

# OPGAVER 3.g

KEGLESNIT  
SANDSYNLIGHEDSREGNING  
KOMBINATORIK  
STATISTIK  
KOMPLEKSE TAL



**x-klasserne**

## Gammel Hellerup Gymnasium

Januar 2023 ; Michael Szymanski ; mz@ghg.dk

### Indholdsfortegnelse

KEGLESNIT.....	2
SANDSYNLIGHEDSREGNING.....	5
KOMBINATORIK .....	15
STATISTIK .....	30
KOMPLEKSE TAL.....	45
FACITLISTE .....	54

# KEGLESNIT

Opgave 1000: Vi ser på omdrejningskegglefladen givet ved ligningen  $x^2 + y^2 = z^2$  ;  $G = \mathbb{R}^3$ .

- Bestem aksevinklen  $\nu$ .
- Afgør, hvilke af følgende punkter, der ligger på denne omdrejningskeggleflade:  
 $A(3, 4, -5)$ ,  $B(-1, 2, -3)$ ,  $C(-9, 0, 9)$ ,  $D(-3, -4, -5)$ ,  $E(-12, 5, 7)$  og  $F(5, 12, -17)$ .
- For hvilke  $t$ -værdier ligger punktet  $(5, -12, t)$  på omdrejningskegglefladen?

Opgave 1002: I det følgende ses på forskellige omdrejningskeggleflader, der alle har toppunkt i origo og akserne sammenfaldende med  $z$ -aksen.

- Bestem en ligning for den omdrejningskeggleflade, hvor aksevinklen er  $61^\circ$ .
- Punktet  $(-2, 7, -5)$  ligger på omdrejningskegglefladen. Bestem aksevinklen.
- Omdrejningskegglefladen har ligningen  $x^2 + y^2 - 0,84 \cdot z^2 = 0$  ;  $G = \mathbb{R}^3$ . Bestem aksevinklen.

Opgave 1004: Vi ser på omdrejningskegglefladen givet ved ligningen  $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}z^2$  ;  $G = \mathbb{R}^3$ .

- Bestem ligningen for planen  $\alpha$ , der er parallel med  $xy$ -planen og indeholder punktet  $(0, 0, 5)$ .
- Hvilken figur danner snittet mellem omdrejningskegglefladen og planen  $\alpha$  (dvs. hvilken figur danner skæringspunkterne)?
- Bestem radius i ovenstående keglesnit.

Opgave 1010: Bestem i hånden den partikulære løsning til følgende differentiaalligninger, hvor grafen går gennem det givne punkt. Tjek med Maple.

a)  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$  ,  $P(-3, 4)$

b)  $y' = -\frac{x}{y}$  ;  $P(5, -7)$

c)  $f'(x) + \frac{x}{f(x)} = 0$  ,  $P(8, 9)$

Opgave 1020: I det følgende ses på ellipser, der er placeret, så storaksen ligger parallelt med førsteaksen. Bestem ligninger for følgende:

- Ellipsen med centrum i origo, den halve storakse 7 og den halve lilleakse 5.
- Ellipsen med centrum i  $(-4, 6)$ , den halve storakse 3 og den halve lilleakse 2.
- Ellipsen med centrum i  $(9, -2)$ , excentriciteten  $\frac{4}{5}$  og den halve storakse 5.

Opgave 1022: En ellipse har brændpunkterne  $(12, 0)$  og  $(-12, 0)$  og ledelinjen angivet ved  $x = \frac{169}{12}$ .

- Bestem en ligning for denne ellipse.
- Find et punkt på førsteaksen, der ligger på ellipsen. Bestem summen af afstandene mellem dette punkt og hvert af de to brændpunkter.
- Find et punkt på andenaksen, der ligger på ellipsen. Bestem summen af afstandene mellem dette punkt og hvert af de to brændpunkter.
- Find et punkt i første kvadrant, der ligger på ellipsen. Bestem summen af afstandene mellem dette punkt og hvert af de to brændpunkter.

Opgave 1030: I det følgende ses på ellipser, der er placeret, så storaksen ligger parallelt med førsteaksen. Bestem parameterfremstillinger for følgende ellipser.

- Ellipsen med centrum i origo, den halve storakse 15 og den halve lilleakse 11.
- Ellipsen med centrum i  $(8, -3)$ , den halve storakse 6 og den halve lilleakse 4.
- Ellipsen med centrum i  $(-4, 3)$ , excentriciteten  $\frac{12}{13}$  og den halve storakse 13.

Opgave 1032: Bestem koordinatsættene til brændpunkterne for ellipsen  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \cdot \cos(t) \\ 6 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$ .

Opgave 1040: En parabel er givet ved ligningen  $y = 2 \cdot x^2$ ;  $G = \mathbb{R}^2$ .

- Hvad er koordinatsættet til parablens toppunkt?
- Hvad er koordinatsættet til parablens brændpunkt?
- Angiv en ligning for parablens ledelinje.
- Bestem afstanden mellem brændpunktet og ledelinjen.

Opgave 1042: Angiv ligninger for parablerne bestemt ved følgende ledelinjer og brændpunkter:

- $l: y = -5$  og  $P(0, 5)$ .
- $l: y = 5$  og  $P(0, -5)$ .
- $l: y = -8$  og  $P(0, 12)$ .
- $l: y = -11$  og  $P(3, 2)$ .
- $l: x = -5$  og  $P(5, 0)$ .

Opgave 1044: Angiv for følgende parabler koordinatsættene til toppunktet  $T$  og brændpunktet  $F$  samt en ligning for ledelinjen.

$$a) y = \frac{1}{8} \cdot x^2 \quad b) y = \frac{1}{12} \cdot x^2 + 5 \quad c) y = -\frac{1}{16} \cdot x^2 - 4 \quad d) y = -\frac{1}{20} \cdot (x+5)^2 + 3$$

Opgave 1050: En parabel er givet ved ligningen  $y = \frac{1}{4} x^2$ ;  $G = \mathbb{R}^2$ .

- Bestem koordinatsættene til toppunktet  $T$  og brændpunktet  $F$ .
- En stråle parallel med  $x$ -aksen udsendes fra brændpunktet mod højre. Bestem det punkt på parablen, hvor strålen rammer.
- Strålen reflekteres på parablen. Bestem en ligning for refleksionen af strålen.
- En ny stråle udsendes fra brændpunktet ind i første kvadrant. Den følger linjen givet ved ligningen  $y = \frac{3}{4}x + 1$ . Bestem det punkt på parablen, hvor strålen rammer.
- Strålen reflekteres på parablen. Bestem en ligning for refleksionen af strålen.
- En ny stråle udsendes fra brændpunktet ind i anden kvadrant. Den følger linjen givet ved ligningen  $y = \frac{3}{4}x + 1$ . Bestem det punkt på parablen, hvor strålen rammer.
- Strålen reflekteres på parablen. Bestem en ligning for refleksionen af strålen.

Opgave 1060: En hyperbel med centrum i origo og brændpunkt i  $(9, 0)$  har ledelinjen givet ved ligningen  $x = 4$ .

- Bestem excentriciteten for hyperblen.
- Bestem længden af førsteaksen.
- Bestem en ligning for hyperblen.

Opgave 1062: En hyperbel med centrum i  $(-3, 0)$  og brændpunkt i  $(6, 0)$  har ledelinjen givet ved ligningen  $x = 1$ .

- a) Bestem excentriciteten for hyperblen.
- b) Bestem en ligning for hyperblen.

Opgave 1064: Bestem en ligning for hyperblen med centrum i  $(5, 3)$  og brændpunkt i  $(30, 3)$  og med ledelinjen givet ved ligningen  $x = 21$ .

- a) Bestem excentriciteten for hyperblen.
- b) Bestem en ligning for hyperblen.

Opgave 1066: Bestem en ligning for hyperblen med centrum i  $(2, -4)$  og brændpunkt i  $(2, 32)$  og med ledelinjen givet ved ligningen  $y = 0$ .

- a) Bestem excentriciteten for hyperblen.
- b) Bestem en ligning for hyperblen.

# SANDSYNLIGHEDSREGNING

Opgave 2001: Fra et kortspil med 52 kort (ingen jokere) trækkes et tilfældigt kort og kuløren noteres. Angiv det tilhørende sandsynlighedsfelt.

Opgave 2002: Fra et kortspil med 55 kort (3 jokere) trækkes et tilfældigt kort og kuløren noteres (hvor 'joker' tæller som en slags femte kulør). Angiv det tilhørende sandsynlighedsfelt.

Opgave 2003: En blå og en rød 6-sidet terning kastes, og det noteres, om den røde terning viser et 'højere' tal end den blå, det 'samme' tal som den blå eller et 'mindre' tal end den blå. Angiv det tilhørende sandsynlighedsfelt.

Opgave 2010: Fra et kortspil med 52 kort (ingen jokere) trækkes et tilfældigt kort. Hvis kortet er en hjerter, stopper man. Hvis det ikke er en hjerter, lægges kortet tilbage i bunken, der blandes, og man trækker igen. Antallet af trækninger noteres. Angiv det tilhørende sandsynlighedsfelt.

Opgave 2020: Vi ser på kast med to terninger, hvor øjensummen noteres, og hvor vi har følgende sandsynlighedsfordeling:

U	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Angiv sandsynligheden for følgende hændelser:

$H_1$ : Øjensummen er lige.

$H_2$ : Øjensummen er ulige.

$H_3$ : Øjensummen er over 7.

$H_4$ : Øjensummen er 1.

$H_5$ : Øjensummen er et naturligt tal.

Opgave 2021: Vi ser på kast med to terninger  $A$  og  $B$ , der kan skelnes fra hinanden. Vi får følgende udfaldsrum, hvor sandsynligheden for hvert udfald er  $\frac{1}{36}$ :

U	1	2	3	4	5	6	Øjental for terning B
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	<p>Angiv sandsynligheden for følgende hændelser:</p> <p><math>H_1</math>: Terning <math>B</math> giver et lige øjental og terning <math>A</math> giver en 4'er.</p> <p><math>H_2</math>: De to terninger viser samme øjental.</p> <p><math>H_3</math>: Terning <math>B</math> viser et øjental, der er mindst to højere end terning <math>A</math>'s øjental.</p> <p><math>H_4</math>: Øjentallene på de to terninger er indbyrdes primiske.</p> <p><math>H_5</math>: Øjentallet for terning <math>A</math> er divisor i øjentallet for terning <math>B</math>.</p>
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)	
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)	
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)	
Øjental for terning A							

- Opgave 2030: En roulette har 37 udfald. I hvert spil lægger man sin indsats på tallet 13. Man fortsætter med at spille, indtil man vinder første gang.  
Hvad er sandsynligheden for, at man deltager i mindst 2 spil?
- Opgave 2031: Hvad er sandsynligheden for, at summen af øjentallene i et kast med 5 terninger er mindst 6?
- Opgave 2032: En mønt kastes fem gange. Hvad er sandsynligheden for højst at få 4 plat?
- Opgave 2033: En mønt kastes 10 gange. Hvad er sandsynligheden for, at der både er plat og krone blandt udfaldene?
- Opgave 2034:  $P(A) = 3 \cdot P(\bar{A})$ . Hvad er  $P(A)$ ?
- Opgave 2040 (rigtige tal): Hvert år får 1 promille af de voksne danskere lungekræft. 17% af de voksne danskere ryger. 92% af alle, der rammes af lungekræft, er rygere.  
Hvad er sandsynligheden for, at du næste år får lungekræft, hvis du er ryger?
- Opgave 2041 (fiktive tal): Det antages, at 80% af de skyldige bliver dømt. 25% er skyldige, og 30% bliver dømt.  
Hvad er sandsynligheden for, at du er skyldig, hvis du bliver dømt?
- Opgave 2042: Med informationerne fra opgave 2040 stilles nu spørgsmålet:  
Hvad er sandsynligheden for, at du næste år får lungekræft, hvis du er ikke-ryger?
- Opgave 2043 (fiktive – men ikke helt vilkårlige - tal): På et gymnasium er der 45% drenge. 17% af drengene har fysik på A-niveau. 10% af skolens elever har fysik på A-niveau.  
Hvis man vælger tilfældigt blandt fysik A-eleverne, hvad er så sandsynligheden for at vælge en pige?
- Opgave 2050 (rigtige tal): En antistoftest, der skal vise, om en person har haft COVID-19, er oplyst til med 93% sikkerhed at vise, hvis en person har haft sygdommen (dvs. 7% falske negative, *sensitiviteten* er 0,93), og med 98% sikkerhed vise, hvis en person ikke har haft sygdommen (dvs. 2% falske positive, *specificiteten* er 0,98).  
En tilfældig person udvælges og testes. Testen er positiv. Hvad er sandsynligheden for, at personen har haft COVID-19?
- På et tidspunkt hvor 1% af befolkningen har haft sygdommen.
  - På et tidspunkt hvor 10% af befolkning har haft sygdommen.
  - På et tidspunkt hvor 50% af befolkningen har haft sygdommen.
  - På et tidspunkt hvor 90% af befolkningen har haft sygdommen.
  - På et tidspunkt hvor 99% af befolkningen har haft sygdommen.
  - På et tidspunkt i 2018 (hvor testen er transporteret tilbage i en tidsmaskine).
  - Hvis 100% af befolkningen har haft sygdommen.
  - Bestem i de 7 tilfælde ovenfor sandsynligheden for, at personen har haft COVID-19, hvis testen er negativ.

Opgave 2052 (fiktive tal): Politiet anvender en alkoholtester, der med 99,4% sikkerhed slår ud, hvis en person har drukket for meget (*sensitiviteten* er 0,994). Hvis personen ikke har drukket for meget, er der en risiko på 1,7% for, at alkoholtesteren slår ud (*specificiteten* er 0,983).

En tilfældig bilist stoppes og testes, og alkoholtesten slår ud.

- a) Hvad er sandsynligheden for, at personen har drukket for meget, hvis man antager, at 0,2% af alle bilisterne har drukket for meget?
- b) Hvad er sandsynligheden for, at personen har drukket for meget, hvis man antager, at der har været julefrokoster, så 16% af bilisterne har drukket for meget?
- c) Hvad er sandsynlighed for, at personen har drukket for meget, hvis man antager, at ingen af bilisterne har drukket for meget?
- d) Hvad er sandsynligheden for, at personen har drukket for meget, hvis man antager, at alle bilisterne har drukket for meget?

Opgave 2053 (fortsættelse af opgave 2052): Politiet er udelukkende interesseret i at øge sandsynligheden for, at hvis alkoholtesteren slår ud, så har personen drukket for meget.

- a) Kan det betale sig at øge følsomheden af alkoholtesteren, så den med 99,9% sikkerhed slår ud, hvis en person har drukket for meget (*sensitiviteten* 0,999), hvis det samtidig betyder, at risikoen for at slå ud, når personen ikke har drukket, så øges til 2,3% (*specificiteten* 0,977)?
- b) Kan det i et ikke totalt fordærvet samfund betale sig at nedsætte følsomheden af alkoholtesteren, så den med 85% sikkerhed slår ud, hvis en person har drukket for meget, hvis det samtidig betyder, at risikoen for at slå ud, når personen ikke har drukket, så sænkes til 0,1%?

Opgave 2054 (fiktive tal – et klassisk eksempel): I byen er de grønne taxier involveret i 85% af taxiulykkerne, mens de blå er involveret i 15% (de to slags taxier støder tydeligvis aldrig sammen). En ulykke er sket, og et vidne har identificeret taxien som blå. Men det var tussmørke, og man tester vidnet i denne belysning og opdager, at han rammer farven rigtigt i 80% af tilfældene, men bytter rundt på de to farver i 20% af tilfældene.

Hvad er sandsynligheden for, at taxien, der var involveret i ulykken, er blå?

Opgave 2060: Der kastes to gange med en 6-sidet terning. I nedenstående spørgsmål kaldes den førstnævnte hændelse for  $A$  og den sidstnævnte for  $B$ . Bestem i hvert spørgsmål  $P(A|B)$  og  $P(A)$  og besvar på den baggrund det stillede spørgsmål (ja/nej):

<b>U</b>	1	2	3	4	5	6	Øjental for første terning.
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)	
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)	
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)	
Øjental for 2. terning							

- Er det at få summen 7 uafhængigt af, om man får en 2'er i første kast?
- Er det at få en ulige sum uafhængigt af, om man får en 3'er i første kast?
- Er det at få summen 6 uafhængigt af, om man får en 3'er i første kast?
- Er det at få en ulige sum uafhængigt af, om produktet er lige?
- Er det at få en 2'er i første kast uafhængigt af, om summen er 7?
- Er det at få en 3'er i første kast uafhængigt af, om summen er ulige?
- Er det at få en 3'er i første kast uafhængigt af, om summen er 6?
- Er det at produktet er lige uafhængigt af, om summen er ulige?

Opgave 2061: Tjek, at følgende sætning stemmer med resultaterne i opgave 2060:

$$\text{Hændelserne } A \text{ og } B \text{ er uafhængige} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Dvs. bestem hver for sig  $P(A \cap B)$  og  $P(A) \cdot P(B)$ , og tjek, at de to størrelser er lig med hinanden, når  $A$  og  $B$  er uafhængige, og forskellige, når  $A$  og  $B$  ikke er uafhængige.



