$$

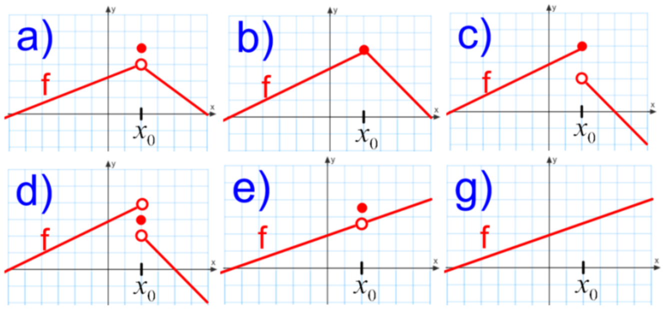
Opgave 0138: Bevis Sætning 1 for $k \cdot f$

Opgave 0139: Bevis Sætning 1 for produktfunktionen og kvotientfunktionen.

Opgave 0140: Nedenfor er konklusionen omkring x_0 afgørende for, om den pågældende funktion er kontinuert eller ej. Afgør for hver funktion, om den er kontinuert eller ikke kontinuert.



Opgave 0142: Afgør i hvert af nedenstående tilfælde, om $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$ for $\Delta x \to 0$:



Opgave 0150: For nedenstående funktioner og de angivne x_0-værdier (se næste side), skal du gøre følgende.

1) Opskriv differenskvotienten for det pågældende x_0.
2) Lad Maple tegne en graf for differenskvotienten. Maple kan ikke anvende Δx som variabel, så du skal erstatte Δx med *x* i dit Maple-udtryk (bemærk, at Maple ikke "opdager", at differenskvotienten ikke er defineret for $\Delta x = 0$).
3) Bestem differentialkvotienten (tangenthældningen) i x_0 ved at aflæse grænseværdien for differenskvotienten for $\Delta x \to 0$.

a) $f_1 : x \mapsto \sqrt{x} \qquad x_0 = 4$

b) $f_2 : x \mapsto x^2 \qquad x_0 = 3$

c) $f_3 : x \mapsto \mathrm{e}^x \qquad x_0 = 0$

d) $f_4 : x \mapsto \cos(x) \qquad x_0 = \dfrac{\pi}{2}$

e) $f_5 : x \mapsto \ln(x) \qquad x_0 = 1$

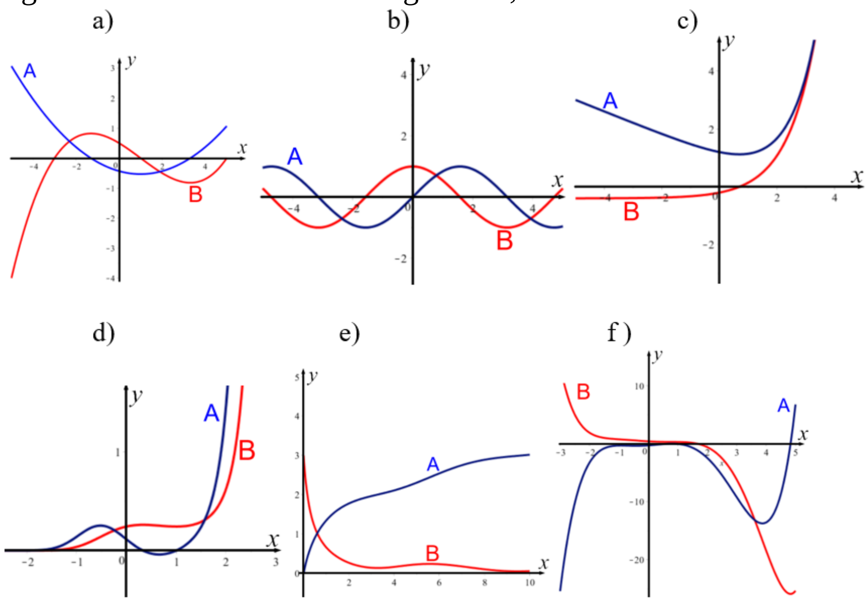
Opgave 0160: Bestem ved hjælp af Maple ligningerne for tangenterne til funktionernes grafer i de angivne punkter. Tjek dit resultat ved i Maple at plotte graferne for funktionerne og tangenterne i samme koordinatsystem og se, at den rette linje ER tangent til kurven.

a) $f_1 : x \mapsto 2x^3 - 4x^2 + 3x + 7 \qquad P_1(2, f_1(2))$

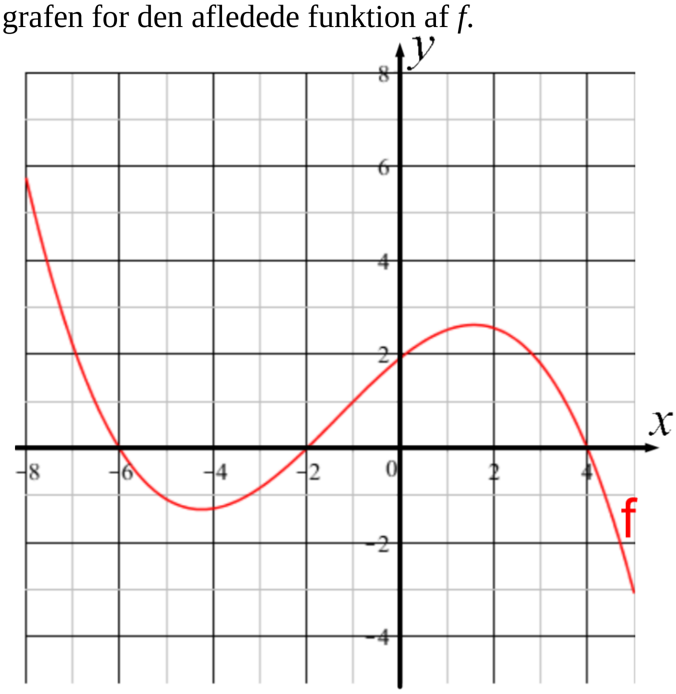
b) $f_2 : x \mapsto \sin(\mathrm{e}^x) \qquad P_2(-1, f_2(-1))$

c) $f_3 : x \mapsto x^2 - 2x - 15 \qquad P_3(1, f_3(1))$

Opgave 0170: I hvert koordinatsystem er tegnet graferne for en funktion og dens afledede funktion. Angiv i hvert tilfælde hvilken af graferne, der svarer til selve funktionen.



Opgave 0172: Konstruér efter bedste evne tangenter i forskellige punkter og benyt hældningerne til at tegne grafen for den afledede funktion af *f*.



Opgave 0180: Benyt tretrinsreglen til at vise, at nedenstående funktioner er differentiable, og bestem forskrifter for de afledede funktioner. Tjek dit resultat med Maple ved at definere funktionen og bede Maple udregne $f'(x)$.

$a)\ f_1 : x \mapsto x^2$ $\quad b)\ f_2 : x \mapsto 5x^2$ $\quad c)\ f_3 : x \mapsto x^3$ $\quad d)\ f_4 : x \mapsto 7x^3$

$e)\ f_5 : x \mapsto 13x$ $\quad f)\ f_6 : x \mapsto x$ $\quad g)\ f_7 : x \mapsto 9$ $\quad h)\ f_8 : x \mapsto k$

$i)\ f_9 : x \mapsto x^4$ $\quad j)\ f_{10} : x \mapsto 11 \cdot x^4$ $\quad k)\ f_{11} : x \mapsto x^5$ $\quad l)\ f_{12} : x \mapsto x^6$

$m)\ f_{13} : x \mapsto \dfrac{4}{x}$ $\quad n)\ f_{14} : x \mapsto 3 \cdot \sqrt{x}$ $\quad o)\ f_{15} : x \mapsto \dfrac{1}{x+3}$ $\quad p)\ f_{16} : x \mapsto \sqrt{x-7}$

Opgave 0182: Benyt tretrinsreglen til at vise, at $f : x \mapsto a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ er differentiabel, og bestem forskriften for den afledede funktion. Tjek dit resultat med Maple.

Opgave 0200: Vi ser på differentialligningen $y' + \dfrac{y}{x} = 0$.

a) Undersøg, om $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ er en løsning til differentialligningen.
b) Anvend Maple til at bestemme den fuldstændige løsning til differentialligningen.
c) Hvilken værdi af konstanten i den fuldstændige løsning svarer til f?

Opgave 0202: Vi ser på differentialligningen $1 = 2 \cdot N(t) \cdot N'(t)$.

a) Undersøg, om $N : t \mapsto \sqrt{t}$ er en løsning til differentialligningen.
b) Anvend Maple til at bestemme den fuldstændige løsning til differentialligningen.
c) Er $N_1 : t \mapsto -\sqrt{t+7}$ en løsning til differentialligningen?
d) Er $N_2 : t \mapsto \sqrt{3 \cdot t + 5}$ en løsning til differentialligningen?

Opgave 0204: Vi husker, at $\left(x^3\right)' = 3x^2$ og ser på differentialligningen $2 \cdot x \cdot y = \dfrac{dy}{dx} + x$.

a) Undersøg, om $f : x \mapsto x^3$ er en løsning til differentialligningen.
b) Anvend Maple til at bestemme den fuldstændige løsning til differentialligningen.

Opgave 0206: Vi ser på differentialligningen $I'(t) + 2 \cdot I(t) = t^2$.

a) Anvend Maple til at bestemme den fuldstændige løsning til differentialligningen.
b) Er $t \mapsto \dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{4}$ en løsning til differentialligningen?
c) Er $t \mapsto 3 \cdot \mathrm{e}^{-2 \cdot t}$ en løsning til differentialligningen?

Opgave 0208: Vi ser på differentialligningen $y'' - 2y' + 3y = \sin(x)$

a) Anvend Maple til at bestemme den fuldstændige løsning til differentialligningen.
b) Er $x \mapsto 7 \cdot \mathrm{e}^x \cdot \cos(\sqrt{2} \cdot x)$ en løsning til differentialligningen?
c) Er $x \mapsto -\mathrm{e}^x \cdot \sin(\sqrt{2} \cdot x) + \dfrac{1}{4} \cdot \left(\sin(x) + \cos(x)\right)$ en løsning til differentialligningen?

Opgave 0210: Det oplyses, at *f* er en løsning til differentialligningen $2x - \dfrac{dy}{dx} = y$, og at punktet $P(4,10)$ ligger på grafen for *f*.

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for *f* i *P*.

Opgave 0212: Det oplyses, at *f* er en løsning til differentialligningen $\frac{y'+y}{x}=x^2+2$, og at punktet $P(1,-2)$ ligger på grafen for *f*.

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for *f* i *P*.
b) En anden tangent til grafen for *f* , hvor røringspunktet har heltallige koordinater, har ligningen $y=17x-35$. Bestem koordinatsættet til tangentens røringspunkt på grafen for *f*.

Opgave 0220: Grafen for funktionen *f* går gennem linjeelementet $(2,-7;3)$. Bestem en ligning for tangenten til grafen for *f* i 2.

Opgave 0222: Det oplyses, at $y=5x-13$ er ligningen for tangenten til grafen for *f* i 4. Bestem et linjeelement, som grafen for *f* går igennem.

Opgave 0230: Benyt *linjeelementer* eller *hældningsfelt* til at tegne et hældningsfelt for differentialligningen $f'(x)\cdot x=f(x)+x$ i vinduet $[-10,10]\times[-10,10]$.

Opgave 0231: Tegn et hældningsfelt for differentialligningen $N'(t)=0,3\cdot N(t)$ i vinduet $[-5,10]\times[-20,30]$ samt løsningskurverne for de to partikulære løsninger N_1 og N_2 med $N_1(0)=3$ og $N_2(2)=-7$.

Opgave 0232: Tegn et hældningsfelt for differentialligningen $p'(x)=-\frac{0,4\cdot x}{p(x)}$ i vinduet $[-5,5]\times[-5,5]$ samt løsningskurverne for de to partikulære løsninger p_1 og p_2 med $p_1(-2)=3$ og $p_2(4)=-1$.

Opgave 0233: Tegn et hældningsfelt for differentialligningen $f'(x)=\frac{e^x}{f(x)}$ i vinduet $[-3,5]\times[-10,10]$ samt løsningskurven for den partikulære løsning, der går gennem punktet $(3,7)$.

Opgave 0236: Se på differentialligningen $y'=\frac{x}{y}$.

a) Indtegn en masse linjeelementer (lad være med at bruge for lang tid på præcision – tegn hældninger på øjemål) og se, om du kan gennemskue, hvordan graferne for løsningerne ser ud.
b) Løs differentialligningen med Maple og tegn nogle grafer for løsninger, så du kan se, om din vurdering fra a) er rigtig.

Opgave 0237: Benyt *linjeelementer* eller *hældningsfelt* til opgave 0236.

Opgave 0238: Se på differentialligningen $y'=x+y$.

a) Indtegn en masse linjeelementer og se, om du kan gennemskue, hvordan graferne for løsningerne ser ud.
b) Løs differentialligningen med Maple og tegn nogle grafer for løsninger, så du kan se, om din vurdering fra a) er rigtig.

Opgave 0239: Benyt *linjeelementer* eller *hældningsfelt* til opgave 0238.

Opgave 0240: Bestem ved hjælp af Maple den partikulære løsning til differentialligningen $y'=-2\cdot\frac{x}{y}$, hvis graf går gennem punktet $(0,6)$.

Fastsæt også definitionsmængden for løsningen.

Opgave 0242: Bestem ved hjælp af Maple den løsning til $N'(t)+3\cdot N(t)=4t^2$, for hvilken det gælder, at $N(2)=\frac{104}{27}$.

Opgave 0250: Den hastighed, hvormed temperaturen T af vand i et glas ændrer sig, er proportional med differensen af omgivelsernes temperatur T_0 og vandets temperatur. Angiv en differentialligning, der beskriver situationen.

Opgave 0252: Differensen af en funktion *f*'s væksthastighed og funktionsværdi er proportional med kvadratroden af kvotienten af argumentet og funktionsværdien.
Opskriv differentialligningen.

Opgave 0300: Bestem ved hjælp af Maple arealet af den punktmængde *M*, der afgrænses af grafen for $f:x\mapsto x^3$, førsteaksen samt linjerne med ligningerne $x=2$ og $x=7$.

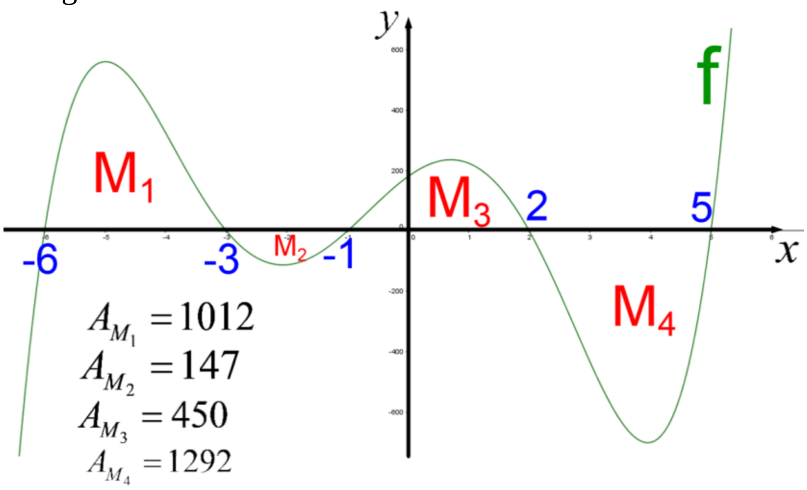
Opgave 0302: Bestem ved hjælp af Maple arealet af den punktmængde *M*, der afgrænses af førsteaksen og grafen for funktionen $f:x\mapsto \sin(x)$; $x\in[0,\pi]$.

Opgave 0304: Bestem ved hjælp af Maple arealet af den punktmængde *M*, der afgrænses af førsteaksen, grafen for $f:x\mapsto -\sqrt{x}$ og linjen med ligningen $x=1$.

Opgave 0306: Bestem ved hjælp af Maple arealet af den punktmængde *M*, der afgrænses af de to koordinatakser samt grafen for $f:x\mapsto \sqrt{x+9}$.

Opgave 0308: Bestem ved hjælp af Maple arealet af den punktmængde *M*, der afgrænses førsteaksen og grafen for funktionen $f:x\mapsto x^2-5x-36$.

Opgave 0310: På figuren ses grafen for funktionen *f*. Funktionens nulpunkter er angivet med blåt, og arealerne af de fire punktmængder M_1, M_2, M_3 og M_4, der dannes af grafen for *f* og førsteaksen, er angivet.



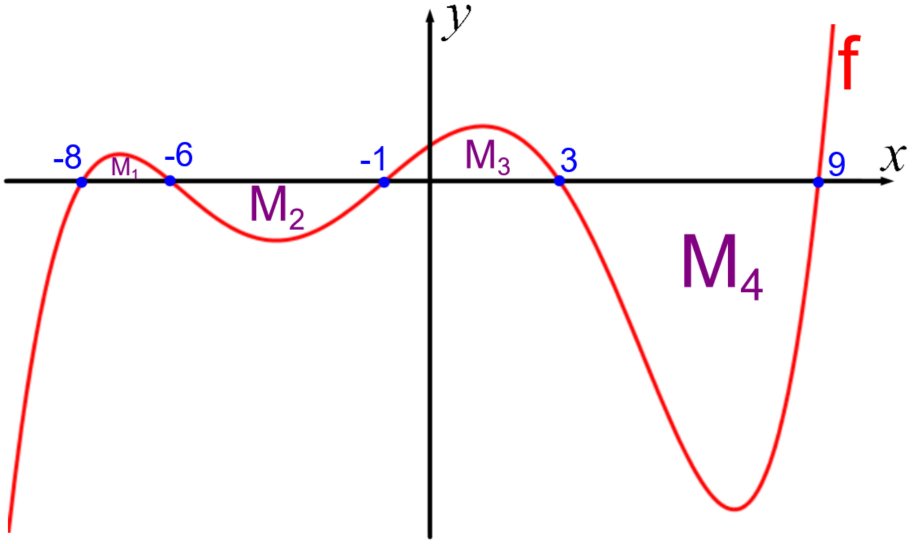
Bestem nedenstående bestemte integraler og gør det med en rigtig opskrivning

(eksempel: $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx=\int_{-1}^{2} f(x)\,dx+\int_{2}^{5} f(x)\,dx=A_{M_3}-A_{M_4}=450-1292=\underline{\underline{-842}}$)

$a)\ \int_{-6}^{-3} f(x)\,dx \quad b)\ \int_{-3}^{-1} f(x)\,dx \quad c)\ \int_{-3}^{2} f(x)\,dx \quad d)\ \int_{-6}^{5} f(x)\,dx$

$e)\ \int_{-3}^{5} f(x)\,dx \quad g)\ \int_{-6}^{-1} f(x)\,dx \quad h)\ \int_{5}^{-1} f(x)\,dx \quad i)\ \int_{2}^{-6} f(x)\,dx$

Opgave 0312: Nedenfor ses grafen for funktionen *f*, der har nulpunkterne -8, -6, -1, 3 og 9. Grafen afgrænser sammen med førsteaksen fire punktmængder M_1, M_2, M_3 og M_4.



Følgende bestemte integraler er oplyst:

$$\int_{-8}^{-6} f(x)\,dx = 3 \qquad \int_{3}^{-1} f(x)\,dx = -11 \qquad \int_{-1}^{-8} f(x)\,dx = 10 \qquad \int_{-6}^{9} f(x)\,dx = -97$$

Bestem $A_{M_1}, A_{M_3}, A_{M_2}, A_{M_4}$ og $\int_{-8}^{9} f(x)\,dx$.

Opgave 0314: Det oplyses, at $\int_{3}^{11} f(x)\,dx = 7$, $\int_{11}^{18} f(x)\,dx = -12$, $\int_{-5}^{13} f(x)\,dx = 4$ og $\int_{-5}^{18} f(x)\,dx = 16$.

Bestem $\int_{3}^{18} f(x)\,dx$, $\int_{-5}^{3} f(x)\,dx$, $\int_{11}^{13} f(x)\,dx$ og $\int_{13}^{3} f(x)\,dx$.

Opgave 0330: Bestem arealet af den punktmængde *M*, der afgrænses af graferne for funktionerne $f : x \mapsto -x^2 + \frac{9}{8}x + \frac{147}{8}$ og $g : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{15}{8}x - \frac{33}{8}$.

Opgave 0332: Bestem arealet af den punktmængde *M*, der afgrænses af graferne for funktionerne $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ og $g : x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 7$.

Opgave 0334: Bestem arealet af den punktmængde *M*, der afgrænses af graferne for funktionerne *f* og *g* givet ved $f(x) = \cos(x)$ og $g(x) = \sqrt{x}$ samt linjerne givet ved ligningerne $x = 4$ og $x = 10$.

Opgave 0336: Bestem arealet af den punktmængde *M*, der afgrænses af grafen for funktionen $f : x \mapsto x^2 - 2x + 7$ og linjen med ligningen $y = 9$.

Opgave 0338: Bestem arealet af den punktmængde *M*, der afgrænses af graferne for funktionerne $f : x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g : x \mapsto \frac{1}{x} - 1$ og $h : x \mapsto \sqrt{x+12}$.

Opgave 0339: Find arealet af de punktmængder, der beskrives i det følgende. Du skal have fokus på fortegnene, dvs. du må ikke bare ende ud med et negativt tal og så opdage, at den numeriske værdi passer, hvorefter du smider fortegnet væk. Begynd med at tegne grafen/graferne, så du kan opskrive udregningerne korrekt.

a) Punktmængden, der afgrænses af linjerne med ligningerne $x=1$ og $x=4$, førsteaksen samt grafen for funktionen $f:x\mapsto\sqrt{x}\cdot e^x$.

b) Punktmængden, der afgrænses af linjerne med ligningerne $x=2$ og $x=7$, førsteaksen samt grafen for funktionen $f:x\mapsto-\sqrt{x}\cdot e^x$.

c) Punktmængden, der afgrænses af linjerne med ligningerne $x=-3$ og $x=6$ samt graferne for funktionerne $f:x\mapsto 2^x-5$ og $g:x\mapsto 2\cdot x^2$.

d) Punktmængden, der afgrænses af graferne for funktionerne $f:x\mapsto x^2-3x-9$ og $g:x\mapsto -x^2-5x+5$.

e) Punktmængden, der afgrænses af koordinatakserne og grafen for funktionen $f:x\mapsto 2\cdot\cos(x)-(x+0,3)^3$

f) Punktmængden beliggende i første kvadrant, der afgrænses af koordinatakserne og grafen for funktionen $f:x\mapsto-\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}+5$.

g) Punktmængden beliggende i første kvadrant, der afgrænses af koordinatakserne og graferne for funktionerne $f:x\mapsto\sqrt{x+6}$ og $g:x\mapsto e^x-3$.

h) Punktmængden, der afgrænses af begge koordinatakser og graferne for funktionerne $f:x\mapsto -0,3^x$ og $g:x\mapsto -\dfrac{1}{2}\cdot(x+3)^3+2$.

Opgave 0340: Lad funktionen *f* være givet ved forskriften $f(x)=3^x$. Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når punktmængden afgrænset af grafen for *f*, førsteaksen og linjerne med ligningerne $x=-2$ og $x=4$ drejes 360° omkring *x*-aksen.

Opgave 0342: Grafen for funktionen $f:x\mapsto x^2-6x+5$ danner sammen med førsteaksen en punktmængde *M*. Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når *M* roteres 360° omkring førsteaksen.

Opgave 0344: Grafen for funktionen $f:x\mapsto x^4+3x^3-15x^2-19x+30$ danner sammen med førsteaksen tre punktmængder. Bestem det samlede rumfang af de omdrejningslegemer, der fremkommer, når disse tre punktmængder drejes 360° omkring førsteaksen.

Opgave 0346: Grafen for funktionen $f:x\mapsto\cos(x)$ danner i intervallet $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ sammen med førsteaksen to punktmængder. Bestem det samlede rumfang af de to omdrejningslegemer, der fremkommer, når disse to punktmængder roteres 360° omkring førsteaksen.

Opgave 0350: Graferne for funktionerne $f:x\mapsto x^2-9x+26$ og $g:x\mapsto -x^2+7x+12$ afgrænser en punktmængde *M*. Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når *M* drejes 360° omkring førsteaksen.

Opgave 0352: I første kvadrant afgrænser begge koordinatakser sammen med graferne for funktionerne $f: x \mapsto \cos(x)$ og $g: x \mapsto \ln(x)$ en punktmængde *M*. Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når *M* roteres 360° omkring førsteaksen.

Opgave 0354: Grafen for funktionen $f: x \mapsto -x^2 + 9x - 15$ afgrænser sammen med linjen med ligningen $y = 2$ en punktmængde *M*. Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når *M* drejes 360° omkring linjen med ligningen $y = 2$.

Opgave 0356: Graferne for funktionerne $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + 3x + 10$, $g: x \mapsto 3 \cdot \sqrt{x+11}$ og $h: x \mapsto \log_{\frac{1}{3}}(x+2) + 15$ afgrænser en punktmængde *M*. Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når *M* roteres 360° omkring førsteaksen.

Opgave 0370: Bestem længden af den del af grafen for funktionen $f: x \mapsto -x^2 + 11x - 18$, der ligger i første kvadrant.

Opgave 0372: Bestem længden af grafen for $f: x \mapsto \sin(x)$ i intervallet $[0, 2\pi]$.

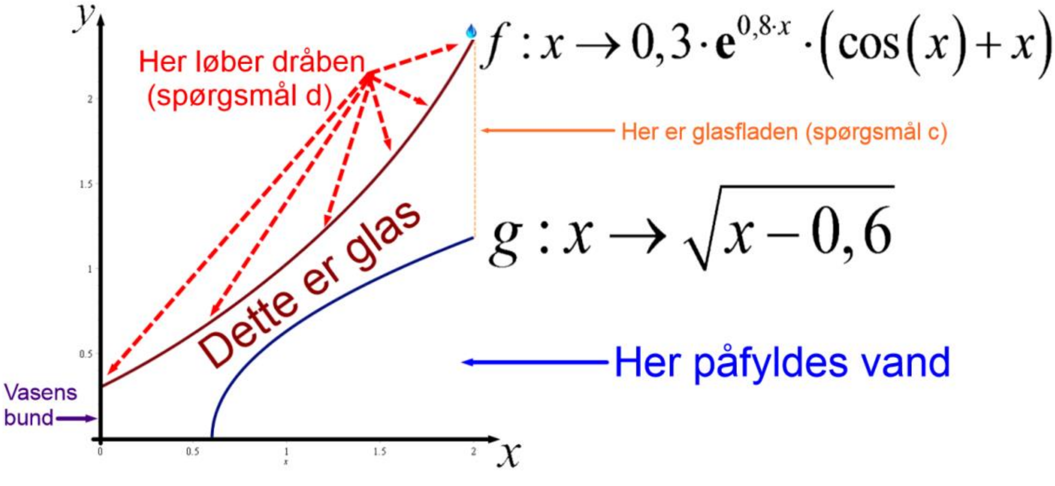
Opgave 0374: Bestem omkredsen af den punktmængde, der afgrænses af graferne for funktionerne $f: x \mapsto x^2 - \frac{107}{9}x + \frac{151}{9}$ og $g: x \mapsto -x^2 + \frac{127}{9}x - \frac{245}{9}$.

Opgave 0376: Bestem omkredsen af den punktmængde, der afgrænses af begge koordinatakser og grafen for funktionen $f: x \mapsto x^2 - 2x + 1$.

Opgave 0378: Bestem omkredsen af den punktmængde, der afgrænses af graferne for funktionerne $f: x \mapsto e^x$, $g: x \mapsto -x + 4$ og $h: x \mapsto 2 \cdot 5^x$.

Opgave 0380: Bestem overfladearealet af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når punktmængden afgrænset af grafen for funktionen $f: x \mapsto -x^2 + 1$ og førsteaksen drejes 360° omkring førsteaksen.

Opgave 0390: På nedenstående figur ses graferne for $f: x \mapsto 0{,}3 \cdot \mathbf{e}^{0{,}8 \cdot x} \cdot (\cos(x) + x)$ og $g: x \mapsto \sqrt{x - 0{,}6}$. En vase af glas dannes ved, at området i første kvadrant, der afgrænses af koordinatakserne, graferne for funktionerne samt linjen med ligningen $x = 2$, roteres 360° omkring *x*-aksen. Alle mål er i dm.



a) Hvor meget vand kan vasen indeholde?
b) Hvor meget glas skal anvendes til vasen?
c) Hvor stort er arealet af glasfladen på toppen af vasen?
d) En dråbe løber fra vasens kant til bunden af vasen. Hvor langt løber den?
e) Hele vasen (yderside, inderside, top og bund) skal males. Hvad er arealet af det område, der skal males?
f) Hvor højt står vandet i vasen, når der er påfyldt 2 liter vand?
g) Hvor højt over bordoverfladen befinder dråben fra spørgsmål d) sig, når den har bevæget sig 1,7 dm? (Hvis Maple volder problemer, kan du f.eks. forsøge med 'Numerically Solve from Point')

Opgave 0392: Graferne for funktionerne *f* og *g* med forskrifterne

$$f(x) = -x^3 + 8x^2 - 19x + 13 \qquad \text{og} \qquad g(x) = \sqrt{x+7} - 2$$

afgrænser to punktmængder M_1 og M_2.

a) Bestem det samlede areal af M_1 og M_2.

I først kvadrant ligger en punktmængde M_3, der afgrænses af begge grafer samt begge koordinatakser.

b) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M_3 roteres 360°omkring førsteaksen.

Graferne for *f* og *g* skærer hinanden tre steder x_1, x_2 og x_3, hvor $x_3 > x_2 > x_1$.

c) Bestem længden af det buestykke på grafen for *f*, der ligger mellem x_1 og x_3.

Grafen for *g* afgrænser sammen med 1.aksen og linjen $x = a$, hvor $a > -3$, en punktmængde M_4.

d) Bestem *a*, så arealet af M_4 er 10.

Opgave 0394 (fortsætter på næste side) : Tre funktioner *f*, *g* og *h* er givet ved forskrifterne:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 \qquad g(x) = \left(\frac{11}{5}\right)^x + 1 \qquad h(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x) + 2$$

Graferne for de tre funktioner afgrænser sammen med de to koordinatakser en punktmængde M_2.

a) Bestem arealet af M_2.
b) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M_2 drejes 360°omkring *x*-aksen.
c) Bestem omkredsen af M_2.

Graferne for de tre funktioner afgrænser tilsammen en punktmængde M_1.

d) Bestem arealet af M_1.
e) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M_1 drejes 360°omkring *x*-aksen.
f) Bestem omkredsen af M_1.

Graferne for *f* og *g* danner sammen med *y*-aksen en punktmængde M_3.

g) Bestem arealet af M_3.
h) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M_3 drejes 360°omkring *x*-aksen.
i) Bestem omkredsen af M_3.

Grafen for f afgrænser sammen med koordinatakserne og linjen med ligningen $x = a$, hvor $a < 0$, en punktmængde M_4.

j) Bestem a, så arealet af M_4 er 8.

Graferne for f, g og h, y-aksen og linjen med ligningen $y = 4$ danner en punktmængde M_5.

k) Bestem arealet af M_5.

l) Bestem omkredsen af M_5.

Grafen for g afgrænser sammen med y-aksen og linjen givet ved $y = 8$ en punktmængde M_6.

m) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M_6 drejes 360°omkring x-aksen.

n) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M_6 drejes 360°omkring y-aksen.

Opgave 0396: To funktioner f og g er givet ved forskrifterne:

$$f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{4}{3}\right) + 2 \qquad g(x) = \ln\left((x - 2\pi)^3 + \frac{1}{2}\right)$$

Graferne for de to funktioner afgrænser sammen med koordinatakserne en punktmængde M_1.

a) Bestem arealet af M_1.

b) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M_1 drejes 360°omkring x-aksen.

c) Bestem omkredsen af M_1.

d) Bestem overfladearealet af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M_1 drejes 360°omkring x-aksen.