Opgave 2062: Der trækkes et kort fra et kortspil med 52 kort (ingen jokere). Anvend samme fremgangsmåde som i opgave 2060 til at svare på spørgsmålene.

- Er det at trække et billedkort uafhængigt af, om man trækker en hjerter?
- Er det at trække en klør uafhængigt af, om man trækker et sort kort?
- Er det at trække en hjerter uafhængigt af, om man trækker en ruder?
- Er det at trække ruder 9 uafhængigt af, om man trækker en ruder?
- Er det at trække en hjerter uafhængigt af, om man trækker et billedkort?
- Er det at trække et sort kort uafhængigt af, om man trækker en klør?
- Er det at trække en ruder uafhængigt af, om man trækker en hjerter?
- Er det at trække en ruder uafhængigt af, om man trækker ruder 9?

Opgave 2063: Anvend samme fremgangsmåde som i opgave 2061 til at tjekke sætningen på opgave 2062.

Opgave 2070: Det oplyses, at hændelserne  $A$  og  $B$  er uafhængige, og at  $P(A) = 0,6$  og  $P(B) = 0,4$ .  
Bestem  $P(A \cap B)$ .

Opgave 2071: Hændelserne  $A$  og  $B$  er uafhængige, og  $P(B) = 0,7$  og  $P(A \cap B) = 0,56$ .  
Bestem  $P(A)$ .

Opgave 2072: Om hændelserne  $A$  og  $B$  oplyses det, at  $P(A) = 0,5$ ,  $P(B) = 0,4$  og  $P(A \cap B) = 0,25$ .  
a) Er hændelserne  $A$  og  $B$  uafhængige?  
b) Bestem  $P(B|A)$ .

Opgave 2073 (tal for den danske befolkning): Der findes mindst 35 forskellige systemer til opdeling af menneskeblod i typer. De to mest anvendte er opdelingerne i typerne:

- $A$  (44%),  $O$  (41%),  $B$  (10%) og  $AB$  (5%).
  - Rhesus + (85%) og Rhesus - (15%) (Rhesus positiv og rhesus negativ).
- Disse to systemer er uafhængige af hinanden.
- Hvor stor en del af den danske befolkning har A-rhesus+?
  - Hvor stor en del af den danske befolkning har O-rhesus-?
  - Hvor stor en del af den danske befolkning har AB-rhesus-?

Opgave 2074: Der kastes plat-og-krone 4 gange med en mønt, dvs. man har udfaldsrummet:

$$U = \{kkkk, kkkp, kkp k, kkpp, kpkk, kpkp, kppk, kppp, pkkk, pkkp, pkpk, pkpp, ppkk, ppkp, pppk, pppp\}$$

Se på følgende hændelser:

A: Man får krone i andet kast og plat i fjerde kast.

B: Man får netop to krone.

C: Der er mindst 2 skift fra plat til krone eller omvendt.

D: Det første og det sidste kast giver forskellige udfald.

- Bestem sandsynlighederne for hver af de fire hændelser.
- Bestem  $P(A \cap B)$ ,  $P(A \cap C)$ ,  $P(A \cap D)$ ,  $P(B \cap C)$ ,  $P(B \cap D)$  og  $P(C \cap D)$ .
- Benyt Sætning 7 til at afgøre, hvilke hændelser der er uafhængige af hinanden.
- Gælder det om hændelser, at hvis  $A$  og  $B$  er uafhængige, og hvis  $A$  og  $C$  er uafhængige, så er  $B$  og  $C$  uafhængige?

Opgave 2080: En rød og en grøn terning kastes, og vi får det sædvanlige udfaldsrum med 36 udfald. Afgør i hvert af nedenstående tilfælde, om det er en *hændelse* eller en *stokastisk variabel*, der beskrives:

- A: Den røde terning viser et højere øjental end den grønne.
- B: Summen af øjentallene.
- C: Summen af øjentallene er ulige.
- D: Hvis summen af øjentallene er ulige, får man 5 point. Ellers 1 point.
- E: Antallet af 5'ere.
- F: Differensen mellem den røde terning og den grønne terning.
- G: Begge terninger viser lige øjental.
- H: Produktet af øjentallene er større end summen.
- I: Differensen mellem produktet og summen af øjentallene.

Opgave 2082: Der kastes plat-og-krone 4 gange med en mønt, dvs. man har udfaldsrummet:

$$U = \{kkkk, kkkp, kkp k, kkpp, kpkk, kp k p, kppk, kppp, pkkk, pkkp, pkpk, pkpp, ppkk, ppkp, pppk, pppp\}$$

Opskriv og udfyld for hver af nedenstående stokastiske variable en sandsynlighedstabel, der består af de mulige værdier, som den stokastiske variabel kan antage, samt sandsynligheden for hver af disse værdier.

- X: Antallet af krone.
- Y: Differensen mellem antallet af krone og antallet af plat.
- Z: 5 point fra start og derudover 3 point for hver krone i udfaldet.
- W: Antallet af skift fra plat til krone eller omvendt.

Opgave 2084: Fra en krukke med 15 røde, 4 blå og 1 sort kugle trækkes én kugle. Den stokastiske variabel  $X$  fastsætter, at hvis man trækker en rød, får man 1 krone, hvis man trækker en blå, får man 5 kroner, og hvis man trækker en sort, skal man betale 50 kroner.

Opskriv en sandsynlighedstabel med mulige værdier og sandsynligheder.

Opgave 2086: To terninger kastes.

Opskriv og udfyld for hver af nedenstående stokastiske variable en sandsynlighedstabel, der består af de mulige værdier, som den stokastiske variabel kan antage, samt sandsynligheden for hver af disse værdier.

- X: Antallet af ulige øjental.
- Y: Den numeriske værdi af differensen mellem øjentallene på de to terninger.

Opgave 2090: Beregn for hver stokastisk variabel i opgaverne 2082, 2084 og 2086 ved hjælp af Definition 7 *middelværdi*, *varians* og *spredning*. Tjek for hver stokastisk variabel dine resultater ved hjælp af Gym-pakkens kommandoer *middel*, *varians* og *spredning*.

Opgave 2100: Fra et spil kort med 52 kort (ingen jokere) trækkes et kort. Hvis du trækker et sort billedkort, får du 5 kr., hvis du trækker et rødt billedkort, får du 13 kr, og ellers skal du betale 4 kr.

- Bestem middelværdien for den stokastiske variabel  $X$ , der beskriver indtægten.
- Kan det betale sig at deltage?

Opgave 2101: Der ses på samme situation som i opgave 2100, men nu er situationen formuleret lidt anderledes, så man her **betaler** 4 kr. for at deltage, vinder 9 kr. ved sort billedkort, 17 kr. ved rødt billedkort og ellers ingenting.

- Tjek, at du kan se, at det er samme situation som ovenfor.
- Tjek, at du kan se, at den stokastiske variabel, der beskriver **gevinsten**, er  $X + 4$ .
- Beregn middelværdien for  $X + 4$ .

Opgave 2102: Det koster 10 kr. at deltage i spillet, der går ud på, at en mønt kastes 5 gange. Hvis alle kast giver plat, vinder du 100 kr., hvis alle kast viser krone, vinder du 50 kr. og hvis hvert kast viser noget andet end det foregående kast, vinder du 37 kr.

- Bestem middelværdien for den stokastiske variabel  $X$ , der beskriver **indtægten** ved at deltage i spillet.
- Bestem spredningen for  $X$ .

Opgave 2103: I spillet fra opgave 2102 øges pris og gevinster med en faktor 10, så prisen er 100 kr. og gevinsterne 1000 kr., 500 kr. og 370 kr.

- Bestem middelværdi og spredning for den nye stokastiske variabel  $10 \cdot X$ .

Opgave 2104: To terninger kastes.

- Angiv middelværdi og spredning for den stokastiske variabel  $X$ , der angiver summen af øjentallene.

Et spil, hvor det koster 80 kr. at deltage, består i at kaste to terninger, og gevinsten er så 10 gange summen af øjentallene.

- Bestem middelværdi og spredning for denne stokastiske variabel  $10 \cdot X - 80$ .

Opgave 2110: Om stokastiske variable  $X$  og  $Y$  gælder  $E(X) = 7, \sigma(X) = 4, E(Y) = 5$  og  $\sigma(Y) = 2$ .

Bestem følgende størrelser:

- $E(4 \cdot X - 3)$
- $E(X + Y)$
- $\sigma(6 \cdot Y + 5)$
- $\text{var}(-3 \cdot X + 8)$
- $\sigma(-5 \cdot X + 2)$

Opgave 2112: En blå og en sort terning kastes, og vi får følgende udfaldsrum:

U	1	2	3	4	5	6	Blå
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)	
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)	
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)	
Sort							

## Stokastiske variable:

$X$ : Summen af øjentallene.

$Y$ : Produktet af øjentallene.

$Z$ : Antallet af 5'ere

$W$ : Differensen mellem den blå terning og den sorte terning.

$T$ : -1 hvis produktet er lige, og 1 hvis produktet er ulige.

$S$ : -3 hvis summen er større end produktet. 0 hvis de er lige store. 1 hvis produktet er større end summen.

- For hver af ovenstående stokastiske variable skal du opskrive sandsynlighedsfordelingerne samt udregne middelværdi, varians og spredning.
- Bestem  $E(X + Y), E(Z + T)$  og  $E(T + S)$ .

Opgave 2120: Den stokastiske variabel  $X$  har middelværdien 10 og spredningen 3. Angiv den tilsvarende normerede stokastiske variabel.

Opgave 2121: Den stokastiske variabel  $X$  har middelværdien 7 og spredningen 4. Angiv middelværdien og spredningen for den tilsvarende normerede stokastiske variabel.

Opgave 2122: Der kastes plat-og-krone 4 gange med en mønt, dvs. man har udfaldsrummet:

$$U = \{kkkk, kkkp, kkpk, kkpp, kpkk, kpkp, kppk, kppp, pkkk, pkkp, pkpk, pkpp, ppkk, ppkp, pppk, pppp\}$$

Den stokastiske variabel  $X$  angiver antallet af krone.

Angiv sandsynlighedsfordelingen for den tilsvarende normerede stokastiske variabel.

Opgave 2124: Samme opgave som ovenfor, men nu med tre kast med mønten i stedet for fire.

Opgave 2130: En rød og en sort terning kastes. Hvad er sandsynligheden for, at den røde terning giver en 6'er, og den sorte terning et lige øjental?

Opgave 2131: Fra to spil kort med hver 52 kort (ingen jokere) trækkes ét kort fra hver. Hvad er sandsynligheden for, at man fra det første spil trækker en klør, men ikke en klør fra det andet spil?

Opgave 2132: Man kaster plat-og-krone med en mønt, indtil den viser plat. Hvad er sandsynligheden for, at man kommer til at kaste netop to gange?

Opgave 2133: I hvilke af følgende situationer kan man anvende Definition 9 til at beregne sandsynlighederne (bemærk, du skal IKKE beregne sandsynlighederne, men svare på spørgsmålet)?

- En rød og en sort terning kastes. Hvad er sandsynligheden for, at den røde terning viser et højere øjental end den sorte?
- Fra et spil kort trækkes først ét kort, der tjekkes, hvorefter det lægges tilbage i bunken, der blandes, og der trækkes et nyt kort. Hvad er sandsynligheden for ikke at have trukket et billedkort i de to trækninger?
- Fra en krukke med 10 sorte, 3 røde og 5 blå kugler trækkes to kugler. Hvad er sandsynligheden for, at den ene er rød, og den anden blå?
- En mønt kastes 5 gange. Hvad er sandsynligheden for at få plat i tredje kast og krone i femte kast?
- En mønt kastes 5 gange. Hvad er sandsynligheden for at få plat i tredje kast eller krone i femte kast?
- Fra to spil kort trækkes fra hvert spil ét kort. Hvad er sandsynligheden for, at man efterfølgende sidder med en ruder og en klør?
- En rød og en sort terning kastes. Hvad er sandsynligheden for, at den røde terning viser et ulige øjental og den sorte terning et lige øjental?
- To terninger kastes. Hvad er sandsynligheden for, at der fremkommer et lige og et ulige øjental?
- En rød og en sort terning kastes. Hvad er sandsynligheden for, at den røde terning viser et ulige øjental eller den sorte terning et lige øjental?
- Fra en krukke med 2 blå, 3 røde og 4 sorte kugler trækkes en kugle, hvor farven noteres, inden den lægges tilbage i krukken, hvorefter der trækkes endnu en kugle. Hvad er sandsynligheden for, at man trækker en rød kugle i første træk og en sort kugle i andet træk?
- Fra en krukke med 2 blå, 3 røde og 4 sorte kugler trækkes en kugle, hvor farven noteres, inden den lægges tilbage i krukken, hvorefter der trækkes endnu en kugle. Hvad er sandsynligheden for, at man har trukket kugler med forskellige farver?
- Fra en krukke med 2 blå, 3 røde og 4 sorte kugler trækkes en kugle, hvor farven noteres, inden den lægges tilbage i krukken, hvorefter der trækkes endnu en kugle. Hvad er sandsynligheden for, at man trækker en rød kugle i første træk eller en sort kugle i andet træk?

Opgave 2140: De stokastiske variable  $X$  og  $Y$  er uafhængige og har henholdsvis middelværdien 5 og 7. Bestem  $E(X \cdot Y)$ .

Opgave 2141: For de uafhængige stokastiske variable  $X$  og  $Y$  gælder  $E(X) = 4$  og  $E(Y) = -9$ .  
Bestem  $E(X + Y)$  og  $E(X \cdot Y)$ .

Opgave 2142: Fra to kortspil med 52 kort trækkes ét kort fra hver. Den stokastiske variabel  $X$  angiver produktet af de trukne korts værdier (es svarer til 1). Bestem  $E(X)$ .

Opgave 2143: En mønt kastes 10 gange. Krone tæller for 1, mens plat tæller for 0. Angiv middelværdierne for følgende stokastiske variable:

$X$ : Summen af værdierne for de enkelte kast.

$Y$ : Produktet af værdierne for de enkelte kast.

Opgave 2144: Fem forskellige terninger baseret på de fem regulære polyedre (de platoniske legemer med sidetallene 4, 6, 8, 12 og 20) kastes.

Bestem middelværdierne for følgende stokastiske variable:

$X$ : Summen af øjentallene.

$Y$ : Produktet af øjentallene.

Opgave 2145: To terninger og en mønt kastes. Bestem middelværdierne for følgende stokastiske variable.

$X$ : 0, hvis mønten viser plat. Summen af øjentallene, hvis mønten viser krone.

$Y$ : 0, hvis mønten viser plat. Produktet af øjentallene, hvis mønten viser krone.

Opgave 2150: Om de to uafhængige stokastiske variable  $X$  og  $Y$  gælder, at  $E(X) = 3$ ,  $E(Y) = -2$ ,  
 $\text{var}(X) = 5$  og  $\text{var}(Y) = 4$ .

Bestem  $E(X + Y)$ ,  $E(X \cdot Y)$  og  $\text{var}(X + Y)$ .

Opgave 2151: Om de to uafhængige stokastiske variable  $X$  og  $Y$  gælder,  $E(Y) = 7$ ,  $E(X + Y) = 5$ ,  
 $\sigma(X) = 3$  og  $\text{var}(Y) = 11$ .

Bestem  $E(X)$ ,  $E(X \cdot Y)$  og  $\text{var}(X + Y)$ .

Opgave 2152: En mønt kastes.

a) Bestem middelværdi, varians og spredning for den stokastiske variabel  $X$ , der angiver antallet af krone.  
Fire mønter kastes.

b) Bestem middelværdi, varians og spredning for den stokastiske variabel  $Y$ , der angiver antallet af krone.  
64 mønter kastes.

c) Bestem middelværdi, varians og spredning for den stokastiske variabel  $Z$ , der angiver antallet af krone.

Opgave 2153: Om de uafhængige stokastiske variable  $X$  og  $Y$  gælder,  $E(Y \cdot X) = 10$ ,  $E(X + Y) = 7$ ,  
 $E(X) > E(Y)$ ,  $\sigma(Y) = 4$  og  $\text{var}(X + Y) = 25$ .

Bestem  $E(X)$ ,  $E(Y)$  og  $\sigma(X)$ .

Opgave 2154: En terning kastes.

a) Bestem middelværdi, varians og spredning for den stokastiske variabel  $X$ , der angiver øjentallet.  
Fem terninger kastes.

b) Bestem middelværdi, varians og spredning for den stokastiske variabel  $Y$ , der angiver summen af øjentallene.

c) Bestem middelværdien for den stokastiske variabel  $Z$ , der angiver produktet af øjentallene.

Opgave 2160: Se på normalfordelingen med middelværdien 50 og spredningen 10.