Opgave 0480: I tabellen nedenfor er angivet en funktion, en stamfunktion til funktionen samt et bestemt integral, der skal udregnes. Benyt Sætning 9 til at udregne det bestemte integral i hånden, **og** tjek resultatet ved at indtaste det bestemte integral i Maple:

Funktionsforskrift	**En stamfunktion**	**Det bestemte integral**	**Resultat**
$f(x) = 3x^2$	$F(x) = x^3$	$\int_1^5 f(x)dx$	
$h(x) = x^3$	$H(x) = \frac{1}{4}x^4$	$\int_2^4 h(x)dx$	
$a(x) = x^3$	$A(x) = \frac{1}{4}x^4 + 13$	$\int_2^4 a(x)dx$	
$g(x) = \mathrm{e}^x$	$G(x) = \mathrm{e}^x + 7$	$\int_0^1 g(x)dx$	
$b(x) = \mathrm{e}^x$	$B(x) = \mathrm{e}^x - 43$	$\int_0^1 b(x)dx$	
$k(x) = \sin(x)$	$K(x) = -\cos(x) + 4$	$\int_0^\pi k(x)dx$	
$c(x) = 5 \cdot \cos(x)$	$C(x) = 5 \cdot \sin(x) + 81$	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} c(x)dx$	
$q(x) = \ln(x)$	$Q(x) = x \cdot \ln(x) - x + 57$	$\int_1^{\mathrm{e}} q(x)dx$	
$p(x) = \sin(x)$	$P(x) = -\cos(x) - 182$	$\int_0^{2\pi} p(x)dx$	

Opgave 0500: Bestem uden brug af Maple, men gerne ved hjælp af en oversigt, følgende størrelser. Husk at tjekke facit efter hvert resultat, så du ikke kommer til at skulle aflære en forkert fremgangsmåde (Husk, at målet er, at du skal kunne resultaterne udenad):

$$a)\ \left(\mathrm{e}^x\right)' \quad b)\left(x^4\right)' \quad c)\ \left(x^7\right)' \quad d)\ \left(x^2\right)' \quad e)\ \left(x^{-4}\right)' \quad f)\ \left(x^{-5}\right)' \quad g)\left(x\right)' \quad h)\ \left(\frac{1}{x^3}\right)'$$

$$i)\ \left(\frac{1}{x^7}\right)' \quad j)\left(x^{2,5}\right)' \quad k)\ \left(x^{5,1}\right)' \quad l)\ \left(x^{-3,9}\right)' \quad m)\ \left(x^{-6,4}\right)' \quad n)\ \left(\frac{1}{x^{1,9}}\right)' \quad o)\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' \quad p)\ \left(\sqrt{x}\right)'$$

$$q)\ \left(x^{-1}\right)' \quad r)\left(\frac{1}{x}\right)' \quad s)\ (9)' \quad t)\ (0)' \quad u)\ (\pi)' \quad v)\ (\mathrm{e})' \quad y)\left(\ln(x)\right)' \quad z)\ \left(\sin(x)\right)'$$

Opgave 0502: Bestem uden brug af Maple, men gerne ved hjælp af en oversigt, følgende størrelser (Husk, at målet er, at du skal kunne resultaterne udenad):

$$a)\int x^5dx \quad b)\int x^3dx \quad c)\int x^2dx \quad d)\int x^{-4}dx \quad e)\int x^{-7}dx \quad f)\int x^{2,7}dx$$

$$g)\int \sqrt{x}dx \quad h)\int \frac{1}{x}dx \quad i)\int 7dx \quad j)\int 5dx \quad k)\int -3dx \quad l)\int \pi dx$$

$$m)\int \mathrm{e}^x dx \quad n)\int 4^x dx \quad o)\int 8^x dx \quad p)\int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx \quad q)\int 0,21^x dx \quad r)\int \ln(x)dx$$

Opgave 0504: Bestem uden brug af Maple, men gerne ved hjælp af en oversigt, følgende størrelser (Husk, at målet er, at du skal kunne resultaterne udenad):

$$a)\ \left(3^x\right)' \quad b)\left(9^x\right)' \quad c)\ \left(2^x\right)' \quad d)\ \left(\left(\frac{1}{4}\right)^x\right)' \quad e)\ \left(3,8^x\right)' \quad f)\ \left(\mathrm{e}^x\right)' \quad g)\left(\ln(x)\right)' \quad h)\ \left(\sqrt{x}\right)'$$

$$i)\ \left(\sin(x)\right)' \quad j)\left(\cos(x)\right)' \quad k)\ \left(\tan(x)\right)' \quad l)\ \left(\log(x)\right)' \quad m)\ \left(x^9\right)' \quad n)\ (9)' \quad o)\frac{d\left(x^6\right)}{dx} \quad p)\ \frac{d\left(5^x\right)}{dx}$$

$$q)\ \frac{d\left(\mathrm{e}^x\right)}{dx} \quad r)\frac{d\left(\sin(x)\right)}{dx} \quad s)\ \frac{d\left(t^5\right)}{dt} \quad u)\ \frac{d\left(\cos(t)\right)}{dt} \quad v)\ \frac{d\left(3^s\right)}{ds} \quad w)\ \frac{d\left(\ln(p)\right)}{dp} \quad x)\frac{d\left(\sqrt{y}\right)}{dy} \quad z)\ \frac{d\left(a^4\right)}{da}$$

Opgave 0506: Bestem uden brug af Maple, men gerne ved hjælp af en oversigt, følgende størrelser (Husk, at målet er, at du skal kunne resultaterne udenad):

$$a)\int \sin(x)dx \quad b)\int \cos(x)dx \quad c)\int x^6dx \quad d)\int xdx \quad e)\int tdt \quad f)\int kdk$$

$$g)\int \sin(t)dt \quad h)\int \mathrm{e}^t dt \quad i)\int 4^a da \quad j)\int x^4dx \quad k)\int \left(\cos(x)\right)^4 d\left(\cos(x)\right) \quad l)\int \left(\mathrm{e}^x\right)^4 d\left(\mathrm{e}^x\right)$$

$$m)\int \mathrm{e}^y dy \quad n)\int \mathrm{e}^{\sin(x)} d\left(\sin(x)\right) \quad o)\int 5dx \quad p)\int kdx \quad q)\int kdk \quad r)\int 9dt$$

Opgave 0508: Bestem uden brug af Maple, men gerne ved hjælp af en oversigt, følgende størrelser:

$$a)\frac{d\left(x^4\right)}{dx} \quad b)\int x^4dx \quad c)(x)' \quad d)\int xdx \quad e)\frac{d\left(\sin(p)\right)}{dp} \quad f)\int \sin(y)dy \quad g)\frac{d\left(\cos(x)\right)}{dx}$$

$$h)\frac{d\left(\cos(x)\right)}{d\left(\cos(x)\right)} \quad i)\frac{d\left(\mathrm{e}^{y^2}\right)}{d\left(y^2\right)} \quad j)\int \cos(x)dx \quad k)\frac{d^2\left(\sin(x)\right)}{dx^2} \quad l)\frac{d^4\left(\mathrm{e}^y\right)}{dy^4} \quad m)(x)'' \quad n)\left(\int 5^x dx\right)'$$

Opgave 0510: Udregn i hånden ved anvendelse af skrivemåden $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$ følgende bestemte integraler.

$$a)\ \int_2^5 x^2dx \quad b)\int_1^2 x^3dx \quad c)\int_0^{10} x^7dx \quad d)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx \quad e)\int_0^{2\cdot\pi} \sin(x)dx$$

$$f)\int_0^3 \mathrm{e}^x dx \quad g)\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}dx \quad h)\int_1^3 2^x dx \quad i)\int_1^9 \sqrt{x}dx \quad j)\int_0^{10} xdx$$

Opgave 0512: Bestem ved udregninger i hånden arealet af den punktmængde *M*, der afgrænses af grafen for $f: x \mapsto x^2$, førsteaksen og linjen med ligningen $x = 5$.

Opgave 0514: Bestem ved udregninger i hånden arealet af den punktmængde *M*, der i første kvadrant afgrænses af grafen for $f: x \mapsto x^2$, andenaksen og linjen givet ved $y = 25$.

Opgave 0520: Bestem ved udregninger i hånden nedenstående afledede funktionsudtryk.

$$a)\left(6\cdot x^4\right)' \quad b)\left(-2\cdot\ln(x)\right)' \quad c)\frac{d\left(4\cdot 3^x\right)}{dx} \quad d)\frac{d\left(7\cdot\sin(x)\right)}{dx} \quad e)\left(5x\right)' \quad f)\left(4\sqrt{x}\right)'$$

Opgave 0522: Bestem ved udregninger i hånden nedenstående ubestemte integraler.

$$a)\int 5\cdot x^3 dx \quad b)\int 6x^5 dx \quad c)\int 3x^2 dx \quad d)\int 6x dx \quad e)\int \frac{8}{x} dx \quad f)\int 4\cdot\cos(x) dx$$

Opgave 0524: Udregn følgende bestemte integraler i hånden.

$$a)\int_0^2 4x^3 dx \quad b)\int_0^1 5\mathrm{e}^x dx \quad c)\int_0^\pi -3\cdot\sin(x) dx \quad d)\int_1^2 7x dx \quad e)\int_1^{\mathrm{e}} \frac{5}{x} dx \quad f)\int_1^3 7 dx$$

Opgave 0526: Bestem en ligning for tangenten til grafen for $f: x \mapsto 5x^2$ i punktet $\left(3, f(3)\right)$.

Opgave 0528: Grafen for funktionen $f: x \mapsto 2x^3$ afgrænser sammen med førsteaksen og linjen med ligningen $x = 1$ en punktmængde *M*. Bestem ved udregninger i hånden rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når *M* drejes 360° om førsteaksen.

Opgave 0530: Differentiér i hånden funktionerne givet ved nedenstående funktionsforskrifter:

$$a)\ f(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 9x + 4 \quad b)\ g(x) = x^5 - 9x^4 + 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 13$$

$$c)\ h(x) = \mathrm{e}^x + \sin(x) - 5 \quad d)\ i(x) = \frac{6}{x} - \ln(x) + 28$$

$$e)\ j(x) = 5^x - x^5 \quad f)\ k(x) = 6\cos(x) - 9 + 4\sqrt{x}$$

Opgave 0532: Udregn i hånden følgende ubestemte integraler:

$$a)\int\left(4x^3 - 6x^2 + 2x - 7\right)dx \quad b)\int\left(2x^5 - x^3 + 2x^2 - x + 3\right)dx$$

$$c)\int\left(2\mathrm{e}^x + 4\cos(x) - 2\sin(x)\right)dx \quad d)\int\left(\frac{4}{x} - 4\sqrt{x} + 5\right)dx$$

$$e)\int\left(6\cdot 3^x - 2\cdot x^5 + 13\right)dx \quad f)\int\left(3\cdot x^{2,1} - 4\cdot x^{-3,7}\right)dx$$

Opgave 0534: Udregn i hånden følgende bestemte integraler:

$$a)\int_0^1\left(3x^2 + 4x + 1\right)dx \quad b)\int_0^1\left(2\mathrm{e}^x + x^2\right)dx \quad c)\int_0^\pi\left(2\cos(x) - 3\sin(x)\right)dx$$

Opgave 0535: Undersøg, om funktionen $f: x \mapsto 2\mathrm{e}^x + x^2$ er en løsning til differentialligningen

$$2\cdot\left(y - \mathrm{e}^x\right) = x\cdot\frac{dy}{dx}$$

Opgave 0536: Grafen for $f: x \mapsto x^2 - 6x + 5$ afgrænser sammen med førsteaksen en punktmængde *M* i fjerde kvadrant. Bestem ved udregninger i hånden arealet af *M*.

Opgave 0538: Find ved udregninger i hånden de to steder (*x*-værdier), hvor grafen for funktionen $f: x \mapsto 2x^3 - 3x^2 - 72x + 31$ har vandrette tangenter.

Opgave 0540: Udregn i hånden nedenstående differentialkvotienter.

$$a)\ \left(x^4\cdot\cos(x)\right)' \quad b)\left(\sin(x)\cdot\ln(x)\right)' \quad c)\left(\mathrm{e}^x\cdot x^2\right)' \quad d)\left(5^x\cdot\frac{1}{x}\right)'$$

$$e)\frac{d\left(\ln(x)\cdot\sqrt{x}\right)}{dx} \quad f)\frac{d\left(3\cdot x^5\cdot 5^x\right)}{dx} \quad g)\frac{d\left(-2\cdot\cos(t)\cdot\sqrt{t}\right)}{dt} \quad h)\frac{d\left(t^6\cdot\ln(t)\right)}{dt}$$

Opgave 0542: Lad funktionen *f* være givet ved $f(x)=2x^6\cdot\mathrm{e}^x$. Bestem $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$

Opgave 0544: Undersøg, om $f: x\mapsto \mathrm{e}^x\cdot\cos(x)$ er en løsning til differentialligningen

$$y\cdot\left(1-\tan(x)\right)=y'$$

Opgave 0546: Udregn i hånden nedenstående differentialkvotienter. Tjek resultatet med Maple.

$$a)\ \left(4^x\cdot 3\sin(x)\right)' \quad b)\left(x^{3,5}\cdot 2\ln(x)\right)' \quad c)\left(-5\tan(x)\cdot x^3\right)' \quad d)\left(\sqrt{x}\cdot\mathrm{e}^x\right)'$$

$$e)\frac{d\left(y^3\cdot 3^y\right)}{dy} \quad f)\frac{d\left(\sin(t)\cdot\cos(t)\right)}{dt} \quad g)\frac{d\left(\sin^2(x)\right)}{dx} \quad h)\frac{d\left(\frac{1}{p}\cdot 2^p\right)}{dp}$$

Opgave 0548: Udregn i hånden nedenstående differentialkvotienter. Tjek resultatet med Maple.

$$a)\left(x^2\cdot\sin(x)\cdot 5^x\right)' \quad b)\left(\sin(x)\cdot\cos(x)\cdot\mathrm{e}^x\right)' \quad c)\left(x^5\cdot\frac{1}{x}\cdot x^{-2}\cdot\sqrt{x}\cdot x^{-1,5}\right)'$$

Opgave 0550: Udregn i hånden følgende integraler ved hjælp af partiel integration.

$$a)\int x\cdot\mathrm{e}^x dx \quad b)\int\cos(x)\cdot x\,dx \quad c)\int_1^4 x\cdot 2^x dx \quad d)\int x^2\cdot\sin(x)dx$$

Opgave 0552: Udregn i hånden følgende integraler ved hjælp af partiel integration.

$$a)\int 7x^6\cdot\ln(x)dx \quad b)\int\cos^2(x)dx \quad c)\int\sin(x)\cdot\cos(x)dx \quad d)\int 4\mathrm{e}^x\cdot x^3\,dx$$

Opgave 0554: Beregn følgende bestemte integraler i hånden og tjek med Maple:

$$a)\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\cdot x dx \qquad b)\ \int_1^2\ln(x)\cdot x^3 dx$$

Opgave 0560: Bestem følgende afledede funktioner i hånden.

$$a)\left(\frac{x^3}{\sin(x)}\right)' \quad b)\left(\frac{\ln(x)}{\cos(x)}\right)' \quad c)\left(\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}\right)' \quad d)\frac{d\left(\frac{\cos(x)}{4^x}\right)}{dx} \quad e)\frac{d\left(\frac{\mathrm{e}^t}{\sqrt{t}}\right)}{dt}$$

Opgave 0562: Undersøg, om $f: x\mapsto\frac{x^3}{\mathrm{e}^x}$ er en løsning til differentialligningen $\left(y+y'\right)\cdot\mathrm{e}^x=3x^2$.

Opgave 0564: Lad $g: y\mapsto\frac{y}{\sin(y)}$. Bestem $\left.\frac{dg}{dy}\right|_{y=-\frac{\pi}{2}}$ ved udregninger i hånden.

Opgave 0566: Bestem ved udregninger i hånden en ligning for tangenten til grafen for funktionen

$f: x\mapsto\frac{x^3}{\mathrm{e}^x}$ i punktet $P\left(1, f(1)\right)$.

Opgave 0568: Bestem følgende afledede funktioner i hånden og tjek med Maple.

$$a)\left(\frac{2x^3+x}{\ln(x)}\right)' \quad b)\left(\frac{\sqrt{x}}{5^x}\right)' \quad c)\left(\frac{x\cdot\sin(x)}{\mathrm{e}^x}\right)' \quad d)\frac{d\left(\frac{a^2\cdot 2^a}{\cos(a)}\right)}{da} \quad e)\frac{d\left(\frac{x^2\cdot\mathrm{e}^x}{\sin(x)\cdot\ln(x)}\right)}{dx}$$

Opgave 0570: Bestem følgende afledede funktioner i hånden:

$a)\left(\cos\left(x^3\right)\right)' \quad b)\left(\ln\left(x^4+x^2+1\right)\right)' \quad c)\dfrac{d\left(\mathrm{e}^{\cos(x)}\right)}{dx} \quad d)\dfrac{d\left(\dfrac{1}{\sin(x)}\right)}{dx} \quad e)\dfrac{d\left(x^2+3^x\right)^5}{dx}$

$f)\left(\sin^3(x)\right)' \quad g)\dfrac{d\left(\sqrt{3t^2+5t-4}\right)}{dt} \quad h)\dfrac{d\left(7^{\sin(y)}\right)}{dy} \quad i)\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)' \quad j)\dfrac{d\left(\dfrac{1}{s^3-5s^2+3s-4}\right)}{ds}$

Opgave 0572: Bestem for funktionen $f: x \mapsto \mathrm{e}^{x^2-4x+3}$ i hånden differentialkvotienten i 3.

Opgave 0574: Undersøg, om $g: x \mapsto \mathrm{e}^{\cos(x)}$ er en løsning til differentialligningen $y' + \sin(x)\cdot y = x$.

Opgave 0576: Bestem følgende afledede funktioner i hånden og tjek med Maple:

$a)\dfrac{d\left(\cos\left(\mathrm{e}^{x^3-x^2+5}\right)\right)}{dx} \quad b)\dfrac{d\left(\sin^4\left(\ln(a)\right)\right)}{da} \quad c)\left(\left(\dfrac{1}{x^3+4x-2}\right)^5\right)' \quad d)\left(\sqrt{\cos^2(x)}\right)'$

$e)\left(\dfrac{1}{\sqrt{\ln\left(\sin(x)+2\right)}}\right)' \quad f)\dfrac{d\left(x\cdot\cos\left(\mathrm{e}^x\right)\right)}{dx} \quad g)\dfrac{d\left(t\cdot\cos\left(\mathrm{e}^x\right)\right)}{dt} \quad h)\dfrac{d\left(\cos\left(\dfrac{1}{\ln\left(x^2+1\right)}\right)\right)}{dy}$

Opgave 0580: Bestem følgende integraler i hånden:

$a)\int -\ln(13)\cdot 13^x\cdot\sin\left(13^x\right)dx \quad b)\int \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\cdot dx \quad c)\int \cos(x)\cdot\sin^6(x)\,dx \quad d)\int\left(3x^2+10x+7\right)\cdot\mathrm{e}^{x^3+5x^2+7x-11}\,dx$

$e)\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} -\sin(x)\cdot\mathrm{e}^{\cos(x)}dx \quad f)\int_1^{\mathrm{e}}\dfrac{1}{x}\cdot\left(\ln(x)+1\right)^5dx \quad g)\int_{\pi^2}^{4\pi^2}\dfrac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}dx \quad h)\int_0^1 \mathrm{e}^x\cdot\sin\left(\mathrm{e}^x-1\right)dx$

Opgave 0581: Bestem følgende integraler i hånden:

$a)\int(2x+5)\cdot\cos\left(x^2+5x-7\right)dx \quad b)\int_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)}dx \quad c)\int 6\cdot\sin(x)\cdot\sqrt{\cos(x)+2}\,dx$

$d)\int_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\cos\left(\ln(x)\right)}{x}dx \quad e)\int\dfrac{8x+16}{x^2+4x+5}dx \quad f)\int_0^1(2x+3)\cdot\left(x^2+3x+2\right)^6dx$

Opgave 0582: Beregn følgende bestemte integraler i hånden og tjek med Maple. Tegn desuden graferne i de pågældende intervaller og tænk over fortolkningen af det bestemte integral:

$a)\int_0^3 4x\cdot\left(2x^2+5\right)^3dx \quad b)\int_1^2 3x^2\cdot\mathrm{e}^{x^3-8}dx \quad c)\int_{\pi}^{3\pi}\cos(x)\cdot\left(\sin(x)+8\right)^2dx$

$d)\int_{-3}^3\dfrac{4x}{x^2+5}dx \quad e)\int_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\sin\left(\ln(x)+2\right)}{x}dx$

Opgave 0584: Beregn følgende bestemte integral og tjek med Maple: $\int_0^{\pi}4\cdot\sin(x)\cdot\sqrt{\cos(x)}dx$

Muligvis kunne du finde et resultat, mens Maple ikke kan finde et pænt, reelt tal. Hvorfor går det galt? Og hvorfor har Maple "ret"?

Opgave 0586: Bestem følgende ubestemte integraler i hånden og tjek facit med Maple (Husk, at Maple ikke angiver integrationskonstanten c):

$a)\int 2x\cdot\mathrm{e}^{x^2+5}dx \quad b)\int(4x+3)\cdot\cos\left(2x^2+3x+5\right)dx \quad c)\int\dfrac{4\cdot\ln(x)}{x}dx$

$d)\int\dfrac{9x^2-6x+12}{x^3-x^2+4x+5}dx \quad e)\int 4\cdot\sin(x)\cdot\mathrm{e}^{\cos(x)+2}dx \quad f)\int 4^x\cdot\cos\left(4^x+2\right)dx$

$g)\int 4\cdot(5x+7)^6dx \quad h)\int\cos(x)\cdot\sin^3(x)\,dx \quad i)\int\cos^3(x)\,dx$

Opgave 0588: Beregn følgende bestemte integraler i hånden og tjek resultatet med Maple. Plot desuden grafen i det pågældende interval og tjek, at dit resultat giver mening:

$$a)\int_0^1 \left(x^3+3x^2-4x+2\right)dx \qquad b)\int_{\ln(5)}^{\ln(9)} 2\cdot e^x dx \qquad c)\int_e^{e^4} \frac{1}{x}dx \qquad d)\int_4^9 \left(\frac{5}{2\cdot\sqrt{t}}\right)dt$$

$$e)\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2(x)\,d\left(\cos(x)\right)$$ (Facit er $-\frac{1}{3}$. Denne notation kan Maple vist ikke anvende)

$$f)\int_0^2 \frac{5^x}{7}\cdot\cos\left(5^x\right)dx \qquad g)\int_1^e 7\cdot\frac{\left(\ln(w)\right)^4}{w}dw \qquad h)\int_0^{\pi} \cos^3(x)\,dx$$

Opgave 0589: Beregn følgende ubestemte integraler i hånden og tjek resultatet med Maple.

$$a)\int\left(4x^3-6x^2+x-5\right)dx \qquad b)\int\left(\frac{3}{x}-5\cdot e^{2x}\right)dx \qquad c)\int\left(4\cdot\sqrt{x}-3\cdot 5^x\right)dx$$

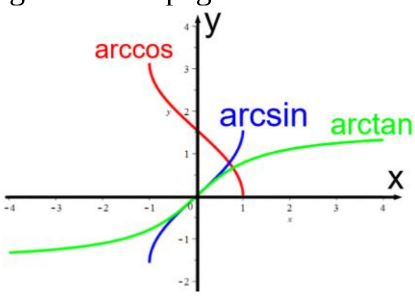
$$d)\int\left(\frac{6}{\sqrt{x}}+2\cdot\ln(3)\cdot 9^x\right)dx \qquad e)\int\left(\frac{e^{-4x}}{5}-2\cdot x^{\frac{3}{4}}\right)dx \qquad f)\int\left(2\cdot\sin(3x)-\frac{7}{x}\right)dx$$

$$g)\int\left(\frac{6}{x^5}+3\cdot\cos(4x)\right)dx \qquad h)\int\left(x^{-4,3}+2{,}1\cdot 0{,}5^x\right)dx \qquad i)\int\left(-\frac{\sin(-2\cdot x)}{5}+6\cdot e^{\frac{3x}{7}}\right)dx$$

Opgave 0590: 1) Bestem nedenstående differentialkvotienter i hånden.
2) Tjek facit med Maple ved opskrivningen:

$f(x) := \arccos(x)$:
$f'(0.5) = -1.154700538$

3) Tjek på nedenstående figur, at de udregnede differentialkvotienter passer med hældningerne af tangenterne de pågældende steder:



$$a)\left.\frac{d\left(\arcsin(x)\right)}{dx}\right|_{x=0} \qquad b)\left.\frac{d\left(\arccos(x)\right)}{dx}\right|_{x=0} \qquad c)\left.\frac{d\left(\arctan(x)\right)}{dx}\right|_{x=0}$$

$$d)\left.\frac{d\left(\arcsin(x)\right)}{dx}\right|_{x=\frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad e)\left.\frac{d\left(\arccos(x)\right)}{dx}\right|_{x=-\frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad f)\left.\frac{d\left(\arctan(x)\right)}{dx}\right|_{x=3}$$

$$g)\left.\frac{d\left(\arcsin(x)\right)}{dx}\right|_{x=-1} \qquad h)\left.\frac{d\left(\arccos(x)\right)}{dx}\right|_{x=1} \qquad i)\left.\frac{d\left(\arctan(x)\right)}{dx}\right|_{x=-7}$$

Opgave 0592: Benyt din viden om, at $\left(x^3\right)' = 3x^2$, til at vise, at $\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$.

Opgave 0594: Benyt din viden om differentiation af 7^x til at vise, at $\left(\log_7(x)\right)' = \frac{1}{\ln(7)\cdot x}$.

Opgave 0596: Gå den modsatte vej i de to ovenstående opgaver.

Opgave 0600: Funktionen $F: x \mapsto 4x^3 \cdot \sin(x) + 2$ er en stamfunktion til funktionen *f*.

Hvilke af følgende funktioner er også en stamfunktion til *f* ?

$F_1: x \mapsto 5x^3 \cdot \sin(x) + 2$ $\quad F_2: x \mapsto 4x^3 \cdot \sin(x) - 5$ $\quad F_3: x \mapsto 4x^3 \cdot \cos(x) + 2$

$F_4: x \mapsto 4x^3 \cdot \sin(x+1) + 2$ $\quad F_5: x \mapsto \pi + 4x^3 \cdot \sin(x)$ $\quad F_6: x \mapsto 7 - 4x^3 \cdot \sin(x)$

$F_7: x \mapsto 1 - 4x^3 \cdot \sin(-x)$ $\quad F_8: x \mapsto 4x^3 \cdot \sin(x)$ $\quad F_9: x \mapsto \mathrm{e}^x \cdot \sqrt{x}$

Opgave 0610: Bestem til $f: x \mapsto 6x + 5$ den stamfunktion *F*, hvis graf går gennem $P(2, -5)$.

Opgave 0612: Bestem til $f: x \mapsto \mathrm{e}^x + 8x - 1$ den stamfunktion *F*, hvis graf går gennem $P(0, 9)$.

Opgave 0614: Bestem til $f: x \mapsto \cos(x) + \sin(x)$ den stamfunktion *F*, hvis graf går gennem $P(\pi, 2)$

Opgave 0616: Bestem til $f: x \mapsto x \cdot \mathrm{e}^x$ den stamfunktion *F*, hvis graf går gennem $P(0, 4)$.

Opgave 0618: Bestem til $f: x \mapsto \dfrac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{2 \cdot \sqrt{x}}$ den stamfunktion *F*, hvis graf går gennem $P\left(\dfrac{\pi^2}{4}, 9\right)$.

Opgave 0620: Bestem ved eksakte udregninger i hånden en ligning for tangenten til grafen for funktionen *f* givet ved forskriften $f(x) = 2 \cdot \ln(x) + 5x$ i punktet $(1, f(1))$.

Opgave 0622: Bestem ved eksakte udregninger i hånden arealet af den punktmængde *M*, der afgrænses af grafen for $f: x \mapsto \mathrm{e}^x$, førsteaksen og linjerne med ligningerne $x = 1$ og $x = 4$.

Opgave 0624:Undersøg, om $f: x \mapsto \ln(x)$ er en løsning til differentialligningen $y' \cdot x - y = \ln(y') + 1$

Opgave 0626: Bestem til $f: x \mapsto \mathrm{e}^x + 9$ den stamfunktion *F*, hvis graf går gennem $P(2, 5)$.

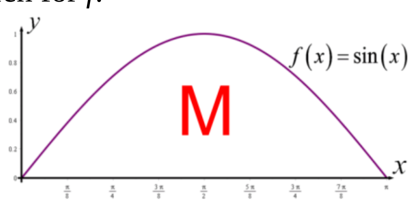
Opgave 0628: Bestem ved eksakte udregninger i hånden en ligning for tangenten til grafen for $f: x \mapsto 7^x$ i punktet $(2, f(2))$.

Opgave 0630: Vi ser på funktionen $f: x \mapsto \dfrac{1}{x}$ og den punktmængde *M*, der afgrænses af grafen for *f*, førsteaksen og linjen med ligningen $x = 1$. Da grafen aldrig skærer *x*-aksen, er *M* ikke begrænset mod højre. Bestem i de følgende opgaver en værdi for den søgte størrelse eller afgør, at størrelsen er uendelig stor:

a) Arealet af *M*.
b) Overfladearealet af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når *M* drejes 360° omkring førsteaksen.
c) Rumfanget af ovennævnte omdrejningslegeme.

Opgave 0632: Undersøg, om funktionen *f* med forskriften $f(x) = x^3 + 4x$ er en løsning til differentialligningen: $y' \cdot x + 8 = 3 \cdot y$

Opgave 0640: Nedenfor ses grafen for funktionen $f: x \mapsto \sin(x)$. Punktmængden *M* afgrænses af førsteaksen og grafen for *f*.



a) Bestem arealet af *M*.
b) Bestem omkredsen af *M*.
c) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når *M* drejes 360° omkring førsteaksen.
d) Bestem overfladearealet af ovenstående omdrejningslegeme.
e) Bestem *f* 's gennemsnitsværdi i intervallet $[0, \pi]$.

Opgave 0650: Bestem middelværdien for $f: x \mapsto \cos(x)$ i følgende intervaller:

$$a)\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \qquad b)[0,2\pi] \qquad c)[0,30\pi]$$

Opgave 0652: Bestem middelværdien for $f: x \mapsto x^3 - 4x^2 - 3x + 7$ i intervallet $[-3,8]$.

Opgave 0654: Find i 0650 a) og 0652 alle de steder i det pågældende interval, hvor funktionerne antager deres middelværdi.

Opgave 0656: Bestem i hånden differentialkvotienterne for følgende funktioner og tjek resultatet med Maple: $a)\, x^{\cos(x)}$ $\quad b)\, x^{\ln(x)}$ $\quad c)\, \sin(x^x)$ $\quad d)\, e^{x^x}$

Opgave 0700: Bestem ved udregninger i hånden, om $f: x \mapsto \sin(x) + x$ er voksende, aftagende eller ingen af delene.

Opgave 0702: Bestem ved udregninger i hånden, om $f: x \mapsto e^{-x} \cdot x^3$ er voksende, aftagende eller ingen af delene.

Opgave 0704: En funktion *f* er løsning til differentialligningen $y' \cdot \sqrt{y} + \frac{1}{x^2} = 0 \quad , \quad x > 0$.

Er *f* voksende, aftagende eller ingen af delene?

Opgave 0706: Bestem ved udregninger i hånden, om $f: x \mapsto \ln(4^{-x} + 2)$ er voksende, aftagende eller ingen af delene.

Opgave 0708: En funktion *f* er løsning til differentialligningen $\frac{dy}{dx} - \sqrt{x} \cdot e^{-y} = 0$.

Er *f* voksende, aftagende eller ingen af delene?

Opgave 0710: Bestem ved hjælp af fortegnsskemaer monotoniforhold og lokale ekstremumssteder for nedenstående funktioner. Når du tjekker facit, er det vigtigt, at du også lægger mærke til, om dit fortegnsskema er identisk med facitlistens. Dvs. der må hverken være angivet mere eller mindre.

$a)\, f: x \mapsto -2x^3 + 9x^2 + 60x - 7$ (Regnes i hånden)

$b)\, g: x \mapsto 12x^5 + 135x^4 + 440x^3 - 1920x + 219$ (Regnes med Maple)

$c)\, h: x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x-4} \cdot \cos(x) + 0{,}4 \cdot x$ (Regnes med Maple)

Opgave 0720: Bestem ved hjælp af differentialregning koordinatsættene til parablernes toppunkter og tjek med Maples *maximize* eller *minimize* (afhængig af fortegnet på *a*-værdien):

$a)\, y = 3x^2 - 6x + 8 \quad b)\, f: x \mapsto -x^2 + 2x - 3 \quad c)\, g(x) = -3x^2 + 5 \quad d)\, y = 5x^2 + 4x$

Opgave 0730: Bestem værdimængderne for følgende funktioner ud fra de angivne fortegnsskemaer, funktionsværdier og beskrivelser af grænseovergange:

a)

x		7		15	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

$f(x) \to 3$ for $x \to -\infty$ $\quad f(7) = 9$

$f(x) \to -2$ for $x \to \infty$ $\quad f(15) = -6$

b)

x		-4		0		3	
$g'(x)$	+	0	-	i.d	-	0	+
$g(x)$	↗		↘		↘		↗

$g(x) \to 0$ for $x \to -\infty$

$g(x) \to \infty$ for $x \to \infty$ $\quad g(-4) = 2$

$g(x) \to -\infty$ for $x \to 0_-$ $\quad g(3) = 8$

$g(x) \to \infty$ for $x \to 0_+$

c)

x	0		2		4		6		8	
$h'(x)$		+	0	-	i.d	-	0	+	i.d	+
$h(x)$		↗		↘	i.d	↘		↗	i.d	↗

$h(x) \to 6$ for $x \to 4_-$

$h(x) \to \infty$ for $x \to 4_+$ $\quad h(0) = 3$

$h(x) \to \infty$ for $x \to 8_-$ $\quad h(2) = 9$

$h(x) \to -\infty$ for $x \to 8_+$ $\quad h(6) = 21$

$h(x) \to -4$ for $x \to \infty$

Opgave 0740: Angiv monotoniforholdene for de funktioner, der er løsninger til de pågældende differentialligninger.

$$a)\ y'\cdot e^{y} = x^2+5x+4 \qquad b)\ \left(\sin(y)-2\right)\cdot\frac{dy}{dx} = e^{x}-1 \qquad c)\ \frac{dy}{dx} = \frac{x+2}{y^2+2}$$

Opgave 0750: Bestem de steder, hvor graferne for følgende funktioner har vendetangenter.