- a) Hvad er sandsynligheden for, at et udfald ligger i intervallet  $[35,45]$ ?
- b) Hvad er sandsynligheden for, at et udfald ligger i intervallet  $[45,55]$ ?
- c) Hvad er sandsynligheden for, at et udfald ligger i intervallet  $[80,90]$ ?
- d) Hvad er sandsynligheden for, at et udfald er 50?
- e) Hvad er sandsynligheden for, at et udfald ligger i intervallet  $[40,60]$ ?
- f) Hvad er sandsynligheden for, at et udfald ligger i intervallet  $[30,70]$ ?
- g) Hvad skal  $k$  være, hvis sandsynligheden for at ligge i intervallet  $[50 - k, 50 + k]$  skal være 95%?
- h) Hvad skal  $k$  være, hvis sandsynligheden for at ligge i intervallet  $[50 - k, 50 + k]$  skal være 99%?

Opgave 2162: Se på  $u$ -fordelingen (normalfordelingen med middelværdien 0 og spredningen 1).

- a) Hvad er sandsynligheden for at få udfaldet 0?
- b) Hvad er sandsynligheden for, at et udfald ligger i intervallet  $[-1,1]$ ?
- c) Hvad er sandsynligheden for, at et udfald ligger i intervallet  $[-2,2]$ ?
- d) Hvad er sandsynligheden for, at et udfald ligger i intervallet  $[-3,3]$ ?
- e) Hvad skal  $k$  være, hvis sandsynligheden for at ligge i intervallet  $[-k, k]$  skal være 95%?
- f) Hvad skal  $k$  være, hvis sandsynligheden for at ligge i intervallet  $[-k, k]$  skal være 99%?

Opgave 2164: Se på den generelle normalfordeling med middelværdi  $\mu$  og spredning  $\sigma$  :

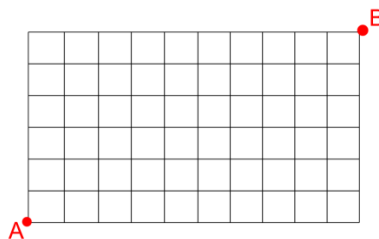
- a) Hvad er sandsynligheden for at få udfaldet  $\mu$ ?
- b) Hvad er sandsynligheden for, at et udfald ligger i intervallet  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ ?
- c) Hvad er sandsynligheden for, at et udfald ligger i intervallet  $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ ?
- d) Hvad er sandsynligheden for, at et udfald ligger i intervallet  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ ?
- e) Hvad skal  $k$  være, hvis sandsynligheden for at ligge i intervallet  $[\mu - k \cdot \sigma, \mu + k \cdot \sigma]$  skal være 95%?
- f) Hvad skal  $k$  være, hvis sandsynligheden for at ligge i intervallet  $[\mu - k \cdot \sigma, \mu + k \cdot \sigma]$  skal være 99%?

# KOMBINATORIK

- Opgave 3000: Om to mængder  $A$  og  $B$  oplyses det, at  $|B|=8$ ,  $|A \cap B|=3$  og  $|A \cup B|=17$ . Bestem kardinaltallet for mængden  $A$ .
- Opgave 3001: Om mængderne  $A$ ,  $B$  og  $C$  oplyses det, at  $A$  indeholder 14 elementer,  $B$  indeholder 7 elementer,  $C$  indeholder 9 elementer, 3 elementer er fælles for  $A$  og  $B$ , 5 elementer er fælles for  $B$  og  $C$ , 2 elementer er fælles for  $A$  og  $C$ , mens 1 element tilhører alle tre mængder. Hvor mange elementer indeholder de tre mængder tilsammen?
- Opgave 3002: I den lille by med 53 beboere har alle beboere mindst en af følgende ting:  
Blodtype A, en frimærkesamling og godt humør.  
22 har blodtype A, 33 har en frimærkesamling, 39 har godt humør, 9 har både blodtype A og en frimærkesamling, 21 har både en frimærkesamling og godt humør, 14 har både blodtype A og godt humør.  
Hvor mange beboere har alle tre ting?
- Opgave 3004: a) Hvor mange naturlige tal til og med 100000 er divisible med 5 eller 13?  
b) Hvor mange naturlige tal til og med 10000 er hverken divisible med 3, 5 eller 7?  
c) Hvor mange naturlige tal til og med 1000 er divisible med 6, 15 eller 20?
- Opgave 3010: a) Hvis man tilfældigt vælger et naturligt tal op til og med 100000, hvad er så sandsynligheden for, at det er divisibelt med 5 eller 13?  
b) Hvis man tilfældigt vælger et naturligt tal op til og med 10000, hvad er så sandsynligheden for, at det hverken er divisibelt med 3, 5 eller 7?  
c) Hvis man tilfældigt vælger et naturligt tal op til og med 1000, hvad er så sandsynligheden for, at det er divisibelt med 6, 15 eller 20?
- Opgave 3020: Kan man vælge 8 heltal  $a_1, a_2, \dots, a_8$ , der alle har forskellige principale rester ved division med 7?
- Opgave 3022: Vil der komme periodicitet (et gentaget system, f.eks. 3,4,7,2,4,8,3,4,7,2,4,8,3,4,7,2,4,8,...) i sidste ciffer i fibonaccitallene?
- Opgave 3030: Afgør i hver af nedenstående situationer, om det er  $P_n$ ,  $P(n, r)$ ,  $K_n$  eller  $K(n, r)$ , der skal anvendes, hvis opgaven skal løses (hvilket den IKKE skal):
- I en klasse med 27 elever skal vælges en elevrådsrepræsentant og en suppleant. På hvor mange måder kan det gøres?
  - En fodboldtræner har udtaget 11 spillere til sin startopstilling. Hvor mange måder kan startopstillingen sættes sammen på?
  - Et kortspil blandes, og hver person får 13 kort på hånden. På hvor mange måder kan en hånd med 13 kort se ud?
  - En tv-julekalender består af 24 afsnit. Hvor mange personer kan en gruppe højst bestå af, hvis ingen må have set netop de samme afsnit som en anden i gruppen?
  - En klasse deltager i 1. runde i Georg Mohr. På hvor mange måder kan det hold se ud, der kvalificerer sig til 2. runde?
  - Et eksperiment består i at kaste en mønt 20 gange, og for hvert kast noteres, om det gav plat eller krone. Hvor mange forskellige udfald, giver det?

Opgave 3032: Afgør i hver af nedenstående situationer, om det er  $P_n$ ,  $P(n, r)$ ,  $K_n$  eller  $K(n, r)$ , der skal anvendes, hvis opgaven skal løses (hvilket den IKKE skal):

- Fra en klasse skal udvælges en delegation på 4 elever, der skal ned og hente is til klassen. På hvor mange måder kan delegationen sammensættes?
- 27 svømmere deltager i en svømmekonkurrence. På hvor mange måder kan guld, sølv og bronze fordeles?
- En person skal tage strømpebukser, nederdel, T-shirt, hat og briller på. I hvor mange forskellige rækkefølger kan det gøres?
- Fra en kasse med 36 lottokugler med tallene fra 1-36 trækkes 7 kugler. Hvad er sandsynligheden for at vinde hovedgevinsten, hvis man har købt en enkelt kupon (7 tal)?
- Fra et kortspil kan trækkes et vilkårligt antal kort. Hvor mange forskellige hænder kan man ende med?
- I nedenstående gitter skal man bevæge sig fra felt  $A$  til  $B$ . Man skal følge linjerne og må kun gå til højre eller op, når flere linjer støder sammen. Af hvor mange forskellige veje kan man komme fra  $A$  til  $B$ ?



Opgave 3040: En kønsløs person har 4 par forskellige øreringe, 3 forskellige halskæder og 6 forskellige hårspænder. En *udsmykning* består af et par øreringe, 1 halskæde og 1 hårspænde. Hvor mange forskellige udsmykninger kan personen vælge?

Opgave 3041: En 6-sidet terning kastes 9 gange, og tallene noteres i rækkefølge, således at de danner et 9-cifret tal, f.eks. 352231643.  
Hvor mange forskellige tal kan dannes på denne måde?

Opgave 3042: Fra en klasse med 27 elever skal udvælges en duks, en repræsentant og en referent (man kan ikke være mere end én ting). På hvor mange forskellige måder kan posterne besættes?

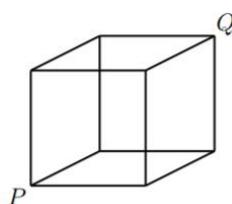
Opgave 3043: En fodboldtræner har 23 mand i truppen og skal udpege en anfører og en viceanfører. På hvor mange forskellige måder kan det gøres?

Opgave 3044: En mønt kastes 13 gange, og hver gang noteres, om det blev plat eller krone. Hvor mange udfald indeholder udfaldsrummet?

Opgave 3045: En restaurant tilbyder 5 forskellige forretter, 7 hovedretter og 4 desserter. På hvor mange måder kan man sammensætte en fuld menu?

Opgave 3046 (Georg Mohr 1. runde 2017 opgave 16):

Figuren viser en terning der er lavet af 12 stykker ståltråd. En myre kravler langs ståltråden fra punktet  $P$  til punktet  $Q$ . Undervejs besøger den alle terningens øvrige hjørner netop én gang. Hvor mange mulige ruter er der?

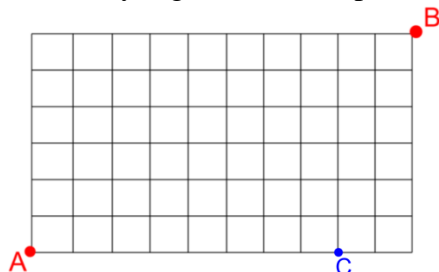




Opgave 3050: En terning kastes tre gange. Hvad er sandsynligheden for, at man i første kast får et lige øjental, i andet kast øjentallet 2 og i tredje kast et øjental over 4?

Opgave 3051: En restaurant tilbyder 5 forskellige forretter, 7 hovedretter og 4 desserter. Hvis man vælger en tilfældig fuld menu, hvad er så sandsynligheden for, at man vælger samme fulde menu, som gæsten på vinduespladsen ved bord 9?

Opgave 3052: En person skal bevæge sig fra punkt A til punkt B langs linjerne. Personen må kun gå til højre eller op, når der kan vælges vej, og om muligt vælger personen tilfældigt blandt disse. Hvad er sandsynligheden for, at personen passerer punkt C?



Opgave 3053: Hvilket af nedenstående er mest sandsynligt (forstået som: Hvad sker oftest i løbet af et år)?

- At falde på gaden efter et regnvejr.
- At falde på gaden.
- At falde på gaden efter et snevejr.
- At falde på gaden efter et regnvejr, der efterfølges af frostvejr.

Opgave 3054: Kan sætning 14 benyttes i det pågældende tilfælde (ja/nej):

- Bestem sandsynligheden for at få en 1'er, to 2'ere og tre 3'ere ved et kast med 6 terninger.
- Bestem sandsynligheden for at få udfaldet  $kpkp$ , hvis en mønt kastes fem gange.
- Bestem sandsynligheden for, at landsholdet stiller op i en bestemt startopstilling, hvis træneren efter at have udvalgt de 11 startende spillere, placerer dem tilfældigt på pladserne.
- Bestem sandsynligheden for, at man ved tre kast med en terning får enten ulige i første kast, lige i andet kast eller en 6'er i sidste kast.
- Bestem sandsynligheden for, at man i fire på hinanden følgende træk fra et spil kort hver gang får et højere kort end det foregående.
- Bestem sandsynligheden for at vinde hovedpræmien i "Hvem vil være millionær", hvis det er ren gæt hele vejen, og man aldrig anvender livliner eller overvejer at stoppe.
- Bestem sandsynligheden for at få 7 rigtige i første runde i Georg Mohr-konkurrencen, hvis man i de 10 multiple-choice-opgaver svarer tilfældigt, og ikke svarer på andet.
- Bestem sandsynligheden for, at man i fire på hinanden følgende træk fra et spil kort hver gang får et kort med en anden kulør end det foregående.

Opgave 3060: En mønt kastes tre gange, og der ses på følgende hændelser:

A: Første kast giver plat.

B: Man får i alt 2 plat.

C: Sidste kast giver krone.

D: Man får i alt 3 krone.

E: Man får i hvert kast noget andet end i det foregående.

I hvilke af nedenstående tilfælde er de to hændelser disjunkte?

- A og B
- A og C
- A og D
- A og E
- B og C
- B og D
- B og E
- C og D
- C og E
- D og E

Opgave 3062: En sort og en rød terning kastes, og der ses på følgende hændelser:

A: Den røde terning giver ulige og den sorte lige.

B: Summen af øjentallene er 10.

C: Summen af øjentallene er 7.

D: Terningerne viser samme øjental.

E: Den røde terning giver øjentallet 3.

Hvilke par af hændelser er disjunkte?

Opgave 3064: Fra et spil kort trækkes to gange ét kort (med tilbagelægning). Er følgende hændelser disjunkte?

A: Der trækkes en ruder i første træk.

B: Der trækkes en spar i andet træk.

Opgave 3065: Tre terninger kastes. Er følgende hændelser disjunkte?

A: Netop to af terningerne viser ulige.

B: Ingen af terningerne giver samme øjental.

Opgave 3066: En kø med ti mennesker permuteres helt tilfældigt. Er følgende hændelser disjunkte:

A: Ingen kommer til at stå på samme placering.

B: Alle står ved siden af mindst én af de personer, de stod ved siden af før.

Opgave 3070: Der er skolebal, og en dreng fra 3.x skal blandt pigerne i 2.w (19 piger), 2.x (7 piger) og 2.y (11 piger) vælge en pige til ballet. Hvor mange muligheder har han?

Opgave 3071: Hos boghandleren skal der vælges en bog fra en af hylderne Filosofi (13 forskellige bøger), Romaner (21 forskellige bøger) og Kogebøger (5 forskellige bøger). Hvor mange bøger kan der vælges mellem?

Opgave 3072: I hvilke af følgende situationer kan sætning 15 (additionsprincippet for valgmuligheder) anvendes?

a) 17 gymnasier tilbyder hver 10 forskellige studieretninger. Hvor mange forskellige studieretninger kan en elev med adgang til disse 17 gymnasier vælge imellem?

b) På gymnasiet med 30 klasser og 28 elever i hver klasse skal udpeges en maskot. Hvor mange valgmuligheder har man?

c) Man skal vælge en tilfældighedsgenerator og kan vælge mellem 1 mønt, 5 forskellige slags terninger og en roulette. Hvor mange valgmuligheder har man?

d) I en forsamling er der 9 personer med rød hat, 19 personer med briller, 27 personer med sorte bukser, 14 personer med skjorte og 31 personer med mørke sko. Hvor mange valgmuligheder har man, hvis man skal udvælge en person i forsamlingen?

e) I et kortspil har man 4 forskellige kulører, og i hver kulør er der 13 forskellige værdier for kortene. Hvor mange forskellige værdier er der mulighed for at trække, hvis man trækker et kort fra bunken?

Opgave 3080: En terning kastes.

Hvad er sandsynligheden for, at man får et ulige øjental eller en 6'er?

Opgave 3081: Tre mønter kastes. Hvad er sandsynligheden for at få 3 plat eller 3 krone?

Opgave 3082: Fra et kortspil med 55 kort (3 jokere) trækkes et kort.

a) Hvad er sandsynligheden for, at man enten får en joker, en hjerter eller en spar?

b) Hvad er sandsynligheden for, at man enten får et es, et billedkort eller en joker?

c) Hvad er sandsynligheden for, at man enten får et billedkort eller en hjerter?

Opgave 3083: En mønt kastes fire gange.

- Hvad er sandsynligheden for at få krone i andet kast?
- Hvad er sandsynligheden for at få 4 krone eller 4 plat?
- Hvad er sandsynligheden for at få netop 1 krone eller netop 1 plat?
- Hvad er sandsynligheden for at få krone i første kast eller plat i tredje kast?
- Hvad er sandsynligheden for at få krone i første kast, plat i tredje kast eller krone i fjerde kast?
- Hvad er sandsynligheden for at få krone i første kast, plat i andet kast, plat i tredje kast eller krone i fjerde kast?

Opgave 3084: Der trækkes to kort - et fra hvert af et blåt og et rødt kortspil med 52 kort.

- Hvad er sandsynligheden for at trække enten to ruder eller to spar?
- Hvad er sandsynligheden for at trække enten en blå hjerter eller en rød spar?
- Hvad er sandsynligheden for at trække to forskellige kulører eller to ens kulører?

Opgave 3090: Udregn i hånden følgende udtryk. Tjek efterfølgende med Maple.

$$\begin{array}{llllllllll} a) 4! & b) 5! & c) 6! & d) \frac{5!}{4!} & e) \frac{6!}{5!} & f) \frac{17!}{16!} & g) \frac{31!}{30!} & h) \frac{177!}{176!} & i) \frac{6!}{4!} & j) \frac{10!}{8!} \\ k) \frac{100!}{98!} & l) \frac{10!}{8! \cdot 2!} & m) \frac{10!}{7! \cdot 3!} & n) \frac{10!}{6! \cdot 4!} & o) \frac{10!}{(5!)^2} & p) \frac{12!}{3! \cdot 9!} & q) \frac{7!}{4! \cdot 5!} & r) \frac{11!}{2! \cdot 9!} \end{array}$$

Opgave 3100: En rockgruppe med 5 medlemmer skal i forbindelse med en fotografering stilles op på række. På hvor mange måder kan det gøres?

Opgave 3101: Et traditionelt kortspil med 52 kort blandes grundigt. På hvor mange forskellige måder kan kortbunken ende med at se ud?