$a)\ f: x \mapsto x^3-4x^2+3x-2 \qquad b)\ g: x \mapsto x^4-x^3-2x^2+5x+2$

$c)\ h: x \mapsto \dfrac{100}{1+15\cdot e^{-0{,}02\cdot x}} \qquad d)\ p: x \mapsto x^2+5x-9 \qquad e)\ q: x \mapsto 5x-2$

Opgave 0752: Bestem den mindste væksthastighed for $f: x \mapsto \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 - 5x^3 + \frac{19}{2}x^2 + 30x + 4$.

Opgave 0760: Bestem monotoniforholdene for følgende funktioner ved at anvende metoden med afledede af højere orden (bortset fra spørgsmål 'e', hvor der skal mere til):

$a)\ f_1: x \mapsto 2x^3-9x^2-168x-5 \qquad b)\ f_2: x \mapsto 3x^4+16x^3-90x^2-216x+3$

$c)\ f_3: x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{e^{x-5}} \qquad d)\ f_4: x \mapsto \dfrac{x^2}{9}+\sin(x) \qquad e)\ f_5: x \mapsto \dfrac{1}{x+4}+\dfrac{1}{x-3}$

Opgave 0770: Bestem det sted, hvor grafen for $f: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x + 5$ har vendetangent.

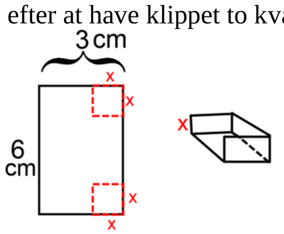
Opgave 0772: Bestem den maksimale væksthastighed for $f: x \mapsto -x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + 7$.

Opgave 0774: Bestem en ligning for vendetangenten for grafen for $f: x \mapsto \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 4$.

Opgave 0776: Angiv det mulige antal vendetangenter for graferne for følgende funktionstyper:

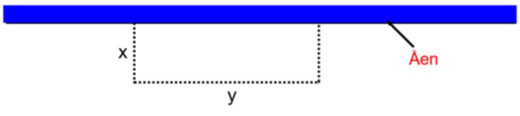
a) Eksponentialfunktioner b) Logaritmefunktioner c) 4. gradspolynomier
d) 5. gradspolynomier. e) 6. gradspolynomier f) 7. gradspolynomier.
g) Sinusfunktionen h) Konstantfunktioner.

Opgave 0780: En lillebitte beholder til et ret lille viskelæder skal konstrueres af et lillebitte stykke pap (3 cm x 6 cm). Den skal stilles op ad en væg og har derfor kun brug for 3 sider (væggen udgør den fjerde side). Den kan derfor foldes efter at have klippet to kvadratiske hjørner med sidelængden x af papstykket som vist på figuren.

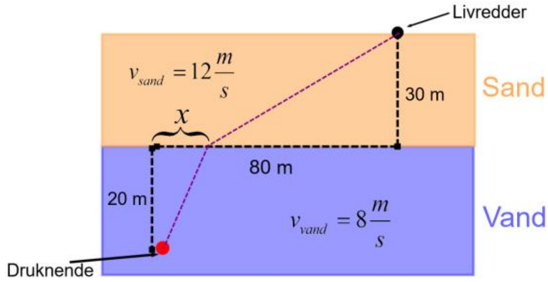


a) Angiv et udtryk for rumfanget V af beholderen som funktion af x.
b) Bestem den værdi for x, der giver det størst mulige rumfang.

Opgave 0782: En landmand har 120 m trådhegn til rådighed til at lave en rektangulær indhegning op mod en å. Hvad er det størst mulige areal af indhegningen?



Opgave 0784: En ikke alt for god svømmer er kommet for langt ud på havet (20 m fra strandkanten) og er ved at drukne. En livredder skal redde personen. Livredderen befinder sig 30 m fra strandkanten, og langs strandkanten er der 80 m hen til det stedet lige ud for den druknede. Det er tungt sand, så livredderen kan kun løbe med farten $12\frac{\text{m}}{\text{s}}$ på sandet, men svømmer med farten $8\frac{\text{m}}{\text{s}}$.



Den stiplede violette bane på figuren angiver livredderens rute. Hvad skal x være for at gøre ruten hurtigst mulig?

Opgave 0800: Lad $f: x \mapsto \cos(x)$. Bestem det 8. taylorpolynomium med udviklingspunkt $\frac{\pi}{2}$.

Opgave 0802: Lad $f: x \mapsto \frac{1}{x}$. Bestem det 6. taylorpolynomium med udviklingspunkt 1.

Opgave 0804: Tegn graferne for taylorpolynomierne sammen med graferne for funktionerne i opgaverne 0800 og 0802. Prøv at udvide med flere led og se, om man i begge opgaver kan få noget ud af at fortsætte med flere led.

Opgave 0810: Bestem ved at udvikle omkring 0 den taylorrække, der svarer til $x \mapsto \cos(x)$.

Opgave 0812: Differentiér rækken fra 0810 ved ledvis differentiation og differentiér taylorrækken svarende til $x \mapsto \sin(x)$. Stemmer det med vores viden?

Opgave 0814: Differentiér taylorrækken svarende til $x \mapsto \mathrm{e}^x$. Stemmer det med vores viden?

Opgave 1000: Bestem ved udregninger i hånden den fuldstændige løsning til differentialligningen $y' = \cos(x)$ samt den partikulære løsning, hvis graf går gennem punktet $P\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$.

Tjek dine resultater med Maple.

Opgave 1002: Bestem ved udregninger i hånden den fuldstændige løsning til differentialligningen $\frac{dy}{dx} - x^2 = 0$ samt den partikulære løsning, hvis graf går gennem punktet $P(6, 27)$.

Tjek dine resultater med Maple.

Opgave 1004: Bestem ved udregninger i hånden den fuldstændige løsning til differentialligningen $x \cdot \frac{dy}{dx} = 1 \;;\; x > 0$ samt den partikulære løsning, hvis graf går gennem punktet $P(\mathrm{e}, 5)$.

Tjek dine resultater med Maple.

Opgave 1006: Undersøg, om $f: x \mapsto \frac{x}{\mathrm{e}^x} + 7$ er en løsning til differentialligningen $\mathrm{e}^x \cdot y' = 1 - x$.

Opgave 1010: Find de partikulære løsninger til nedenstående differentialligninger, hvis grafer går gennem de angivne punkter (benyt løsningsformlen). Tjek resultatet med Maple.

$a)\;\; y' = 3 \cdot y \quad ; \quad P(0, 7)$

$b)\;\; \frac{dy}{dx} = 5 \cdot y \quad ; \quad P(0, -4)$

$c)\;\; f'(x) = -2 \cdot f(x) \quad ; \quad P(2, 6)$

$d)\;\; y' = y \quad ; \quad P(3, 8 \cdot \mathrm{e}^3)$

Opgave 1012: Antallet N af C-14-kerner som funktion af tiden t målt i år er en løsning til differentialligningen:

$$-\frac{dN}{dt} = 0{,}000121 \cdot N$$

Det oplyses, at $N(2400) = 736$.

a) Bestem $N(0)$.

b) Bestem det tidspunkt, hvor der er 20 kerner tilbage.

Opgave 1020: Bestem i hånden den fuldstændige løsning til følgende differentialligninger (tjek med Maple):

$a)\; \frac{dy}{dx} = 6 - 2 \cdot y$	$b)\; \frac{dy}{dx} = 12 + 4 \cdot y$	$c)\; y' = 1 - 3 \cdot y$
$d)\; f'(x) = 1 + f(x)$	$e)\; y' + 3 = 2 \cdot y$	$f)\; \frac{dy}{dx} + 5y = 4$

Opgave 1022: Bestem til følgende differentialligninger i hånden den partikulære løsning, hvis løsningskurve går igennem det angivne punkt. Tjek resultatet med Maple.

$a)\; y'+6y=24\;;\; P(0,5)$ $b)\; \frac{dy}{dx}+y=9\;;\; Q(0,7)$

$c)\; 2\cdot y'=28-4y\;;\; R(3,7)$ $d)\; 5\cdot f'(x)-5\cdot f(x)=1\;;\; S\left(1, 2\cdot \mathrm{e}-\frac{1}{5}\right)$

Opgave 1024: Et glas vand med temperaturen 80°C placeres i et rum med temperaturen 20°C. Efter 30 minutter er vandets temperatur 29°C. Bestem proportionalitetskonstanten *k* i Newtons afkølingslov, når temperaturen regnes i °C og tiden i minutter.

Opgave 1026: Hastigheden *v* af et fnug, der falder mod jorden, er som funktion af tiden *t* målt i sekunder efter faldets begyndelse en løsning til differentialligningen

$$\frac{dv}{dt}+250\cdot v=9.82$$

Faldets længde måles i meter.

a) Bestem $v'(t)$, når $v(t)=0{,}02$ og fortolk resultatet.

b) Bestem $v(t)$, når det oplyses, at fnuggets begyndelseshastighed er 0.

Opgave 1030: Bestem i hånden til følgende differentialligninger den partikulære løsning, hvis løsningskurve indeholder det angivne punkt. Tjek med Maple.

$a)\; \frac{dy}{dx}+y=\mathrm{e}^x \;;\; P(0,1)$

$b)\; y'-3x^2\cdot y=\mathrm{e}^{x^3} \;;\; Q(0,5)$

$c)\; y'=3x-\frac{6}{x}\cdot y\;,\; x>0 \;;\; R(1,1)$

$d)\; \frac{dy}{dx}+(4x+6)\cdot y=-2x-3 \;;\; S(-3,0)$

Opgave 1040: Bestem det andengradspolynomium, der er en løsning til differentialligningen:

$$2x\cdot\frac{dy}{dx}-3y=x^2+4x-6$$

Opgave 1042: Bestem i hånden den fuldstændige løsning til følgende differentialligninger ved først at bestemme det polynomium, der er en partikulær løsning. Tjek med Maple.

$a)\; \frac{dy}{dx}-y=-3x^2+5x+3$ $b)\; y'+2xy=2x^3-6x^2+10x-3$ $c)\; y'+y=2x^2$

Opgave 1050: Bestem h og g i nedenstående differentialligninger på formen $\frac{dy}{dx}=h(x)\cdot g(y)$:

$a)\; y'=x^3\cdot\mathrm{e}^y$ $b)\; y'=\frac{\cos(y)}{x^2}$ $c)\; \frac{dy}{dx}\cdot y=\mathrm{e}^{x^2+3}$ $d)\; x\cdot y'=y^2$ $e)\; y'=y^4$

Opgave 1052: Angiv i hvert af nedenstående tilfælde, om man kan benytte metoden *Separation af de variable*, og skriv i bekræftende fald, hvad *h* og *g* er (konstanter kan placeres både i *h* og *g*, så *h* og *g* er ikke entydige).

$a)\; y'=2xy$ $b)\; \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+1}$ $c)\; y'=3y+2x$ $d)\; \frac{dy}{dx}=4y(5-x)$ $e)\; 3y\cdot y'=\frac{1}{x}$

$f)\; y'=\mathrm{e}^{x+y}$ $g)\; \frac{dy}{dx}=\frac{\sin(x)}{y\cdot x}$ $h)\; y'=y^2+3x+4xy$ $i)\; \frac{dy}{dx}=xy+x+2+2y$ $j)\; y+y'=x$

Opgave 1060: Bestem i hånden til den angivne differentialligning den partikulære løsning, hvis løsningskurve går gennem det angivne punkt:

$a)\ y' = \dfrac{\cos(x)}{y}, y \neq 0\ ,\ P(\pi,2)$ $\qquad$ $b)\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{16x}{y}\ ,\ y \neq 0,\ P(0,1)$

$c)\ y \cdot \dfrac{dy}{dx} = x+2\ ,\ P(2,-2)$ $\qquad$ $d)\ y' = -\sqrt{y}\ ,\ y \in [0,\infty[,\ P(2,4)$

$e)\ y' = (x+1)\cdot(y-1)\ ,\ P(1,2)$ $\qquad$ $g)\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+1}{x}\cdot y\ ,\ P(1,1)$

Opgave 1070: I en dyrebestand opfylder antallet af individer *N* som funktion *t* målt i uger differentialligningen: $\dfrac{dN}{dt} = 6{,}0 \cdot 10^{-6} \cdot N \cdot (10000 - N)$

a) Hvad er den øvre grænse for antallet af individer i bestanden?
b) Hvor mange individer er der i bestanden på det tidspunkt, hvor væksthastigheden er størst?
c) Hvad er den største væksthastighed, der opnås?

Opgave 1072: Antallet *N* af præriehunde i zoo's bestand af sorthalede præriehunde er en løsning til differentialligningen: $\dfrac{dN}{dt} = 0{,}0005 \cdot N(t) \cdot (600 - N(t))\quad ;\ t \geq 0$

Tiden *t* er angivet i antal år efter 1980, og i 1985 var der 50 præriehunde i bestanden.

a) Hvad er bestandens væksthastighed, når der er 100 præriehunde i bestanden?
b) Forklar, hvad tallet 600 i modellen fortæller om bestanden, og bestem, hvor mange præriehunde, der er i bestanden, når væksthastigheden er størst.
c) Bestem forskriften $N(t)$ for den funktion *N*, der beskriver bestanden, og bestem det årstal, hvor væksthastigheden for bestanden er størst.

Opgave 1074: I et forsøg lukkes nogle californiske glathovedfisk (*Alepocephalus tenebrosus*) ud i et bassin med konstant tilførsel af fiskefoder. Det viser sig, at den hastighed, hvormed antallet *A* af fisk vokser til tidspunktet *t* er proportional med produktet af antallet af fisk til tiden t og forskellen mellem 750 og antallet af fisk til tiden *t*.
Det viser sig, at væksthastigheden er 30, når antallet af individer er 250.

a) Opskriv en differentialligning, som antallet af individer *A* må opfylde.

Opgave 1090: En funktion *f* er løsning til differentialligningen $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-1}{\sqrt{x^2+5}}$, og punktet $P(2,7)$ ligger på grafen for *f*. Bestem en ligning for tangenten til grafen for *f* i punktet *P*.

Opgave 1091: Om antallet *N* af daglig besøgende til en særudstilling på et museum som funktion af tiden *t* målt i døgn fra åbningsdagen oplyses det, at væksthastigheden for antallet af besøgende er proportional med produktet af kvadratroden af tiden og differensen mellem 5000 og antallet af besøgende. Proportionalitetsfaktoren er 0,05.
Opstil den differentialligning, som antallet af daglig besøgende er en løsning til.

Opgave 1092: På en meget lille planet kastes en bold op i luften, og højden *h* af boldens position over planetoverfladen målt i meter kan som funktion af tiden *t* målt i sekunder efter, at bolden slippes, beskrives ved differentialligningen

$$h'(t) = 0{,}06 \cdot \sqrt{20 - h(t)}\ ;\ t \geq 0$$

Det oplyses, at højden, når bolden slippes, er 4 meter over planetoverfladen.

a) Bestem $h(t)$.
b) Bestem, hvornår bolden rammer planetoverfladen.

Opgave 1093: Den russiske sø Ladoga er rig på fisk – specielt fisk i laksefamilien (*Salmonidae*). Lystfiskerne på søen skal passe på ikke blive for længe på vandet, så de har godt styr på dagslængden, der (målt i timer) kan beskrives ved modellen

$f(t) = 6,59 \cdot \sin(0,0167 \cdot t - 1,295) + 12,2 \quad ; \quad 0 \le t \le 365$,

hvor *t* er tiden målt i døgn efter 1. januar.

a) Benyt modellen til at bestemme dagslængden ved Ladoga-søen til t = 150.

b) Bestem $f'(200)$ og redegør for, hvad dette tal fortæller.

Opgave 1094: En adfærdsbiolog har forsøgt at anvende differentialligningen $\frac{dy}{dx} = 2y - 4x + 5$ til at beskrive adfærden hos en sekstakket savkirurgfisk (*Prionurus microlepidotus*).

Undersøg om funktionen *f* bestemt ved $f(x) = e^{2x} + 3x - 1$ er en løsning til differentialligningen.

Opgave 1095: Spændingsfaldet *U* (målt i volt) over en elektrisk pære er som funktion af tiden *t* (angivet i ms) givet ved forskriften:

$$U(t) = 240 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{10} \cdot t - 0,5\right) \quad ; \quad 0 \le t < 20$$

a) Bestem $U'(7)$ og fortolk resultatet.

b) Angiv det tidsrum, hvor spændingsfaldet aftager.

c) Angiv det tidspunkt, hvor spændingsfaldet vokser hurtigst.

Opgave 1100: Udregn Wroński-determinanten $W(f,g)$ for følgende par af funktioner:

$a)\ f: x \mapsto x^2,\ g: x \mapsto \sin(x)$ $b)\ f: x \mapsto \sin(x),\ g: x \mapsto \cos(x)$ $c)\ f: x \mapsto e^{k \cdot x},\ g: x \mapsto e^{-k \cdot x}$

$d)\ f: x \mapsto 4x^3,\ g: x \mapsto x^3$ $e)\ f: x \mapsto \cos(x),\ g: x \mapsto e^x$ $h)\ f: x \mapsto \cos(k \cdot x),\ g: x \mapsto \sin(k \cdot x)$

$i)\ f: x \mapsto \sin(x),\ g: x \mapsto k \cdot \sin(x)$ $j)\ f: x \mapsto e^{2 \cdot x},\ g: x \mapsto e^{-3 \cdot x}$ $k)\ f: x \mapsto 8x,\ g: x \mapsto 11x$

Opgave 1110: Bestem i hånden den partikulære løsning til differentialligningen $y'' = -16 \cdot y$, hvis løsningskurve indeholder punkterne $\left(\frac{\pi}{8}, 2\right)$ og $\left(\frac{\pi}{4}, -7\right)$. Tjek med Maple.

Opgave 1112: Bestem i hånden den partikulære løsning til differentialligningen $y'' - 64y = 0$, der indeholder linjeelementet $(0,5; -24)$. Tjek med Maple.

Opgave 1114: Bestem i hånden den partikulære løsning til differentialligningen $y'' = 0$, hvis løsningskurve indeholder punkterne $(2,7)$ og $(9,28)$. Tjek med Maple.

Opgave 1116: Prøv i hånden at bestemme den partikulære løsning til differentialligningen $y'' + 9y = 0$, der går gennem punkterne $\left(\frac{\pi}{6}, -4\right)$ og $\left(\frac{\pi}{2}, 7\right)$. Hvad går galt? Hvad siger Maple? Hvorfor går det galt?

Opgave 1120: Omskriv udtrykket $4 \cdot \sin(2 \cdot x) - 3 \cdot \cos(2 \cdot x)$ til formen $A \cdot \sin(k \cdot x + \varphi)$. Tjek med Maple ved at plotte graferne oven i hinanden.

Opgave 1122: Omskriv udtrykket $-15 \cdot \sin(3 \cdot x) - 8 \cdot \cos(3 \cdot x)$ til formen $A \cdot \sin(k \cdot x + \varphi)$. Tjek med Maple ved at plotte graferne oven i hinanden.

Opgave 1124: Omskriv udtrykket $-7 \cdot \cos(6 \cdot x)$ til formen $A \cdot \sin(k \cdot x + \varphi)$. Tjek med Maple ved at plotte graferne oven i hinanden.

Opgave 1126: Bestem amplituden for den løsning til differentialligningen $y'' = -81 \cdot y$, hvis løsningskurve indeholder punkterne $\left(\frac{\pi}{5}, 3\right)$ og $\left(\frac{3\pi}{7}, -2\right)$.

Opgave 1130: Bestem den fuldstændige løsning til følgende differentialligninger (tjek med Maple):

$a)\ y''+4\cdot y'-21\cdot y=0 \qquad b)\ y''-6\cdot y'+9\cdot y=0$

$c)\ y''-4\cdot y'+20\cdot y=0 \qquad d)\ \dfrac{d^2y}{dx^2}-9\cdot\dfrac{dy}{dx}+20\cdot y=0$

$e)\ f''(x)+6\cdot f'(x)+10\cdot f(x)=0 \qquad f)\ 2\cdot y''+20\cdot y'+50\cdot y=0$

Opgave 1132: Bestem til nedenstående differentialligninger de partikulære løsninger, der går gennem de angivne punkter (tjek med Maple):

$a)\ y''-8\cdot y'+65\cdot y=0 \qquad P_1(0,9)\text{ og } P_2\left(\dfrac{\pi}{14},-2\right)$

$b)\ y''-2\cdot y'+1\cdot y=0 \qquad P_1(0,4)\text{ og } P_2(1,3)$

$c)\ y''+8\cdot y'+12\cdot y=0 \qquad P_1(0,6)\text{ og } P_2\left(-\dfrac{1}{2},3\right)$

Opgave 1160: Se på den partikulære løsning *f* til differentialligningen $\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2$, hvis løsningskurve indeholder punktet $(0,1)$. Den kan vi ikke løse analytisk (prøv at se Maples løsning!). Vi ønsker at finde en tilnærmet værdi til $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Bestem denne værdi med nedenstående metoder og skridtlængder:

Euler: a) $\Delta x=0{,}1$ b) $\Delta x=0{,}01$ c) $\Delta x=0{,}001$ Heun: d) $\Delta x=0{,}1$ e) $\Delta x=0{,}01$ f) $\Delta x=0{,}001$

Opgave 1162: Svar på samme spørgsmål som i 1160, men denne gang for den partikulære løsning til differentialligningen $\dfrac{dy}{dx}=\sin(x)+\sqrt{y^2+3}$, hvis løsningskurve indeholder $(-2,5)$.

Opgave 1170: Se på den partikulære løsning *f* til differentialligningen $\dfrac{dy}{dx}=x^2-y^2$, hvis løsningskurve indeholder punktet $(-3,4)$. Den kan vi ikke løse. Vi ønsker at finde en tilnærmet værdi til $f(5)$. Bestem denne værdi med RK4 med skridtlængderne:

$a)\ \Delta x=0{,}1 \qquad b)\ \Delta x=0{,}01 \qquad c)\ \Delta x=0{,}001$

Opgave 1180: Følgende funktioner er givet: $f:(x,y)\mapsto 3\cdot\dfrac{x}{y}$ og $g:(x,y,z)\mapsto 2\cdot x-3\cdot y+4\cdot z+7$

Bestem i hånden $f(7,6)$, $f(-2,9)$, $g(1,2,3)$ og $g(-4,0,5)$ og tjek resultatet med Maple ved først at definere funktionen og bagefter skrive $f(7,6)$, $f(-2,9)$, $g(1,2,3)$ og $g(-4,0,5)$.

Opgave 1182: Lad $f:(x,y,z)\mapsto\dfrac{\sin(x)-\cos(y)}{e^z}$. Bestem tre punkter uden gengangere af et argument, hvor funktionsværdierne er ens. Tjek ved indtastning i Maple.

Opgave 1190: Se på funktionen $f:(x,y)\mapsto x^2+y^2+7$. Tegn grafen med *plot3d*.

a) Angiv en ligning for niveaukurven bestemt ved $f(x,y)=16$ og sæt ord på det geometriske sted.
b) Angiv en ligning for snitkurven med planen givet ved ligningen $x=5$ og sæt ord på det geometriske sted.
c) Angiv en ligning for snitkurven med planen givet ved ligningen $y=-4$ og sæt ord på det geometriske sted.
d) Angiv en ligning for niveaukurven bestemt ved $f(x,y)=7$ og sæt ord på det geometriske sted.

Opgave 1192: Se på funktionen $f:(x,y)\mapsto \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+5$. Tegn grafen med *plot3d*.

a) Angiv en ligning for niveaukurven bestemt ved $f(x,y)=6$ og sæt ord på det geometriske sted.

b) Angiv en ligning for snitkurven med planen givet ved ligningen $x=9$ og sæt ord på det geometriske sted.

c) Angiv en ligning for snitkurven med planen givet ved ligningen $y=-2$ og sæt ord på det geometriske sted.

d) Angiv en ligning for niveaukurven bestemt ved $f(x,y)=0$ og sæt ord på det geometriske sted.

Opgave 1194: Se på funktionen $f:(x,y)\mapsto y^3-x^3$. Tegn grafen med *plot3d*.

a) Angiv en ligning for niveaukurven bestemt ved $f(x,y)=0$ og sæt ord på det geometriske sted.

b) Angiv en ligning for snitkurven med planen givet ved ligningen $x=1$.

Opgave 1196: Se på funktionen $f:(x,y)\mapsto \frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}+x\cdot y$. Tegn grafen med *plot3d*.

a) Angiv en ligning for niveaukurven bestemt ved $f(x,y)=13$.

b) Angiv en ligning for snitkurven med planen givet ved ligningen $x=-4$ og sæt ord på det geometriske sted.

c) Angiv en ligning for snitkurven med planen givet ved ligningen $y=3$ og sæt ord på det geometriske sted.

Opgave 1200: Bestem $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ for funktionerne givet ved nedenstående forskrifter.

a) $f(x,y)=x^3+y^2$ b) $f(x,y)=5\cdot\sin(x)+6\cdot\ln(y)$ c) $f(x,y)=5x^2+x+4y^3-2y+5$

d) $f(x,y)=x^3\cdot y^2$ e) $f(x,y)=5\cdot\sin(x)\cdot\ln(y)$ g) $f(x,y)=8\cdot e^x+4$

h) $f(x,y)=e^x\cdot e^y$ i) $f(x,y)=4x^2-3xy+5y^2$ j) $f(x,y)=6x^3+4x^2y-xy^2+2y^3$

k) $f(x,y)=x^y$ l) $f(x,y)=x\cdot\cos(y)$ m) $f(x,y)=x^5\cdot 5^y$

Opgave 1201: En funktion *f* er givet ved $f(x,y,z)=5\cdot\ln(z)\cdot e^{3x}\cdot y^4$.

a) Bestem $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ og $\frac{\partial f}{\partial z}$ i hånden. Tjek både med facitlisten og med Maple-indtastning.

b) Udregn $f_x'(0,2,e)$ og $f_y'(0,2,e)$ i hånden.

c) Udregn $f_x'(0,2,e)$ og $f_y'(0,2,e)$ med 'Evaluate at a Point'. 'e' skrives som 'exp(1)'

Opgave 1202: a) Bestem $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ og $\frac{\partial f}{\partial z}$ for funktionen *f* givet ved $f(x,y,z)=x^2\cdot z+y\cdot z+z^3-x$.

b) Udregn $f_x'(3,17,-2)$, $f_y'(-12,6,58)$ og $f_z'(3,-5,2)$ i hånden.

c) Udregn $f_x'(3,17,-2)$, $f_y'(-12,6,58)$ og $f_z'(3,-5,2)$ med 'Evaluate at a Point'.

Opgave 1203: Bestem for funktionen $g:(x,y)\mapsto \sin(x^2\cdot y)$ de partielt afledede $\frac{\partial g}{\partial x}$ og $\frac{\partial g}{\partial y}$.

Opgave 1204: Bestem $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ og $\frac{\partial f}{\partial z}$ for funktionen *f* givet ved $f(x,y,z)=e^{x\cdot y}+z\cdot\ln(x)-5xyz$.

Opgave 1205: En funktion *f* er givet ved forskriften $f(x,y,z)=z\cdot x^y$. Bestem $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ og $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Opgave 1206: Bestem $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ for følgende funktioner af to variable:

$a)\ f:(x,y)\mapsto 7\cdot x\cdot\cos(5y)$ $\quad b)\ f:(x,y)\mapsto e^{5x}\cdot y^3$ $\quad c)\ f:(x,y)\mapsto \frac{x}{y}$

$d)\ f:(x,y)\mapsto y^{2x+5}$ $\quad e)\ f:(x,y)\mapsto\sqrt{\frac{6y}{x}}$ $\quad g)\ f:(x,y)\mapsto x^y\cdot y$ $\quad h)\ f:(x,y)\mapsto(2x+5)^y$

Opgave 1207: Bestem de partielle afledede $\frac{\partial}{\partial x}$ og $\frac{\partial}{\partial y}$ for funktionerne $f:(x,y)\mapsto\cos(x)\cdot y^3$,

$g:(x,y)\mapsto y\cdot x$, $h:(x,y)\mapsto\frac{y}{x}$ og $p:(x,y)\mapsto x^2+3\cdot x\cdot y-4y-y^2$. Tjek med Maple.

Opgave 1208: Bestem de partielle afledede $\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}$ og $\frac{\partial}{\partial z}$ for funktionerne $f:(x,y,z)\mapsto\sin(y)\cdot z^x$,

$g:(x,y,z)\mapsto x^{\cos(z)\cdot y}$ og $h:(x,y,z)\mapsto y^{\frac{z}{x}}$. Tjek med Maple.

Opgave 1209: Bestem for $f:(x,y,z)\mapsto e^{x\cdot\sin(y)}\cdot z^2$ følgende størrelser og tjek resultatet med Maple:

$$\left.\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right|_{(x,y,z)=\left(1,\frac{\pi}{2},-5\right)},\qquad \left.\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\right|_{(x,y,z)=(5,0,3)}\qquad\text{og}\qquad \left.\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right|_{(x,y,z)=(9,\pi,6)}$$

Opgave 1210: $f:(x,y)\mapsto x^3\cdot y-5y^2$ $\quad g:(x,y)\mapsto x^4+3x^2y^2-7y^3$ $\quad h:(x,y)\mapsto\sin(2x)\cdot\cos(3y)$

a) Bestem i hånden for hver af ovenstående funktioner $\frac{\partial^2}{\partial x^2},\frac{\partial^2}{\partial y^2},\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$ og $\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}$. Tjek facitlisten.

b) Bestem i hånden $f''_{xx}(5,-3)$, $f''_{yy}(37,-19)$, $f''_{xy}(5,11)$, $g''_{xx}(1,1)$, $g''_{yy}(1,1)$, $g''_{xy}(-2,3)$, $h''_{xx}\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$, $h''_{yy}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{7}\right)$ og $h''_{xy}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Tjek facitlisten.

c) Benyt Maple til at bestemme resultaterne fra spørgsmål a).

d) Benyt Maples 'Evaluate at a Point' til at bestemme resultaterne i b)

Opgave 1212: Bestem for nedenstående funktioner $\frac{\partial^2}{\partial x^2},\frac{\partial^2}{\partial y^2},\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$ og $\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}$. Tjek med Maple.

a) $f:(x,y)\mapsto\sin(x)\cdot y^3-\cos(y)$ $\quad$ b) $g:(x,y)\mapsto x^y$ $\quad$ c) $h:(x,y)\mapsto e^{x^2\cdot y}-x\cdot\sqrt{y}$

Opgave 1214: Bestem for nedenstående funktioner $\frac{\partial^2}{\partial x^2},\frac{\partial^2}{\partial y^2},\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$ og $\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}$. Tjek med Maple.

a) $f:(x,y)\mapsto\sin(5x)\cdot\ln(y)$ $\quad$ b) $g:(x,y)\mapsto e^{x\cdot y}+x^2\cdot y$ $\quad$ c) $h:(x,y)\mapsto x^{\sin(y)}+\frac{y}{x}$

Opgave 1220: Se på funktionen $f:(x,y)\mapsto x^2+y^2$. Tegn grafen.

a) Bestem gradienten $\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

b) Bestem gradienten i punktet $(1,3)$.

c) Bestem gradienten i punktet $(-4,5)$.

Opgave 1222: Se på funktionen $f:(x,y,z)\mapsto x^2\cdot y^3\cdot z$.

a) Bestem gradienten ∇f.

b) Bestem ∇f i punktet $(2,-3,5)$.

Opgave 1224: Se på funktionen $f:(x,y)\mapsto \frac{x^2}{y}+y^2+y$. Tegn grafen.

a) Bestem gradienten ∇f.

b) Bestem ∇f i punktet $(4,1)$.

c) Bestem det punkt, hvor ∇f er nulvektoren (et stationært punkt).

Opgave 1226: Se på funktionen $f:(x,y,z)\mapsto 3x^2-6x+5y^2-z^2+4z$.

a) Bestem gradienten.

b) Bestem ∇f i punktet $(-1,0,6)$.

c) Bestem stationære punkter for *f*.

Opgave 1228: Se på funktionen $f:(x,y,z)\mapsto z\cdot x^2+y^3\cdot x+z^2\cdot y+5z-4y$.

a) Bestem ∇f.

b) Bestem gradienten i punktet $(2,-1,3)$.

Opgave 1230: Se på funktionen *f* givet ved $f(x,y)=x^2+y^2$. Udregn i hånden.

a) Bestem gradienten.

b) Bestem gradienten i punkterne $A(0,0,0)$, $B(0,4,16)$ og $C(3,4,25)$.

c) Bestem ligningerne for tangentplanerne i punkterne *A*, *B* og *C*.

d) Bestem længden af gradienterne i *B* og *C*.

e) Hvad fortæller gradienterne i *B* og *C* om fladens stejlhed i disse punkter?

Opgave 1232: Se på funktionen *f* givet ved $f(x,y)=y^3-x\cdot y+x^3$. Regn i hånden og tjek med Maple. Tegn først grafen i vinduet $[-5,5]\times[-5,5]\times[-20,20]$.

a) Bestem gradienten.

b) Bestem gradienten i punkterne $A(0,0,0)$, $B(2,2,f(2,2))$ og $C(3,1,f(3,1))$.

c) Bestem ligningerne for tangentplanerne i punkterne *A*, *B* og *C*.

d) Bestem længden af gradienterne i *B* og *C*.

Opgave 1234: Se på funktionen *f* givet ved $f(x,y)=\sin(x)+\cos(y)$. Regn i hånden og tjek med Maple. Tegn først grafen i vinduet $[-10,10]\times[-10,10]\times[-2,2]$.

a) Bestem gradienten.

b) Bestem gradienten i punkterne $A(0,0,0)$, $B\left(0,\frac{\pi}{2},f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$ og $C\left(\frac{\pi}{2},0,f\left(\frac{\pi}{2},0\right)\right)$.

c) Bestem ligningerne for tangentplanerne i punkterne *A*, *B* og *C*.

Opgave 1240: Bestem for følgende funktioner koordinatsættene til de stationære punkter og afgør, om det er lokale minimumspunkter, lokale maksimumspunkter eller saddelpunkter. Regn nogle af opgaverne i hånden og andre i Maple.

a) $f_1:(x,y)\mapsto x^2+y^2-6x+10y+50$

b) $f_2:(x,y)\mapsto 2\cdot x\cdot y-\sqrt{2}\cdot x+3\cdot\sqrt{2}\cdot y-3$

c) $f_3:(x,y)\mapsto x^2+y^2+6x-10y+4\cdot x\cdot y$

d) $f_4:(x,y)\mapsto e^x+e^{-x}+e^y+e^{-y}$

e) $f_5:(x,y)\mapsto 2x^3+3x^2-36x+y^3-6y^2-15y+9$

f) $f_6:(x,y)\mapsto \frac{x^2}{2}+2\cdot\cos(x)+y^2$

Opgave 1250: Foretag lineær regression på følgende data ved udregning af S_x, S_y, S_{xx} og S_{xy} og tjek resultaterne med Gym-pakkens *LinReg*.

a) $(1,2),(3,7),(6,11)$ og $(8,17)$.

b) $(-7,-4),(-3,1),(0,4),(4,8)$ og $(5,9)$

c) $(-7,-5),(-3,-1),(0,2)$ og $(4,6)$

Opgave 1260: Foretag både eksponentiel regression og potensregression på følgende data (med metoderne fra Eksempel 121 og Eksempel 122). Tjek resultaterne med *ExpReg* og *PowReg* fra Gym-pakken:

a) $(1,6),(3,26),(6,187)$ og $(7,397)$ b) $(2,3),(3,7),(5,16)$ og $(9,62)$

Opgave 1262: Foretag forskellige regressioner på Logger Pro-måden (benyt ovenstående data), og tjek med Logger Pro's resultater.

Opgave 1270: Udregn følgende dobbeltintegraler i hånden og tjek med Maple:

$$a)\int_1^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\cdot y^4 dxdy \quad b)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2\cos(x)\cdot y^4 dydx \quad c)\int_1^{\mathrm{e}}\int_0^1 \mathrm{e}^x\cdot\ln(y)dxdy \quad d)\int_0^1\int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{e}^x\cdot\ln(y)dydx$$

Opgave 1272: Udregn følgende tripleintegraler i hånden og tjek med Maple:

$$a)\int_0^3\int_0^1\int_0^2 x^3\cdot\mathrm{e}^y\cdot z^2 dxdydz \quad b)\int_0^1\int_0^2\int_0^3 x^3\cdot\mathrm{e}^y\cdot z^2 dzdxdy \quad c)\int_0^2\int_0^3\int_0^1 x^3\cdot\mathrm{e}^y\cdot z^2 dydzdx$$

Opgave 1280: Beregn rumfanget mellem graferne og *xy*-planen for følgende funktioner i de angivne områder:

$a)\ f:(x,y)\mapsto \sin(x)+\cos(y)+2\ ;\ [-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$

$b)\ g:(x,y)\mapsto x\cdot y\cdot(y-x)+250\ ;\ [-5,5]\times[-5,5]$

$c)\ h:(x,y)\mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x+y}}+\ln(x\cdot y)\ ;\ [0,10]\times[0,10]$

Opgave 1300: Se på følgende differentialligningssystem, der beskriver en henfaldskæde:

$$\frac{dN_A}{dt} = -k_A \cdot N_A$$
$$\frac{dN_B}{dt} = k_A \cdot N_A - k_B \cdot N_B$$
$$\frac{dN_C}{dt} = k_B \cdot N_B$$

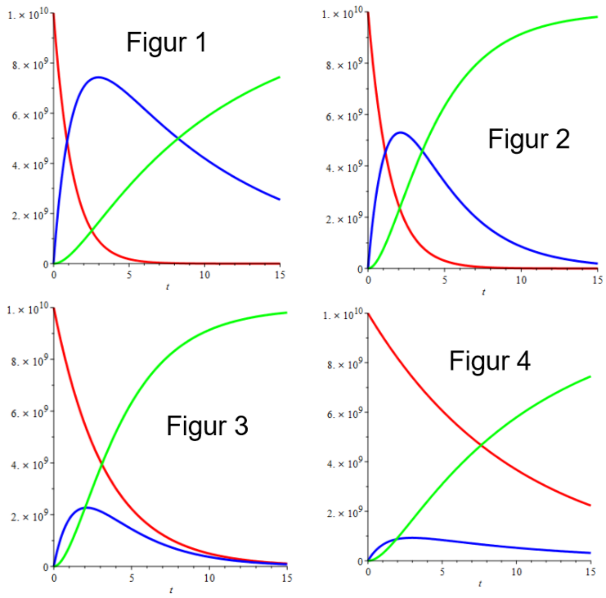
Og lad $A(t) = k_A \cdot N_A + k_B \cdot N_B$

a) Lad $k_A = 1$ og $k_B = 0,5$. Bestem for den partikulære løsning, hvor $N_A(0) = 10^{10}, N_B(0) = 0$ og $N_C(0) = 0$, aktiviteten til tiden $t = 5$.

b) Lad $k_A = 0,5$ og $k_B = 1$. Bestem for den partikulære løsning, hvor $N_A(0) = 10^{10}, N_B(0) = 0$ og $N_C(0) = 0$, det tidspunkt, hvor aktiviteten er størst.

c) Lad $k_A = 1$ og $k_B = 0,2$. Bestem for den partikulære løsning, hvor $N_A(0) = 10^{10}, N_B(0) = 10^{10}$ og $N_C(0) = 0$, det maksimale antal kerner af typen *B*, der findes undervejs i henfaldsprocessen.

d) Vi lader $N_A(0) = 10^{10}, N_B(0) = 0$ og $N_C(0) = 0$. Bestem hvilke grafer, der hører sammen med hvilke henfaldskonstanter:



$\alpha : k_A := 0.7 : k_B := 0.3$

$\beta : k_A := 0.1 : k_B := 0.8$

$\gamma : k_A := 0.3 : k_B := 0.7$

$\delta : k_A := 0.8 : k_B := 0.1$

Opgave 1310: Se på SIR-modellen med $N = 10^6, I_{start} = 2, \alpha = 10^{-6}$ og β=0,1. Hvad er det højeste antal inficerede (syge), der ifølge modellen findes på et tidspunkt under epidemien?

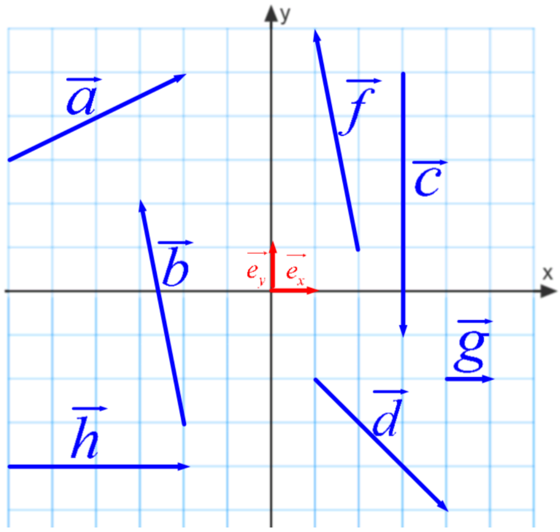
Opgave 1312: Se på SIR-modellen med $N = 10^6, I_{start} = 2, \alpha = 10^{-7}$ og β=0,04.

a) Hvad er det højeste antal inficerede (syge), der ifølge modellen findes på et tidspunkt under epidemien?

b) Hvor mange i populationen har ikke været ramt af sygdommen, når epidemien er overstået?

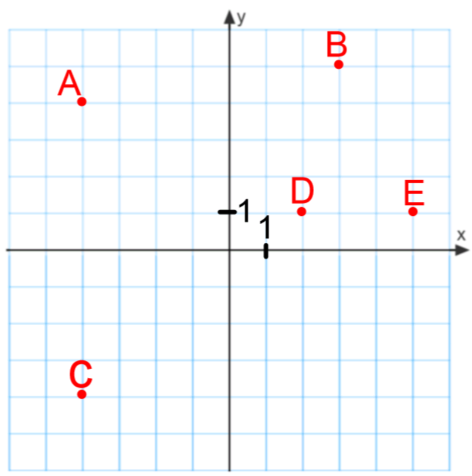
VEKTORGEOMETRI

Opgave 5001: Angiv vektorerne $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{f}, \vec{g}$ og $\vec{h}$ med koordinater:



Opgave 5004: Angiv - med udgangspunkt i basen $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ - koordinaterne for følgende vektorer:

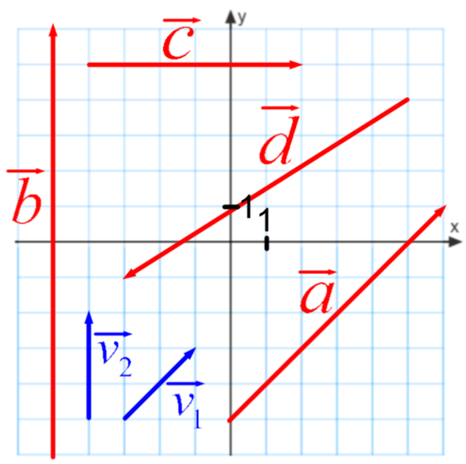
$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BE} \text{ og } \overrightarrow{CE}$$



Opgave 5007: Indtegn i et koordinatsystem vektorerne:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \ \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \ \vec{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \ \vec{g} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ og } \ \vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Opgave 5009: Angiv koordinaterne til vektorerne $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ og $\vec{d}$, når basen er $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$:



Opgave 5010: Tegn et koordinatsystem med basis $\left(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\right)$.

Afsæt følgende vektorer: $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\-6\\4\end{pmatrix}$; $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\8\\-5\end{pmatrix}$; $\vec{d}=\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}$; $\vec{f}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

Opgave 5020: Lad $\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}9\\-6\end{pmatrix}$ $\vec{d}=\begin{pmatrix}-7\\0\end{pmatrix}$

a) Definér disse fire vektorer i Maple.
b) Udregn følgende matematiske udtryk i hånden og tjek **efter hver udregning** med Maple, om du har regnet rigtigt:

$\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{a}$, $\vec{c}-\vec{d}$, $3\cdot\vec{a}$, $-2\cdot\vec{b}$, $\frac{3}{4}\cdot\vec{c}$, $2\cdot\vec{a}-\vec{d}$, $3\cdot\vec{b}-5\cdot\vec{c}$

Opgave 5022: Lad $\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\1\\7\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$ $\vec{d}=\begin{pmatrix}-5\\-3\\-2\end{pmatrix}$

a) Definér disse fire vektorer i Maple.
b) Udregn følgende matematiske udtryk i hånden og tjek **efter hver udregning** med Maple, om du har regnet rigtigt:

$\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{d}$, $\vec{c}-\vec{d}$, $3\cdot\vec{a}$, $-2\cdot\vec{b}$, $\frac{3}{4}\cdot\vec{c}$, $2\cdot\vec{a}-\vec{d}$, $3\cdot\vec{b}-5\cdot\vec{c}$

Opgave 5030: Lad $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\7\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}-14\\31\end{pmatrix}$.

Hvilken linearkombination af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ svarer til $\vec{c}$?

Opgave 5031: Lad $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}-13\\26\end{pmatrix}$.

Bestem *s* og *t*, således at $s\cdot\vec{a}+t\cdot\vec{b}=\vec{c}$.

Opgave 5033: Løs ligningssystemet $a\cdot\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\1\end{pmatrix}$; $G=\mathbb{R}^2$.

Opgave 5035: Bestem i nedenstående tilfælde om muligt de linearkombinationer $s\cdot\vec{a}+t\cdot\vec{b}$, der svarer til $\vec{c}$. Tegn situationerne i koordinatsystemet på næste side og tjek på den måde facit.

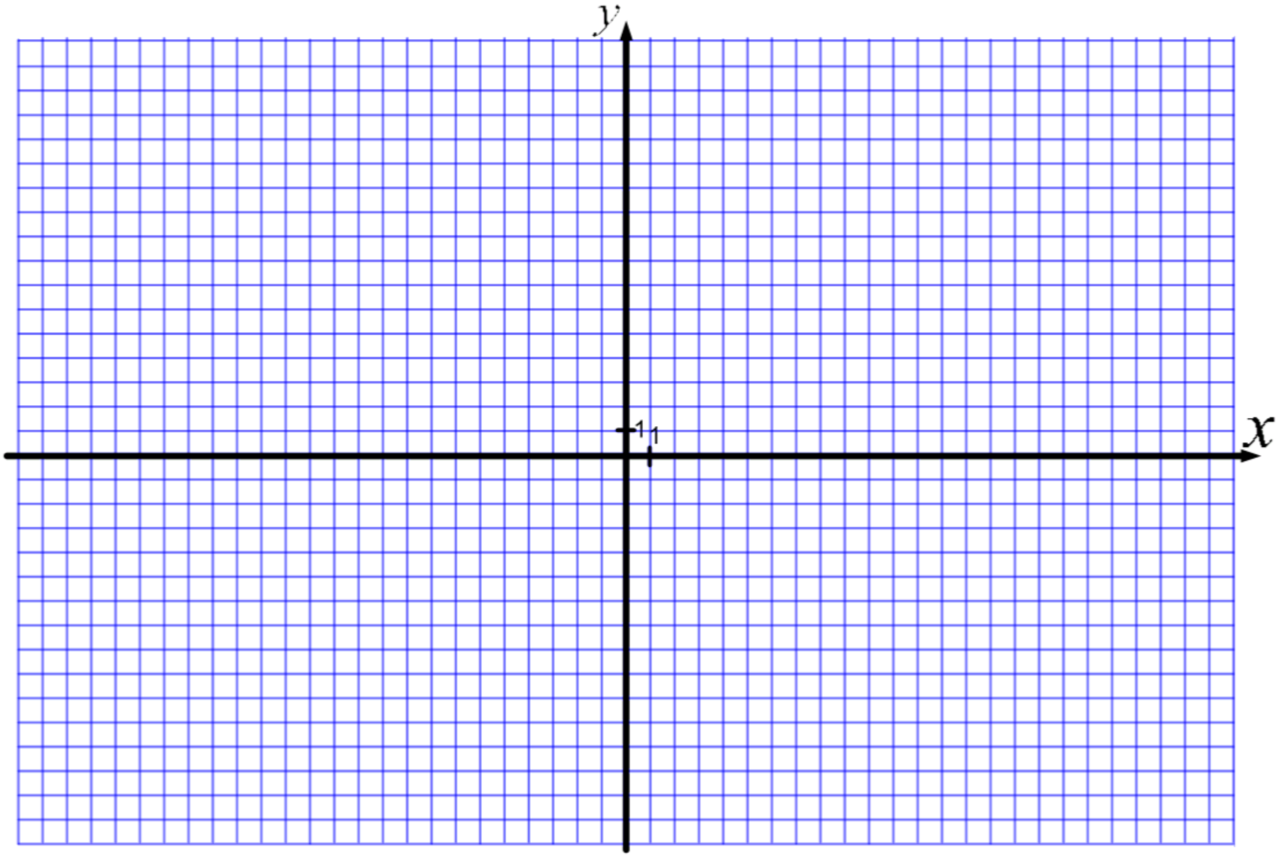
a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}7\\19\end{pmatrix}$

b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}6\\-7\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}$

c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}-12\\9\end{pmatrix}$

d) $\vec{a}=\begin{pmatrix}-7\\2\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}14\\-4\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$

e) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}-6\\-15\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}8\\20\end{pmatrix}$



Opgave 5037: Lad $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Bestem for hver af nedenstående vektorer *s* og *t*, således at $s\cdot\vec{a}+t\cdot\vec{b}$ svarer til vektoren:

$\vec{c}=\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}$, $\vec{d}=\begin{pmatrix}-7\\3\end{pmatrix}$, $\vec{f}=\begin{pmatrix}13\\-27\end{pmatrix}$, $\vec{g}=\begin{pmatrix}-17\\0\end{pmatrix}$, $\vec{h}=\begin{pmatrix}0\\119\end{pmatrix}$ og $\vec{i}=\begin{pmatrix}8,4\\-3,6\end{pmatrix}$

Opgave 5040: Bestem i hvert tilfælde – om muligt - den eller de linearkombinationer af $\vec{a},\vec{b}$ og $\vec{c}$, der svarer til $\vec{d}$. Overvej, hvis der ikke netop er én linearkombination, hvorfor dette er tilfældet.

$a)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}1\\7\\-5\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\6\\-5\end{pmatrix}$ og $\vec{d}=\begin{pmatrix}-21\\9\\18\end{pmatrix}$

$b)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\6\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-7\\3\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\4\\-5\end{pmatrix}$ og $\vec{d}=\begin{pmatrix}12\\12\\-32\end{pmatrix}$

$c)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}4\\-6\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\9\\5\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}14\\0\\1\end{pmatrix}$ og $\vec{d}=\begin{pmatrix}5\\-7\\12\end{pmatrix}$

$d)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}4\\-6\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\9\\5\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}14\\0\\1\end{pmatrix}$ og $\vec{d}=\begin{pmatrix}11\\-27\\-14\end{pmatrix}$

$e)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ og $\vec{d}=\begin{pmatrix}38\\-52\\13\end{pmatrix}$

Opgave 5045: Bestem den linearkombination af $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{f}$, $\vec{g}$ og $\vec{h}$, der svarer til $\vec{w}$.

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\-5\\8\\2\\-4\\-3\\1\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\8\\6\\1\\-2\\-9\\-5\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}6\\0\\5\\-8\\7\\5\\-4\end{pmatrix},\ \vec{d}=\begin{pmatrix}-2\\-3\\-1\\7\\1\\6\\4\end{pmatrix},\ \vec{f}=\begin{pmatrix}-9\\2\\-3\\-7\\5\\2\\-6\end{pmatrix},\ \vec{g}=\begin{pmatrix}3\\-4\\2\\-2\\5\\-5\\0\end{pmatrix},\ \vec{h}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\\4\\-5\\6\\-7\end{pmatrix} \text{ og } \vec{w}=\begin{pmatrix}-59\\1\\30\\-30\\4\\-86\\-37\end{pmatrix}$$

Opgave 5050: I planen er givet punkterne $A(7,-1)$, $B(3,6)$, $C(0,9)$, $D(2,-5)$ og $E(-1,-4)$.

Bestem stedvektorerne til hvert af de fem punkter.

Opgave 5052: I rummet er givet stedvektorerne $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}4\\-6\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}1\\9\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}14\\0\\1\end{pmatrix}$ og $\overrightarrow{OD}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Bestem koordinatsættene til punkterne *A, B, C* og *D*.

Opgave 5055: I planen er givet punkterne $A(8,3), B(-4,2), C(6,5)$ og $D(-9,-1)$.

Bestem vektorerne $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BA}$ og $\overrightarrow{DC}$.

Tjek dine resultater ved i Maple at definere stedvektorerne til punkterne og anvende $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$. Det er vigtigt, at du ser nøje efter, om du også har fortegnene rigtige.

Opgave 5057: I rummet er givet punkterne $A(-5,1,4), B(7,-9,0), C(-3,8,5)$ og $D(2,10,-13)$.

Bestem vektorerne $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BA}$ og $\overrightarrow{DC}$.

Tjek dine resultater ved i Maple at definere stedvektorerne til punkterne og anvende $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$. Det er vigtigt, at du ser nøje efter, om du også har fortegnene rigtige.

Opgave 5060: I planen er givet punktet $D(-7,3)$ og vektoren $\overrightarrow{DL}=\begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}$.

Bestem koordinatsættet til punktet *L*.

Opgave 5062: I rummet er givet punktet $H(-4,1,-7)$ og vektoren $\overrightarrow{KH}=\begin{pmatrix}4\\-5\\7\end{pmatrix}$.

Bestem koordinatsættet til punktet *K*.

Opgave 5064: I rummet er givet vektorerne $\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}3\\-7\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-5\\-8\\2\end{pmatrix}$ og $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$

Bestem koordinatsættet til punktet *C*.

Opgave 5066: I planen er givet vektorerne $\overrightarrow{EO}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{ER}=\begin{pmatrix}-6\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{KR}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ og $\overrightarrow{KP}=\begin{pmatrix}-9\\-2\end{pmatrix}$.

Bestem koordinatsættet til punktet *P*.

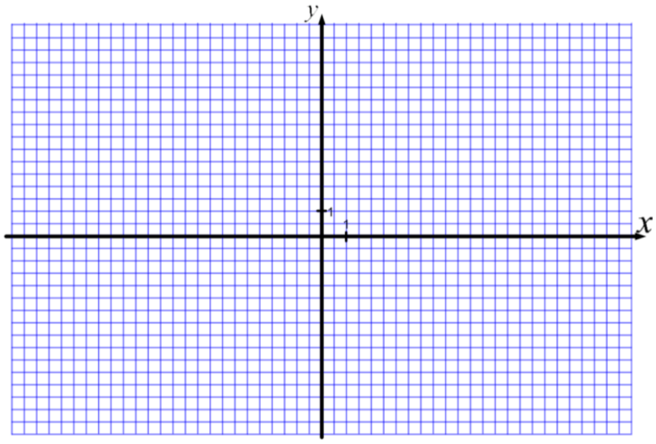
Opgave 5067: I planen er givet vektorerne $\overrightarrow{BA}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CO}=\begin{pmatrix}-7\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$ og $\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.

Bestem $\overrightarrow{BD}$.

Opgave 5068: I rummet er givet $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}-4\\8\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}s\\-5\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BA}=\begin{pmatrix}-2\\-5\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DO}=\begin{pmatrix}1\\t\\-7\end{pmatrix}$ og $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}3\\9\\u\end{pmatrix}$.

Bestem *s*, *t* og *u*.

Opgave 5070: I planen er givet punkterne $A(-5,2), B(7,-6)$ og $C(3,-2)$. Punkterne danner en trekant *ABC*. Bestem vektorerne $\overrightarrow{AM_a}$, $\overrightarrow{BM_b}$ og $\overrightarrow{CM_c}$, der går fra vinkelspidserne til midtpunkterne af de modstående sider.
Indtegn punkterne og tjek, at udregningerne gav de rigtige resultater:



Opgave 5075: *ABCD* er et parallelogram, hvor $A(-3,2), B(5,-1)$ og $D(7,-4)$. Bestem koordinaterne til punktet *C*.

Opgave 5077: *ABCD* er et parallelogram, hvor $A(5,4,-1), B(3,-2,-7)$ og $D(6,1,-8)$. Bestem koordinaterne til punktet *C*.

Opgave 5080: På en ret linje *l* i planen ligger punktet $(-5,3)$, og $\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$ er en retningsvektor for *l*.

Angiv en parameterfremstilling for linjen *l*.

Opgave 5081: $\vec{r}=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ er en retningsvektor for den rette linje *l*, som punktet $P_0(-5,10,3)$ ligger på.

Angiv en parameterfremstilling for linjen *l*.

Opgave 5082: En ret linje *l* er angivet ved parameterfremstillingen: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-5\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\6\\-4\end{pmatrix}$; $t\in\mathbb{R}$.

Angiv et punkt, der ligger på linjen, samt en retningsvektor for linjen.

Opgave 5083: En ret linje *l* er angivet ved parameterfremstillingen: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$; $t\in\mathbb{R}$.

Angiv et punkt, der ligger på linjen, samt en retningsvektor for linjen.

Opgave 5084: En ret linje *l*, der går gennem origo, har en retningsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Angiv en parameterfremstilling for linjen *l*.

Opgave 5085: En ret linje *l* går gennem punkterne $(5,1,-7)$ og $(2,3,4)$.

Angiv en parameterfremstilling for linjen *l*.

Opgave 5086: En ret linje *l* går gennem punkterne $(2,-1)$ og $(-4,7)$.

Angiv en parameterfremstilling for linjen *l*.

Opgave 5090: En ret linje *l* i planen er givet ved parameterfremstillingen:

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; t \in \mathbb{R}$$

Hvilke fem punkter på linjen svarer til henholdsvis $t=0, t=1, t=2, t=-1$ og $t=-2$?

Opgave 5091: En ret linje *l* i planen er givet ved parameterfremstillingen:

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \; ; \; s \in \mathbb{R}$$

Hvilke fem punkter på linjen svarer til henholdsvis $s=0, s=1, s=5, s=10$ og $s=\frac{3}{2}$?

Opgave 5092: En ret linje *l* i planen er givet ved parameterfremstillingen:

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \; ; \; t \in \mathbb{R}$$

a) Find et punkt, der ligger på linjen, og find en retningsvektor for linjen.
b) Find to andre punkter end ovenstående og find to andre retningsvektorer.
c) Ligger punktet $(6,-3)$ på linjen?
d) Ligger punktet $(-3,1)$ på linjen?

Opgave 5093: En ret linje *l* i planen er givet ved parameterfremstillingen:

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \; ; \; t \in \mathbb{R}$$

a) Find et punkt, der ligger på linjen, og find en retningsvektor for linjen.
b) Find to andre punkter end ovenstående og find to andre retningsvektorer.
c) Ligger punktet $(5,4,-7)$ på linjen?
d) Ligger punktet $(3,18,-23)$ på linjen?

Opgave 5094: Et ret linjestykke er givet ved parameterfremstillingen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}; t \in [-2,3]$.

Bestem linjestykkets endepunkter.

Opgave 5100: Bestem en parameterfremstilling for de rette linjer, der går gennem nedenstående punkter:

$a)$ $(4,-7)$ og $(-3,2)$

$b)$ $(-1,8)$ og $(2,-1)$

$c)$ $(5,-8)$ og $(-3,-8)$

$d)$ $(1,6)$ og $(1,-2)$

Opgave 5101: Bestem en parameterfremstilling for de rette linjer, der går gennem nedenstående punkter:

$a)$ $(3,-1,-5)$ og $(-7,2,-4)$

$b)$ $(1,6,4)$ og $(-3,-2,10)$

$c)$ $(-5,11,3)$ og $(5,8,3)$

$d)$ $(17,-4,3)$ og $(-1,-4,3)$

Opgave 5102: Bestem en parameterfremstilling for den rette linje *l*, der går gennem punktet $(5,-9,2)$ og er parallel med den rette linje *m*, der går gennem punkterne $(3,7,-1)$ og $(6,-3,5)$.

Opgave 5110: Bestem en parameterfremstilling for de rette linjer givet ved følgende ligninger:

$a)$ $y=3x+5$; $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$b)$ $y=-4x+3$; $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$c)$ $y=\frac{1}{3}x-7$; $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$d)$ $y=-\frac{2}{9}x+\frac{3}{5}$; $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$e)$ $y=-8$; $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$f)$ $x=3$; $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Opgave 5111: Bestem ligningen på formen $y=a\cdot x+b$; $G=\mathbb{R}^2$ for de rette linjer angivet med nedenstående parameterfremstillinger:

$a)$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$; $t\in\mathbb{R}$

$b)$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$; $t\in\mathbb{R}$

$c)$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $t\in\mathbb{R}$

$d)$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$; $t\in\mathbb{R}$

$e)$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $t\in\mathbb{R}$

$f)$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix} -139 \\ 0 \end{pmatrix}$; $t\in\mathbb{R}$

Opgave 5112: Bestem den spidse vinkel, som følgende rette linjer danner med *x*-aksen:

$a)\ y=6x-9\ ;\ G=\mathbb{R}^2$

$b)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$

$c)\ y=-x+4\ ;\ G=\mathbb{R}^2$

$d)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$

Opgave 5120: Det oplyses, at planen α indeholder punktet $(4,-1,3)$, og at $\begin{pmatrix}5\\3\\-1\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}-4\\2\\5\end{pmatrix}$ er retningsvektorer for α. Angiv en parameterfremstilling for α.

Opgave 5121: Planen β er givet ved parameterfremstillingen $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-1\\4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-3\\6\\0\end{pmatrix}\ ;(s,t)\in\mathbb{R}^2$

a) Hvilket punkt i planen får man ud fra talparrene $(s,t)=(0,0)$, $(s,t)=(1,0)$ og $(s,t)=(-3,4)$?

b) Hvilke af punkterne $(4,5,4),(5,17,6),(0,0,0),(5,38,-21)$ og $(-1,8,9)$ ligger i planen?

Opgave 5122: Bestem en parameterfremstilling for den plan α, der går gennem punkterne $A(5,10,2),B(-3,2,6)$ og $C(7,1,4)$, og svar efterfølgende på:

a) Ligger punktet $(10,20,4)$ i planen?

b) Ligger punktet $(4,-3,2)$ i planen?

c) Ligger punktet $(9,36,-6)$ i planen?

Opgave 5124: I rummet er givet et punkt $P(6,-1,7)$ og en ret linje $l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\5\\-2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$

a) Undersøg, om punktet *P* ligger på linjen *l*.

b) Bestem en parameterfremstilling for den plan, der indeholder både *P* og *l*.

Opgave 5126: I rummet er givet de rette linjer $l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\-7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\5\\3\end{pmatrix}$ og $m:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\6\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}6\\-14\\7\end{pmatrix}$.

a) Vis, at punktet $(-1,14,-1)$ ligger på begge linjer.

b) Bestem en parameterfremstilling for den plan, der indeholder begge linjer.

Opgave 5140: Angiv radius og centrum for cirklen *C*: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}\cos(t)\\\sin(t)\end{pmatrix}\ ;\ t\in[0,2\pi[$.

Opgave 5141: Angiv radius og centrum for cirklen *C*: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-9\end{pmatrix}+6\cdot\begin{pmatrix}\cos(t)\\\sin(t)\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$.

Opgave 5142: Angiv en parameterfremstilling for cirklen med centrum i $(7,-3)$ og radius 5.

Opgave 5143: Angiv en parameterfremstilling for cirklen med centrum i $(0,6)$ og radius 1.

Opgave 5146: En ret linje l er givet ved $l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\2\\-5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix};t\in\mathbb{R}$.

Angiv en parameterfremstilling for den rette linje *m*, der er en parallelforskydning af *l* med 4 langs *x*-aksen, -3 langs *y*-aksen og 6 langs *z*-aksen.

Opgave 5148: En plan α er givet ved $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\8\\-2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\6\\-4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}9\\-2\\5\end{pmatrix};(s,t)\in\mathbb{R}^2$.

Angiv en parameterfremstilling for den plan β, der er en parallelforskydning af α med 9 langs *x*-aksen, 5 langs *y*-aksen og -2 langs *z*-aksen.

Opgave 5149: Angiv radius og centrum for cirklen *C*: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\-1\end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix}\cos(t)\\\sin(t)\end{pmatrix}\ ;\ t\in[0,2\pi[$.

Opgave 5160: Bestem længden af følgende vektorer i planen og tjek efterfølgende resultatet med Gym-pakkens *len* eller Maples *norm(...,2)* eller $\|A\|$:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}12\\-5\end{pmatrix},\vec{c}=\begin{pmatrix}-15\\-8\end{pmatrix},\vec{d}=\begin{pmatrix}9\\0\end{pmatrix},\vec{e}=\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\\\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\end{pmatrix}\text{ og }\vec{f}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

Opgave 5161: Bestem de værdier for *t*, for hvilke nedenstående vektorer har længden 5.

$$a)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}-4\\t\end{pmatrix}\quad \text{b)}\ \vec{b}=\begin{pmatrix}t\\2\end{pmatrix}\quad c)\ \vec{c}=\begin{pmatrix}0\\t\end{pmatrix}\quad d)\ \vec{d}=\begin{pmatrix}-7\\t\end{pmatrix}$$

Opgave 5162: Bestem længden af følgende vektorer i rummet og tjek efterfølgende resultatet med Gym-pakkens *len* eller Maples *norm(...,2)* eller $\|A\|$:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\12\\3\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix},\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\vec{d}=\begin{pmatrix}-5\\84\\-12\end{pmatrix},\vec{e}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\text{ og }\vec{f}=\begin{pmatrix}0{,}5\\-0{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}$$

Opgave 5163: Bestem de værdier for *t*, for hvilke nedenstående vektorer har længden 13.

$$a)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}-4\\t\\12\end{pmatrix}\quad \text{b)}\ \vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\4\\t\end{pmatrix}\quad c)\ \vec{c}=\begin{pmatrix}5\\t\\12\end{pmatrix}\quad d)\ \vec{d}=\begin{pmatrix}t\\0\\0\end{pmatrix}$$

Opgave 5164: Bestem længden af følgende vektorer og tjek efterfølgende resultatet med Gym-pakkens *len* eller Maples *norm(...,2)* eller $\|A\|$:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-2\\5\\-1\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}6\\-2\\1\\-2\\2\end{pmatrix},\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\vec{d}=\begin{pmatrix}65\\-72\end{pmatrix},\vec{e}=\begin{pmatrix}0{,}5\\-0{,}5\\0\\-0{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}\text{ og }\vec{f}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Opgave 5170: I planen er givet punkterne $A(5,9), B(1,12)$ og $C(-7,4)$.