Opgave 3102: Kan man direkte benytte sætning 17 ( $P_n = n!$ ) til at finde facit i følgende tilfælde (ja/nej):

- I en slikpose med 13 forskellige stykker slik skal udvælges 6 stk. På hvor mange måder kan det gøres?
- Fra en klasse med 25 elever skal udvælges et volleyballhold. På hvor mange måder kan det gøres?
- Fem terninger med hver sin farve kastes. På hvor mange måder kan man få netop én sekser?
- En slikpose indeholder 13 forskellige stykker slik. I hvor mange forskellige rækkefølger kan slikket spises?
- Fra en klasse med 25 elever udtages en gruppe bestående af de elever, der er født i januar. På hvor mange måder kan det gøres?
- En kode på 8 tegn skal opbygges af 8 givne, forskellige bogstaver, der hver skal optræde netop én gang. På hvor mange måder kan koden se ud?
- En kode på 8 tegn skal opbygges af 8 bogstaver. På hvor mange måder kan koden se ud?
- En kode på 8 tegn skal opbygges af 8 givne, forskellige bogstaver, der hver kan optræde 0-8 gange. På hvor mange måder kan koden se ud?
- 10 ens terninger kastes, og terningerne placeres på en række. På hvor mange måder kan rækken se ud?
- I en klasse på 27 elever skal eleverne rangeres efter, hvor glade de er for mælkechokolade (ingen kan være lige glade). Hvor mange ranglister skal læreren præfabrikere, hvis hun skal være sikker på, at have den rigtige rangliste med?

Opgave 3110: Beregn  $P(n,r)$  i hånden ved hjælp af  $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ . Tjek resultatet i Maple med

pakken *combinat* og kommandoen *numbperm*. Dvs. resultatet for  $P(5,3)$  tjekkes ved:

*with(combinat) :*

*numbperm(5, 3) = 60*

a)  $P(5,1)$    b)  $P(6,2)$    c)  $P(6,3)$    d)  $P(10,3)$    e)  $P(4,3)$

Opgave 3112: Fra en slikpose med 10 stykker forskelligt slik får 4 personer lov til at tage et stykke. Hvor mange forskellige måder kan det gøres på?

Opgave 3113: Blandt 20 film skal udvælges en guldvinder, en sølvvinder og en bronzevinder. På hvor mange måder kan det gøres?

Opgave 3114: Fem personer skal blandt årets 365 dage vælge deres yndlingsdag, og ingen må vælge den samme. På hvor mange måder kan det gøres?

Opgave 3116: Kan man direkte benytte sætning 18 ( $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ ) til at finde facit i følgende

tilfælde (ja/nej):

- Fra en slikpose med 10 stykker forskelligt slik får 4 personer lov til at tage et stykke. Hvor mange muligheder er der efterfølgende for indholdet i posen?
- Fra et kortspil trækkes 5 kort til en pokerhånd. Hvor mange forskellige pokerhænder kan man sidde med?
- Fra en CD-samling med 27 CD'er skal 5 CD'er vælges, der skal med på ferie. På hvor mange måder kan det gøres?
- Fra et album med 12 numre skal en sanger vælge en første- og en andensingle. På hvor mange måder kan det gøres?
- På et bord ligger 9 brikker med hver sit ciffer fra 1 til 9. Hvor mange 4-cifrede tal kan dannes af disse?
- En butik har 57 forskellige slags te. På hvor mange måder kan man udvælge de 5, man vil købe?
- I et maratonløb deltager 41 løbere. På hvor mange måder kan podiet komme til at se ud?

Opgave 3120: I denne opgave antages det, at fødselsdage er fordelt jævnt ud på årets 365 dage.

- Hvad er sandsynligheden for, at der i en klasse med 27 elever er mindst to elever, der har fødselsdag samme dag?
- I 3 x-klasser går i alt 78 elever. Hvad er sandsynligheden for, at mindst to af disse elever har fødselsdag samme dag?
- Hvad er det mindste antal elever, der skal være i en klasse, hvis sandsynligheden for, at mindst to elever har fødselsdag samme dag skal være over 50%?
- På en årgang på skolen går 366 elever. Hvad er sandsynligheden for, at mindst to af disse elever har fødselsdag samme dag?
- I en særlig klasse går én elev. Hvad er sandsynligheden for, at mindst to elever i denne klasse har fødselsdag samme dag?
- I en anden særlig klasse går to elever. Hvad er sandsynligheden for, at mindst to elever i denne klasse har fødselsdag samme dag?
- Hvad er det mindste antal personer, der skal være i en forsamling, hvis sandsynligheden for, at mindst to personer har fødselsdag samme dag skal være over 95%?

Opgave 3130: En slikpose indeholder 10 stk. forskelligt slik, og man har mulighed for i lommen at tage lige så meget slik med fra posen, som man har lyst til, når man skal på tur. Hvor mange muligheder er der for slikket i lommen?

Opgave 3132: Fra et cykelfelt med 173 ryttere skal et vilkårligt antal tilfældigt udvalgte ryttere udtages til dopingkontrol. Hvor mange forskellige muligheder er der for sammensætningen af gruppen, der skal til dopingkontrol?

Opgave 3134: Kan man direkte benytte sætning 19 ( $K_n = 2^n$ ) til at finde facit i følgende tilfælde (ja/nej):

- I otte skuffer på række kan man i hver vælge at lægge en sok eller lade være. På hvor mange forskellige måder kan det gøres?
- I supermarkedet er der 37 forskellige varer, og man køber højst en af hver slags vare. På hvor mange forskellige måder kan indkøbskurven ende med at se ud?
- Fra en klasse skal udvælges 5 elever, der skal arrangere den næste fest. På hvor mange forskellige måder kan disse vælges?
- Otte terninger med hver sin farve kastes. Hvor mange forskellige udfald kan kastet give?
- Otte ens terninger kastes. Hvor mange forskellige udfald kan kastet give?
- Otte mønter med hver sin farve kastes (plåt/krone). Hvor mange forskellige udfald kan kastet give?
- Otte ens mønter kastes. Hvor mange forskellige udfald kan kastet give?
- Et tal dannes ved, at man på otte forskellige placeringer ved siden af hverandre kan skrive et 1-tal eller et 0. Hvor mange forskellige tal kan dannes på denne måde?
- Blandt 20 medlemmer af et politisk parti skal udvælges nogle, der i prioriteret rækkefølge skal opstilles til næste valg. På hvor mange måder kan det gøres?
- Et bæger går rundt om et bord med 18 personer. Hver person kan vælge at smide en krone i bægeret eller lade være. På hvor mange måder kan bægeret efterfølgende være fyldt?

Opgave 3140: Beregn i hånden nedenstående udtryk ved hjælp af  $K(n, r) = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$ .

Tjek efterfølgende resultatet i Maple **skiftevis** med kommandoen *binomial*, udtrykket

$\binom{n}{r}$  og kommandoen *numbcomb* i pakken *combinat*, dvs:

`binomial(7, 3) = 35`

$\binom{7}{3} = 35$

`with(combinat) :`

`numbcomb(7, 3) = 35`

a)  $K(5, 2)$     b)  $K(5, 3)$     c)  $K(10, 8)$     d)  $K(10, 2)$     e)  $K(1, 0)$

f)  $K(9, 8)$     g)  $K(13, 12)$     h)  $K(13, 13)$     i)  $K(13, 0)$     j)  $K(0, 0)$

Opgave 3142: I en fuldtallig klasse er der 27 elever.

- Hvor mange forskellige muligheder er der for en udfyldt fraværsliste, når der er to fraværende?
- Hvor mange forskellige muligheder er der for en udfyldt tilstedeværelsesliste, når der er to fraværende?

Opgave 3144: I bingo er der 90 numre. En plade består af 15 tilfældigt valgte numre. Hvor mange forskellige plader findes der?

Opgave 3146: Kan man direkte benytte sætning 20 ( $K(n, r) = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$ ) til at finde facit i

følgende tilfælde (ja/nej):

- a) For at afprøve virkningen af et medikament skal en undergruppe på 100 personer ud af en gruppe på 300 personer udvælges til at indtage medikamentet. Hvor mange forskellige undergrupper kan dannes?
- b) Fra en tennistrup på 7 spillere skal udtages et hold bestående af en 1. single, en 2. single, en 3. single og en 4. single. På hvor mange måder kan holdet sættes?
- c) 17 skakspillere stilles op på en række og nummereres med numrene fra 1 til 17. Blandt disse udtrækkes 4 numre, der skal spille mod hinanden i en miniturnering. På hvor mange måder kan deltagerne i miniturneringen vælges?
- d) 15 sokker skal placeres i 11 skuffer. På hvor mange måder kan det gøres?
- e) I en klasse på 23 skal udvælges en indpisker, en humørspreder og en faktatjekker. På hvor mange måder kan det gøres?
- f) Fra et cykelhold på 9 mand skal udvælges et antal vandbærere. På hvor mange måder kan det gøres?
- g) Fra et cykelhold på 9 mand skal udvælges to vandbærere. På hvor mange måder kan det gøres?
- h) Et ord på 5 forskellige bogstaver skal dannes ud af et alfabet på 28 bogstaver, hvor der ikke er regler om, at alle ord skal indeholde vokaler. Hvor mange af sådanne ord kan dannes?
- i) Et ord på 5 bogstaver skal dannes ud af et alfabet på 28 bogstaver, hvor der ikke er regler for anvendelsen af vokaler og konsonanter. Hvor mange af sådanne ord kan dannes?
- j) Hvor mange forskellige hænder bestående af 13 kort kan dannes med et kortspil bestående af 52 kort (ingen jokere)?
- k) Hvor mange forskellige hænder bestående af 13 kort kan dannes med et kortspil bestående af 55 kort?

Opgave 3150: 10 elever fra 3.x deltager i første runde i Georg Mohr. Der kræves 12 point for at gå videre, og prøven varer i 90 minutter. En liste er gjort klar til de elever, der evt. kvalificerer sig til 2. runde, og navnene på listen skrives alfabetisk op. På hvor mange måder kan listen komme til at se ud?

Opgave 3151: En elev i en klasse på 25 personer skal finde fire klassekammerater at tage på skitur med. På hvor mange måder kan disse vælges?

Opgave 3152: En stx-elev har 6 pinocchio-kugler (nu kendt som pepito-kugler) med forskellige farver. I hvor mange forskellige rækkefølger kan de spises?

Opgave 3153: En håndboldtræner skal vælge sin startopstilling bestående af 7 spillere blandt en trup på 16 spillere, der alle kan spille de 7 forskellige pladser på banen. Hvor mange forskellige startopstillinger, kan træneren sætte?

Opgave 3154: Blandt skolens 36 klasser med hver 28 elever skal vælges en elevrådsformand og en næstformand, der ikke må være fra samme klasse. På hvor mange måder kan posterne besættes?

Opgave 3155: Hvad er sandsynligheden for, at der i en klasse på 30 elever er mindst to elever, der har fødselsdag samme dag (der regnes med et symmetrisk sandsynlighedsfelt og 365 dage)?

- Opgave 3156: Hvad er sandsynligheden for, at der i en klasse på 27 elever ikke er nogen elever, der har fødselsdag samme dag (der regnes med et symmetrisk sandsynlighedsfelt og 365 dage)?
- Opgave 3157: Man kan vælge at kaste ét kast med en 6-sidet, en 8-sidet, en 12-sidet eller en 20-sidet terning. Hvor mange forskellige øjental har man mulighed for at få?
- Opgave 3158: En terning kastes tre gange.
- Hvad er sandsynligheden for at slå en 1'er i første kast og en 5'er i sidste kast?
  - Hvad er sandsynligheden for at slå et lige øjental i første kast, mindst 5 i andet kast og en 2'er i tredje kast?
  - Hvad er sandsynligheden for at slå tre 6'ere eller en 1'er i første kast?
  - Hvad er sandsynligheden for at slå ulige i første kast, lige i andet kast eller ulige i tredje kast?
- Opgave 3159a: Fem forskellige cigaretmærker - det ene mere dødbringende end det andet - skal undersøges og rangeres efter mængden af giftstoffer. Hvor mange forskellige ranglister kan man forestille sig, hvis man ikke på forhånd kender noget til mærkerne?
- Opgave 3159b: Alle 26 elever i en klasse har fået en lotteriseddel, hvor chancen for at vinde en gevinst er 10%.
- Hvad er sandsynligheden for, at ingen vinder en gevinst.
  - Hvad er sandsynligheden for, at alle vinder en gevinst.
  - Hvad er sandsynligheden for, at mindst én elev vinder en gevinst.
  - Alle vinderne skal køre hyldestrunde i skolebussen. På hvor mange forskellige måder kan skolebussen fyldes?
  - Hvis netop 7 personer vinder, får vinderne desuden lov at sidde på de 7 forskellige sæder på skolebussens tag. På hvor mange forskellige måder kan sæderne på skolebussens tag besættes.
- Opgave 3160: Konkret afprøvning af sætning 21:  $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$ .
- Tjek, at følgende er identiteter ved at udregne højreside og venstreside hver for sig:
- $2^2 = \binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2}$
  - $2^3 = \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3}$
  - $2^4 = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$
- Opgave 3162: Bestem ved udregninger i hånden værdien af følgende udtryk:
- $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$
  - $\sum_{i=0}^5 \binom{6}{i}$
  - $\sum_{i=0}^9 \binom{10}{i}$
  - $\sum_{i=1}^9 \binom{10}{i}$
- Opgave 3164: Fra en forsamling på 10 personer skal dannes en klub. Der skal være mindst én i klubben, men man må ikke udtage alle 10 personer på én gang. På hvor mange forskellige måder kan klubben sammensættes?
- Opgave 3166: I en klasse med 27 personer skal højst 25 udtages til en prøve. På hvor mange måder kan det gøres?

Opgave 3170: Anvend Den Aritmetiske Trekant (Pascals Trekant) til at bestemme nedenstående

binomialkoefficienter. Tjek resultatet med Maples  $\binom{n}{r}$ :

$$a) \binom{4}{2} \quad b) \binom{7}{3} \quad c) \binom{6}{5} \quad d) \binom{9}{4} \quad e) \binom{9}{5} \quad f) \binom{10}{4} \quad g) \binom{10}{5} \quad h) \binom{10}{6} \quad i) \binom{10}{10}$$

Opgave 3172: I en klasse med 24 elever er der én, der hedder Børge. Fire elever fra klassen skal ud at købe pynt til translokationen, og da de skal køre i Børges forældres bil, skal Børge være den ene af dem. På hvor mange måder kan de fire vælges?

Opgave 3174: I samme klasse som i opgave 3172 skal fire elever sætte sig sammen og skrive om Børge til klassens blå bog (så Børge kan selvfølgelig ikke selv være med). På hvor mange måder kan de fire vælges?

Opgave 3176: I samme klasse som i opgave 3172 skal fire elever udvælges til at lave flødeskumskager. På hvor mange måder kan de fire vælges?

Opgave 3178: a) Hvor mange af 4-personersgrupperne i opgaverne 3172 og 3174 er identiske?  
b) Er der en sammenhæng mellem resultaterne i opgave 3172, 3174 og 3176?

Opgave 3180: Anvend Den Aritmetiske Trekant til at bestemme nedenstående udtryk. Tjek med Maples *expand*:

$$a) (x+y)^3 \quad b) (x+y)^5 \quad c) (x+y)^{10}$$

Opgave 3182: Bestem koefficienterne til de angivne led i nedenstående udtryk:

$$a) x^{13}y^7\text{-leddet i } (x+y)^{20} \quad b) x^5y^{28}\text{-leddet i } (x+y)^{33} \quad c) x^{28}y^5\text{-leddet i } (x+y)^{33}$$

Opgave 3184: Bestem summen af koefficienterne til samtlige led i  $(x+y)^{25}$ .

Opgave 3190: I en klasse med 21 elever, hvoraf 8 er drenge, skal vælges et udvalg bestående af 6 medlemmer. På hvor mange måder kan det gøres i følgende tilfælde:

- Der skal være lige kønsfordeling.
- Der skal være 4 piger og 2 drenge.
- Der skal være 2 piger og 4 drenge.
- Kønsfordelingen er ligegyldig.

Opgave 3192: En krukke indeholder 45 kugler. 30 røde og 15 blå – alle nummererede med forskellige numre. Der skal udtages 10 kugler fra krukken. På hvor mange måder kan det gøres under følgende betingelser:

- Der skal være lige mange røde og blå kugler.
- Der skal være 7 røde og 3 blå kugler.
- Der skal være 3 røde og 7 blå kugler.
- Farverne på kuglerne er uden betydning.

Opgave 3194: En krukke indeholder 20 kugler. 10 røde, 6 blå og 4 grønne – alle nummererede med forskellige numre. Der skal udtages 5 kugler fra krukken. På hvor mange måder kan det gøres under følgende betingelser:

- Der skal være 3 røde, 1 blå og 1 grøn.
- Der skal være 1 rød, 1 blå og 3 grønne.
- Farvefordelingen er uden betydning.
- Alle kuglerne skal være grønne.