Bestem $|\overrightarrow{AB}|, |\overrightarrow{AC}|, |\overrightarrow{BC}|$ og $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$.

Opgave 5172: I rummet er givet punkterne $A(-6,3,-4), B(6,6,0)$ og $C(-7,1,-2)$.

Bestem $|\overrightarrow{AB}|, |\overrightarrow{AC}|, |\overrightarrow{BC}|$ og $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$.

Opgave 5180: Følgende vektorer er givet $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}10\\-4\end{pmatrix}$, $\vec{d}=\begin{pmatrix}-8\\-1\end{pmatrix}$ og $\vec{f}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$

Bestem følgende skalarprodukter i hånden og tjek resultatet med Maple:
$\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{c}\cdot\vec{d}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$, $\vec{d}\cdot\vec{f}$, $\vec{b}\cdot\vec{a}$ og $\vec{d}\cdot\vec{c}$

Opgave 5182: Følgende vektorer er givet: $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-5\\6\\2\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}8\\6\\2\end{pmatrix}$ og $\vec{d}=\begin{pmatrix}-4\\-1\\-7\end{pmatrix}$

Bestem følgende skalarprodukter i hånden og tjek resultatet med Maple:
$\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{d}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{b}\cdot\vec{d}$, $\vec{c}\cdot\vec{d}$ og $\vec{d}\cdot\vec{c}$

Opgave 5184: Følgende vektorer er givet: $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}t\\4\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}9\\t\end{pmatrix}$ og $\vec{d}=\begin{pmatrix}14\\t\end{pmatrix}$.

a) Bestem den værdi for *t*, hvor $\vec{a}\cdot\vec{d}=0$.
b) Bestem den værdi for *t*, hvor $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$.
c) Bestem den værdi for *t*, hvor $\vec{a}\parallel\vec{c}$.
d) Bestem den værdi for *t*, hvor $\vec{c}\cdot\vec{b}=0$.
e) Bestem den værdi for *t*, hvor $\vec{b}\parallel\vec{c}$.

Opgave 5186: Følgende vektorer er givet: $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\5\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\4\\t\end{pmatrix}$ og $\vec{c}=\begin{pmatrix}t\\-3\\t\end{pmatrix}$.

a) Bestem den værdi for *t*, hvor $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.
b) Bestem den værdi for *t*, hvor $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$.
c) Bestem de værdier for *t*, hvor $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$.
d) Findes der en værdi for *t*, hvor $\vec{a}\parallel\vec{b}$?
e) Findes der en værdi for *t*, hvor $\vec{a}\parallel\vec{c}$?

Opgave 5190: Bestem vinklen mellem vektorerne $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$. Tjek resultatet ved at anvende Gym-pakkens kommando *vinkel*.

Opgave 5192: Bestem vinklen mellem vektorerne $\vec{a}=\begin{pmatrix}-4\\3\\-6\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\-7\end{pmatrix}$. Tjek resultatet ved at anvende Gym-pakkens kommando *vinkel*.

Opgave 5194: Bestem vinklen mellem vektorerne $\vec{a}=\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$. Tjek resultatet ved at anvende Gym-pakkens kommando *vinkel*.

Opgave 5196: Bestem vinklen mellem vektorerne $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\1\\-7\end{pmatrix}$. Tjek resultatet ved at anvende Gym-pakkens kommando *vinkel*.

Opgave 5198: Bestem *t*-værdien, så vinklen mellem vektorerne $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\7\end{pmatrix}$ er 45°.

Opgave 5200: I følgende spørgsmål er angivet to ikke-parallelle vektorer. Angiv i hvert tilfælde ved hjælp af prikproduktet, om vinklen mellem vektorerne er stump, ret eller spids. Tjek dit resultat med Gym-pakkens *vinkel*:

$a)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ $\quad b)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}5\\-3\\2\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\2\\-7\end{pmatrix}$ $\quad c)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$

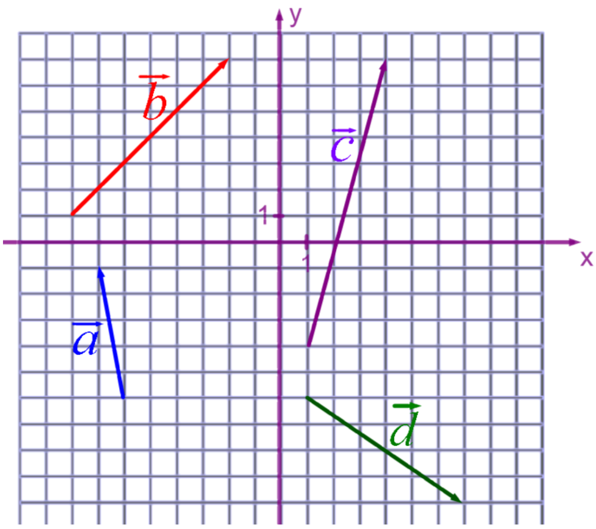
$d)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}1\\6\\-3\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\1\\8\end{pmatrix}$ $\quad e)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$ $\quad f)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}2\\8\\-3\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-6\\-2\\-11\end{pmatrix}$.

Opgave 5202: Bestem i nedenstående spørgsmål uden hjælpemidler den eller de værdier for *t*, for hvilken vektorerne er ortogonale. Tjek dit resultat ved at anvende den fundne værdi for *t* og Gym-pakkens *vinkel*, hvor du skal få vinklen 90°.

$a)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}10\\t\end{pmatrix}$ $\quad b)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}5\\t\\2\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}t\\-2\\9\end{pmatrix}$ $\quad c)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}t+1\\3\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}9\\2-t\end{pmatrix}$

$d)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\1\\t\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}t\\-3\\t-1\end{pmatrix}$ $\quad e)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}t+1\\2+2t\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-7\end{pmatrix}$ $\quad f)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}t+2\\-4-2t\\6+3t\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}t-5\\3\\2\end{pmatrix}$.

Opgave 5220: Bestem koordinater til $\overrightarrow{a_b}$, $\overrightarrow{c_a}$ og $\overrightarrow{d_a}$ ved at konstruere projektionerne og aflæse koordinaterne grafisk.



Opgave 5222: Bestem to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, hvor $\overrightarrow{a_b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$ og $\overrightarrow{b_a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Opgave 5230: Bestem i hvert af nedenstående tilfælde $\overrightarrow{a_b}$ og $\overrightarrow{b_a}$.

Tjek dit resultat med Gym-pakkens *proj*.

$a)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad b)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$c)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad d)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Opgave 5234: Bestem den værdi for *t*, hvor $\overrightarrow{a_b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$, når $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ t \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Opgave 5240: Bestem længden af projektionerne af de to vektorer på hinanden, dvs. $\left|\overrightarrow{a_b}\right|$ og $\left|\overrightarrow{b_a}\right|$.

Tjek dit resultat med Gym-pakkens *len* og *proj*, dvs. $len\left(proj\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right)$.

$a)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\qquad b)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$c)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\qquad d)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Opgave 5250: Bestem tværvektoren til hver af følgende vektorer. Tjek med Gym-pakkens *hat*:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ og $\vec{g} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Opgave 5252: Bestem til hver af følgende vektorer en vektor, der er ortogonal med den pågældende vektor. Tjek dit resultat med Gym-pakkens *vinkel*.

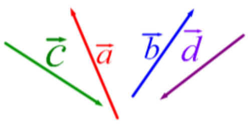
$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 6{,}87 \\ -1{,}39 \end{pmatrix}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}$

Opgave 5254: Benyt tværvektor-begrebet til at afgøre, om følgende vektorpar er parallelle. Tjek dit resultat med Gym-pakkens *vinkel*, hvor du skal få 0° eller 180°, hvis du er kommet frem til, at vektorparret er parallelle vektorer:

$a)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\qquad b)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ 2 \end{pmatrix}$

$c)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix}$ $\qquad d)\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Opgave 5260: Bestem om vinklerne $v_{a\to b}, v_{b\to a}, v_{a\to c}, v_{b\to c}, v_{a\to d}, v_{b\to d}$ og $v_{c\to d}$ er positive eller negative:



Opgave 5270: Udregn determinanten $\det\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ for følgende vektorpar. Tjek dit resultat med Gym-pakkens *det.*

$a)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ $\quad b)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$

$c)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}8\\-7\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ $\quad d)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$

Opgave 5271: Udregn determinanten $\det\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ for følgende vektorpar. Tjek dit resultat med Gym-pakkens *det.*

$a)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}10\\-4\end{pmatrix}$ $\quad b)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-12\\2\end{pmatrix}$

$c)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\12\end{pmatrix}$ $\quad d)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$

Opgave 5274: Afgør i hvert af nedenstående tilfælde, om vektorparret er parallelt, og bestem, hvis det ikke er tilfældet, arealet af det parallelogram, som vektorerne udspænder, samt om omløbsretningen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ er positiv eller negativ.

$a)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\15\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ $\quad b)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$

$c)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\-5\end{pmatrix}$ $\quad d)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-9\\4\end{pmatrix}$

Opgave 5276: Bestem arealet af de trekanter, der udspændes af nedenstående vektorpar.

$a)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-5\\12\end{pmatrix}$ $\quad b)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$

$c)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}-5\\7\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$ $\quad d)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}9\\5\end{pmatrix}$

Opgave 5278: Bestem arealet af de trekanter, hvor hjørnerne er placeret i følgende punkter:

$a)\ A(2,7)\quad B(-3,1)\quad C(9,8)$ $\qquad b)\ A(-1,-6)\quad B(5,-2)\quad C(-8,7)$

$c)\ A(-3,2)\quad B(2,-7)\quad C(12,6)$ $\qquad d)\ A(1,9)\quad B(5,2)\quad C(13,4)$

Opgave 5280: Udregn krydsproduktet $\vec{a}\times\vec{b}$ af nedenstående vektorpar. Tjek efterfølgende dit resultat med Maple **og** tjek ved hjælp af prikproduktet, at $\vec{a}\times\vec{b}$ står vinkelret på både $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Hvis $\vec{a}\times\vec{b}$ bliver nulvektoren, så overvej hvorfor det skete.

$a)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\4\\6\end{pmatrix}$ $\quad b)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}-6\\-1\\5\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\2\\6\end{pmatrix}$ $\quad c)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\8\\-6\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}$

$d)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}0\\5\\-2\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$ $\quad e)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-9\\-6\end{pmatrix}$ $\quad f)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

Opgave 5282: Find en vektor, der står vinkelret på både $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Tjek dit resultat ved at se, om prikproduktet mellem den fundne vektor og hver af vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ giver 0.

$a)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}6\\7\\-1\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$ $b)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}-6\\0\\3\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix}$ $c)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}7\\-1\\4\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-2\\5\end{pmatrix}$

$d)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}1\\8\\-3\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-5\\2\\1\end{pmatrix}$ $e)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}5\\2\\-3\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-10\\-4\\6\end{pmatrix}$ $f)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\0\\-6\end{pmatrix}$

Opgave 5284: Bestem i følgende tilfælde arealet af det parallelogram, der udspændes af de to vektorer, eller afgør, at de to vektorer er parallelle.

$a)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\7\\-6\end{pmatrix}$ $b)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}6\\-3\\-15\end{pmatrix}$ $c)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-5\\8\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix}$

$d)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}-9\\2\\1\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-9\\1\end{pmatrix}$ $e)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}-7\\1\\-2\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-14\\2\\-4\end{pmatrix}$ $f)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

Opgave 5286: Bestem arealet af de trekanter, der udspændes af nedenstående vektorer.

$a)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\\8\end{pmatrix}$ $b)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}4\\-3\\6\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\11\end{pmatrix}$ $c)\ \vec{a}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Opgave 5288: Vektorerne $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-5\\4\end{pmatrix}$ udspænder sammen med punktet P en plan.

Bestem en retningsvektor $\vec{r}$ for planen, der opfylder $\vec{r}\perp\vec{a}$ og $|\vec{r}|=|\vec{a}|$.

Opgave 5300: Afgør (ja/nej) i hvert af nedenstående tilfælde om $\vec{n}$ er en normalvektor til linjen l:

$a)\ \vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\quad l:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$ $b)\ \vec{n}=\begin{pmatrix}5\\2\\-3\end{pmatrix}\quad l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-7\\5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$

$c)\ \vec{n}=\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}\quad l:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$ $d)\ \vec{n}=\begin{pmatrix}6\\-1\\4\end{pmatrix}\quad l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-6\\-3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$

$e)\ \vec{n}=\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}\quad l:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$ $f)\ \vec{n}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\quad l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-9\\6\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$

Opgave 5310: Aflæs normalvektorer for følgende rette linjer (svaret er selvfølgelig ikke entydigt, da der er uendelig mange normalvektorer til en linje):

$a)\ 5x+2y-9=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2$ $b)\ -3x+7y+5=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2$ $c)\ 4x-y+13=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2$

$d)\ x+y+18=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2$ $e)\ 3y-16=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2$ $f)\ x=-7\ ;\ G=\mathbb{R}^2$

Opgave 5311: Bestem retningsvektorer til linjerne fra opgave 5310 (igen ikke entydige svar).

Opgave 5312: Bestem ligninger for de rette linjer, der har nedenstående normalvektorer og går gennem de angivne punkter:

$$a)\ \vec{n}=\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}\ P_0(5,-3) \qquad b)\ \vec{n}=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}\ P_0(-6,1) \qquad c)\ \vec{n}=\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}\ P_0(2,0)$$

$$d)\ \vec{n}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\ P_0(9,-12) \qquad e)\ \vec{n}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\ P_0(0,-5) \qquad f)\ \vec{n}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\ P_0(0,4)$$

Opgave 5314: På linjen *l*, som $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\-7\end{pmatrix}$ er en normalvektor til, ligger punktet $P(-3,2)$.

a) Bestem en ligning for linjen *l*.

b) Bestem en ligning for den linje *m*, der er parallel med *l* og går gennem $Q(4,-1)$.

c) Bestem en ligning for den linje *k*, der er ortogonal med *l* og går gennem $R(2,5)$.

Opgave 5315: På linjen *l*, som $\vec{n}=\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}$ er en normalvektor til, ligger punktet $P(4,0)$.

a) Bestem en ligning for linjen *l*.

b) Bestem en ligning for den linje *m*, der er parallel med *l* og går gennem $Q(0,3)$.

c) Bestem en ligning for den linje *k*, der er ortogonal med *l* og går gennem $O(0,0)$.

Opgave 5316: På linjen *l*, som $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$ er en normalvektor til, ligger punktet $P(3,-2)$.

a) Bestem en ligning for linjen *l*.

b) Bestem en ligning for den linje *m*, der er parallel med *l* og går gennem $Q(0,4)$.

c) Bestem en ligning for den linje *k*, der er ortogonal med *l* og går gennem $O(0,3)$.

Opgave 5317: To rette linjer er givet ved ligningerne:

$$l: 3x+t\cdot y=13 \quad ; \quad G=\mathbb{R}^2$$
$$m: -4x+7y=5 \quad ; \quad G=\mathbb{R}^2$$

a) Bestem *t*, så linjen *l* går gennem punktet $P(7,4)$.

b) Bestem den værdi for *t*, for hvilken linjerne *l* og *m* er parallelle.

c) Bestem den værdi for *t*, for hvilken linjerne *l* og *m* er ortogonale.

Opgave 5318: Om linjen *l* oplyses det, at $\overrightarrow{n_l}=\begin{pmatrix}4\\t\end{pmatrix}$ er en normalvektor til linjen, og at punkterne

$(t,2)$ og $(9,-1)$ ligger på linjen.

Bestem *t*.

Opgave 5319: Om linjerne *k*, *l*, *m* og *s* oplyses det, at $l \parallel m$ og $s \perp m$, at $\overrightarrow{n_l}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ er en normalvektor til *l*, at punktet $P(7,-2)$ ligger på *s* og linjen *k* er givet ved ligningen $7x+t\cdot y=5$.

a) Bestem en ligning for linjen *s*.

b) Bestem en retningsvektor for linjen *m*.

c) Bestem den værdi for *t*, for hvilken linjerne *k* og *m* er parallelle.

d) Bestem den værdi for *t*, for hvilken linjerne *k* og *m* er ortogonale.

Opgave 5320: Bestem – gerne med hjælp fra Maples krydsprodukttegn – en normalvektor til følgende planer (svaret er ikke entydigt):

$a)\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\-7\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\8\\4\end{pmatrix}\ ;\ (t,s)\in\mathbb{R}^2$ $\quad b)\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\15\\8\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\9\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\7\end{pmatrix}\ ;\ (t,s)\in\mathbb{R}^2$

$c)\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\-1\\-2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\7\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix}\ ;\ (t,s)\in\mathbb{R}^2$ $\quad d)\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\8\\158\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\ ;\ (t,s)\in\mathbb{R}^2$

Opgave 5330: Angiv normalvektorer til følgende planer:

$a)\ 4x-5y+2z+9=0\ ;G=\mathbb{R}^3$ $\quad b)\ -2x+7y+3z-5=0\ ;G=\mathbb{R}^3$ $\quad c)\ x+4y-z+18=0\ ;G=\mathbb{R}^3$

$d)\ 2x-3z+5=0\ ;G=\mathbb{R}^3$ $\quad e)\ -y+4z=7\ ;G=\mathbb{R}^3$ $\quad f)\ 2x=3y-6\quad ;G=\mathbb{R}^3$

Opgave 5331: Angiv ligninger for de planer, der går gennem nedenstående punkter og har de angivne normalvektorer:

$a)\ \vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-5\\3\end{pmatrix}\ P_0(4,-1,-6)$ $\quad b)\ \vec{n}=\begin{pmatrix}8\\-1\\-4\end{pmatrix}\ P_0(3,5,-2)$ $\quad c)\ \vec{n}=\begin{pmatrix}1\\5\\-1\end{pmatrix}\ P_0(2,1,-2)$

$d)\ \vec{n}=\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}\ P_0(1,5,-12)$ $\quad e)\ \vec{n}=\begin{pmatrix}5\\0\\-1\end{pmatrix}\ P_0(0,1,7)$ $\quad f)\ \vec{n}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\ P_0(9,0,-58)$

Opgave 5332: For hvilken *t*-værdi er $\vec{n}=(t,-3,4)$ en normalvektor til $-14\cdot x+6y-8z+11=0$?

Opgave 5333: Hvilken værdi skal *s* have i ligningen $9\cdot x+s\cdot y-6z+7=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3$, hvis $\vec{n}=(-3,7,2)$ skal være en normalvektor for planen?

Opgave 5340: Bestem ligninger for planerne angivet ved nedenstående parameterfremstillinger:

$a)\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\-7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}6\\-2\\1\end{pmatrix};\ (t,s)\in\mathbb{R}^2$ $\quad b)\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-5\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix};\ (t,s)\in\mathbb{R}^2$

$c)\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\7\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\ ;\ (t,s)\in\mathbb{R}^2$ $\quad d)\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix}\ ;\ (t,s)\in\mathbb{R}^2$

$e)\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\ ;\ (t,s)\in\mathbb{R}^2$ $\quad f)\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\ ;\ (t,s)\in\mathbb{R}^2$

Opgave 5342: Bestem ligninger for de planer, der indeholder de tre angivne punkter:

$a)\ A(7,-4,3), B(9,2,-4)$ og $C(1,5,1)$ $\quad b)\ A(1,5,-2), B(3,-8,-7)$ og $C(-2,9,4)$

$c)\ A(2,5,-1), B(3,-4,6)$ og $C(8,-2,7)$ $\quad d)\ A(0,-6,3), B(4,-9,1)$ og $C(5,-1,4)$

$e)\ A(3,4,2), B(3,-1,2)$ og $C(-5,4,2)$ $\quad f)\ A(1,2,3), B(2,3,4)$ og $C(3,2,1)$

Opgave 5344: Bestem værdien af t, så planerne α og β er parallelle:

$$\alpha: 4x + t\cdot y - 34z + 79 = 0 \qquad \beta: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \;;\; (u,s)\in\mathbb{R}^2$$

Opgave 5400: Bestem skæringspunktet mellem x-aksen og linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}; t\in\mathbb{R}$.

Opgave 5401: Bestem eventuelle skæringspunkter mellem y-aksen og cirklen givet ved ligningen:

$$x^2 + 6x + y^2 + 6y - 7 = 0; G = \mathbb{R}^2$$

Opgave 5402: Bestem eventuelle skæringspunkter mellem z-aksen og kuglen givet ved ligningen:

$$x^2 + 6x + y^2 - 8y + z^2 + 12z + 45 = 0 \;;\; G = \mathbb{R}^3$$

Opgave 5403: Bestem skæringspunkterne mellem de tre koordinatplaner og den rette linje l:

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \;;\; t\in\mathbb{R}$$

Opgave 5404: Bestem skæringspunkterne mellem de tre koordinatakser og planen α:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;;\; (t,s)\in\mathbb{R}^2$$

Opgave 5405: Bestem skæringspunkterne mellem yz-planen og planen med ligningen:

$$-7x + 2y + z - 3 = 0 \;;\; G = \mathbb{R}^3$$

Opgave 5406: Bestem skæringspunkterne mellem xz-planen og kuglen med ligningen:

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y + z^2 + 6z - 6 = 0 \;;\; G = \mathbb{R}^3$$

Opgave 5407: Bestem eventuelle skæringspunkter mellem yz-planen og planen $\alpha: x = 7; G = \mathbb{R}^3$.

Opgave 5408: Bestem eventuelle skæringspunkter mellem de tre koordinatakser og linjen:

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ -18 \\ 4 \end{pmatrix} \;;\; t\in\mathbb{R}$$

Opgave 5409: Linjen $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}; t\in\mathbb{R}$ skærer alle tre koordinatakser. Bestem (x_0, y_0, z_0)

Opgave 5410: Bestem eventuelle skæringspunkter mellem nedenstående linjer eller afgør, at de er parallelle eller sammenfaldende:

$$a)\; l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \;;\; s\in\mathbb{R} \qquad m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \;;\; t\in\mathbb{R}$$

$$b)\; l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \;;\; s\in\mathbb{R} \qquad m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} \;;\; t\in\mathbb{R}$$

$$c)\; l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \;;\; s\in\mathbb{R} \qquad m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix} \;;\; t\in\mathbb{R}$$

$$d)\; l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} \;;\; s\in\mathbb{R} \qquad m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 8 \\ -12 \end{pmatrix} \;;\; t\in\mathbb{R}$$

Opgave 5411: Bestem eventuelle skæringspunkter mellem nedenstående linjer eller afgør, at de er parallelle eller sammenfaldende:

$a)\ l:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}\qquad m: 2x-5y+3=0\ ;\ \ G=\mathbb{R}^2$

$b)\ l: -3x+2y+19=0\ ;\ \ G=\mathbb{R}^2\qquad m:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$

$c)\ l: 6x+5y+11=0\ ;\ \ G=\mathbb{R}^2\qquad m:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}10\\-12\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$

$d)\ l:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}\ ;\ s\in\mathbb{R}\qquad m: 9x+10y-4=0\ ;\ \ G=\mathbb{R}^2$

Opgave 5412: Bestem eventuelle skæringspunkter mellem nedenstående linjer eller afgør, at de er parallelle eller sammenfaldende:

$a)\ l:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}\qquad m: y=-3x+13\ ;\ \ G=\mathbb{R}^2$

$b)\ l: y=5x+2\ ;\ \ G=\mathbb{R}^2\qquad m:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$

$c)\ l: y=2x+7\ ;\ \ G=\mathbb{R}^2\qquad m:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$

$d)\ l:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}\ ;\ s\in\mathbb{R}\qquad m: y=-4x+5\ ;\ \ G=\mathbb{R}^2$

Opgave 5420: Bestem eventuelle skæringspunkter mellem nedenstående linjer eller afgør, at de er vindskæve, parallelle eller sammenfaldende:

$a)\ l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-7\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\5\\-6\end{pmatrix}\ ;\ s\in\mathbb{R}\qquad m:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-8\\10\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}5\\-9\\5\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$

$b)\ l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-1\\5\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\-9\end{pmatrix}\ ;\ s\in\mathbb{R}\qquad m:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\-3\\-8\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-5\\8\\3\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$

$c)\ l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\3\\-7\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}\ ;\ s\in\mathbb{R}\qquad m:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\26\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\-5\\2\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$

$d)\ l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\11\\-2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\-5\\2\end{pmatrix}\ ;\ s\in\mathbb{R}\qquad m:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\-7\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-6\\10\\-4\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$

Opgave 5421: Bestem eventuelle skæringspunkter mellem nedenstående linjer eller afgør, at de er vindskæve, parallelle eller sammenfaldende:

$$a)\ \ l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\5\\-1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-3\\-4\\2\end{pmatrix}\ ;\ s\in\mathbb{R}\qquad m:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-25\\13\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-7\\3\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$$

$$b)\ \ l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\\-2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-5\\2\end{pmatrix}\ ;\ s\in\mathbb{R}\qquad m:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\-52\\20\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-3\\15\\-6\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$$

$$c)\ \ l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}4\\-5\\-6\end{pmatrix}\ ;\ s\in\mathbb{R}\qquad m:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-8\\9\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-10\\11\\-12\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$$

$$d)\ \ l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-6\\3\\-7\end{pmatrix}\ ;\ s\in\mathbb{R}\qquad m:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-2\\36\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}5\\-1\\-5\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$$

Opgave 5423: To meget små bolde bevæger sig langs linjer beskrevet ved følgende parameterfremstillinger, hvor *s* og *t* angiver tider målt med det samme ur:

$$l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\7\\-2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\5\\-8\end{pmatrix}\ ;\ s\in\mathbb{R}\qquad m:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\\10\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$$

a) Skærer de to boldes baner hinanden?
b) Støder de to bolde sammen?

Opgave 5424: To meget små bolde bevæger sig langs linjer beskrevet ved følgende parameterfremstillinger, hvor *s* og *t* angiver tider målt med det samme ur:

$$l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\7\\7\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-4\\2\\1\end{pmatrix}\ ;\ s\in\mathbb{R}\qquad m:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-5\\13\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$$

a) Skærer de to boldes baner hinanden?
b) Støder de to bolde sammen?

Opgave 5425: To bolde med radier på 1 bevæger sig langs linjer beskrevet ved følgende parameterfremstillinger, hvor *s* og *t* angiver tider målt med det samme ur:

$$l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-8\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}\ ;\ s\in\mathbb{R}\qquad m:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$$

a) Skærer de to boldes baner hinanden?
b) Støder de to bolde sammen?

Opgave 5430: Bestem evt. skærings- eller røringspunkter mellem nedenstående linjer og cirkler. Regn først i hånden, tjek efterfølgende med Maple ved at indtaste samtlige ligninger i et ligningssystem og kig til sidst i facitlisten:

$$a)\ \ C: x^2-2x+y^2+6y-15=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2\qquad l:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$$

$$b)\ \ C: x^2-7x+y^2+8y+71=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2\qquad l:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$$

$$c)\ \ C: x^2+4x+y^2-6y-61=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2\qquad l:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$$

Opgave 5432: Bestem eventuelle skærings- eller røringspunkter mellem cirklerne. Det er tilladt at benytte Maple til udregningen.

$$C_1: x^2-14x+y^2+10y+56=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2 \qquad C_2: x^2-10x+y^2+6y+32=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2$$

Opgave 5440: Bestem eventuelle skærings- eller røringspunkter mellem følgende kugler og rette linjer. Det er tilladt at anvende Maple:

$$a)\ x^2+8x+y^2-10y+z^2-4z+36=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3 \qquad l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\12\\10\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$$

$$b)\ x^2+2x+y^2+6y+z^2-8z+19=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3 \qquad l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-5\\9\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}5\\2\\-7\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$$

$$c)\ x^2+10x+y^2-6y+z^2-2z-99=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3 \qquad l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$$

Opgave 5450: Bestem eventuelle skæringspunkter mellem følgende linjer og planer (det er tilladt at anvende Maple):

$$a)\ \alpha:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\-8\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-4\\5\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\6\\-3\end{pmatrix}\ ;\ (t,s)\in\mathbb{R}^2 \qquad l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\-9\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}-2\\7\\-5\end{pmatrix}\ ;\ u\in\mathbb{R}$$

$$b)\ \alpha: 6x+3y-2z-15=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3 \qquad l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-11\\18\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\ ;\ u\in\mathbb{R}$$

$$c)\ \alpha:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\6\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\2\end{pmatrix}\ ;\ (t,s)\in\mathbb{R}^2 \qquad l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\1\\20\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}\ ;\ u\in\mathbb{R}$$

$$d)\ \alpha:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-2\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-5\end{pmatrix}\ ;\ (t,s)\in\mathbb{R}^2 \qquad l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\-7\\-15\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}-3\\-1\\3\end{pmatrix}\ ;\ u\in\mathbb{R}$$

$$e)\ \alpha: -x+5y-3z+12=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3 \qquad l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\\-2\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\-3\end{pmatrix}\ ;\ u\in\mathbb{R}$$

Opgave 5460: Bestem en parameterfremstilling for skæringslinjen mellem følgende planer. Tjek dit resultat ved at finde to punkter på skæringslinjen og se, om de ligger i begge planer.

$$a)\ \alpha: 7x-2y+3z+8=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3 \qquad \beta: -2x+5y-4z+15=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3$$

$$b)\ \alpha: -x+y+2z+3=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3 \qquad \beta: 4x+y-3z+11=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3$$

$$c)\ \alpha:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\1\\-3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}5\\1\\-4\end{pmatrix}\ ;\ (t,s)\in\mathbb{R}^2 \qquad \beta: 2x+8y-z+5=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3$$

$$d)\ \alpha:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-7\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}\ ;\ (t,s)\in\mathbb{R}^2 \qquad \beta:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\0\\2\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\\7\end{pmatrix}+v\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-5\end{pmatrix}\ ;\ (u,v)\in\mathbb{R}^2$$

Opgave 5470: Bestem projektionen Q af punktet P på linjen l. Tjek dit facit ved at kontrollere, at punktet Q ligger på linjen l, og at $\overrightarrow{QP} \perp \vec{r_l}$ eller $\overrightarrow{QP} \parallel \vec{n_l}$.

$a)\ P(3,-7)\quad l: 2x+6y-3=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2$ $\qquad b)\ P(-5,2)\quad l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$

$c)\ P(6,-3)\quad l: 5x+7y-9=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2$ $\qquad d)\ P(0,0)\quad l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$

$e)\ P(5,-4)\quad l: x=3\ ;\ G=\mathbb{R}^2$ $\qquad f)\ P(-4,-1)\quad l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$

Opgave 5480: Bestem projektionen Q af punktet P på linjen l:

$a)\ P(-1,6,-3)\quad l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$ $\qquad b)\ P(5,-4,1)\quad l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$

$c)\ P(5,11,-8)\quad l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$ $\qquad d)\ P(0,0,1)\quad l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$

Opgave 5490: Bestem projektionen Q af punktet P på planen α :

$a)\ P(4,11,-3)\quad \alpha: 7x+y-4z+18=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3$ $\qquad b)\ P(-9,1,4)\quad \alpha: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}\ ;(t,s)\in\mathbb{R}^2$

$c)\ P(-4,1,2)\quad \alpha: -2x+5y-9z+5=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3$ $\qquad d)\ P(0,0,0)\quad \alpha: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ ;(t,s)\in\mathbb{R}^2$

Opgave 5500: Bestem projektionen Q af P på det angivne objekt:

$a)\ P(9,-1)$ Cirklen: $x^2+8x+y^2-2y+5=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2$

$b)\ P(6,-2,3)$ Kuglen: $x^2+10x+y^2-8y+z^2+8z+27=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3$

$c)\ P(-3,7)$ Cirklen: $x^2+8x+y^2-10y-21=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2$

$d)\ P(2,1,-7)$ Kuglen: $x^2-8x+y^2-6y+z^2+12z+52=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3$

Opgave 5510: Bestem projektionen af linjen l på planen α på to måder. Både ved at projicere to punkter ned i planen og ved at anvende metoden fra Øvelse 2. Tjek, at du får parallelle retningsvektorer med de to metoder.