Opgave 3200: Afgør (ja/nej) om følgende er et binomialeksperiment:

- a) En mønt kastes 17 gange, og for hvert kast ses på, om det blev plat eller krone.
- b) En terning kastes 11 gange, og for hvert kast noteres øjentallet.
- c) Fra et kortspil trækkes 12 gange et kort (uden tilbagelægning). Det noteres hver gang hvilken kulør kortet havde (runder, klør, spar eller hjerter).
- d) Fra et kortspil trækkes 15 gange et kort (med tilbagelægning). Det noteres hver gang hvilken kulør kortet havde.
- e) Fra et kortspil trækkes 10 gange et kort (hver gang med tilbagelægning), og det noteres hver gang, om kortet var en runder.
- f) Fra en gruppe på 30 dressurryttere udtages en efter en 7 ryttere til dopingkontrol. I hvert tilfælde noteres, om rytteren er en kvinde eller en mand.
- g) En terning kastes 17 gange. I hvert kast noteres det, om kastet var ulige eller lige.
- h) Fra et kortspil trækkes 17 gange et kort (med tilbagelægning). Efter hver trækning noteres det, om kortets værdi var højere end det foregående kort (ja/nej).
- i) 14 gange kastes en rød og en sort terning. I hvert kast noteres det, om den sorte terning viste et højere øjental end den røde (ja/nej).
- j) En krukke indeholder 17 blå og 13 røde kugler. Man skal tage 7 af dem med sig og trækker dem en efter en. Efter hver trækning noteres farven på kuglen.

Opgave 3210: Bestem sandsynlighederne for følgende ting:

- a) At få netop 3 seksere ved 18 kast med en terning.
- b) At få netop 3 øjental over 4 ved 18 kast med en terning.
- c) At trække netop 5 spar ved 13 træk (med tilbagelægning) fra et spil kort uden jokere.
- d) At slå netop 4 krone i 11 kast med en mønt.
- e) At netop 7 ud af 50 adspurgte vil stemme på partiet P, som 12% af befolkningen vil stemme på.

Opgave 3212: Hvad er sandsynligheden for at få mindst én sekser ved et kast med 5 terninger?

Opgave 3214: Hvad er sandsynligheden for at få højst 4 sorte kort, hvis man 5 gange trækker et kort fra et spil kort uden jokere (med tilbagelægning)?

Opgave 3216: Hvad er sandsynligheden for at få flere plat end krone, hvis man kaster en mønt 50 gange?

Opgave 3218: Hvad er sandsynligheden for at få flere plat end krone, hvis man kaster en mønt 100 gange?

Opgave 3219: Hvad er sandsynligheden for at få flere plat end krone, hvis man kaster en mønt 75 gange?

Opgave 3220: Anvend Gym-pakkens kommando *binpdf* til at udregne resultaterne i opgave 3210.

Opgave 3221: Anvend Gym-pakkens kommando *bincdf* til at udregne resultatet i opgave 3214.

Opgave 3222: En terning kastes 17 gange.

- a) Hvad er sandsynligheden for at få netop 5 seksere?
- b) Hvad er sandsynligheden for at få højst 3 seksere?
- c) Hvad er sandsynligheden for at få mindst 4 seksere?
- d) Hvad er sandsynligheden for at få højst 4 seksere?
- e) Hvad er sandsynligheden for at få mindst 5 seksere?
- f) Hvad er sandsynligheden for at få mellem 4 og 7 seksere?

Opgave 3224: Fra et kortspil med 52 kort trækkes 20 gange et kort. Efter hver trækning lægges kortet tilbage i bunken, der blandes.

- Hvad er sandsynligheden for at få netop 7 ruder?
- Hvad er sandsynligheden for at få højst 4 spar?
- Hvad er sandsynligheden for at få mellem 6 og 13 hjerter.
- Hvad er sandsynligheden for at få enten 8 klør eller 15 klør?
- Hvad er sandsynligheden for at få både 7 hjerter og 9 hjerter?
- Hvad er sandsynligheden for at få flere røde kort end sorte?

Opgave 3230: Bestem middelværdi, spredning og typetal for følgende binomialfordelinger:

a)  $b\left(25, \frac{1}{5}\right)$       b)  $b\left(41, \frac{1}{3}\right)$       c)  $b\left(200, \frac{1}{7}\right)$

Anvend kommandoerne *pindediagramBIN* og *trappekurveBIN* fra Maples Gym-pakke og tegn pindediagrammer og trappekurver over de tre fordelinger.

Opgave 3232: Se på binomialfordelingen  $b\left(200, \frac{1}{9}\right)$

- Bestem middelværdi, spredning og typetal.
- Find sandsynligheden for at få netop 10 succeser.
- Find sandsynligheden for at få netop 20 succeser.
- Find sandsynligheden for at få netop 30 succeser.
- Find sandsynligheden for at få højst 10 succeser.
- Find sandsynligheden for at få højst 20 succeser.
- Find sandsynligheden for at få højst 30 succeser.
- Find sandsynligheden for at få mindst 11 succeser.
- Find sandsynligheden for at få mindst 21 succeser.
- Find sandsynligheden for at få mindst 31 succeser.
- Find sandsynligheden for at få mellem 11 og 20 succeser.
- Find sandsynligheden for at få mellem 21 og 30 succeser.
- Benyt Gym-pakkens *pindediagramBIN* og *trappekurveBIN* til at tegne et pindediagram og et trappediagram over fordelingen find ud af, hvordan du (selvfølgelig kun med en vis nøjagtighed) kan aflæse dine udregnede værdier på en af figureerne.

Opgave 3234: Antag, at 16,8% af vælgerne vil stemme på partiet W. En stikprøve på 1500 vælgere spørges, hvilket parti de vil stemme på. Se i det følgende bort fra, at det ikke helt er et binomialeksperiment, og anvend derfor binomialfordelingen:

- Bestem middelværdi, spredning og typetal for fordelingen.
- Hvad er sandsynligheden for, at netop 252 vælgere svarer, at de vil stemme på partiet W?
- Hvad er sandsynligheden for, at mellem 240 og 270 vælgere svarer, at de vil stemme på partiet W?
- Hvad er sandsynligheden for, at antallet af vælgere, der svarer, at de vil stemme på partiet W, ligger i intervallet  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ ?
- Hvad er sandsynligheden for, at antallet af vælgere, der svarer, at de vil stemme på partiet W, ligger i intervallet  $[\mu - 2 \cdot \sigma, \mu + 2 \cdot \sigma]$ ?
- Hvilket tal  $a$  har den egenskab, at det er det mindste naturlige tal med den egenskab, at sandsynligheden for at højst  $a$  vælgere svarer, at de vil stemme på partiet W, er over 2,5%?
- Hvilket tal  $a$  har den egenskab, at det er det største naturlige tal med den egenskab, at sandsynligheden for at mindst  $a$  vælgere svarer, at de vil stemme på partiet W, er over 2,5%?

- Opgave 3240: Fra et kortspil uden jokere trækkes et kort. Hvis kortet ikke er en hjerter, stopper man. Hvis kortet er en hjerter, lægges det tilbage, kortbunken blandes, og man gentager proceduren. Hvad er sandsynligheden for, at man når at trække:
- a) 0 hjerter. b) 1 hjerter. c) 2 hjerter. d) 3 hjerter. e) 4 hjerter. f)  $n$  hjerter.
- Opgave 3250: Fra et kortspil uden jokere trækkes et kort ad gangen (med tilbagelægning), indtil man har trukket 4 kort, der ikke er hjerter.  
Hvad er sandsynligheden for, at man når at trække:
- a) 0 hjerter. b) 1 hjerter. c) 2 hjerter. d) 3 hjerter. e) 4 hjerter. f)  $n$  hjerter.
- Opgave 3252: Fra et kortspil uden jokere trækkes et kort ad gangen (med tilbagelægning), indtil man har trukket 7 hjerter.  
Hvad er sandsynligheden for, at man:
- a) Trækker netop 0 kort, der ikke er hjerter?  
b) Trækker netop 1 kort, der ikke er hjerter?  
c) Trækker netop 3 kort, der ikke er hjerter?  
d) Trækker netop 7 kort, der ikke er hjerter?  
e) Trækker netop 7 hjerter.  
f) Trækker netop  $n$  kort, der ikke er hjerter?
- Opgave 3260: En terning kastes, indtil man 5 gange ikke har slået en sekser.
- a) Hvad er sandsynligheden for, at man når at slå netop én 6'er?  
b) Hvad er sandsynligheden for, at man når at slå netop tre 6'ere?  
c) Hvad er det gennemsnitlige antal 6'ere, man må forvente at opnå, hvis man udfører forsøget mange gange?  
d) Hvad er det gennemsnitlige antal kast, man må forvente at kaste, hvis man udfører forsøget mange gange?  
e) Hvad er det mest sandsynlige antal 6'ere, man kan få?  
f) Hvad er det mest sandsynlige antal kast?
- Opgave 3262: En mønt kastes, indtil man 3 gange har slået plat.
- a) Hvad er sandsynligheden for, at man når at slå netop én krone?  
b) Hvad er sandsynligheden for, at man når at slå netop 3 krone?  
c) Hvad er det gennemsnitlige antal krone, man må forvente at opnå, hvis man udfører forsøget mange gange?  
d) Hvad er det gennemsnitlige antal kast, man må forvente at kaste, hvis man udfører forsøget mange gange?  
e) Hvad er det mest sandsynlige antal krone, man kan få?  
f) Hvad er det mest sandsynlige antal kast?
- Opgave 3270: I en krukke ligger 10 kugler, hvoraf 3 er sorte. Der trækkes to kugler fra krukken.  
Hvad er sandsynligheden for at trække:
- a) 0 sorte kugler. b) 1 sort kugle. c) 2 sorte kugler.
- Opgave 3271: Fra et kortspil uden jokere trækkes 3 kort. Hvad er sandsynligheden for at trække:
- a) 0 klør. b) 1 klør. c) 2 klør. d) 3 klør.
- Opgave 3280: Fra et kortspil uden jokere trækkes 21 kort. Hvad er sandsynligheden for:
- a) At trække 8 klør? b) At trække 5 hjerter? c) At trække 13 røde kort?  
d) At trække 2 esser? e) At trække 7 billedkort?

Opgave 3282: I en krukke er 15 røde kugler, 8 grønne kugler og 37 blå kugler.

Der trækkes 20 kugler. Hvad er sandsynligheden for:

- At trække 7 røde kugler?
- At trække 15 blå kugler?
- At trække 10 grønne kugler?
- At trække enten 6 grønne, 6 røde eller 6 blå kugler?
- At trække 6 grønne, 6 røde og 6 blå kugler?

Opgave 3290: I en pose slik er der 15 lakridser, 10 vingummier og 5 skumfiduser. Når man tager et stykke tilfældigt slik op af posen, spiser man det.

- Hvad er sandsynligheden for, at man når at spise netop 3 vingummier, inden man spiser sin femte ikke-vingummi?
- Hvad er sandsynligheden for, at man når at spise netop 3 lakridser, inden man spiser sin femte ikke-lakrids?
- Hvad er sandsynligheden for, at man skal tage netop syv stykker slik, inden man får sin anden skumfidus?
- Hvor mange ikke-lakridser vil man i gennemsnit få, inden man har taget sin 8. lakrids?
- Hvor mange stykker slik skal man i gennemsnit tage, inden man har taget 4 vingummier?
- Hvor mange stykker slik skal man i gennemsnit tage, inden man har taget alle de 5 skumfiduser?

Opgave 3292: I en klasse på 25 elever er der altid 7 elever, der har lineal med.

- Hvad er sandsynligheden for, at det først er den tredje elev, man spørger, der har en lineal med?
- Hvor mange elever skal man i gennemsnit spørge, før man finder en elev, der har lineal med?

Opgave 3300: En krukke med 10 kugler indeholder 5 blå, 3 røde og 2 gule kugler. 12 gange trækkes fra krukken en kugle, der efterfølgende lægges tilbage.

- Hvad er sandsynligheden for at trække 6 blå, 4 røde og 2 gule kugler?
- Hvad er sandsynligheden for at trække 4 blå, 2 røde og 6 gule kugler?
- Hvad er sandsynligheden for at trække 4 kugler af hver farve?
- Hvad er sandsynligheden for at trække 7 blå og 5 røde kugler?
- Hvad er sandsynligheden for at trække 7 blå, 5 røde og 2 gule kugler?

Opgave 3302: Seks terninger kastes.

- Hvad er sandsynligheden for at få 2 3'ere, 1 5'er og 3 6'ere?
- Hvad er sandsynligheden for, at alle terninger viser noget forskelligt?
- Hvad er sandsynligheden for, at man får flere 2'ere end 1'ere, flere 3'ere end 2'ere og flere 4'ere end 3'ere?

Opgave 3304: Seks terninger kastes.

- Hvad er sandsynligheden for at få 3 5'ere og 3 6'ere?
- Hvad er sandsynligheden for at få 2 gange 3 ens (dvs. f.eks. 1,1,1,4,4,4)?
- Hvad er sandsynligheden for at få 3 par (f.eks. 1,1,5,5,6,6)?
- Hvad er sandsynligheden for at få et fuldt hus, men ikke 2 gange 3 ens (dvs. 3 af en slags, 2 af en anden og 1 af en tredje)?
- Hvad er sandsynligheden for at få et par, dvs. mindst 2 ens øjental?

Opgave 3310: En krukke indeholder 50 kugler, hvoraf 30 er blå, 15 røde og 5 sorte.

Der trækkes 12 kugler fra krukken (uden tilbagelægning).

- Hvad er sandsynligheden for at få 8 blå, 3 røde og 1 sort?
- Hvad er sandsynligheden for at få 9 blå og 3 røde?

Opgave 3312: Fra et kortspil (uden jokere) trækkes 13 kort til en hånd.

- Hvad er sandsynligheden for at få 5 spar, 4 ruder, 2 hjerter og 2 klør?
- Hvad er sandsynligheden for at få 1 spar, 3 ruder, 7 hjerter og 2 klør?
- Hvad er sandsynligheden for at få 2 esser, 5 billedkort og 6 talkort (2-10)?
- Hvad er sandsynligheden for at få 1 kort med hver værdi (1-13)?
- Hvad er sandsynligheden for at få 3 kort af tre af kulørerne og 4 kort af den sidste kulør?
- Hvad er sandsynligheden for at få 2 kort af tre af kulørerne og 7 kort af den sidste kulør?
- Hvad er sandsynligheden for at få henholdsvis 1, 3, 4 og 5 kort i de forskellige kulører?

Opgave 3320: Inden et forsøg med en radioaktiv kilde måles baggrundsstrålingen. Der foretages 10 målinger af 10 sekunders varighed. Tællertallene bliver:

9, 5, 6, 3, 7, 4, 8, 2, 6, 4.

- Hvad er sandsynligheden for at have en baggrundsstråling på 3 i en måling på 10 sekunder?
- Hvad er sandsynligheden for at have en baggrundsstråling på 5 i en måling på 10 sekunder?
- Hvad er sandsynligheden for at have en baggrundsstråling på 6 i en måling på 10 sekunder?
- Hvad er sandsynligheden for at have en baggrundsstråling på 1 i en måling på 10 sekunder?
- Hvad er sandsynligheden for at have en baggrundsstråling på 0 i en måling på 10 sekunder?
- Hvad er sandsynligheden for at have en baggrundsstråling på 12 i en måling på 10 sekunder?

Opgave 3322: For et vejkryds af typen A forekommer der i gennemsnit 0,37 dødbringende færdselsuheld om året.

- Hvad er sandsynligheden for, at der i et vejkryds af typen A forekommer 0 dødbringende færdselsuheld på et år?
- Hvad er sandsynligheden for, at der i et vejkryds af typen A forekommer 1 dødbringende færdselsuheld på et år?
- Hvad er sandsynligheden for, at der i et vejkryds af typen A forekommer mere end 2 dødbringende færdselsuheld på et år?
- Hvad er spredningen for den pågældende poissonfordeling.

Opgave 3324: På et kvadratisk papir med arealet  $1 \text{ m}^2$  placeres 469 punkter. Papiret klippes op i 100 kvadrater (10 cm x 10 cm).

- Bestem variansen for den poissonfordeling, der beskriver antallet af punkter på de små kvadrater.
- Hvor mange små kvadrater med netop 2 punkter vil man i gennemsnit få?
- Hvor mange små kvadrater med netop 5 punkter vil man i gennemsnit få?
- Hvor mange små kvadrater med ingen punkter vil man i gennemsnit få?

Opgave 3326: Ud af 7386 årlige operationer af typen A på landets hospitaler optræder der komplikationer i 425 tilfælde.

- Hvor mange årlige komplikationer ved operationen af typen A vil man i gennemsnit få på et hospital, der foretager 865 operationer om året, hvis alle hospitaler er ens?
- Hvad er sandsynligheden for, at hospitalet – igen hvis alle hospitaler er ens – vil have mere end 55 komplikationer?
- Hvad er sandsynligheden for, at hospitalet – igen hvis alle hospitaler er ens – vil have mere end 65 komplikationer?
- Hvad er sandsynligheden for mere end 75 komplikationer?

# STATISTIK

Opgave 4000: I klasserne *A* og *B* med henholdsvis 30 og 27 elever opnåede eleverne til en prøve følgende karakterer:

<b>A</b>	Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
	Antal	4	3	1	7	5	7	3
<b>B</b>	Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
	Antal	2	0	6	5	8	6	0

- Angiv typekaraktererne i de to klasser.
- Angiv kvartilsættene for begge klasser.
- Bestem middelværdi og spredning for begge klasser.
- Tegn pindediagrammer over karakterfordelingerne i de to klasser.
- Tegn de to boksplot over karaktererne for klasserne *A* og *B* i ét skema.

Opgave 4001: En klasse opnår følgende karakterer til en matematikprøve:

<b>Karakter</b>	-3	00	02	4	7	10	12
<b>Antal</b>	1	4	5	5	6	2	3

- Bestem typetallet og kvartilsættet.
- Tegn et pindediagram og et boksplot, der illustrerer klassens karakterer.

Opgave 4002: En terning kastes 300 gange, og hyppigheden af øjentallene er:

<b>Øjental</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
<b>Hyppighed</b>	<b>42</b>	<b>51</b>	<b>43</b>	<b>57</b>	<b>50</b>	<b>57</b>

Foretag følgende uden brug af særlige Maple-kommandoer (men gerne "lommeregnerindtastninger"):

- Bestem middelværdi, varians og spredning.
- Tegn et pindediagram og et trappediagram.
- Bestem kvartilsættet.
- Bestem 10%-fraktilen og 90%-fraktilen og sæt ord på disse.
- Tegn et boksplot

Kontrollér alle dine resultater ved at anvende særlige kommandoer i Maple.

Kan du vurdere, om det er en snydeterning?

Opgave 4003: I første kvartal af 2016 fordelte den danske befolkning sig på følgende måde med hensyn til alder:

Alder	]0,10]	]10,20]	]20,30]	]30,40]	]40,45]	]45,50]	]50,55]	]55,60]	]60,70]	]70,80]	]80,90]	]90,110]
Antal (målt i tusinder)	694	694	739	685	391	414	394	354	681	447	180	34

- Tegn et histogram over aldersfordelingen.
- Angiv typeintervallet.
- Tegn en sumkurve over aldersfordelingen og angiv kvartilsættet.
- Bestem 33%-fraktilen og fortolk resultatet.
- Hvor stor en procentdel af den danske befolkning var i første kvartal af 2016 mindst 78 år?

Opgave 4004: Benyt informationerne fra opgave 4652 og svar på følgende både for 10 skridt og for 30 skridt.

- Bestem middelværdi og spredning (standardafvigelse).
- Ligger den oplyste værdi for bymurens længde inden for én standardafvigelse fra middelværdien?

Opgave 4005: Tegn i samme skema boksplot for målingerne for 10 skridt og 30 skridt i opgave 4702 og kommentér resultatet.

Opgave 4006: En klasse har målt højden af Det Skæve Tårn (oplyst til 55,86 m over græsset). Der skulle være anvendt 4 forskellige metoder:

- 1) Skyggen af en person med kendt højde sammenlignes med skyggen fra Det Skæve Tårn. Målinger på jorden foretages med skolængder (dvs. uden målebånd). **Udført af en anden klasse.**
- 2) Sigtelinje fra jordhøjde til hårtop til toppen af Det Skæve Tårn. Alle længder måles med målebånd.
- 3) Én sigtevinkel til tårnets top måles, og afstanden til tårnet måles med målebånd.
- 4) To sigtevinkler måles samt afstanden mellem de to sigtepunkter (målebånd).

Klassen får følgende resultater (alle højder angivet i meter):

**Metode 1:**

37,6	56,2	53,9	51,2	53,0	51,8	37,0	51,5	54,9	53,2
38,9	38,0	55,2	46,3	41,3	48,0	51,7	51,3	52,8	50,2
62,2	60,7	52,7	51,2	42,6	44,2	48,8	47,4		

**Metode 2:**

52,0	47,8	45,7	46,9	54,7	58,6	40,3	48,7	50,7
55,9	50,3	48,4	57,3	42,9	50,9	50,3	48,7	50,3
44,5	49,0	62,2	54,3	50,7	47,8	29,8	47,5	51,7

**Metode 3:**

47,7	53,6	23,1	44,2	52,3	50,8	23,2	57,0	49,8
49,5	47,7	51,6	54,0	45,2	51,3	31,4	48,1	32,8
54,5	52,5	46,2	53,1	49,8	53,6	31,8	53,6	51,6

**Metode 4:**

63,9	48,4	49,5	38,9	33,5	52,5	51,8	56,7	52,5
10,9	49,2	42,4	72,5	39,8	271,5	73,1	169,1	48,4
48,8	49,2	48,4	31,9	59,3	45,9			

- a) Bestem middelværdi og spredning for hver af metoderne 1, 2, 3 og 4.
- b) Bestem kvartilsættene for de fire metoder og tegn bokspot.
- c) Bestem for hver af metoderne IQR og udpeg outliers.
- d) Ville resultaterne 73,1 og 72,5 fra Metode 4 have været outliers ved de andre metoder?
- e) Er middelværdi eller median det bedste bud på tårnets højde for hver af metoderne?
- f) Ligger tårnets højde inden for én spredning fra middelværdien i nogle af metoderne?
- g) Kan man, som man måske kunne fristes til efter spørgsmål f, sige, at metode 2 er den dårligste metode, mens metode 4 er den bedste metode, da den rigtige højde på tårnet ligger klart inden for én spredning fra middelværdien med den metode?

Opgave 4007: Benyt tallene fra 20 skridt i opgave 4702. Lav en passende gruppering og foretag følgende:

- a) Bestem middelværdi, varians, spredning og typeinterval.
- b) Tegn et histogram og en sumkurve
- c) Hvor mange procent af eleverne har en skridtlængde over 75 cm?
- d) Hvad er den længste skridtlængde blandt eleverne med de 40% korteste skridtlængder?
- e) Har nogle elever valgt forskellige grupperinger, og hvilken betydning har det haft for resultaterne?

Opgave 4008: Indtegn to bokspot for tabelværdierne fra opgave 4352. Undersøg, hvilke af de fire observationer ”mindste observation 10 skridt”, ”største observation 10 skridt”, ”mindste observation 30 skridt” og ”største observation 30 skridt”, der er outliers.

Opgave 4009: På et gymnasium i udkanten af hovedstaden fordeler elevernes højder sig således:

Højdeinterval / cm	]140;160]	]160;170]	]170;175]	]175;180]	]180;185]	]185;190]	]190;200]	]200;210]
Antal	109	174	151	114	125	108	71	7

- a) Tegn et histogram og bestem typeintervallet.
- b) Tegn en sumkurve og anvend denne til at vurdere hvor stor en procentdel af skolens elever, der er mindst 182 cm høje.

Opgave 4010: Se på tæthedsfunktionen  $f : x \mapsto \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$  for normalfordelingen.

Se først på specialtilfældet ( $u$ -fordelingen) med  $\mu = 0$  og  $\sigma = 1$ :

- Hvor stort er arealet under grafen?
- Hvor stort er arealet af det område under grafen, der ligger mellem de lodrette linjer med ligningerne  $x = -1$  og  $x = 1$ .
- Hvor stort er arealet af det område under grafen, der ligger mellem de lodrette linjer med ligningerne  $x = -2$  og  $x = 2$ .
- Hvad skal  $a$  være, hvis arealet af det område under grafen, der ligger mellem de lodrette linjer med ligningerne  $x = -a$  og  $x = a$ , skal være 0,95?

Vælg nu dine egne værdier for  $\mu$  og  $\sigma$ , og svar så på spørgsmålene:

- Hvor stort er arealet under grafen?
- Hvor stort er arealet af det område under grafen, der ligger mellem de lodrette linjer med ligningerne  $x = \mu - \sigma$  og  $x = \mu + \sigma$ .
- Hvor stort er arealet af det område under grafen, der ligger mellem de lodrette linjer med ligningerne  $x = \mu - 2 \cdot \sigma$  og  $x = \mu + 2 \cdot \sigma$ .
- Hvad skal  $a$  være, hvis arealet af det område under grafen, der ligger mellem de lodrette linjer med ligningerne  $x = \mu - a \cdot \sigma$  og  $x = \mu + a \cdot \sigma$ , skal være 0,95?

Lad nu  $\mu$  og  $\sigma$  være vilkårlige og svar på spørgsmålene:

- Hvor stort er arealet under grafen?
- Hvor stort er arealet af det område under grafen, der ligger mellem de lodrette linjer med ligningerne  $x = \mu - \sigma$  og  $x = \mu + \sigma$ .
- Hvor stort er arealet af det område under grafen, der ligger mellem de lodrette linjer med ligningerne  $x = \mu - 2 \cdot \sigma$  og  $x = \mu + 2 \cdot \sigma$ .
- Hvad skal  $a$  være, hvis arealet af det område under grafen, der ligger mellem de lodrette linjer med ligningerne  $x = \mu - a \cdot \sigma$  og  $x = \mu + a \cdot \sigma$ , skal være 0,95?

Opgave 4012: Antag, at højden på de gæve danske mænd på session i 2006 var normalfordelt med middelværdien 179,8 cm og spredningen 6,9 cm. Benyt denne antagelse til at svare på følgende spørgsmål.

- Hvor stor en procentdel af mændene havde en højde mellem 175 og 180 cm (i virkeligheden var det 28,11%)?
- Hvor stor en procentdel af mændene var højst 190 cm høje (i virkeligheden var det 93,49%)?
- Hvor stor en procentdel af mændene var mellem 170 og 190 cm høje (i virkeligheden var tallet 85,79%)?
- Hvor stor en procentdel af mændene var mindst 185 cm høje (i virkeligheden var det 21,69%)?
- Hvor stor en procentdel af mændene var højst 155 cm høje (i virkeligheden var det 0,04%)?
- Hvor stor en procentdel af mændene var over 205 cm høje (i virkeligheden var det 0,02%)?

Opgave 4020: Forsøg A består i at kaste en terning 12 gange og tælle antallet af 6'ere.

Forsøg B består i at udføre forsøg A 25 gange og tage det aritmetiske gennemsnit af det antal 6'ere, der opnås i de 25 forsøg.

- Hvilken fordeling vil forsøg A følge?
- Hvilken fordeling vil forsøg B tilnærmelsesvis følge?
- Hvad er middelværdien og spredningen for forsøg A's fordeling?
- Hvad er middelværdien og spredningen for forsøg B's fordeling?
- Hvad er sandsynligheden for, at den stokastiske variabel i forsøg A antager værdien 2 (dvs. at man får 2 seksere i de 12 kast)?
- Hvilken sandsynlighed giver forsøg B's fordeling for værdien 2?
- Hvad er sandsynligheden for, at forsøg B giver en værdi i intervallet  $[1.5, 2.5]$ ?
- Hvad er sandsynligheden for, at forsøg B giver en værdi under 1?



Opgave 4022: Tællertallet for baggrundsstråling målt i 10 sekunder følger poissonfordelingen  $pois(9)$ .

- Hvad er gennemsnittet og spredningen for denne poissonfordeling?
- I forsøg A måler man baggrundsstrålingen 16 gange (i 10 sekunder hver gang) og tager gennemsnittet af målingerne. Hvilken fordeling  $\alpha$  vil forsøg A tilnærmelsesvis følge?
- Hvad er gennemsnittet og spredningen for fordelingen  $\alpha$ ?
- Hvad er sandsynligheden for at få tællertallene 8, 9 eller 10, når man i den pågældende situation måler baggrundsstrålingen én gang i 10 sekunder?
- Hvad er sandsynligheden for at få mellem 7,5 og 10,5 i forsøg A?
- Hvad er sandsynligheden for at få over 12 i forsøg A?

Opgave 4024: Gennemsnittet og spredningen for den negative binomialfordeling  $NB(r,p)$  er:

$$\mu = \frac{p \cdot r}{1-p} \quad \sigma = \frac{\sqrt{r \cdot p}}{(1-p)}$$

En terning kastes, indtil man har slået syv 5'ere, og man tæller antallet  $n$  af kast, der ikke blev en 5'er.

Dette gøres 100 gange, og man tager gennemsnittet  $G$  af antallene  $n$ .

- Hvad er sandsynligheden for, at  $G$  er mellem 34 og 36?
- Hvis man i stedet foretog forsøget 625 gange, hvad er så sandsynligheden for, at  $G$  er mellem 34 og 36?

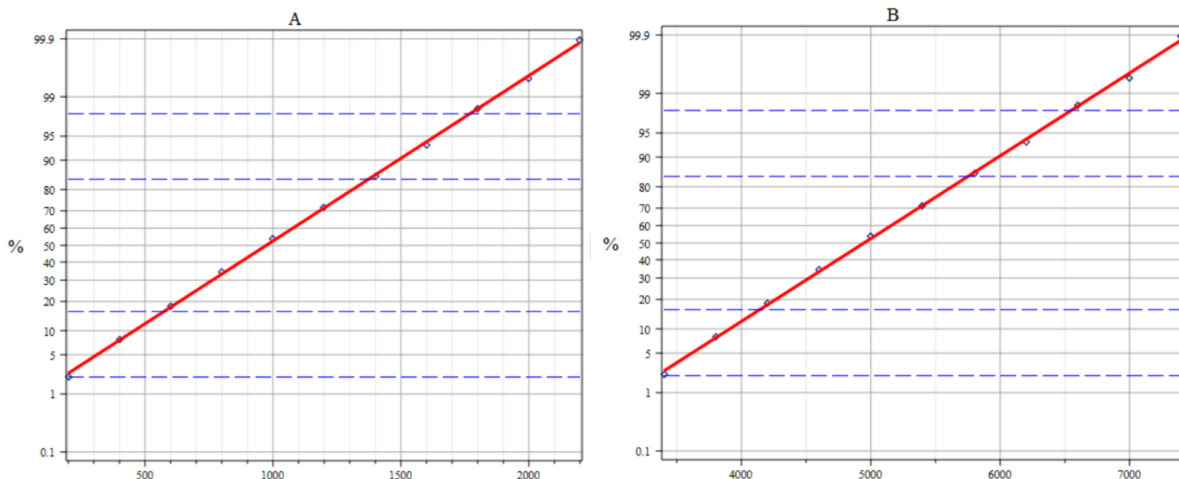
Opgave 4030: Se på tallene fra opgave 4009. Undersøg med *NormReg*, om elevernes højde er normalfordelt.

Opgave 4032: Se på datasættet fra opgave 4003. Undersøg med *NormReg*, om alderen er normalfordelt.

Opgave 4034: Benyt *QQplot* til at undersøge, om målingerne med henholdsvis metode 2 og metode 3 i opgave 4006 har givet normalfordelte datasæt.

Opgave 4036: Benyt *QQplot* til at undersøge, om datasættet i opgave 4140 er normalfordelt.

Opgave 4038: Bestem middelværdi og spredning for de normalfordelte datasæt A og B:



Opgave 4100: Se på nedenstående populationer. Bestem i hvert tilfælde en størrelse/værdi, man kunne tænkes at ville bestemme, samt giv et eksempel på en mulig stikprøve, der kan anvendes til at bestemme denne størrelse.

- Danske gymnasieelever.
- Verdens hvide næsehorn.
- Galakser i Universet.
- Danske tekster.
- Amerikanske mænd.

Opgave 4101: Find på populationer og tilhørende størrelser/værdier, hvor det IKKE giver mening, eller hvor det ville være dumt, at finde en stikprøve, der skal sige noget om populationen.

Opgave 4120: Maples kommando *rand* kan bruges til at generere tilfældige tal.

```
a := rand(1..999) :
a() = 751
a() = 890
a() = 301
a() = 992
a() = 6
a() = 994
a() = 955
a() = 300
a() = 100
a() = 550
A := [751, 890, 301, 992, 6, 994, 955, 300, 100, 550] :
middel(A) = 583.9000000
spredning(A) = 363.864109249593
standardafvigelse(A) = 383.546447985263
```

Middelværdien for tallene fra 1 til 999 er 500, og spredningen er 288.

- a) Benyt Maple til som vist ovenfor at generere stikprøver af forskellig størrelse og find middelværdi, spredning i stikprøven og estimeret spredning i populationen.

Opgave 4122: Ved den skriftlige eksamen i matematik A i 2019 fik 174 elever på et gymnasium nedenstående karakterer (Gem dine udregninger. De skal bruges igen i opgave 4142)

7	2	7	7	10	7	4	7	7	12	10	7	12	4	10	12	10	4	10	10	10	-3	10	7	10	10	10	0	10
-3	4	7	7	7	10	12	7	10	12	4	7	0	0	7	7	7	7	4	12	10	7	7	7	7	10	10	2	7
7	10	7	7	7	12	10	2	12	7	4	0	-3	10	7	12	10	2	4	10	7	10	12	10	10	4	12	10	7
10	7	10	10	7	4	12	4	10	10	2	4	10	7	10	7	10	7	7	12	12	10	10	7	7	0	4	7	10
10	7	7	4	0	7	12	7	7	7	4	10	10	4	10	10	7	-3	7	4	7	0	10	10	12	4	4	12	4
10	7	2	7	10	10	4	12	0	10	10	10	12	10	10	2	7	10	7	10	4	10	10	0	4	4	10	4	12

Middelværdien er 7,33 og spredningen er 3,58 (dvs. det er populationens sande værdier).