$a)\ l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$ $\qquad \alpha: 5x+y-3z+13=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3$

$b)\ l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$ $\qquad \alpha: -x+3y+8z-7=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3$

$c)\ l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$ $\qquad \alpha: 5x+y-3z-59=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3$

Opgave 5520: Bestem den spidse vinkel mellem følgende objekter:

$a)$ Linjerne $l:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$ og $m:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\5\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}\ ;\ s\in\mathbb{R}$

$b)$ Planerne $\alpha: 7x+2y-3z+8=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3$ og $\beta: -5x+4y-7z=-9\ ;\ G=\mathbb{R}^3$

$c)$ Linjen $l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-1\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-5\\2\\7\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$ og planen $\alpha: -4x+11y-8z+8=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3$

$d)$ Linjerne $l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\6\\-2\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$ og $m:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-9\\6\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\-4\end{pmatrix}\ ;\ s\in\mathbb{R}$

Opgave 5522: Bestem den stumpe vinkel mellem følgende objekter:

$a)$ Linjerne $l: 2x+5y=8\ ;\ G=\mathbb{R}^2$ og $m:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$

$b)$ Planerne $\alpha: 6x-3y+z-8=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3$ og $\beta:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\8\\-6\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\7\\-5\end{pmatrix}\ ;\ (t,s)\in\mathbb{R}^2$

$c)$ Linjen $l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\\3\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}\ ;\ u\in\mathbb{R}$ og planen $\alpha:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\9\end{pmatrix}\ ;\ (t,s)\in\mathbb{R}^2$

$d)$ Linjerne $l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$ og $m:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\ ;\ s\in\mathbb{R}$

Opgave 5600: Bestem afstanden mellem følgende cirkler:

$a)$ $C_1: (x+7)^2+(y-4)^2=81\ ;\ G=\mathbb{R}^2$ $\quad C_2: (x-1)^2+(y+11)^2=36\ ;\ G=\mathbb{R}^2$

$b)$ $C_1: (x-12)^2+(y+9)^2=625\ ;\ G=\mathbb{R}^2$ $\quad C_2: (x+28)^2+(y+18)^2=121\ ;\ G=\mathbb{R}^2$

$c)$ $C_1: (x-3)^2+(y+4)^2=289\ ;\ G=\mathbb{R}^2$ $\quad C_2: x^2+(y+8)^2=16\ ;\ G=\mathbb{R}^2$

$d)$ $C_1: (x+9)^2+(y-2)^2=144\ ;\ G=\mathbb{R}^2$ $\quad C_2: (x-3)^2+(y+3)^2=49\ ;\ G=\mathbb{R}^2$

Opgave 5602: Bestem afstanden mellem følgende cirkler:

$a)$ $C_1: x^2+2x+y^2-6y-6=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2$ $\quad C_2: x^2-6x+y^2-12y-76=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2$

$b)$ $C_1: x^2-20x+y^2+16y=92\ ;\ G=\mathbb{R}^2$ $\quad C_2: x^2+50x+y^2-8y+280=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2$

$c)$ $C_1: x^2+4x+y^2-10y-7=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2$ $\quad C_2: x^2+4x+y^2-10y+20=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2$

$d)$ $C_1: x^2+34x+y^2-48y=-136\ ;\ G=\mathbb{R}^2$ $\quad C_2: x^2-78x+y^2+18y+158=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2$

Opgave 5604: Bestem afstanden mellem følgende kugler:

$a)$ $K_1: (x+2)^2+(y+7)^2+(z-9)^2=100\ ;\ G=\mathbb{R}^3$ $\quad K_2: (x+3)^2+(y+5)^2+(z-7)^2=4\ ;\ G=\mathbb{R}^3$

$b)$ $K_1: (x-6)^2+(y-11)^2+(z+12)^2=64\ ;\ G=\mathbb{R}^3$ $\quad K_2: (x+6)^2+(y-8)^2+(z+8)^2=1\ ;\ G=\mathbb{R}^3$

$c)$ $K_1: (x+4)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=121\ ;\ G=\mathbb{R}^3$ $\quad K_2: (x+2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=49\ ;\ G=\mathbb{R}^3$

$d)$ $K_1: (x+22)^2+(y-17)^2+(z-31)^2=144\ ;\ G=\mathbb{R}^3$ $\quad K_2: (x-50)^2+(y+16)^2+(z+25)^2=529\ ;\ G=\mathbb{R}^3$

Opgave 5620: Bestem afstanden mellem nedenstående punkter og linjer i planen:

$a)\ P(7,-2) \qquad \ell : -3x+4y+14=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2$

$b)\ P(-6,1) \qquad \ell :\ \ 15x-8y-4=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2$

$c)\ P(5,3) \qquad \ell :\ \ y=-6x+5\ ;\ G=\mathbb{R}^2$

$d)\ P(11,-24) \quad \ell :\ \ y=2x-7\ \ ;\ G=\mathbb{R}^2$

Opgave 5622: Bestem afstanden mellem nedenstående punkter og linjer i planen:

$a)\ P(5,-7) \qquad \ell :\ \ 12x-5y=16\ ;\ G=\mathbb{R}^2$

$b)\ P(-1,3) \qquad \ell :\ \ 7x+2y=-1\ ;\ G=\mathbb{R}^2$

$c)\ P(14,-4) \quad \ell :\ \ y=-\frac{1}{2}x+3\ ;\ G=\mathbb{R}^2$

$d)\ P(3,-5) \quad \ell :\ \ y=11 \quad ;\ G=\mathbb{R}^2$

$e)\ P(13,-6) \quad \ell :\ \ x=-5 \quad ;\ G=\mathbb{R}^2$

Opgave 5624: Lad $P(t,3)$ være et punkt i planen og $\ell :\ -28x+45y+37=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2$ en ret linje.

a) Bestem de værdier for *t*, for hvilke punktet ligger i afstanden 5 fra linjen.
b) De to mulige *t*-værdier fra spørgsmål a) svarer til to punkter. Ligger punktet midt mellem de to punkter på den rette linje?
c) Er svaret på spørgsmål b) et tilfælde?

Opgave 5626: Bestem de punkter på cirklen *C*, der har afstanden 2 til den rette linje *l*:

$C:\ x^2+6x+y^2-14y-5=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2$

$\ell :\ 4x+3y-7=0\ \ ;G=\mathbb{R}^2$

Opgave 5640: Bestem afstanden mellem nedenstående linjer:

$a)\ l:3x-2y+9=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2 \qquad m:-9x+6y+5=0 \quad ;\ G=\mathbb{R}^2$

$b)\ l:4x-1y+5=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2 \qquad m:8x+2y-7=0 \quad ;\ G=\mathbb{R}^2$

$c)\ l:y=5x+3;\ G=\mathbb{R}^2 \qquad m:\ y=5x-4 \quad ;\ G=\mathbb{R}^2$

$d)\ l:y=\frac{1}{2}x+9;\ G=\mathbb{R}^2 \qquad m:\ y=-2x-2 \quad ;\ G=\mathbb{R}^2$

$e)\ l:6x+3y-7=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2 \qquad m:y=-2x+1 \quad ;\ G=\mathbb{R}^2$

$f)\ l:y=3 \quad ;\ G=\mathbb{R}^2 \qquad m:\ y=-8 \quad ;\ G=\mathbb{R}^2$

$g)\ l:5x-2y+3=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2 \qquad m:-15x+6y-9=0 \quad ;\ G=\mathbb{R}^2$

Opgave 5650: Afgør, om nedenstående rette linjer skærer eller tangerer cirklerne, eller beregn afstanden *d* mellem cirklen og den rette linje.

$a)\ A:(x+5)^2+(y-3)^2=16\ ;\ G=\mathbb{R}^2 \qquad \ell : 4x+3y-14=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2$

$b)\ A:(x-12)^2+(y+18)^2=625\ ;\ G=\mathbb{R}^2 \quad \ell : 7x-24y+109=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2$

$c)\ A:(x+49)^2+(y-31)^2=484\ ;\ G=\mathbb{R}^2 \quad \ell : 77x-36y-2336=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2$

$d)\ A:(x-2)^2+(y-5)^2=81\ ;\ G=\mathbb{R}^2 \qquad \ell : 4x-3y+10=0\ ;\ G=\mathbb{R}^2$

Opgave 5660: Bestem afstanden fra følgende punkter til planerne.

$$a)\, P(-5,6,1) \quad \alpha: 2x-y-2z+3=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3$$
$$b)\, P(3,-7,-2) \quad \alpha: 12x-3y+4z+3=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3$$
$$c)\, P(3,-7,-2) \quad \alpha: -63x+72y-33z+45=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3$$
$$d)\, P(5,8,-1) \quad \alpha: 2x-4y+6z+28=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3$$

Opgave 5670: Bestem afstanden mellem nedenstående planer:

$$a)\ \alpha: 4x-2y-4z-3=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3 \qquad \beta: -6x+3y+6z+11=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3$$
$$b)\ \alpha: 7x+3y-5z+15=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3 \qquad \beta: 11x-2y+3z-19=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3$$
$$c)\ \alpha: 66x-144y-112z+56=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3 \qquad \beta: -99x+216y+168z-66=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3$$
$$d)\ \alpha: 3x-7y+11z+4=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3 \qquad \beta: -9x+21y-33z-12=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3$$

Opgave 5680: Bestem afstanden mellem nedenstående linjer og planer:

$$a)\ l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \qquad \alpha: 5x+2y-3z+8=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3$$
$$b)\ l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ -19 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \qquad \alpha: -x+3y-2z+5=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3$$

Opgave 5690: Afgør følgende om nedenstående planer og kugler:

1) Skærer planen kuglen? I så fald skal radius for skæringscirklen beregnes.
2) Er planen en tangentplan til kuglen?
3) Er der ingen fælles punkter? I så fald skal afstanden *d* fra planen til kuglen bestemmes.

$$a)\ \alpha: 12x+84y-5z+617=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3 \qquad K: (x-31)^2+(y-14)^2+(z+43)^2=2809\ ;\ G=\mathbb{R}^3$$
$$b)\ \alpha: 72x-16y+63z=-90\ ;\ G=\mathbb{R}^3 \qquad K: (x-5)^2+(y+11)^2+(z-7)^2=49\ ;\ G=\mathbb{R}^3$$
$$c)\ \alpha: -36x+9y-12z-93=0\ ;\ G=\mathbb{R}^3 \qquad K: (x-6)^2+(y+14)^2+(z-19)^2=289\ ;\ G=\mathbb{R}^3$$

Opgave 5700: Bestem afstanden mellem nedenstående punkter og linjer:

$$a)\ P(6,-2,5) \quad l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ -13 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \qquad b)\ P(1,0,9) \quad l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$$
$$c)\ P(-9,-1,2) \quad l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \qquad d)\ P(0,0,0) \quad l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$$

Opgave 5710: Afgør for nedenstående linjer og kugler, om linjen skærer eller tangerer kuglen, eller bestem afstanden *d* mellem linjen og kuglen:

$$a)\quad l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\10\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}6\\-11\\8\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}\qquad K:(x+8)^2+(y-3)^2+(z-7)^2=29\ ;\ G=\mathbb{R}^3$$

$$b)\quad l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\\17\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}6\\-5\\8\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}\qquad K:(x-5)^2+(y+7)^2+(z+2)^2=249\ ;\ G=\mathbb{R}^3$$

$$c)\quad l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\6\\-5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-4\\11\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}\qquad K:(x+9)^2+(y-1)^2+z^2=36\ ;\ G=\mathbb{R}^3$$

$$d)\quad l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\-5\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}\qquad K:(x-7)^2+(y-5)^2+(z+4)^2=9\ ;\ G=\mathbb{R}^3$$

Opgave 5720: Bestem afstanden *d* mellem nedenstående linjer:

$$a)\quad l_1:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\10\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}6\\-11\\8\end{pmatrix}\ ;\ s\in\mathbb{R}\qquad l_2:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\8\\-2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}5\\2\\-3\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$$

$$b)\quad l_1:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\7\\-2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix}\ ;\ s\in\mathbb{R}\qquad l_2:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\11\\-2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-6\\-4\\10\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$$

$$c)\quad l_1:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\7\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-5\\6\end{pmatrix}\ ;\ s\in\mathbb{R}\qquad l_2:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-5\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix}\ ;\ t\in\mathbb{R}$$

Opgave 5730: Bestem ligninger for de tangenter, der rører den pågældende cirkel i det angivne punkt *P*.

$a)\ (x+4)^2+(y-3)^2=162\ ;\ G=\mathbb{R}^2\quad P(5,-6)\qquad b)\ (x-7)^2+(y+2)^2=13\ ;\ G=\mathbb{R}^2\quad P(5,-5)$

$c)\ (x+8)^2+(y+1)^2=36\ ;\ G=\mathbb{R}^2\quad P(-8,5)\qquad d)\ x^2+y^2=53\ ;\ G=\mathbb{R}^2\quad P(2,-7)$

Opgave 5740: Bestem ligninger for de tangentplaner, der rører den pågældende kugle i det angivne punkt *P*.

$a)\ (x+2)^2+(y-1)^2+(z+9)^2=181\ ;\ G=\mathbb{R}^3\qquad P(4,-1,3)$

$b)\ (x-3)^2+(y+7)^2+z^2=122\ ;\ G=\mathbb{R}^3\qquad P(-1,2,5)$

$c)\ (x-1)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=4\ ;\ G=\mathbb{R}^3\qquad P(1,-2,2)$

$d)\ x^2+y^2+z^2=14\ ;\ G=\mathbb{R}^3\qquad P(1,2,3)$

VEKTORFUNKTIONER

Opgave 6000: En vektorfunktion $\vec{f}$ er givet ved forskriften $\vec{f}(s,t)=\begin{pmatrix} e^t+3s \\ (2-s)\cdot(t^2+1) \end{pmatrix}$.

a) Bestem $\vec{f}(-1,0)$.

b) Bestem funktionsbilledet for parameterværdierne $s=3$ og $t=-2$.

c) Bestem parameterværdierne *s* og *t*, så $\vec{f}(s,t)=\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Opgave 6002: En vektorfunktion $\vec{f}$ er givet ved $\vec{f}(t)=\begin{pmatrix} t^2+3t-8 \\ 5t-4 \end{pmatrix}$.

a) Bestem $\vec{f}(0)$ og $\vec{f}(-3)$.

b) Bestem den parameterværdi *t*, der svarer til punktet $(2,6)$ på parameterkurven for $\vec{f}$.

c) Hvilke af punkterne $A(-4,1), B(-12,-9), C(-10,-14), D(4,9)$ og $E(0,-4)$ ligger på parameterkurven for $\vec{f}$.

d) Bestem den afledede funktion af $\vec{f}$.

e) Bestem differentialkvotienten i 2 og bestem $\vec{f}\,'(-3)$.

f) Bestem parameterværdien t_0, så $\vec{f}\,'(t_0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, og bestem $\vec{f}(t_0)$.

g) Bestem det punkt på parameterkurven for $\vec{f}$, hvor den afledede funktion er $\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Opgave 6004: En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved forskriften $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} t^2+2t-8 \\ t^3+4t^2-11t-27 \end{pmatrix}$.

a) Bestem $\vec{s}(3)$ og $\vec{s}\,'(3)$.

b) Bestem en parameterfremstilling for den tangent til parameterkurven for $\vec{s}$, der svarer til parameterværdien $t=3$.

c) Bestem $\vec{s}(-5)$ og $\vec{s}\,'(-5)$.

d) Bestem en parameterfremstilling for den tangent til parameterkurven for $\vec{s}$, der svarer til parameterværdien $t=-5$.

e) Hvor mange rette linjer tangerer parameterkurven for $\vec{s}$ i punktet $(7,3)$.

Opgave 6006: En vektorfunktion $\vec{f}$ er givet ved forskriften $\vec{f}(t)=\begin{pmatrix} 8t-3 \\ t^3+3t^2-17t+5 \end{pmatrix}$.

a) Bestem den afledede funktion af $\vec{f}$.

b) Bestem det punkt på parameterkurven for $\vec{f}$, hvor den afledede funktion er $\begin{pmatrix} 8 \\ -20 \end{pmatrix}$.

c) Bestem de punkter på parameterkurven for $\vec{f}$, hvor den afledede funktion er $\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Opgave 6008: En vektorfunktion $\vec{f}$ er givet ved $\vec{f}\left(\vec{v}\right)=\begin{pmatrix}\vec{v}\bullet\vec{a}\\ \left|\vec{v}\right|\\ \det\left(\vec{a},\vec{v}\right)\end{pmatrix}$, hvor $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$.

a) Bestem $\vec{f}\left(\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}\right)$ og $\vec{f}\left(\vec{a}\right)$.

Opgave 6009: En vektorfunktion $\vec{f}$ er givet ved $\vec{f}\left(\vec{v}\right)=\vec{v}\times\vec{a}$, hvor $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$.

a) Bestem $\vec{f}\left(\begin{pmatrix}5\\0\\4\end{pmatrix}\right)$ og $\vec{f}\left(\vec{a}\right)$.

Opgave 6010: Vektorfunktionerne $\vec{f}$ og $\vec{g}$ er givet ved forskrifterne

$$\vec{f}(t)=\begin{pmatrix}5\cdot\left(t-\sin(t)\right)\\ 5\cdot\left(1-\cos(t)\right)\end{pmatrix}\ ;\ t\in\left[-4\pi,4\pi\right] \qquad \vec{g}(t)=\begin{pmatrix}10\cdot\left(t-\sin(t)\right)\\ 3\cdot\left(\cos(t)-1\right)\end{pmatrix}\ ;\ t\in\left[-2\pi,2\pi\right]$$

a) Tegn med *vektorPlot* en rød parameterkurve for $\vec{f}$ i vinduet $\left[-65,65\right]\times\left[-2,12\right]$.

b) Tegn med *plot* en blå parameterkurve for $\vec{g}$ i vinduet $\left[-65,65\right]\times\left[-8,2\right]$.

c) Tegn den røde og den blå parameterkurve sammen i vinduet $\left[-65,65\right]\times\left[-8,12\right]$.

Opgave 6012: Vektorfunktionen $\vec{s}$ er givet ved $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}t^3-3t^2-33t+29\\ t^2-8t+15\end{pmatrix}$; $-3\le t\le 8$

a) Tegn parameterkurven for $\vec{s}$ efter først at have defineret koordinatfunktionerne med $x(t):=\ldots$ og $y(t):=\ldots$ og derefter $\vec{s}(t):=<x(t),y(t)>$.

b) Bestem de værdier for parameteren *t*, hvor funktionsbilledets førstekoordinat er -6.

c) Bestem de værdier for parameteren *t*, hvor funktionsbilledets andenkoordinaten er 8.

d) Bestem de værdier for parameteren *t*, hvor parameterkurven går gennem punktet $\left(-6,8\right)$.

Opgave 6014: Vektorfunktionen $\vec{f}$ er givet ved $\vec{f}(t)=\begin{pmatrix}\sin^3(t)-\cos(t)\\ \cos^3(t)-\sin(t)\end{pmatrix}$ $t\in\left[0,2\pi\right]$

a) Tegn parameterkurven for $\vec{f}$ med *plot* ved at henvise til koordinatfunktionerne med $\vec{f}(t)[1]$ og $\vec{f}(t)[2]$.

b) Tegn parameterkurven for $\vec{f}\,'(t)$.

c) Tegn parameterkurven for $\vec{f}\,''(t)$

Opgave 6020: Vektorfunktionen $\vec{f}$ er givet ved $\vec{f}(t)=\begin{pmatrix}t^2-2t-35\\ t^2-8t+12\end{pmatrix}$; $t\in\mathbb{R}$

a) Bestem i hånden parameterværdierne for parameterkurvens skæringer med førsteaksen.
b) Bestem i hånden koordinatsættene til parameterkurvens skæringer med førsteaksen.
c) Bestem i hånden koordinatsættene til parameterkurvens skæringer med andenaksen.

Opgave 6022: Samme vektorfunktion som i opgave 6020.

a) Tegn parameterkurven i Maple.
b) Bestem med Maple koordinatsættene til skæringspunkterne med koordinatakserne.

Opgave 6024: Vektorfunktionen $\vec{f}$ er givet ved $\vec{f}(t)=\begin{pmatrix}\left(e^{t-2}-1\right)\cdot(t+3)^2\\ t^3-2t^2-3t\end{pmatrix}$; $t\in\mathbb{R}$

a) Bestem i hånden parameterværdierne for parameterkurvens skæringer med koordinatakserne.
b) Bestem i hånden koordinatsættene til parameterkurvens skæringer med andenaksen.

Opgave 6026: Samme vektorfunktion som i opgave 6024, men nu med Maple.

a) Tegn parameterkurven for $\vec{f}$.
b) Bestem koordinatsættene til parameterkurvens skæringer med koordinatakserne.

Opgave 6030: Parameterkurven for vektorfunktionen $\vec{s}$ givet ved $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}t^3-7t-10\\ t^2-t-1\end{pmatrix}$; $t\in\mathbb{R}$ har et dobbeltpunkt, og den ene af de tilsvarende parameterværdier er $t_1=3$.

a) Bestem i hånden koordinatsættet til dobbeltpunktet.
b) Bestem den anden af de to parameterværdier, der svarer til dobbeltpunktet.

Opgave 6032: Vektorfunktionen $\vec{f}$ er givet ved $\vec{f}(t)=\begin{pmatrix}t^3-31t+38\\ t^4+2t^3-31t^2-32t+55\end{pmatrix}$; $t\in\mathbb{R}$.

Parameterkurven for $\vec{f}$ har et triplepunkt, der bl.a. svarer til $t_1=1$.

a) Tegn parameterkurven for $\vec{f}$.
b) Bestem med Maple koordinatsættet for triplepunktet.
c) Bestem med Maple de to andre t-værdier, der svarer til triplepunktet.

Opgave 6034: Vektorfunktionen $\vec{s}$ er givet ved $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}t^3+4t^2-17t-49\\ t^2-t-19\end{pmatrix}$; $t\in\mathbb{R}$.

Parameterkurven for $\vec{s}$ har et dobbeltpunkt.

a) Bestem med Maple parameterværdierne svarende til parameterkurvens dobbeltpunkt.
b) Bestem koordinatsættet til parameterkurvens dobbeltpunkt.
c) Tegn parameterkurven for $\vec{s}$.

Opgave 6036: Vektorfunktionen $\vec{s}$ er givet ved $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}t^4-12t^3-107t^2+1398t-2307\\ t^3-10t^2-127t+1169\end{pmatrix}$; $t\in\mathbb{R}$

Parameterkurven for $\vec{s}$ har et triplepunkt.

a) Bestem med Maple parameterværdierne svarende til parameterkurvens triplepunkt.
b) Bestem koordinatsættet til parameterkurvens triplepunkt.
c) Tegn parameterkurven for $\vec{s}$.

Opgave 6040: En vektorfunktion $\vec{f}$ er givet ved forskriften $\vec{f}(t)=\begin{pmatrix}t^2+5t-3\\ 7t+4\end{pmatrix}$; $t\in\mathbb{R}$

a) Bestem i hånden den afledede funktion af $\vec{f}$.
b) Bestem differentialkvotienten i 2.
c) Bestem funktionsbilledet af 2.
d) Angiv en tangentvektor til parameterkurven for $\vec{f}$ i punktet $(11,18)$

Opgave 6042: En vektorfunktion $\vec{f}$ er givet ved forskriften $\vec{f}(t)=\begin{pmatrix} t^3+5t^2-3t+2 \\ t^2-7t+4 \end{pmatrix}$; $t\in\mathbb{R}$

a) Bestem i hånden den afledede funktion af $\vec{f}$.

b) Bestem i hånden en parameterfremstilling for tangenten til parameterkurven for $\vec{f}$ i det punkt, der svarer til parameterværdien 1.

Opgave 6044: En vektorfunktion $\vec{f}$ er givet ved forskriften $\vec{f}(t)=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t+\cos(t) \\ t^2\cdot\sin(t) \end{pmatrix}$; $t\in\mathbb{R}$

a) Bestem med Maple en parameterfremstilling for tangenten til parameterkurven for $\vec{f}$ i det punkt, der svarer til parameterværdien $\frac{\pi}{3}$.

Opgave 6100: Se på vektorfunktionen $\vec{f}(t)=\begin{pmatrix} 2\cdot\left(1-3\cdot t^2\right) \\ 2\cdot t\cdot\left(3-t^2\right) \end{pmatrix}$, $t\in[-3,3]$

a) Tegn parameterkurven i Maple.
b) Bestem funktionsbilledet (stedvektoren) i 2.
c) Bestem koordinatsættene til skæringerne med koordinatakserne.
d) Bestem parameterværdierne for dobbeltpunktet.
e) Bestem den afledede funktion og differentialkvotienten i 1.
f) Bestem tangentvektoren til grafen for $\vec{f}$ i $\begin{pmatrix} -22 \\ -4 \end{pmatrix}$.
g) Bestem parameterværdierne for de steder, hvor der er vandrette og lodrette tangenter.
h) Bestem vinklen mellem tangenterne til grafen for $\vec{f}$ i dobbeltpunktet.
i) Bestem arealet af den punktmængde, der afgrænses af grafen pga. dobbeltpunktet.
j) Bestem kurvelængden af grafen for $\vec{f}$

Opgave 6102: Se på vektorfunktionen $\vec{f}(t)=\begin{pmatrix} 4\cdot\sin(2\cdot t) \\ 3\cdot\sin(5\cdot t) \end{pmatrix}$, $t\in[-\pi,\pi]$

a) Tegn parameterkurven i Maple.
b) Hvor mange forskellige steder skæres førsteaksen af parameterkurven?
c) Hvor mange forskellige steder skæres andenaksen af parameterkurven?
d) Hvor mange vandrette tangentvektorer har parameterkurven?
e) Hvor mange lodrette tangentvektorer har parameterkurven?
f) Hvor mange dobbeltpunkter har parameterkurven?
g) Hvor mange triplepunkter har parameterkurven?
h) Bestem kurvelængden af grafen for $\vec{f}$

Opgave 6104: Se på vektorfunktionen $\vec{f}(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{t^2-1}{t^2+1}\\ \dfrac{2\cdot t\cdot\left(t^2-1\right)}{\left(t^2+1\right)^2}\end{pmatrix}$, $t\in[-100,100]$

a) Tegn parameterkurven i Maple.
b) Bestem parameterværdierne til dobbeltpunktet.
c) Bestem vinklen mellem tangenterne til grafen for $\vec{f}$ i dobbeltpunktet.
d) Bestem parameterværdien for det sted, hvor der er lodret tangent.
e) Bestem arealet af den punktmængde, som parameterkurven afgrænser i 2. og 3. Kvadrant.
f) Bestem kurvelængden af grafen for $\vec{f}$

Opgave 6106: Se på vektorfunktionen $\vec{f}(t)=\begin{pmatrix}\cos(5t)\cdot\cos(t)\\ \cos(5t)\cdot\sin(t)\end{pmatrix}$, $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

a) Tegn parameterkurven i Maple.
b) Bestem parameterværdierne for skæringerne med koordinatakserne.
c) Bestem arealet af én af de fem sløjfer.
d) Bestem alle de mulige vinkler mellem tangenterne til grafen for $\vec{f}$ i punktet $(0,0)$

Opgave 6110: Regnes i hånden. Se på stedfunktionen $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}t^2+3t+1\\ \sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}$; $t\in\mathbb{R}$

a) Bestem hastighedsfunktionen
b) Bestem hastigheden til tiden 0.
c) Bestem accelerationsfunktionen.
d) Bestem accelerationen til tiden 0.

Opgave 6112: Se på stedfunktionen $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{6t^2}{1+t^2}\\ \dfrac{6t^3}{1+t^2}\end{pmatrix}$; $t\in[-10,10]$

a) Tegn banekurven i Maple.
b) Bestem hastighederne i 0, 1 og 2.
c) Bestem farten i 0, 1 og 2.
d) Bestem accelerationerne i 0, 1 og 2.

Opgave 6114: Se på stedfunktionen $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{2\cdot\cos(t)}{\sin^2(t)+1}\\ \dfrac{2\cdot\cos(t)\cdot\sin(t)}{\sin^2(t)+1}\end{pmatrix}$; $t\in[0,2\pi[$

a) Tegn parameterkurven i Maple.
b) Bestem hastigheden og accelerationen i $\dfrac{\pi}{2}$.
c) Bestem parameterværdierne for dobbeltpunktet.
d) Bestem vinklen mellem tangenterne til grafen i dobbeltpunktet.
e) Bestem arealet af punktmængden afgrænset af grafen i 1. og 4. kvadrant.

Opgave 6116: Se på stedfunktionen $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} \dfrac{t^2-2t+5}{t^2-2t-3} \\ \dfrac{t^2-2t+5}{2t-2} \end{pmatrix}$; $t\in[-10,10[\setminus\{-1,1,3\}$

a) Tegn parameterkurven i Maple.
b) Tegn hastighedsfunktionen i Maple.
c) Tegn accelerationsfunktionen i Maple.

Opgave 6120: Se på cirkelbevægelsen givet ved stedfunktionen $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}+6\cdot\begin{pmatrix} \cos(4\cdot t) \\ \sin(4\cdot t) \end{pmatrix}$; $t\in\mathbb{R}$

a) Bestem cirklens centrum og radius.
b) Bestem perioden.
c) Bestem hastigheds- og accelerationsfunktionerne.
d) Bestem hastigheden og accelerationen til $t=\dfrac{\pi}{4}$.
e) Bestem farten og størrelsen af accelerationen.

Opgave 6122: Se på epicykelbevægelsen givet ved stedfunktionen

$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix}+7\cdot\begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{t}{12}\right) \\ \sin\left(\dfrac{t}{12}\right) \end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{t}{2}\right) \\ \sin\left(\dfrac{t}{2}\right) \end{pmatrix};\ t\in\mathbb{R}$$

a) Tegn parameterkurven i Maple.
b) Bestem hastighedsfunktionen og accelerationsfunktionen.
c) Bestem stedfunktionens værdi til tiderne $t_1=0$ og $t_2=\dfrac{24\cdot\pi}{10}$ (find punkterne på kurven).
d) Bestem hastighedsfunktionens værdi til tiderne $t_1=0$ og $t_2=\dfrac{24\cdot\pi}{10}$ (overvej retningerne)
e) Bestem farten til tiderne $t_1=0$ og $t_2=\dfrac{24\cdot\pi}{10}$ (overvej størrelserne)
f) Bestem accelerationens værdi til tiderne $t_1=0$ og $t_2=\dfrac{24\cdot\pi}{10}$ (overvej retningerne)

Opgave 6124: Se på stedfunktionen $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}+2{,}5\cdot\begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$; $t\in[0,2\pi[$

a) Tegn parameterkurven i Maple.
b) Bestem arealet af den afgrænsede punktmængde.

Opgave 6126: Se på stedfunktionen $\vec{s}(t) = b \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$; $t \in [0, 2\pi[$

a) Vælg forskellige *a*- og *b*-værdier (justér kun en værdi ad gangen). Prøv også med forskellige fortegn. I hvert tilfælde skal du tegne parameterkurven i Maple og bestemme arealet af den afgrænsede punktmængde.
b) Bestem en formel for arealet af den punktmængde, der dannes.

Opgave 6128: Justér på tallene i funktionsudtrykket i opgave 6122 og få forskellige figurer.

Opgave 6130: Bestem stedfunktionen og tegn i Maple følgende:
a) En ellipse med centrum i (5,3), den halve storakse 7 og den halve lilleakse 4.
b) Ovenstående ellipse roteret 45° mod uret omkring origo.
c) Ellipsen fra a) roteret 90° med uret omkring origo.

Opgave 6132: Bestem stedfunktionen og tegn i Maple følgende:
a) En parabel med toppunkt i $(1, -16)$, der skærer førsteaksen i punkterne $(-3, 0)$ og $(5, 0)$.
b) Ovenstående parabel roteret 60° med uret omkring origo.
c) Parablen fra a) roteret 90° mod uret omkring origo.

Opgave 6140: Se på cykloiden givet ved stedfunktionen $\vec{s}(t) = 5 \cdot \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$; $t \in [0, 8\pi[$

a) Tegn parameterkurven i Maple.
b) Bestem hastighedsfunktionen og accelerationsfunktionen.
c) Bestem størrelsen af accelerationen.
d) Bestem hastigheden til tiderne $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$ og $t_3 = \pi$.
e) Bestem accelerationen til tiderne $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$ og $t_3 = \pi$
f) Bestem arealet af en af puklerne.

Opgave 6142: Se på stedfunktionen $\vec{s}(t) = 10 \cdot \begin{pmatrix} \tan(t) \\ \cos^2(t) \end{pmatrix}$; $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

a) Tegn parameterkurven i Maple (Den kaldes *Agnesis heks* efter Maria Gaetana Agnesi, 1718-1799, der vist var den første kvindelige matematiker, der fik en stilling som professor ved et universitet. Ordet 'heks' skyldes en forveksling af de to italienske ord *versiera* og *versicra*).
b) Bestem hastigheden til tiden 0.
c) Bestem arealet mellem parameterkurven og førsteaksen.

Opgave 6144: Se på stedfunktionen $\vec{s}(t) = 5 \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \dfrac{\cos^2(t) \cdot (2 + \cos(t))}{3 + \sin^2(t)} \end{pmatrix}$; $t \in [-\pi, \pi[$

a) Tegn parameterkurven i Maple.
b) Bestem hastighederne til tiderne $t_1 = -\pi$, $t_2 = -\frac{\pi}{2}$ og $t_3 = 0$.
c) Bestem accelerationerne til tiderne $t_1 = -\pi$, $t_2 = -\frac{\pi}{2}$ og $t_3 = 0$.
d) Bestem arealet af den dannede punktmængde.