- a) Find en metode til at udtage 5 tilfældige stikprøver af størrelsen 10. Udregn (gerne med Gym-pakken) for disse stikprøver middelværdien, spredningen i stikprøven og den estimerede spredning i populationen.
- b) Gør det samme med stikprøver med størrelsen 20.

Kig på følgende:

- Får man ens eller forskellige værdier i de forskellige stikprøver?
- Er spredningen i stikprøven eller den estimerede spredning i populationen det bedste bud på populationens spredning?
- Er der systematisk forskel på værdierne afhængig af stikprøvens størrelse?

Opgave 4140: Man har målt svingningstiden for et lod 20 gange og fået følgende tider (enheden s):

1,43	1,57	1,53	1,41	1,46	1,52	1,59	1,48	1,47	1,56
1,46	1,59	1,38	1,45	1,58	1,51	1,46	1,52	1,57	1,44

- a) Estimer middelværdien og spredningen (i populationen).
- b) Beregn spredningen på den estimerede middelværdi.
- c) Find et 95%-konfidensinterval for middelværdien.
- d) Find et 99%-konfidensinterval for middelværdien.
- e) Find et 90%-konfidensinterval for middelværdien.
- f) Find et 99,73%-konfidensinterval for middelværdien.

Opgave 4142: Benyt dine stikprøver fra opgave 4122 og bestem 95%-konfidensintervaller for gennemsnittet for dine stikprøver med 10 og 20 tal.

Kig på resultaterne og tænk over følgende:

- Er der forskel på konfidensintervallerne?
- Er der systematisk forskel for bredden af konfidensintervallerne, når man sammenligner stikprøverne med 10 tal med dem med 20 tal?
- Hvor mange af stikprøverne kan man forvente indeholder det sande gennemsnit?
- Er der i ovenstående spørgsmål forskel på, om man kigger på stikprøver med 10 tal eller 20 tal?

Opgave 4160: Find data frem for fysik- og kemiforsøg, hvor der er bestemt en hældning.

- 1) Undersøg med *plotResidualer*, om en lineær model er en god model.
- 2) Undersøg med *residualQQplot*, om residualerne er normalfordelt.
- 3) Bestem ved hjælp af *testLin* et 95%-konfidensinterval for hældningen.

Opgave 4180: Man vælger at arbejde med konfidensniveauet 95%. I en stikprøve på 1430 personer svarer 220, at de vil stemme på partiet X.

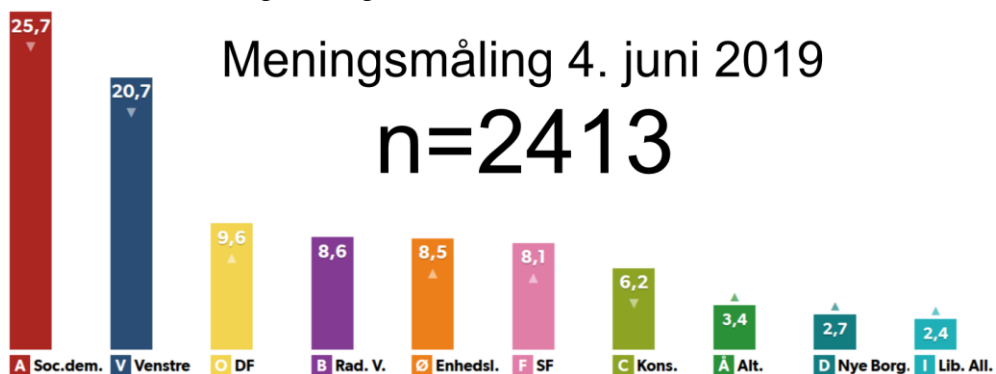
- a) Bestem den estimerede procentdel, der vil stemme på partiet X.
- b) Bestem den statistiske usikkerhed på den estimerede procentdel.
- c) Bestem uden en særlig Gym-kommando 95%-konfidensintervallet.
- d) Benyt *konfidensInterval*-kommandoen til at bestemme ovenstående interval.

Opgave 4182: Svar på samme spørgsmål som i opgave 4180, men hvor stikprøven er på 143 personer og 22 svarer bekræftende.

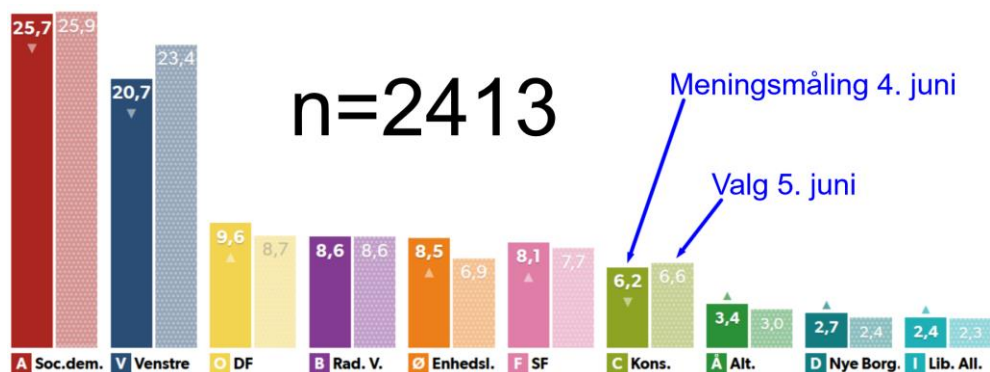
Opgave 4183: Svar på samme spørgsmål som i opgave 4180, men hvor stikprøven er på 14300 personer og 2200 svarer bekræftende.

Opgave 4184: Svar på samme spørgsmål som i opgave 4180 d) med et konfidensniveau på 99%.

Opgave 4186: Tilføj statistiske usikkerheder (dvs. lav et 95%-konfidensinterval) for hvert parti i nedenstående meningsmåling:



Opgave 4188: Lå alle resultater ved valget den 5. juni inden for det pågældende konfidensinterval?



Opgave 4350: Opstil en nulhypotese og en alternativ hypotese i nedenstående situationer:

- Man vil gerne undersøge, om der er forskel på SRP-karakterer for biotekelever og FYMA-elever.
- Man vil gerne undersøge, om biotek-elever får højere SRP-karakterer end FYMA-elever.
- Man vil gerne undersøge, om uddannelsesniveaet er højere på Fyn end på Bornholm.
- Man vil gerne undersøge, om et sovemiddel forlænger søvnperioden.
- Man vil gerne undersøge, om sovemiddel A forlænger søvnperioden mere end sovemiddel B.
- Man vil gerne teste, om strækøvelser hjælper på ømheden efter træning.

Opgave 4360: En terning kastes 40 gange, og den stokastiske variabel  $X$  angiver antallet af 6'ere.

Antag, at terningen er ærlig.

- Bestem sandsynligheden for, at man får syv 6'ere.
- Bestem sandsynligheden for, at man får højst fire 6'ere.
- Bestem sandsynligheden for, at man får mindst ti 6'ere.
- Bestem sandsynligheden for at få mellem fem og tolv seksere (begge tal inkl.).
- Bestem det mindste tal  $q$ , hvor sandsynligheden for at få mindst  $q$  6'ere er mindre end 5%.
- Bestem det mindste tal  $r$ , hvor sandsynligheden for at få mindst  $r$  6'ere er mindre end 2,5%.
- Bestem det højeste tal  $s$ , hvor sandsynligheden for at få højst  $s$  6'ere er mindre end 5%.
- Bestem det højeste tal  $t$ , hvor sandsynligheden for at få højst  $t$  6'ere er mindre end 2,5%.

Opgave 4362: Man ønsker at tjekke, om en terning er uærlig, og opstiller hypoteserne:

$H_0$ : Sandsynligheden  $p$  for at slå en 6'er er  $p = \frac{1}{6}$ .

$H_1$ : Sandsynligheden for at slå en 6'er er ikke  $p$ .

Man vælger signifikansniveauet 5%.

Terningen kastes 40 gange, og man får tolv 6'ere.

- Angiv acceptområdet  $A$ .
- Angiv det kritiske område  $K$ .
- Skal nulhypotesen forkastes?

Opgave 4364: Man ønsker at tjekke, om en terning er uærlig, og opstiller hypoteserne:

$H_0$ : Sandsynligheden  $p$  for at slå en 6'er er  $p = \frac{1}{6}$ .

$H_1$ : Sandsynligheden for at slå en 6'er er større end  $p$ .

Man vælger signifikansniveauet 5%.

Terningen kastes 40 gange, og man får tolv 6'ere.

- Angiv acceptområdet  $A$ .
- Angiv det kritiske område  $K$ .
- Skal nulhypotesen forkastes?

Opgave 4366: Man ønsker at tjekke, om en terning er uærlig, og opstiller hypoteserne:

$H_0$ : Sandsynligheden  $p$  for at slå en 6'er er  $p = \frac{1}{6}$ .

$H_1$ : Sandsynligheden for at slå en 6'er er mindre end  $p$ .

Man vælger signifikansniveauet 5%.

Terningen kastes 40 gange, og man får to 6'ere.

- Angiv acceptområdet  $A$ .
- Angiv det kritiske område  $K$ .
- Skal nulhypotesen forkastes?

Opgave 4367: 17% af Rhodesias befolkning stemmer på partiet Z.

Man spørger 30 tilfældige borgere i Rhodesia, om de stemmer på partiet Z.

- Hvad er sandsynligheden for, at 5 af de adspurgte stemmer på partiet Z?
- Hvad er sandsynligheden for, at højst 3 af de adspurgte stemmer på partiet Z?
- Hvad er sandsynligheden for, at mindst 8 af de adspurgte stemmer på partiet Z?
- Hvad er sandsynligheden for, at mellem 7 og 16 (begge inkl.) stemmer på Z?
- Bestem det mindste tal  $q$ , hvor sandsynligheden for, at mindst  $q$  af de adspurgte stemmer på Z, er mindre end 5%.
- Bestem det mindste tal  $r$ , hvor sandsynligheden for, at mindst  $r$  af de adspurgte stemmer på Z, er mindre end 2,5%.
- Bestem det højeste tal  $s$ , hvor sandsynligheden for, at højst  $s$  af de adspurgte stemmer på Z, er mindre end 5%.
- Bestem det højeste tal  $t$ , hvor sandsynligheden for, at højst  $t$  af de adspurgte stemmer på Z, er mindre end 2,5%.

Opgave 4368: Det er oplyst, at 17% af Rhodesias befolkning stemmer på partiet Z.

Det ønskes undersøgt med et signifikansniveau på 5%, og man vælger at spørge 30 tilfældigt valgte borgere i Rhodesia. Nulhypotesen er altså, at 17% af befolkningen stemmer på partiet Z.

Bestem for hver af nedenstående alternative hypoteser acceptmængden  $A$  og den kritiske mængde  $K$ .

- Det er ikke 17% af Rhodesias befolkning, der stemmer på partiet Z.
- Det er mere end 17% af Rhodesias befolkning, der stemmer på partiet Z.
- Det er mindre end 17% af Rhodesias befolkning, der stemmer på partiet Z.

Opgave 4369: a) Hvad er acceptmængde og kritisk mængde, hvis man kaster en terning 21 gange og ser på antallet af 6'ere, hvor man arbejder med følgende hypoteser:

$$H_0: \text{Sandsynligheden } p \text{ for at slå en 6'er er } p = \frac{1}{6}.$$

$H_1$ : Sandsynligheden for at slå en 6'er er større end  $p$ .

- Alle i klassen skal prøve at kaste en terning 21 gange og hver gang fokusere på at slå en 6'er. Tæl antal 6'ere. Er der nogle i klassen med telekinesiske evner?

Opgave 4370: Fra et kortspil trækkes med tilbagelægning 10 gange et kort. Man trækker 4 ruder, 3 spar, 2 hjerter og 1 klør.

Man ønsker derfor at bestemme, om man har trukket flere ruder end forventet, og opstiller derfor nulhypotesen, at sandsynligheden for at trække en ruder er 0,25, mens den alternative hypotese er, at sandsynligheden er større. Man vil teste med et signifikansniveau på 5%.

- Er dette en lovlig fremgangsmåde?

Opgave 4371: Man ønsker at bestemme, om man er god til at trække ruder fra et kortspil, og opstiller derfor hypoteserne:

$$H_0: \text{Sandsynligheden } p \text{ for at trække en ruder er } p = \frac{1}{4}.$$

$H_1$ : Sandsynligheden  $p$  for at trække en ruder er større end 0,25.

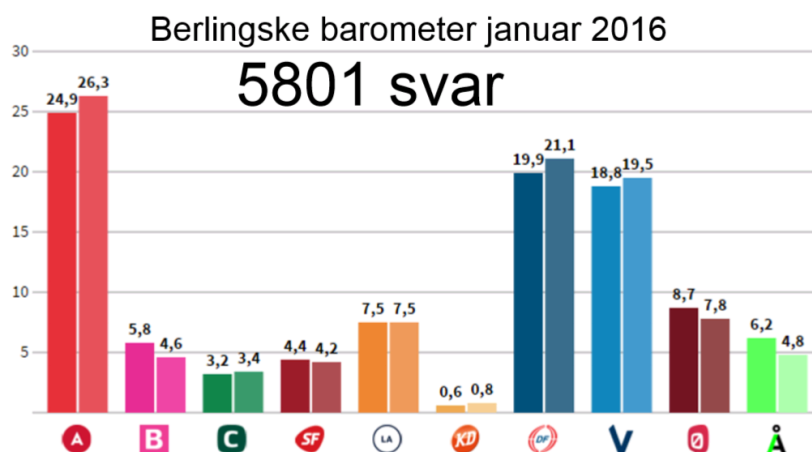
Man arbejder med et signifikansniveau på 5%.

Derefter trækkes fra et kortspil med tilbagelægning 10 gange et kort. Man trækker 4 ruder, 3 spar, 2 hjerter og 1 klør.

- Skal nulhypotesen forkastes?

- Opgave 4374: To personer slår plat-og-krone 100 gange. Den ene vinder 62 gange. Den anden beskylder ham for at snyde. De beslutter sig for at teste det ved et binomialtest med et signifikansniveau på 5%.
- Opstil de to hypoteser, der skal anvendes.
  - Bestem  $p$ -værdien.
  - Har den ene fået signifikant flere sejre, end man måtte forvente, hvis han ikke snød?
  - Kan man konkludere, at den ene spiller snød, dvs. er denne fremgangsmåde tilladt?
- Opgave 4375: Man har en person mistænkt for at snyde i plat-og-krone, og ønsker at teste det med et signifikansniveau på 5%.  
Man spiller 100 gange mod ham, og han vinder 59 gange.
- Opstil de to hypoteser, der skal anvendes.
  - Bestem  $p$ -værdien.
  - Hvad er konklusionen?
- Opgave 4376: En terning skal testes med henblik på at finde ud af, om den er skæv og giver et forkert antal 4'ere. Det skal testes ved et binomialtest med signifikansniveauet 5%.
- Opstil de to hypoteser, der skal anvendes.
- Der kastes 1000 gange, og 146 gange får man en 4'er.
- Bestem  $p$ -værdien.
  - Er resultatet signifikant?
- Opgave 4380: En biokemiker har målt værdier for 16 forskellige parametre. Antag, at der ikke er nogen sammenhæng mellem nogle af parametrene. Biokemikeren holder alle parametrene parvis op mod hinanden og tester med et signifikansniveau på 5%, om der er sammenhæng.
- Hvor mange test  $n$  foretages, og i hvor mange tilfælde  $m$  vil biokemikeren i gennemsnit finde sammenhæng mellem to parametre (type-I-fejl), hvis der ikke korrigeres (Bonferroni-korrektion)?
  - Hvilket signifikansniveau skal anvendes i hvert enkelt test, hvis man anvender Bonferroni-korrektion?
  - Hvor mange type-I-fejl vil man forvente i gennemsnit at få, hvis man anvender ovenstående Bonferroni-korrektion?
- Opgave 4382: En eller anden sidder og kigger på statistikker og nyder alle de forskellige parametre, der er tal på. Der er 200 forskellige parametre, der kan testes parvis, og personen er hård og tester med et signifikansniveau på 1%. Personen sidder og kigger efter parametre, hvor der ser ud til at være signifikans og tester kun, hvis der ser ud til at være dette. Antag, at der ikke er sammenhæng mellem nogle af parametrene.
- Det vides ikke, hvor mange test personen reelt udfører, men hvor mange test svarer fremgangsmåden til, at der udføres?
  - Hvor mange falske sammenhænge vil personen i gennemsnit være i stand til at finde, hvis der ikke korrigeres (Bonferroni-korrektion)?
  - Hvilket signifikansniveau skal der arbejdes med i hvert enkelt test, hvis man anvender Bonferroni-korrektion?
  - Hvor mange type-I-fejl vil man forvente i gennemsnit at få, hvis man anvender ovenstående Bonferroni-korrektion?

Opgave 4384: Der arbejdes med et signifikansniveau på 5%. En meningsmåling med 5801 adspurgte siger:



Procentsatserne fra seneste valg er angivet som de venstre søjler, mens meningsmålingens resultater er angivet som højre søjler.