FACITLISTE

0010: a) 832040 b) 4870847 c) 907065 d) -75025 e) 28657

0012: a) 77474013 b) 3945,5154 c) 0,042020133

0014: a) 6972170240 b) -192864256

0016: a) 0, 3, 4 og 7 b) -6, 0, 5, og 11 c) -119, -53, -52 og 14

0020: a) 1,478943 b) 7,640396 c) $\sqrt{2}$

0022: ∞

0024: 33,637267

0026: π

0100:

Mængden A	min A	inf A	max A	sup A
$[-3,7]$	-3	-3	7	7
$[0,10[$	0	0	--	10
$]-\infty,1[$	--	--	--	1
$\mathbb{R}$	--	--	--	--
$\mathbb{R}_-$	--	--	--	0
$\{2,9,3,-4,11\}$	-4	-4	11	11
$\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\ldots\right\}$	--	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbb{N}$	1	1	--	--
$Vm\left(e^x\right)$	--	0	--	--
$Vm\left(\sin(x)\right)$	-1	-1	1	1
$Vm\left(\frac{1}{x}\right)$	--	--	--	--
$\{42\}$	42	42	42	42

0110: $a)\ f(x)\to\infty \text{ for } x\to\infty \quad b)\ f(x)\to 0 \text{ for } x\to 1 \quad c)\ f(x)\to 1 \text{ for } x\to \mathrm{e}$

0112: $a)\ f(x)\to 1 \text{ for } x\to 0 \quad b)\ --- \quad c)\ f(x)\to 0 \text{ for } x\to\frac{\pi}{2} \quad d)\ ---$

0114: $a)\ f(x)\to -\infty \text{ for } x\to 0_+ \quad b)\ f(x)\to\infty \text{ for } x\to 0_-$

$c)\ f(x)\to 0 \text{ for } x\to\infty \quad d)\ f(x)\to 0 \text{ for } x\to -\infty$

0116: $a)\ f(x)\to 2 \text{ for } x\to 0_+ \quad b)\ f(x)\to 2 \text{ for } x\to 0_- \quad c)\ f(x)\to 2 \text{ for } x\to 0$

$d)\ f(x)\to 4 \text{ for } x\to 2_+ \quad e)\ f(x)\to 10 \text{ for } x\to 2_- \quad f)\ ---$

0120: $a)\ \delta = 0,00498754 \quad b)\ \delta = 0,00000999995 \quad c)\ \delta = 9,99999995\cdot 10^{-9}$

0122: $a)\ M = 5,2983174 \quad b)\ M = 11,5129255 \quad c)\ M = 69,077553$

0124: $M = \frac{1}{\varepsilon}$

0126: $\delta = \ln\left(1+\frac{\varepsilon}{\mathrm{e}}\right)$

0130: a) 21 b) 0 c) 2 d) -9

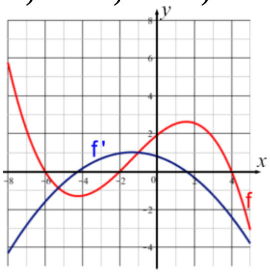
0132: a) 4 b) 6 c) -- d) 0 e) 3 f) e^7 g) $-\frac{1}{3}$ h) -- i) 8 j) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

0140: a) Ikke kontinuert b) Kontinuert c) Ikke kontinuert d) Kontinuert e) Kontinuert f) Ikke kontinuert

0142: a) Nej b) Ja c) Nej d) Nej e) Nej g) Ja

0150: a) 0,25 b) 6 c) 1 d) -1 e) 1

0170: a) B b) A c) A d) B e) A f) B

0172: 

0200: a) f er en løsning b) $f_k(x)=\frac{k}{x}$ c) 1

0202: a) N er en løsning b) $t \to \sqrt{t+k}$ eller $t \to -\sqrt{t+k}$ c) Ja d) Nej

0204: a) f er ikke en løsning b) $x \to \frac{1}{2}+k \cdot e^{x^2}$

0206: a) $t \to \frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}+k \cdot e^{-2 \cdot t}$ b) Ja c) Nej

0208: a) $f(x)=k_1 \cdot e^x \cdot \sin\left(\sqrt{2} \cdot x\right)+k_2 \cdot e^x \cdot \cos\left(\sqrt{2} \cdot x\right)+\frac{1}{4} \cdot \cos(x)+\frac{1}{4} \cdot \sin(x)$ b) Nej c) Ja

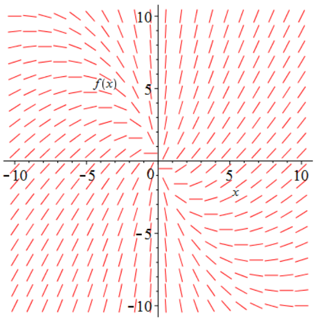
0210: a) $y=-2x+18$

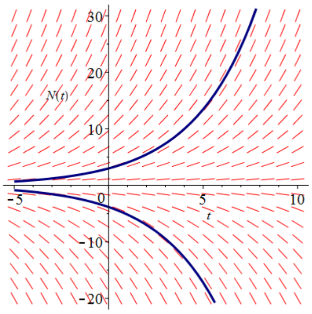
0212: a) $y=5x-7$ b) $(3,16)$

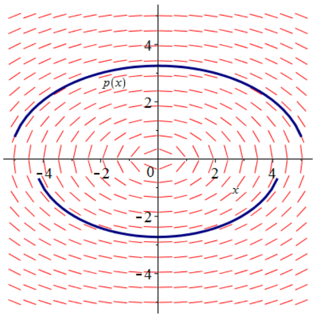
0220: $y=3x-13$

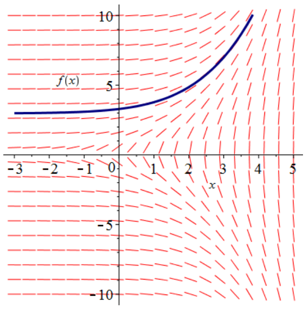
0222: $(4,7;5)$

0230 **0231** **0232** **0233**









0240: $f(x)=\sqrt{-2x^2+36}$; $-\sqrt{18}<x<\sqrt{18}$

0242: $N(t)=\frac{4}{3} \cdot t^2-\frac{8}{9} \cdot t+\frac{8}{27}$

0250: $\frac{dT}{dt}=k \cdot (T_0-T)$

0252: $f'(x)-f(x)=k \cdot \sqrt{\frac{x}{f(x)}}$

0300: $A_M=\frac{2385}{4}$

0302: $A_M=2$

0304: $A_M=\frac{2}{3}$

0306: $A_M=18$

0308: $A_M=\frac{2197}{6}$

0310: a) 1012 b) -147 c) 303 d) 23 e) -989 g) 865 h) 842 i) -1315

0312: $A_{M_1}=3$, $A_{M_3}=11$, $A_{M_2}=13$, $A_{M_4}=95$, $\int_{-8}^{9} f(x)dx=-94$

0314: $\int_{3}^{18} f(x)dx=-5$, $\int_{-5}^{3} f(x)dx=21$, $\int_{11}^{13} f(x)dx=-24$ og $\int_{13}^{3} f(x)dx=17$

0330: $A_M = 128$

0332: $A_M = 20,88802115$

0334: $A_M = 15,53573635$

0336: $A_M = 6,928203228$

0338: $A_M = 3,328857229$

0339: a) 91,488 b) 2666,7 c) 114,85 d) 52,057 e) 1,0711 f) 6,5632 g) 3,7854 h) 2,2309

0340: $V = 9380,9$

0342: $V = 107,23$

0344: $V = 32026,93$

0346: $V = \pi^2$

0350: $V = 6785,84$

0352: $V = 2,423867$

0354: $V = 63,8097$

0356: $V = 956,4351$

0370: $l_{bue} = 26,071$

0372: $l_{bue} = 7,6403956$

0374: $O = 85,61887$

0376: $O = 3,478943$

0378: $O = 8,3137698$

0380: $A_{overflade} = 10,96548$

0390: $a)\ V = 3,08\,\mathrm{dm}^3 \quad b)\ V = 6,86\,\mathrm{dm}^3 \quad c)\ A = 13,00\,\mathrm{dm}^2 \quad d)\ l = 2,91\,\mathrm{dm} \quad e)\ A = 44,07\,\mathrm{dm}^2$
$f)\ h = 1,13\,\mathrm{dm} \quad g)\ h = 0,98\,\mathrm{dm}$

0392: $a)\ A_{M_1+M_2} = 2,875 \quad b) V_{M_3} = 1,8957 \quad c) l_B = 6,022 \quad d) a = 7,234$

0394 $a) A_{M_2} = 4,0368 \quad b) V_2 = 18,645 \quad c) O_{M_2} = 10,938 \quad d) A_{M_1} = 0,59102$
$e) V_1 = 6,6168 \quad f) O_{M_1} = 4,7837 \quad g) A_{M_3} = 0,18194 \quad h) V_3 = 2,7841$
$i) O_{M_3} = 2,25615 \quad j) a = -1,59429 \quad k) A_{M_5} = 0,60036 \quad l) O_{M_5} = 3,83253$
$m) V_6 = 345,0254 \quad n) V_{6y} = 56,9188$

0396: $a) A_{M_1} = 11,96265 \quad b) V_1 = 68,34909 \quad c) O_{M_1} = 22,16745 \quad d) A_1 = 147,09548$

0500: $a) e^x \ b) 4x^3 \ c) 7x^6 \ d) 2x \ e) -4x^{-5} \ f) -5x^{-6} \ g) 1 \ h) -3x^{-4} \ i) -7x^{-8} \ j) 2,5x^{1,5} \ k) 5,1x^{4,1} \ l) -3,9x^{-4,9}$
$m) -6,4x^{-7,4} \ n) -1,9x^{-2,9} \ o) \frac{1}{2\sqrt{x}} \ p) \frac{1}{2\sqrt{x}} \ q) -\frac{1}{x^2} \ r) -\frac{1}{x^2} \ s) 0 \ t) 0 \ u) 0 \ v) 0 \ y) \frac{1}{x} \ z) \cos(x)$

0502: $a) \frac{1}{6}x^6 + c \ b) \frac{1}{4}x^4 + c \ c) \frac{1}{3}x^3 + c \ d) -\frac{1}{3}x^{-3} + c \ e) -\frac{1}{6}x^{-6} + c \ f) \frac{10}{37}x^{3,7} + c$
$g) \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c \ h) \ln|x| + c \ i) 7x + c \ j) 5x + c \ k) -3x + c \ l) \pi x + c$
$m) e^x + c \ n) \frac{4^x}{\ln(4)} + c \ o) \frac{8^x}{\ln(8)} + c \ p) \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + c \ q) \frac{0,21^x}{\ln(0,21)} + c \ r) x \cdot \ln(x) - x + c$

0504: $a) \ln(3)\cdot 3^x \ b) \ln(9)\cdot 9^x \ c) \ln(2)\cdot 2^x \ d) \ln\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x \ e) \ln(3,8)\cdot 3,8^x \ f) e^x \ g) \frac{1}{x} \ h) \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$i) \cos(x) \ j) -\sin(x) \ k) \frac{1}{\cos^2(x)} \ l) \frac{\log(e)}{x} \ m) 9x^8 \ n) 0 \ o) 6x^5 \ p) \ln(5)\cdot 5^x$
$q) e^x \ r) \cos(x) \ s) 5t^4 \ u) -\sin(t) \ v) \ln(3)\cdot 3^s \ w) \frac{1}{p} \ x) \frac{1}{2\cdot\sqrt{y}} \ z) 4a^3$

0506: $a)-\cos(x)+c$ $b)\sin(x)+c$ $c)\frac{1}{7}x^7+c$ $d)\frac{1}{2}x^2+c$ $e)\frac{1}{2}t^2+c$ $f)\frac{1}{2}k^2+c$

$g)-\cos(t)+c$ $h)e^t+c$ $i)\frac{4^a}{\ln(4)}+c$ $j)\frac{1}{5}x^5+c$ $k)\frac{1}{5}(\cos(x))^5+c$ $l)\frac{1}{5}(e^x)^5+c$

$m)e^y+c$ $n)e^{\sin(x)}+c$ $o)5x+c$ $p)k\cdot x+c$ $q)\frac{1}{2}k^2+c$ $r)9\cdot t+c$

0508: $a)4x^3$ $b)\frac{1}{5}x^5+c$ $c)1$ $d)\frac{1}{2}x^2+c$ $e)\cos(p)$ $f)-\cos(y)+c$ $g)-\sin(x)$

$h)1$ $i)e^{y^2}$ $j)\sin(x)+c$ $k)-\sin(x)$ $l)e^y$ $m)0$ $n)5^x$

0510: $a)39$ $b)\frac{15}{4}$ $c)1{,}25\cdot10^7$ $d)2$ $e)0$ $f)e^3-1$ $g)1$ $h)\frac{6}{\ln(2)}$ $i)\frac{52}{3}$ $j)50$

0512: $A_M=\frac{125}{3}$

0514: $A_M=\frac{250}{3}$

0520: $a)24x^3$ $b)\frac{-2}{x}$ $c)4\cdot\ln(3)\cdot3^x$ $d)7\cdot\cos(x)$ $e)5$ $f)\frac{2}{\sqrt{x}}$

0522: $a)\frac{5}{4}x^4+c$ $b)x^6+c$ $c)x^3+c$ $d)3x^2+c$ $e)8\cdot\ln|x|+c$ $f)4\cdot\sin(x)+c$

0524: $a)16$ $b)\ 5\cdot(\text{e-}1)$ $c)-6$ $d)\frac{21}{2}$ $e)5$ $f)14$

0526: $y=30x-45$

0528: $V=\frac{4\pi}{7}$

0530: $a)\ f'(x)=8x^3-15x^2+2x-9$ $b)\ g'(x)=5x^4-36x^3+6x^2-x+1$ $c)\ e^x+\cos(x)$

$d)\ i'(x)=-\frac{6}{x^2}-\frac{1}{x}$ $e)\ j'(x)=\ln(5)\cdot5^x-5x^4$ $f)\ k'(x)=-6\cdot\sin(x)+\frac{2}{\sqrt{x}}$

0532: $a)x^4-2x^3+x^2-7x+c$ $b)\frac{1}{3}x^6-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x+c$ $c)2e^x+4\sin(x)+2\cos(x)+c$

$d)4\cdot\ln|x|-\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+5x+c$ $e)\frac{6}{\ln(3)}\cdot3^x-\frac{1}{3}x^6+13x+c$ $f)\frac{30}{31}x^{3,1}+\frac{40}{27}x^{-2,7}+c$

0534: $a)\ 4$ $b)\ 2e-\frac{5}{3}$ $c)-6$

0535: Ikke en løsning.

0536: $A_M=\frac{32}{3}$

0538: $x_1=-3$ og $x_2=4$

0540: $a)\ 4x^3\cdot\cos(x)-x^4\cdot\sin(x)$ $b)\cos(x)\cdot\ln(x)+\frac{\sin(x)}{x}$ $c)e^x\cdot(x^2+2x)$ $d)5^x\cdot\left(\frac{\ln(5)}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$

$e)\ \frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}$ $f)3\cdot5^x\cdot x^4\cdot(5+x\cdot\ln(5))$ $g)2\cdot\sin(t)\cdot\sqrt{t}-\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}$ $h)\ t^5\cdot(6\cdot\ln(t)+1)$

0542: 14e

0544: Det er en løsning.

0550: $a)e^x\cdot(x-1)+k$ $b)\cos(x)+x\cdot\sin(x)+k$ $c)\frac{62}{\ln(2)}-\frac{14}{\ln(2)^2}$ $d)-x^2\cdot\cos(x)+2x\cdot\sin(x)+2\cdot\cos(x)+k$

0552: $a)\ x^7\cdot\left(\ln(x)-\frac{1}{7}\right)+k$ $b)\frac{1}{2}\cdot(x+\cos(x)\cdot\sin(x))+k$ $c)\frac{\sin^2(x)}{2}+k$ $d)4e^x\cdot(x^3-3x^2+6x-6)+k$

0560: $a)\dfrac{x^2\cdot\left(3\cdot\sin(x)-x\cdot\cos(x)\right)}{\sin^2(x)}$ $b)\dfrac{1}{x\cdot\cos(x)}+\dfrac{\ln(x)\cdot\sin(x)}{\cos^2(x)}$ $c)\dfrac{2x-x^2}{e^x}$ $d)\dfrac{-\sin(x)-\ln(4)\cdot\cos(x)}{4^x}$ $e)\dfrac{e^t\cdot\left(\sqrt{t}-\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\right)}{t}$

0562: Det er en løsning.

0564: -1

0566: $y=\dfrac{2}{e}\cdot x-\dfrac{1}{e}$

0570: $a)-3x^2\cdot\sin\left(x^3\right)$ $b)\dfrac{4x^3+2x}{x^4+x^2+1}$ $c)-\sin(x)\cdot e^{\cos(x)}$ $d)-\dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$ $e)5\cdot\left(2x+\ln(3)\cdot 3^x\right)\cdot\left(x^2+3^x\right)^4$

$f)3\cos(x)\cdot\sin^2(x)$ $g)\dfrac{6t+5}{2\cdot\sqrt{3t^2+5t-4}}$ $h)\cos(y)\cdot\ln(7)\cdot 7^{\sin(y)}$ $i)-\dfrac{1}{x^2}\cdot\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $j)-\dfrac{3s^2-10s+3}{\left(s^3-5s^2+3s-4\right)^2}$

0572: 2

0574: Ikke en løsning

0580: $a)\cos\left(13^x\right)+k$ $b)e^{\sqrt{x}}+k$ $c)\dfrac{\sin^7(x)}{7}+k$ $d)e^{x^3+5x^2+7x-11}$ $e)$e-1 f)$\dfrac{21}{2}$ $g)-2$ $h)1-\cos(\text{e-1})$

0581: $a)\sin\left(x^2+5x-7\right)+k$ $b)-\ln(2)$ $c)-4\cdot\left(\cos(x)+2\right)^{\frac{3}{2}}+k$ $d)\sin(1)$ $e)4\cdot\ln\left(x^2+4x+5\right)+k$ $f)\dfrac{279808}{7}$

0600: F_2, F_5, F_7 og F_8

0610: $F(x)=3x^2+5x-27$

0612: $F(x)=e^x+4x^2-x+8$

0614: $F(x)=\sin(x)-\cos(x)+1$

0616: $F(x)=e^x\cdot(x-1)+5$

0618: $F(x)=\sin\left(\sqrt{x}\right)+8$

0620: $y=7x-2$

0622: $A_M=e\cdot\left(e^3-1\right)$

0624: Det er en løsning.

0626: $F(x)=e^x+9x-13-e^2$

0628: $y=\ln(7)\cdot 49\cdot x+49\cdot\left(1-2\cdot\ln(7)\right)$

0630: a) ∞ b) ∞ c) $V=\pi$

0632: Ikke en løsning

0640: $a)\ A=2$ $b)\ l=6{,}962$ $c)\ V=\dfrac{\pi^2}{2}$ $d)\ A=14{,}424$ $e)\ f_{gen}=\dfrac{2}{\pi}$

0650: $a)\ \overline{f}=\dfrac{2}{\pi}$ $b)\ \overline{f}=0$ $c)\ \overline{f}=0$

0652: $\overline{f}=\dfrac{305}{12}$

0654: a) $x_1=-0{,}880689$ og $x_2=0{,}880689$ b) $x=5{,}242381$

0700: *f* er voksende.

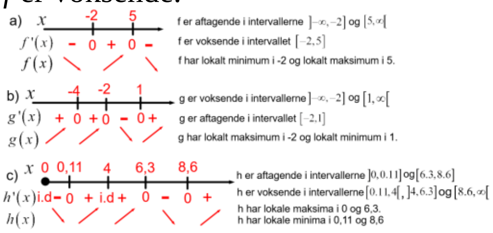
0702: *f* er hverken voksende eller aftagende.

0704: *f* er aftagende.

0706: *f* er aftagende.

0708: *f* er voksende.

0710:



0730: $a)\ Vm(f)=[-6,9]$ $\quad b) Vm(g)=]-\infty,2]\cup[8,\infty[$ $\quad c) Vm(h)=]-\infty,-4[\cup[3,9]\cup[21,\infty[$

0740: a) f er voksende i intervallerne $]-\infty,-4]$ og $[-1,\infty[$ og aftagende i intervallet $[-4,-1]$.

b) f er voksende i intervallet $]-\infty,0]$ og aftagende i intervallet $[0,\infty[$

c) f er aftagende i intervallet $]-\infty,-2]$ og voksende i intervallet $[-2,\infty[$

0750: $a)\ x=\frac{4}{3}$ $\quad b)\ x_1=-0,379$, $x_2=0,879$ $\quad c)\ x=135,4$ $\quad d)$ Ingen $\quad e)$ Alle steder

0752: $v_{\min}=-70,69779$

0760: a) f_1 er voksende i intervallerne $]-\infty,-4]$ og $[7,\infty[$ og aftagende i intervallet $[-4,7]$.

b) f_2 er aftagende i intervallerne $]-\infty,-6]$ og $[-1,3]$ og voksende i intervallerne $[-6,-1]$ og $[3,\infty[$

c) f_3 er voksende i intervallet $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ og aftagende i intervallet $\left[\frac{1}{2},\infty\right[$.

d) f_4 er aftagende i $]-\infty,-1.282]$ og $[2.042,3.734]$ og voksende i $[-1.282,2.042]$ og $[3.734,\infty[$

e) f_5 er aftagende i intervallerne $]-\infty,-4[$, $]-4,3[$ og $]3,\infty[$

0770: $x=1$

0772: $v_{maks}=-\frac{59}{12}$

0774: $y=\frac{3}{2}x-\frac{25}{6}$

0776: a) 0 b) 0 c) 0, 1 og 2 d) 1, 2 og 3 e) 0, 1, 2, 3 og 4 f) 1, 2, 3, 4 og 5
g) Uendelig mange h) Uendelig mange

0780: $a) V(x)=2x^3-12x^2+18x$ $\quad b)\ x_{\max}=1\text{cm}$

0782: 1800 m^2

0784: $x=15,2\,\text{m}$

0800: $p_8(x)=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!}-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^7}{7!}$

0802: $p_6(x)=1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+(x-1)^4-(x-1)^5+(x-1)^6$

0810: $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}+\ldots$

1006: Det er en løsning.

1012: a) 984 b) 32198 år

1024: $k=0,063$

1026: a) $v'(t)=4,82$, hvilket vil sige, at når hastigheden af fnugget er $0,02\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, er hastighedens væksthastighed (dvs. accelerationen) $4,82\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. b) $v(t)=\frac{491}{12500}\cdot\left(1-e^{-250\cdot t}\right)$, $t\geq 0$

1040: $p(x)=x^2-4x+2$

1050: $a)\ h(x)=x^3, g(y)=e^y$ $\ b)\ h(x)=\frac{1}{x^2}$, $g(y)=\cos(y)$ $\ c)\ h(x)=e^{x^2+3}$, $g(y)=\frac{1}{y}$ $\ d)\ h(x)=\frac{1}{x}$, $g(y)=y^2$ $\ e)\ h(x)=1, g(y)=y^4$

1052: $a)$ Ja, $h(x)=2x, g(y)=y$ $\ b)$ Ja, $h(x)=\frac{1}{x+1}, g(y)=y$ $\ c)$ Nej $\ d)$ Ja, $h(x)=5-x, g(y)=4y$ $\ e)$ Ja, $h(x)=\frac{1}{x}, g(y)=\frac{1}{3y}$

$f)$ Ja, $h(x)=e^x, g(y)=e^y$ $\ g)$ Ja, $h(x)=\frac{\sin(x)}{x}, g(y)=\frac{1}{y}$ $\ h)$ Nej $\ i)$ Ja, $h(x)=x+2, g(y)=y+1$ $\ j)$ Nej

1060: $a)\ f: x \mapsto \sqrt{2\cdot\sin(x)+4}\ ;\ x\in\mathbb{R}$ $b)\ f: x\mapsto \sqrt{1-16x^2}\ ;-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{4}$ $c)\ f: x\mapsto -\sqrt{x^2+4x-8}\ ;\ x>\sqrt{12}-2$

$d)\ f: x\mapsto \left(3-\frac{x}{2}\right)^2\ ;\ x<6$ $e)\ f: x\mapsto 1+e^{\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}}\ ;x\in\mathbb{R}$ $g)\ f: x\mapsto x\cdot e^{x-1}\ ;\ x>0$

1070: a) 10000 b) 5000 c) 150 individer pr. uge.

1072: a) 25 præriehunde pr. år b) 600 er den øvre grænse for antallet af præriehunde.

Der er 300 præriehunde, når væksthastigheden er størst. c) $N(t)=\dfrac{600}{1+49{,}3\cdot e^{-0{,}3\cdot t}}$ år1993

1074: $\dfrac{dA}{dt}=\dfrac{3}{12500}\cdot A\cdot(750-A)$

1090: $y=2x+3$

1091: $\dfrac{dN}{dt}=0{,}05\cdot\sqrt{t}\cdot(5000-N)$

1092: $a)\ h(t)=-0{,}0009\cdot t^2+0{,}24\cdot t+4$ $b)\ 282{,}4\,\mathrm{s}$

1093: a) 18,4 timer b) -0,050 dvs. at 200 døgn efter 1.januar aftager dagslængden med 0,05 time pr. døgn (dvs. 3 minutter pr. døgn)

1094: Ikke en løsning (Man får $0=2x$, hvilket ikke er en identitet)

1095: a) $U'(7)=-9{,}65$, dvs. at til tiden 7 ms aftager spændingsfaldet med 9,65 volt pr. ms.

b) [6,6 ms ; 16,6 ms] c) 1,59 ms

1100: $a)\ x^2\cdot\cos(x)-2x\cdot\sin(x)$ $b)\ -1$ $c)\ -2\cdot k$ $d)\ 0$ $e)\ e^x\cdot(\cos(x)+\sin(x))$ $h)\ k$ $i)\ 0$ $j)\ -5\cdot e^{-x}$ $k)\ 0$

1126: $A=27{,}9$

1160: a) 1,837066 b) 2,035994 c) 2,063781 d) 2,048771 e) 2,066782 f) 2,066998

1162: a) 48,17907 b) 53,38615 c) 53,97318 d) 53,84642 e) 54,03717 f) 54,03922

1170: $a)\ 4{,}89672241$ $b)\ 4{,}89672405$ $c)\ 4{,}89672405$

1190: $a)\ x^2+y^2=9$ Cirkel med centrum i origo og radius 3. $b)\ z=y^2+32$ parabel

$c)\ z=x^2+23$ parabel. $d)\ x^2+y^2=0$ Punktet (0,0)

1192: $a)\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ Ellipse (med centrum i origo, halve storakse 3 og halve lilleakse 2)

$b)\ z=\dfrac{y^2}{4}+14$ parabel. $c)\ z=\dfrac{x^2}{9}+6$ parabel. $d)\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=-5$ Ingen punkter

1194: $a)\ y=x$ Ret linje $b)\ z=y^3-1$

1196: $a)\ 13=\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{4}+x\cdot y$ $b)\ z=\dfrac{y^2}{9}-4y-4$ Parabel $c)\ z=-\dfrac{x^2}{4}+3x+1$ Parabel

1200: $a)\ \dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2y$ $b)\ \dfrac{\partial f}{\partial x}=5\cdot\cos(x)$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{6}{y}$ $c)\ \dfrac{\partial f}{\partial x}=10x+1$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}=12y^2-2$

$d)\ \dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2y^2$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2x^3y$ $e)\ \dfrac{\partial f}{\partial x}=5\cos(x)\ln(y)$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{5\sin(x)}{y}$

$g)\ \dfrac{\partial f}{\partial x}=8e^x$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ $h)\ \dfrac{\partial f}{\partial x}=e^x\cdot e^y$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}=e^x\cdot e^y$ $i)\ \dfrac{\partial f}{\partial x}=8x-3y$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-3x+10y$

$j)\ \dfrac{\partial f}{\partial x}=18x^2+8xy-y^2$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}=4x^2-2xy+6y^2$ $k)\ \dfrac{\partial f}{\partial x}=y\cdot x^{y-1}$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\ln(x)\cdot x^y$

$l)\ \dfrac{\partial f}{\partial x}=\cos(y)$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-x\cdot\sin(y)$ $m)\ \dfrac{\partial f}{\partial x}=5x^4\cdot 5^y$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^5\cdot\ln(5)\cdot 5^y$

1201: $a)\ \frac{\partial f}{\partial x}=15\cdot\ln(z)\cdot y^4\cdot e^{3x}\quad \frac{\partial f}{\partial y}=20\cdot\ln(z)\cdot e^{3x}\cdot y^3\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{5\cdot e^{3x}\cdot y^4}{z}\quad b)\ f_x'(0,2,e)=240\ \ f_y'(0,2,e)=160$

1202: a) $\frac{\partial f}{\partial x}=2xz-1\quad \frac{\partial f}{\partial y}=z\quad \frac{\partial f}{\partial z}=x^2+y+3z^2\quad b)\ f_x'(3,17,-2)=-13\ \ f_y'(-12,6,58)=58\ \ f_z'(3,-5,2)=16$

1203: $\frac{\partial g}{\partial x}=2\cdot x\cdot y\cdot\cos(x^2\cdot y)\quad \frac{\partial g}{\partial y}=x^2\cdot\cos(x^2\cdot y)$

1204: $\frac{\partial f}{\partial x}=y\cdot e^{x\cdot y}+\frac{z}{x}-5yz\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x\cdot e^{x\cdot y}-5xz\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\ln(x)-5xy$

1205: $\frac{\partial f}{\partial x}=z\cdot y\cdot x^{y-1}\quad \frac{\partial f}{\partial y}=z\cdot\ln(x)\cdot x^y\quad \frac{\partial f}{\partial z}=x^y$

1206: $a)\ \frac{\partial f}{\partial x}=7\cdot\cos(5y)\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-35\cdot x\cdot\sin(5y)\quad b)\ \frac{\partial f}{\partial x}=5\cdot y^3\cdot e^{5x}\quad \frac{\partial f}{\partial y}=3\cdot e^{5x}\cdot y^2\quad c)\ \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{y}\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}$

$d)\ \frac{\partial f}{\partial x}=2\cdot\ln(y)\cdot y^{2x+5}\quad \frac{\partial f}{\partial y}=(2x+5)\cdot y^{2x+4}\quad e)\ \frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\sqrt{6y}}{2\cdot x\cdot\sqrt{x}}\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\sqrt{\frac{3}{2xy}}$

$g)\ \frac{\partial f}{\partial x}=y^2\cdot x^{y-1}\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^y\cdot(\ln(x)\cdot y+1)\quad h)\ \frac{\partial f}{\partial x}=2\cdot y\cdot(2x+5)^{y-1}\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\ln(2x+5)\cdot(2x+5)^y$

1210: $a)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6xy\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-10\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=3x^2\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=3x^2\quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=12x^2+6y^2\quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=6x^2-42y$

$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=12xy\quad \frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}=12xy\quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=-4\cdot\sin(2x)\cdot\cos(3y)\quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=-9\cdot\sin(2x)\cdot\cos(3y)$

$\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}=-6\cdot\cos(2x)\cdot\sin(3y)\quad \frac{\partial^2 h}{\partial y\partial x}=-6\cdot\cos(2x)\cdot\sin(3y)$

b) $f''_{xx}(5,-3)=-90\quad f''_{yy}(37,-19)=-10\quad f''_{xy}(5,11)=75\quad g''_{xx}(1,1)=18$

$g''_{yy}(1,1)=-36\quad g''_{xy}(-2,3)=-72\quad h''_{xx}\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)=4\quad h''_{yy}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{7}\right)=0\quad h''_{xy}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=-6$

1220: $a)\ (2x,2y)\quad b)\ (2,6)\quad c)\ (-8,10)$

1222: $a)\ (2z\cdot y^3\cdot x\ ,\ 3z\cdot x^2\cdot y^2\ ,\ x^2\cdot y^3)\quad b)\ (-540,540,-108)$

1224: $a)\ \left(\frac{2x}{y},-\frac{x^2}{y^2}+2y+1\right)\quad b)\ (8,-13)\quad c)\ \left(0,-\frac{1}{2}\right)$

1226: $a)\ (6x-6,10y,-2z+4)\quad b)\ (-12,0,-8)\quad c)\ (1,0,2,1)$

1228: $a)\ (2z\cdot x+y^3\ ,\ 3x\cdot y^2+z^2-4,\ x^2+2y\cdot z+5)\quad b)\ (11,11,3)$

1230: $a)\ \begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}\quad b)\ A:\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad B:\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}\quad C:\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}\quad c)\ A: z=0\quad B: 8y-z-16=0\quad C: 6x+8y-z-25=0$

d) B: 8 C: 10 e) I B går det stejlest opad, hvis man bevæger sig i y-aksens retning, og tangentplanens hældning i denne retning er 8. I C er tangentplanens hældning 10 i den retning, hvor fladen går stejlest opad.

1240: a) (3,-5,16) Lokalt minimum b) $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ Saddelpunkt c) $\left(\frac{13}{3},-\frac{11}{3},\frac{94}{3}\right)$ Saddelpunkt

d) (0,0,4) Lokalt minimum e) (-3,-1,98)max, (-3,5,-10) saddelp., (2,-1,-27)saddelp., (2,5,-135) min

f) $(-1.8955,0,1.1584)$ Lokalt minimum, (0,0,2) Saddelpunkt, $(1.8955,0,1.1584)$ Lokalt minimum

1280: $a)V=8\pi^2$ $\quad b)V=25000$ $\quad c)V=2964,4722$

1300: $a)\,A(5)=8,2\cdot 10^8$ $\;b)\,t=0,5754$ $\;c)\,N_{B,maks}=1,394\cdot 10^{10}$ $\quad d)\,\delta\sim 1,\ \alpha\sim 2, \gamma\sim 3, \beta\sim 4$

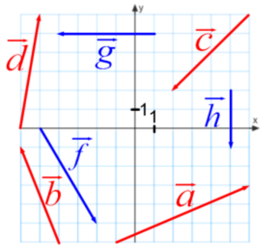
1310: $I_{maks}=669742$

1312: $a)\,I_{maks}=233484$ $\;b)\,S_{slut}=107355$

5001: $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix}$ $\vec{d}=\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$ $\vec{f}=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ $\vec{g}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\vec{h}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$

5004: $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix},\overrightarrow{BA}=\begin{pmatrix}-7\\-1\end{pmatrix},\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\-8\end{pmatrix},\overrightarrow{CA}=\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix},\overrightarrow{DE}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix},\overrightarrow{ED}=\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix},\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}7\\9\end{pmatrix},\overrightarrow{BE}=\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix},\ \overrightarrow{CE}=\begin{pmatrix}9\\5\end{pmatrix}$

5007: Bemærk, at placeringen kan vælges frit. Det er kun længden og retningen, der skal passe:



5009: $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ $\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{d}=\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$

5030: $2\cdot\vec{a}+5\cdot\vec{b}$

5031: $s=8\wedge t=-3$

5033: $(a,b)=(1,4)$

5037: $\vec{c}:(s,t)=(4,9)$, $\vec{d}:(s,t)=(-7,3)$, $\vec{f}:(s,t)=(13,-27)$,
$\vec{g}:(s,t)=(-17,0)$, $\vec{h}:(s,t)=(0,119)$ og $\vec{i}:(s,t)=(8.4,-3.6)$

5040: a) $5\cdot\vec{a}+4\cdot\vec{b}-7\cdot\vec{c}$

b) $-2\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+6\cdot\vec{c}$

c) Ingen linearkombinationer. Vektorerne $\vec{a},\vec{b}$ og $\vec{c}$ ligger i samme plan (hver af dem kan skrives som en linearkombination af de to andre), og $\vec{d}$ ligger ikke i denne plan.

d) Uendeligt mange linearkombinationer, da $\vec{a},\vec{b}$ og $\vec{c}$ er de samme som før, men da $\vec{d}$ denne gang ligger i samme plan som de tre andre vektorer.

e) $38\cdot\vec{a}-52\cdot\vec{b}+13\cdot\vec{c}$

5045: $5\cdot\vec{a}+3\cdot\vec{b}-4\cdot\vec{c}-2\cdot\vec{d}+7\cdot\vec{f}+4\cdot\vec{g}-1\cdot\vec{h}$

5050: $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}0\\9\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OD}=\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OE}=\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$

5052: $A(4,-6,-3), B(1,9,5), C(14,0,1), D(0,0,0)$

5060: $L(-15,9)$

5062: $K(-8,6,-14)$

5064: $C(10,7,2)$

5066: $P(-13,1)$

5067: $\overrightarrow{BD}=\begin{pmatrix}12\\8\end{pmatrix}$

5068: $s=2, t=-27$ og $u=11$

5075: $C(15,-7)$

5077: $C(4,-5,-14)$

5080: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} \ ; \ t \in \mathbb{R}$

5081: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \ ; \ t \in \mathbb{R}$

5082: $P_0(3,-5,2)$ og $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

5083: $P_0(-2,5)$ og $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

5084: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \ ; \ t \in \mathbb{R}$

5085: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} \ ; \ t \in \mathbb{R}$ eller $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} \ ; \ t \in \mathbb{R}$ eller ...

5086: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \ ; \ t \in \mathbb{R}$ eller $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \ ; \ t \in \mathbb{R}$ eller ...

5090: $(5,-3),(3,-2),(1,-1),(7,-4)$ og $(9,-5)$

5091: $(4,1,-9),(7,3,-2),(19,11,26),(34,21,61)$ og $\left(\frac{17}{2},4,\frac{3}{2}\right)$

5092: a) F.eks. $(-9,2)$ og $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) F.eks. $(-6,1),(-3,0),(0,-1),(-12,3),(-15,4)$ og $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 12 \\ -4 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) Ja d) Nej

5093: a) F.eks. $(7,2,-3)$ og $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ b)F.eks. $(8,-2,2),(6,6,-8)$ og $\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ 15 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ c) Nej d) Ja

5094: $(-6,-3)$ og $(19,7)$

5100: $a) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}$ $b) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $c) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

5101: $a) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $b) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ $c) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

5102: $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix} \ ; \ t \in \mathbb{R}$

5110:
$a)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix};\ t\in\mathbb{R}$ $\quad b)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix};\ t\in\mathbb{R}$ $\quad c)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix};\ t\in\mathbb{R}$

$d)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\frac{3}{5}\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-9\\2\end{pmatrix};\ t\in\mathbb{R}$ $\quad e)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-8\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\ t\in\mathbb{R}$ $\quad f)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix};\ t\in\mathbb{R}$

5111: $a)\ y=6x-17 \quad b)\ y=-5x+22 \quad c)\ y=\frac{1}{4}x+\frac{11}{2} \quad d)\ y=-\frac{5}{2}x+\frac{47}{2} \quad e)\ y=-1 \quad f)\ y=3$

5112: $a)\ v=80{,}54° \quad b)\ v=68{,}20° \quad c)\ v=45° \quad d)\ v=36{,}87°$

5120: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}5\\3\\-1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-4\\2\\5\end{pmatrix};(s,t)\in\mathbb{R}^2$

5121: a) $(7,-1,4),(9,2,-1)$ og $(-11,14,19)$ b) $(4,5,4),(5,38,-21)$ og $(-1,8,9)$

5122: a) Nej b) Nej c) Ja

5124: a) P ligger ikke på l b) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-1\\7\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\6\\-9\end{pmatrix};(s,t)\in\mathbb{R}^2$

5126: b) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\14\\-1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}6\\-14\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\5\\3\end{pmatrix}\ ;\ (s,t)\in\mathbb{R}^2$

5140: $r=3$ og $C=(-5,2)$

5141: $r=6$ og $C=(3,-9)$

5142: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}\cos(t)\\\sin(t)\end{pmatrix}\ ;\ t\in[0,2\pi[$

5143: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos(t)\\\sin(t)\end{pmatrix}\ ;\ t\in[0,2\pi[$

5146: $m:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\-1\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix};\ t\in\mathbb{R}$

5148: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\13\\-4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\6\\-4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}9\\-2\\5\end{pmatrix};(s,t)\in\mathbb{R}^2$

5149: $r=4$ og $C=(-9,-1)$

5161: $a)\ t=-3\ \vee\ t=3 \quad b)\ t=-\sqrt{21}\ \vee\ t=\sqrt{21} \quad c)\ t=-5\ \vee\ t=5 \quad d)\ L=\emptyset$

5163: $a)\ t=-3\ \vee\ t=3 \quad b)\ t=-12\ \vee\ t=12 \quad c)\ t=0 \quad d)\ t=-13\ \vee\ t=13$

5170: $|\overrightarrow{AB}|=5, |\overrightarrow{AC}|=13, |\overrightarrow{BC}|=8\sqrt{2}$ og $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|=13$

5172: $|\overrightarrow{AB}|=13, |\overrightarrow{AC}|=3, |\overrightarrow{BC}|=3\cdot\sqrt{22}$ og $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|=3$

5184: $a)\ t=-6 \quad b)\ t=-\frac{27}{7} \quad c)\ t=21 \quad d)\ t=0 \quad e)\ t=6$

5186: $a)\ t=8 \quad b)\ t=15 \quad c)\ t=-4 \vee t=3 \quad d)$ *Nej* $\quad e)$ *Nej*

5198: $t=\frac{11}{3}$

5220: $\overrightarrow{a_b}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c_a}=\begin{pmatrix}-2\\10\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{d_a}=\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$

5222: $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\12\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$

5230: $a)\ \overrightarrow{a_b}=\begin{pmatrix}\frac{27}{13}\\\frac{18}{13}\end{pmatrix}\ \ \overrightarrow{b_a}=\begin{pmatrix}-\frac{9}{37}\\\frac{54}{37}\end{pmatrix}\ \ b)\ \overrightarrow{a_b}=\begin{pmatrix}-\frac{9}{13}\\-\frac{36}{13}\\\frac{27}{13}\end{pmatrix}\ \ \overrightarrow{b_a}=\begin{pmatrix}\frac{15}{13}\\-\frac{6}{13}\\-\frac{21}{13}\end{pmatrix}\ \ c)\ \overrightarrow{a_b}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\ \ \overrightarrow{b_a}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\ \ d)\ \overrightarrow{a_b}=\begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix}\ \ \overrightarrow{b_a}=\begin{pmatrix}\frac{45}{23}\\-\frac{15}{23}\\\frac{90}{23}\end{pmatrix}$

5234: $t=10$

5240: $a)\left|\overrightarrow{a_b}\right|=\frac{63}{13}$, $\left|\overrightarrow{b_a}\right|=\frac{63}{5}$ $b)\left|\overrightarrow{a_b}\right|=\frac{20}{3}$, $\left|\overrightarrow{b_a}\right|=\frac{20}{7}$ $c)\left|\overrightarrow{a_b}\right|=0$, $\left|\overrightarrow{b_a}\right|=0$ $d)\left|\overrightarrow{a_b}\right|=0$, $\left|\overrightarrow{b_a}\right|=0$

5260: $v_{a\to b}(-), v_{b\to a}(+), v_{a\to c}(-), v_{b\to c}(-), v_{a\to d}(+), v_{b\to d}(+)$ og $v_{c\to d}(-)$

5274: a) Parallelle — b) $A=14$, positiv omløbsretning

c) $A=16$, negativ omløbsretning — d) $A=97$, positiv omløbsretning

5276: a) 38 b) 6 c) 18,5 d) 20,5

5278: a) 18,5 b) 53 c) 77,5 d) 32

5284: a) 32,450 b) Parallelle c) 32,016 d) 78,555 e) Parallelle f) 6,7083

5286: a) 25,250 b) 25,715 c) 0,5

5288: $\vec{r}=\begin{pmatrix}-\frac{13}{10}\cdot\sqrt{2}\\-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\\\frac{8}{5}\cdot\sqrt{2}\end{pmatrix}$ eller $\vec{r}=\begin{pmatrix}\frac{13}{10}\cdot\sqrt{2}\\\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\\-\frac{8}{5}\cdot\sqrt{2}\end{pmatrix}$

5300: a) Ja b) Ja c) Ja d) Nej e) Nej f) Ja

5310: $a)\ \vec{n}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}\ b)\ \vec{n}=\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}\ c)\ \vec{n}=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}\ d)\ \vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\ e)\ \vec{n}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\ f)\ \vec{n}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

5311: $a)\ \vec{r}=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}\ b)\ \vec{r}=\begin{pmatrix}-7\\-3\end{pmatrix}\ c)\ \vec{r}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\ d)\ \vec{r}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\ e)\ \vec{r}=\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}\ f)\ \vec{r}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

5312: $a) 7x+4y-23=0$; $G=\mathbb{R}^2$ $b)-5x+2y-32=0$; $G=\mathbb{R}^2$ $c)-x+6y+2=0$; $G=\mathbb{R}^2$

$d) x-y-21=0$; $G=\mathbb{R}^2$ $e) y+5=0$; $G=\mathbb{R}^2$ $f) x=0$; $G=\mathbb{R}^2$

5314: a) $3x-7y+23=0$; $G=\mathbb{R}^2$ b) $3x-7y-19=0$; $G=\mathbb{R}^2$ c) $7x+3y-29=0$; $G=\mathbb{R}^2$

5315: a) $-x+6y+4=0$; $G=\mathbb{R}^2$ b) $-x+6y-18=0$; $G=\mathbb{R}^2$ c) $6x+y=0$; $G=\mathbb{R}^2$

5316: a) $y=-2$; $G=\mathbb{R}^2$ b) $y=4$; $G=\mathbb{R}^2$ c) $x=0$; $G=\mathbb{R}^2$

5317: $a)\ t=-2$ $b) t=-\frac{21}{4}$ $c) t=\frac{12}{7}$

5318: $t=\frac{36}{7}$

5319: a) $-2x+y+16=0$ b) $\overrightarrow{r_m}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ c) $t=14$ d) $t=-\frac{7}{2}$

5320: $a)\vec{n}=\begin{pmatrix}-52\\-3\\19\end{pmatrix}$ $b)\vec{n}=\begin{pmatrix}50\\34\\-2\end{pmatrix}$ $c)\vec{n}=\begin{pmatrix}35\\-6\\14\end{pmatrix}$ $d)\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$

5330: $a)\vec{n}=\begin{pmatrix}4\\-5\\2\end{pmatrix}$ $b)\vec{n}=\begin{pmatrix}-2\\7\\3\end{pmatrix}$ $c)\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}$ $d)\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$ $e)\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}$ $f)\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}$

5331: $a)2x-5y+3z+5=0;G=\mathbb{R}^3$ $b)8x-y-4z-27=0;G=\mathbb{R}^3$ $c)x+5y-z-9=0;G=\mathbb{R}^3$
$d)3y-2z-39=0;G=\mathbb{R}^3$ $e)5x-z+7=0;G=\mathbb{R}^3$ $f)y=0;G=\mathbb{R}^3$

5332: $t=7$

5333: $s=-21$

5340: $a)7x+22y+2z-117=0;G=\mathbb{R}^3$ $b)3x-5y+2z-51=0;G=\mathbb{R}^3$
$c)-14x-y+2z+68=0\;;\;G=\mathbb{R}^3$ $d)6x-7y-17z=0\;;G=\mathbb{R}^3$
$e)\,y=4\;;\;G=\mathbb{R}^3$ $f)x=0\;;\;G=\mathbb{R}^3$

5342: $a)\;51x+46y+54z-335=0\;;\;G=\mathbb{R}^3$ $b)-58x+3y-31z-19=0\;;G=\mathbb{R}^3$
$c)\;-23x+34y+47z-77=0\;;\;G=\mathbb{R}^3$ $d)\;x-2y+5z-27=0\;;G=\mathbb{R}^3$
$e)\;z=2\;;\;G=\mathbb{R}^3$ $f)\;x-2y+z=0\;;G=\mathbb{R}^3$

5344: $t=-78$

5400: $(20,0)$

5401: $(0,1)$ og $(0,-7)$

5402: Ingen skæringer.

5403: $(0,28,-11),\left(\frac{14}{3},0,3\right)$ og $\left(\frac{11}{3},6,0\right)$

5404: $\left(0,0,\frac{86}{7}\right),\left(0,-\frac{43}{6},0\right)$ og $(-172,0,0)$

5405: $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x=0\wedge z=-2y+3\}$

5406: Cirklen med $C(-1,0,-3)$ og $r=4$: $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,y=0\wedge x^2+2x+z^2+6z-6=0\}$

5407: Ingen skæringspunkter.

5408: $\left(\frac{17}{2},0,0\right)$

5409: $(0,0,0)$

5410: a) $(4,-5)$ b) Parallelle c) Sammenfaldende d) $(6,0)$

5411: a) Parallelle b) $(5,-2)$ c) Sammenfaldende d) $\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{5}\right)$

5412: a) Sammenfaldende b) Parallelle c) $(2,11)$ d) $(-1,9)$

5420: a) $(2,-17,15)$ b) Vindskæve c) $(6,11,9)$ d) Parallelle

5421: a) $(-4,-11,7)$ b) Sammenfaldende c) Vindskæve d) $(20,-5,21)$

5423: a) Ja b) Nej

5424: a) Ja b) Ja

5425: a) Nej b) Ja

5430: $a)\ (5,-6)$og $(-2,1)$ $b)$Ingen skæringer $c)$Røringspunkt$(5,-2)$

5432: $(4,-2)$

5440: $a)\ (-2,6,4)$og $(-6,3,1)$ b) Ingen skæringer c) Røringspunkt $(2,-4,7)$

5450: $a)(-5,25,-29)$ $b)(4,-1,3)$ $c)$Sammenfaldende $d)(-20,-11,-3)$ $e)$Ingen fælles punkter

5480: $a)Q\left(\frac{245}{59},\frac{121}{59},-\frac{274}{59}\right)$ $b)Q\left(\frac{21}{5},0,\frac{27}{5}\right)$ $c)Q(5,11,-8)=P$ $d)\ Q(0,1,0)$

5490: $a)\ Q\left(-\frac{73}{22},\frac{219}{22},\frac{13}{11}\right)$ $b)\ Q\left(\frac{5054}{1667},-\frac{4156}{1667},-\frac{9507}{1667}\right)$ $c)Q(-4,1,2)$ $d)Q(1,0,0)$

5500: $a)Q(-0,5762;0,4733)$ $b)Q(-0,8022;1,7103;-1,3287)$ $c)Q(-0,4786;12,0427)$ $d)\ Q(2,1,-7)$

5510: Mulige parameterfremstillinger: $a)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{27}{7}\\-\frac{94}{7}\\\frac{44}{7}\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-5\\13\\-4\end{pmatrix}$ $b)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{353}{74}\\\frac{125}{74}\\\frac{31}{37}\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$

5520: $a)\ 15,02°$ $b)85,39°$ $c)6,42°$ $d)33,06°$

5522: $a)175,24°$ $b)126,93°$ $c)164,62°$ $d)120°$

5600: a) 2 b) 5 c) 8 d) 0

5602: a) 2 b) 2 c) 3 d) 0

5604: a) 5 b) 4 c) 0 d) 62

5620: $a)\ 3$ $b)\ 6$ $c)\ \frac{28}{\sqrt{37}}$ $d)\frac{39}{\sqrt{5}}$

5622: $a)\ \frac{79}{13}$ $b)0$ $c)0$ $d)16$ $e)18$

5624: $a)\ t=\frac{437}{28}\vee t=-\frac{93}{28}$ b) Ja c) Nej

5626: $(-0,3806;-0,4926)$, $(-9,4594;11,6126)$, $(2,9446;1,7405)$og $(-6,3846;14,1795)$

5640: $a)\frac{32}{3\sqrt{13}}$ $b)0$ $c)\frac{7}{\sqrt{26}}$ $d)0$ $e)\frac{4}{3\sqrt{5}}$ $f)11$ $g)0$

5650: a) $d=1$ b) Tangent c) $d=63$ d) Linjen skærer cirklen.

5660: a) 5 b) 4 c) 5,751 d) 0

5670: $a)\frac{13}{18}$ b) 0 $c)\frac{6}{97}$ d) 0

5680: $a)\ \frac{43}{\sqrt{38}}$ $b)0$

5690: $a)$Skærer. $r_{cirkel}=45$ b) Ingen skæring. $d=4$ c) Tangentplan

5700: $a)6,6159$ $b)9,8650$ $c)0$ $d)1$

5710: $a)\ d=7,0298$ $b)$Linjen tangerer kuglen $c)\ d=11,1139$ d)Linjen skærer kuglen

5720: $a)\ d=6,3169$ $b)d=4,1708$ $c)d=0$

5730: $a)x-y-11=0;G=\mathbb{R}^2$ $b)2x+3y+5=0;G=\mathbb{R}^2$ $c)y=5;G=\mathbb{R}^2$ $d)2x-7y-53=0;G=\mathbb{R}^2$

5740: $a)3x-y+6z-31=0$ $b)4x-9y-5z+47=0$ $c)y+2=0$ $d)x+2y+3z-14=0$; $G=\mathbb{R}^3$

6000: $a)\ \vec{f}(-1,0)=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ $b)\begin{pmatrix}e^{-2}+9\\-5\end{pmatrix}$ $c)s=2$, $t=0$

6002: $a)\ \vec{f}(0)=\begin{pmatrix}-8\\-4\end{pmatrix},\ \vec{f}(-3)=\begin{pmatrix}-8\\-19\end{pmatrix}\quad b)\, t=2\quad c)\, A \text{ og } C\quad d)\ \vec{f}\,'(t)=\begin{pmatrix}2t+3\\5\end{pmatrix}$

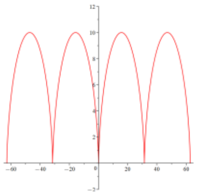
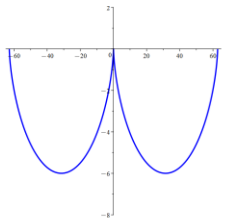
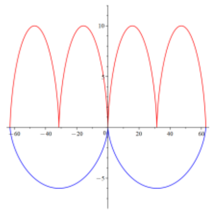
$e)\ \vec{f}\,'(2)=\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix},\ \vec{f}\,'(-3)=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}\quad f)\, t_0=-1,\ \vec{f}(-1)=\begin{pmatrix}-10\\-9\end{pmatrix}\quad g)\,(32,21)$

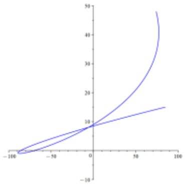
6004: $a)\,\vec{s}(3)=\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}\ \vec{s}\,'(3)=\begin{pmatrix}8\\40\end{pmatrix} b)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} c)\,\vec{s}(-5)=\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}\ \vec{s}\,'(-5)=\begin{pmatrix}-8\\24\end{pmatrix} d)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}+v\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\ e)\,2$

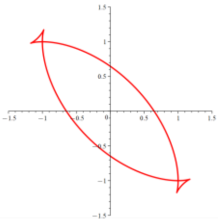
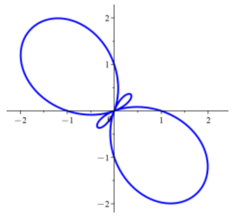
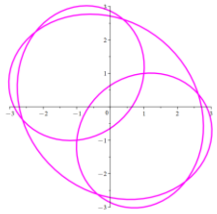
6006: $a)\ \vec{f}\,'(t)=\begin{pmatrix}8\\3t^2+6t-17\end{pmatrix}\quad b)\,(-11,24)\quad c)\ (13,-9) \text{ og } (-35,57)$

6008: $a)\ \vec{f}\left(\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-26\\5\\-7\end{pmatrix}\qquad \vec{f}(\vec{a})=\begin{pmatrix}29\\\sqrt{29}\\0\end{pmatrix}$

6009: $a)\ \vec{f}\left(\begin{pmatrix}5\\0\\4\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}4\\2\\-5\end{pmatrix}\qquad \vec{f}(\vec{a})=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

6010: a)  b)  c) 

6012: a)  b) $t=-5 \vee t=1 \vee t=7$ c) $t=1 \vee t=7$ d) $t=1 \vee t=7$

6014: a)  b)  c) 

6020: $a)\, t=2 \vee t=6\quad b)\,(-35,0) \text{ og } (-11,0)\quad c)\ (0,77) \text{ og } (0,5)$

6024: $a)\, t=-3 \vee t=-1 \vee t=0 \vee t=2 \vee t=3\quad b)\,(0,-36) \text{ og } (0,-6)$

6026: $b)\,(0,-36),(0,-6),(-7.782,0),\ (-3.801,0) \text{ og } (61.858,0)$

6030: $a)\,(-4,5)\ \ b)\, t_2=-2$

6032: $b)\,(8,-5)\ \ c)\, t_2=-6 \text{ og } t_3=5$

6034: $a)\, t_1=-3 \text{ og } t_2=4\quad b)\ (11,-7)$

6036: $a)\, t_1=-11 \text{ og } t_2=8 \text{ og } t_3=13\quad b)\ (-19,25)$

6040: $a)\ \vec{f}\,'(t)=\begin{pmatrix}2t+5\\7\end{pmatrix}\ \ b)\,\vec{f}\,'(2)=\begin{pmatrix}9\\7\end{pmatrix}\ \ c)\,\vec{f}(2)=\begin{pmatrix}11\\18\end{pmatrix}\ \ d)\ \begin{pmatrix}9\\7\end{pmatrix}$

6042: $a)\ \vec{f}\,'(t)=\begin{pmatrix}3t^2+10t-3\\2t-7\end{pmatrix}\ \ b)\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

6044: $a)\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,3497 \\ 0,9497 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1,9836 \\ 2,3621 \end{pmatrix}$

6100: $b) \begin{pmatrix} -22 \\ -4 \end{pmatrix} \quad c) (-16,0),\ (2,0), (0,-3.079) \text{ og } (0,3.079) \quad d) t_1 = -1,732\ t_2 = 1,732$

$e)\ \vec{f}\,'(t) = \begin{pmatrix} -12t \\ -6t^2+6 \end{pmatrix}\ \vec{f}\,'(1) = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f) \begin{pmatrix} -24 \\ -18 \end{pmatrix} \quad g) -1, 0 \text{ og } 1\ h) 60° \text{ eller } 120°\ i) 99,766\ j) 144$

6102: b) 5 c) 3 d) 10 e) 4 f) 12 g) 1 h) 71,43607852

6104: $b) t_1 = -1\ t_2 = 1 \quad c) 90° \quad d) 0 \quad e) A = \frac{2}{3}$ f) 6,0572328

6106: $b) -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{10}, -\frac{\pi}{10}, 0, \frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10} \text{ og } \frac{\pi}{2} \quad c) A = \frac{\pi}{20} \quad d) 36°, 72°, 108° \text{ og } 144°$

6110: $a)\ \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2t+3 \\ \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \quad b) \vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c) \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} \quad d) \vec{a}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

6112: $b)\ \vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ \vec{v}(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}\ \vec{v}(2) = \begin{pmatrix} \frac{24}{25} \\ \frac{168}{25} \end{pmatrix}\ c)\ v(0) = 0\ \ v(1) = 6,708\ v(2) = 6,788\ d) \vec{a}(0) = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}\ \vec{a}(1) = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}\ \vec{a}(2) = \begin{pmatrix} -\frac{132}{125} \\ -\frac{24}{125} \end{pmatrix}$

6114: $b)\ \vec{v}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{a}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c) t_1 = \frac{\pi}{2}\ t_2 = \frac{3\pi}{2} \quad d) 90° \quad e) A = 2$

6120: $a) C(7,-3)\ \ r = 6 \quad b) T = \frac{\pi}{2} \quad c)\ \vec{v}(t) = 24 \cdot \begin{pmatrix} -\sin(4 \cdot t) \\ \cos(4 \cdot t) \end{pmatrix} \quad \vec{a}(t) = -96 \cdot \begin{pmatrix} \cos(4 \cdot t) \\ \sin(4 \cdot t) \end{pmatrix}$

$d)\ \vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -24 \end{pmatrix} \quad \vec{a}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} 96 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e) |\vec{v}| = 24 \quad |\vec{a}| = 96$

6122: $b)\ \vec{v}(t) = \frac{7}{12} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{t}{12}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{12}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix} \quad \vec{a}(t) = -\frac{7}{144} \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t}{12}\right) \\ \sin\left(\frac{t}{12}\right) \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$

$c)\ \vec{s}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \vec{s}\left(\frac{24\pi}{10}\right) = \begin{pmatrix} 0,045 \\ 11,939 \end{pmatrix} \quad d) \vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,583 \end{pmatrix} \quad \vec{v}\left(\frac{24\pi}{10}\right) = \begin{pmatrix} 0,2449 \\ -0,3371 \end{pmatrix}$

$e) |\vec{v}(0)| = 1,583 \quad \left|\vec{v}\left(\frac{24\pi}{10}\right)\right| = 0,417 \quad f) \vec{a}(0) = \begin{pmatrix} -0,5486 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{a}\left(\frac{24\pi}{10}\right) = \begin{pmatrix} 0,365 \\ 0,265 \end{pmatrix}$

6124: $b)\ A = 9 \cdot \pi$

6126: $b)\ A = b^2 \cdot \pi$

6140: $b) \vec{v}(t) = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1-\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad \vec{a}(t) = 5 \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \quad c) |\vec{a}(t)| = 5\ d) \vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{v}(\pi) = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

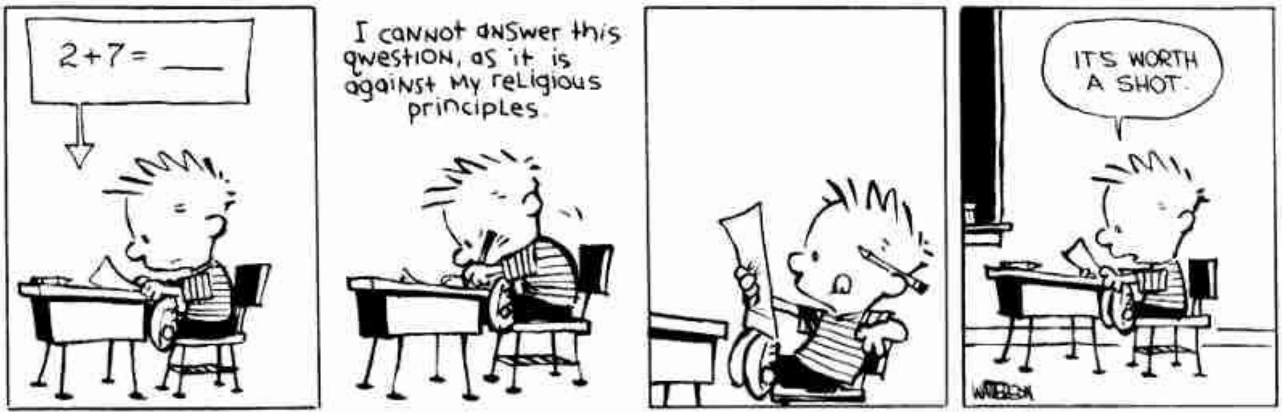
$e)\ \vec{a}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{a}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{a}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} \quad f) A = 75\pi$

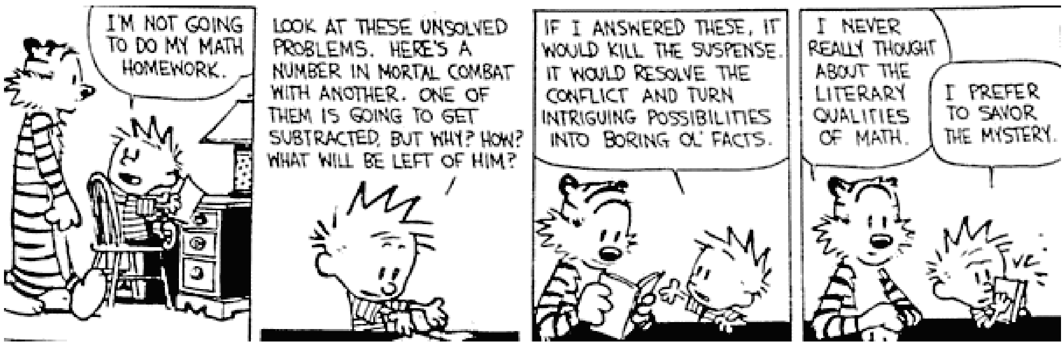
6142: $b)\ \vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c) A = 100 \cdot \pi$

6144: $b) \vec{v}(-\pi) = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}\ \vec{v}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ \vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}\ c) \vec{a}(-\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{25}{9} \end{pmatrix}\ \vec{a}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}\ \vec{a}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \end{pmatrix}\ d) A = 18,6614$


HELLO?
HI, DAD. IT'S ME, CALVIN.
YOU'RE SUPPOSED TO BE AT SCHOOL!
I AM AT SCHOOL.
ARE YOU ALL RIGHT? WHAT'S THE MATTER? WHY ARE YOU CALLING?
I TOLD THE TEACHER I HAD TO GO TO THE BATHROOM. QUICK, WHAT'S 11 + 7?


PSSST! WHAT'S 7+6?
THREE HUNDRED BILLION GAZILLION.
OH, THANKS FOR THE BIG HELP!
THAT'S A THREE, FOLLOWED BY 85 ZEROES.
AH! I KNEW THAT.


2+7 = ___
I cannot answer this question, as it is against my religious principles.
IT'S WORTH A SHOT.


I'M NOT GOING TO DO MY MATH HOMEWORK.
LOOK AT THESE UNSOLVED PROBLEMS. HERE'S A NUMBER IN MORTAL COMBAT WITH ANOTHER. ONE OF THEM IS GOING TO GET SUBTRACTED, BUT WHY? HOW? WHAT WILL BE LEFT OF HIM?
IF I ANSWERED THESE, IT WOULD KILL THE SUSPENSE. IT WOULD RESOLVE THE CONFLICT AND TURN INTRIGUING POSSIBILITIES INTO BORING OL' FACTS.
I NEVER REALLY THOUGHT ABOUT THE LITERARY QUALITIES OF MATH.
I PREFER TO SAVOR THE MYSTERY.


WAP WAP WAP
CALVIN! WHAT ARE YOU DOING TO THE COFFEE TABLE?!?
IS THIS SOME SORT OF TRICK QUESTION, OR WHAT?