Man kigger på tallene og bemærker, at det kunne se ud, som om Socialdemokraterne (A) og Dansk Folkeparti (DF) er gået frem (henholdsvis fra 24,9% til 26,3% og fra 19,9% til 21,1%), mens Alternativet (Å) er gået tilbage.

- Skal vi arbejde med ligesidet test, venstresidet test eller højresidet test?
- Hvor mange test svarer fremgangsmåden til, at der er udført?
- Hvilket signifikansniveau skal der arbejdes med i de enkelte test, når man anvender Bonferroni-korrektion?
- Hvor mange personer har svaret, at de vil stemme på Socialdemokraterne (A)?
- Er Socialdemokraternes fremgang signifikant, dvs. kan man sige, at Socialdemokratiet er gået frem?
- Er Dansk Folkepartis (DF) fremgang signifikant, dvs. kan man sige, at DF er gået frem?
- Er Alternativets tilbagegang signifikant, dvs. kan man sige, at Alternativet er gået tilbage?

Opgave 4390: En bueskytte hævder, at hun kan ramme skiven i mere end 75% af sine skud.

Det skal testes ved et binomialtest og et signifikansniveau på 1%.

- Opstil de to hypoteser, der skal anvendes.  
Hun skyder 300 gange og rammer skiven 235 gange.
- Bestem  $p$ -værdien.
- Har hun fået vist, at hun har ret?

Opgave 4391: Ovenstående bueskyttes ærkefjende påstår, at hun ikke kan ramme skiven i 75% af sine skud (underforstået: Hun rammer i mindre end 75%). Det skal testes ved et binomialtest og et signifikansniveau på 1%.

- Opstil de to hypoteser, der skal anvendes.  
Hun skyder 300 gange og rammer skiven 210 gange.
- Bestem  $p$ -værdien.
- Har ærkefjenden fået ret?

Opgave 4392: Virker det som en god måde at teste påstandene på i opgaverne 4390 og 4391?

Opgave 4393: Antag, at bueskytten fra opgave 4390 i virkeligheden rammer skiven i 76% af sine skud. Bueskyttens påstand er den samme ("mere end 75%"), og der testes igen med et signifikansniveau på 1% og med 300 skud.

- Hvad er sandsynligheden for at få en type-II fejl, dvs. at den falske nulhypotese  $H_0 : p = 0,75$  ikke forkastes?
- Hvad er sandsynligheden for at få en fejl af 2. art, hvis bueskytten i virkeligheden rammer skiven i 80% af sine skud?
- Hvad er sandsynligheden for at få en  $\beta$ -fejl, hvis bueskytten i virkeligheden rammer skiven i 85% af sine skud?
- Hvad er sandsynligheden for at få en type-II fejl, hvis bueskytten i virkeligheden rammer skiven i 88% af sine skud?
- Hvad er sandsynligheden for at få en fejl af 2. art, hvis bueskytten i virkeligheden rammer skiven i 95% af sine skud?

Opgave 4400: Vi vil gerne undersøge, om en terning er skæv og kaster den 600 gange.

Vores nulhypotese er, at den ikke er skæv, mens vores alternative hypotese er, at den er skæv. På baggrund af vores nulhypotese forventer vi 100 udfald af hvert øjental, men vi får:

Øjental	1	2	3	4	5	6
Observeret	108	113	92	101	95	?

- Hvor mange 6'ere fik man?
- Hvor mange frihedsgrader arbejdes der med?
- Bestem  $Q$ -værdien.
- Hvilket øjental leverer det højeste bidrag til  $Q$ -værdien?

Opgave 4402: Samme situation som i opgave 4400, men nu kastes 6000 gange, og man får:

Øjental	1	2	3	4	5	6
Observeret	1080	1130	?	1010	950	910

- Hvor mange 3'ere fik man?
- Hvor mange frihedsgrader arbejdes der med?
- Bestem  $Q$ -værdien.
- Hvilket øjental leverer det højeste bidrag til  $Q$ -værdien?

Opgave 4404: De procentvise afvigelser mellem forventede og observerede værdier i opgaverne 4400 og 4402 er ens. Men hvis man tester med et signifikansniveau på 5%, er det kun i den ene opgave, at man vil konkludere, at terningen er skæv. Hvilken?

Opgave 4406: Man vil gerne undersøge, om der er forskel på, hvad drenge og piger får, når de kaster plat-og-krone. Så nulhypotesen er, at udfaldet er uafhængigt af kønnet (dvs. der er ikke forskel på drenge og piger, når det kommer til plat-og-krone-kastning), mens den alternative hypotese er, at der er forskel. 300 elever deltager i forsøget, og man får:

	Dreng	Pige	I alt
Plat	117		162
Krone			138
I alt	200	100	300

- Udfyld tabellen.
- Hvor mange frihedsgrader er der i eksperimentet (når udgangspunktet er, at man kender de angivne røde tal)?

Det oplyses, at hvis nulhypotesen er sand, er det forventede udfald:

	Dreng	Pige
Plat	108	54
Krone	92	46

- Bestem  $Q$ -værdien.
- Hvilken kategori leverer det højeste bidrag til  $Q$ -værdien?

Opgave 4408: For en række tilsyneladende ens lykkeshjul gælder det, at når de hver især drejes 1000 gange, forventes det, at man får:

Udfald	Rød	Grøn	Violet	Blå
Antal	600	250	120	30

Lykkeshjulene A, B, C og D drejes hver især 1000 gange, og man får:

Udfald	Rød	Grøn	Violet	Blå
A	580	265	123	32
B	609	247	115	29
C	739	146	92	23
D	590	238	101	71

- Kig på tallene og prøv at se, om du kan rangere  $Q$ -værdierne for de enkelte lykkeshjul efter størrelse.
- Udregn  $Q$ -værdierne og sammenlign med din rangering. Hvis din rangering ikke passede, så overvej, hvad du havde overset.
- Hvilket af de 16 målte antal (de røde tal) leverer det største bidrag til en af de udregnede  $Q$ -værdier?
- Hvilken af farverne giver det største bidrag til C's  $Q$ -værdi?



Opgave 4409: Hvis man kaster plat-og-krone 1600 gange med 4 mønter og hver gang tæller antallet af plat, vil man forvente at få følgende (nulhypotesen er "ærlige" mønter):

<b>Antal plat</b>	0	1	2	3	4
<b>Antal udfald</b>	100	400	600	400	100

Vi vælger at arbejde med et signifikansniveau på 5%, og med 4 frihedsgrader betyder det, at man skal forkaste sin nulhypotese, hvis  $Q$ -værdien er over 9,49. Vi forestiller os nu en række forskellige resultater (se nedenfor).

Tag resultaterne ét ad gangen og gør følgende:

- Vurdér ved at kigge på tallene, men uden at foretage konkrete udregninger, om resultatet er så "skævt", at nulhypotesen skal forkastes.
- Udregn  $Q$ -værdien og se, om den er over eller under 9,49 og sammenlign med din vurdering.
- Hvis der er forskel på din vurdering og resultatet baseret på  $Q$ -værdien, så prøv at identificere problemet og justér din vurdering til næste resultat (identificér f.eks. det eller de største bidrag til  $Q$ -værdien).

<b>Antal plat</b>	0	1	2	3	4
<b>A</b>	102	396	609	395	98
<b>B</b>	87	357	577	462	117
<b>C</b>	105	416	588	407	84
<b>D</b>	131	409	603	412	45
<b>E</b>	97	389	633	385	96
<b>F</b>	112	407	579	414	88
<b>G</b>	85	421	573	418	103
<b>H</b>	121	417	564	391	107
<b>I</b>	79	431	646	366	78
<b>J</b>	116	370	573	422	119
<b>K</b>	111	412	610	414	53
<b>L</b>	119	413	576	375	117

Opgave 4410: Bestem ved hjælp af Maples Gym-pakke følgende størrelser og tjek resultatet med tabellen over sammenhæng mellem  $Q$ -værdier og  $p$ -værdier.

- Med 7 frihedsgrader har du fået  $Q = 3,82$ . Bestem  $p$ -værdien.
- Med 5 frihedsgrader har du fået  $p = 0,05$ . Hvad var  $Q$ -værdien?
- Med 3 frihedsgrader har du fået  $Q = 16,27$ . Bestem  $p$ -værdien.
- Med 6 frihedsgrader har du fået  $p = 0,20$ . Hvad var  $Q$ -værdien?
- Med 1 frihedsgrad har du fået  $Q = 6,64$ . Bestem  $p$ -værdien.
- Med 4 frihedsgrader har du fået  $p = 0,50$ . Hvad var  $Q$ -værdien?
- Med 9 frihedsgrader har du fået  $Q = 14,68$ . Bestem  $p$ -værdien.
- Med 2 frihedsgrader har du fået  $p = 0,30$ . Hvad var  $Q$ -værdien?

Opgave 4412: a) Med 4 frihedsgrader har du fået  $Q = 5,41$ . Bestem  $p$ -værdien.

- Med 6 frihedsgrader har du fået  $p = 3,91\%$ . Hvad var  $Q$ -værdien?
- Med 12 frihedsgrader har du fået  $Q = 5,41$ . Bestem  $p$ -værdien.
- Med 11 frihedsgrader har du fået  $p = 3,91\%$ . Hvad var  $Q$ -værdien?
- Med 2 frihedsgrader har du fået  $Q = 5,41$ . Bestem  $p$ -værdien.
- Med 1 frihedsgrad har du fået  $p = 3,91\%$ . Hvad var  $Q$ -værdien?

Opgave 4414: Du arbejder med 11 frihedsgrader. Hvad bliver den kritiske værdi ( $Q_{kritisk}$ ), hvis du vælger følgende?

- At arbejde med signifikansniveauet 5%
- 1%
- 0,1%
- 10%

Opgave 4416: Du arbejder med 13 frihedsgrader. Hvilket signifikansniveau har du valgt at arbejde med, hvis dine kritiske værdier antager følgende værdier?

- $Q_{kritisk} = 27,69$
- $Q_{kritisk} = 22,36$
- $Q_{kritisk} = 19,81$
- $Q_{kritisk} = 24,12$

Opgave 4450: Man ønsker med et signifikansniveau på 5% at undersøge, om man kan stole på den procentvise fordeling af farver, som producenten af M&M-mælkechokoladedimser oplyser.

Producenten oplyser følgende fordeling:

Farve	Blå	Orange	Grøn	Gul	Rød	Brun
Procentdel	24%	20%	16%	14%	13%	13%

I en pose med 80 stk. M&M-mælkechokoladedimser finder man følgende fordeling:

Farve	Blå	Orange	Grøn	Gul	Rød	Brun
Antal	22	14	10	14	7	13

- Undersøg, om man kan stole på den oplyste procentvise fordeling af farver.
- Bestem det bidrag til Q-værdien, der kommer fra de røde M&Ms.

Opgave 4455: Et lykkeshjul er designet, så det oplyses og ser ud til, at udfaldene skal fordele sig på følgende måde:

Udfald	Grøn	Blå	Rød	Sort
Sandsynlighed	47%	21%	28%	4%

Man ønsker at undersøge, om der kunne være fiflet ved lykkeshjulet, så det ikke opfylder den oplyste fordeling, og man vælger at teste med et signifikansniveau på 2%.

- Angiv en nulhypotese, der kan bruges til at teste det ønskede, og bestem den kritiske værdi for teststørrelsen.

Lykkeshjulet drejes 600 gange, og man får følgende fordeling:

Udfald	Grøn	Blå	Rød	Sort
Antal	284	138	157	21

- Bestem en tabel over de forventede udfald og beregn bidragene til teststørrelsen  $Q$  fra **hvert** enkelt af de fire mulige udfald.
- Undersøg, om nulhypotesen skal forkastes og formulér en konklusion, der indeholder ordet "lykkeshjulet".

Opgave 4500: Man ønsker med et signifikansniveau på 3% at undersøge, om fordelingen af mænd og kvinder, der er mellem 15 og 69 år og har en længerevarende naturvidenskabelig uddannelse, afhænger af, om personerne er indvandrere, efterkommere eller har dansk oprindelse. Tallene fra 2015 ses i nedenstående tabel.

Antal personer i den danske befolkning mellem 15 og 69 år med en længerevarende naturvidenskabelig uddannelse	Personer med dansk oprindelse	Indvandrere	Efterkommere
Mænd	14652	1966	110
Kvinder	9052	1400	88

- Opstil en nulhypotese og undersøg, om fordelingen af mænd og kvinder afhænger af, om personerne er indvandrere, efterkommere eller har dansk oprindelse.
- Vis udregningen af det på baggrund af nulhypotesen forventede antal kvinder blandt indvandrere.

Opgave 4505: Man ønsker at finde ud af, om den relative forekomst af arterne *chaddertoni*, *macquariae*, *maja* og *santolla* inden for kongekrabbeslægten *lithodes* afhænger af, om man befinder sig i Barentshavet, Grønlandshavet eller Karahavet.

Man vælger at arbejde med et signifikansniveau på 5%.

- Angiv en nulhypotese, der kan bruges til at teste det ønskede, og bestem antallet af frihedsgrader.

Man drager på tur og indfanger i de forskellige have en mængde kongekrabber af slægten *lithodes*, der fordeles sig som:

	<i>chaddertoni</i>	<i>macquariae</i>	<i>maja</i>	<i>santolla</i>
Barentshavet	367	215	578	421
Grønlandshavet	198	131	229	207
Karahavet	423	301	628	510

- Bestem en tabel over de værdier, man ville have forventet på baggrund af nulhypotesen.
- Undersøg, om nulhypotesen skal forkastes, og formulér en konklusion, der forholder sig til den konkrete situation.

Opgave 4600: \*\*\*\*Bestem kritisk værdi for T ud fra signifikansniveau (forskellige frihedsgrader)  
Og bestem p-værdi ud fra fundet T-værdi.\*\*\*\*\*

Opgave 4650: \*\*\*\*One-Sample-t-test-opgave \*\*\*\*\*

Opgave 4652: Bymuren omkring den gamle by i Lucca er oplyst at være 4223 meter lang. 27 elever har forsøgt at måle længden ved at tælle skridt på en gåtur rundt på hele muren og før eller efter måle skridtlængden. Skridtlængderne er bestemt ved både at måle på 10 skridt og på 30 skridt (med forskelligt resultat – se opgave 4702).

Der arbejdes med et signifikansniveau på 5% (og der ses bort fra korrigeret af dette, selvom der foretages to test):

**Længder baseret på skridtlængder målt ud fra 10 skridt (angivet i meter):**

4908	3826	3746	4143	4070	4095	3780	5037	3875
4091	4663	4321	4375	4443	3737	4235	4039	3945
4387	4175	4101	4326	4373	4254	4175	3090	3948

**Længder baseret på skridtlængder målt ud fra 30 skridt (angivet i meter):**

4877	4225	4163	4170	4396	4344	4171	5280	4164
4172	4977	4427	4614	4515	3981	4568	4225	4139
4397	4329	4301	4576	4269	4141	4076	3740	4220

- Undersøg, om der er forskel på bymurens oplyste længde og den længde, som eleverne er kommet frem til ud fra skridtlængderne målt på 10 skridt (angiv teststørrelse, p-værdi og konklusion).
- Undersøg, om der er forskel på bymurens oplyste længde og den længde, som eleverne er kommet frem til ud fra skridtlængderne målt på 30 skridt (angiv teststørrelse, p-værdi og konklusion).

Opgave 4654: Benyt tallene fra opgave 4006.

- Undersøg for hver af de fire anvendte metoder med et One-Sample-t-test (signifikansniveau på 5%), om der er forskel mellem målingerne og den oplyste værdi for højden af Det Skæve Tårn (angiv for hver metode: Teststørrelse, p-værdi og konklusion).
- Er Metode 4 den bedste metode (jf. også opgave 4006)?

Opgave 4656 (udvidelse af 4652): En anden klasse målte længden med to metoder. Gang baseret på 30 skridt (som i 4652) samt løbetiden, der blev målt, samtidig med at løbehastigheden blev vurderet af løberen selv.

**Længder baseret på skridtlængder målt ud fra 30 skridt (angivet i meter):**

4280	4070	4400	4208	4130	4193	4177	4000
4002	4216	4080	4600	4200	4300	4000	4078
4281	4140	4011	4050	4576	4060	3761	

**Længder baseret på løbetid og estimeret løbefart (angivet i meter):**

4200	4150	4224	4095	4160	4070	3970	4099
------	------	------	------	------	------	------	------

Konstruér en opgave baseret på disse måledata.

Opgave 4700: \*\*\*\*\*Two-Sample-paired-difference-t-test \*\*\*\*\*

Opgave 4702: 27 elever ønsker at måle deres skridtlængde (alle længder angives i cm). De vil med et signifikansniveau på 5% undersøge, om det har betydning, om man måler på 10 skridt, 20 skridt eller 30 skridt (der ses bort fra, at man i sådan et tilfælde skal korrigere for, at der udføres tre test).

De måler 10 gange på hver af de tre forskellige skridtlængder og tager i hvert tilfælde gennemsnittet af de 10 målinger, hvilket giver nedenstående resultater:

Elev nr.	10 skridt	20 skridt	30 skridt
1	91,7	91,1	91,2
2	72,5	78,8	80,0
3	70,3	77,6	78,1
4	93,9	97,7	94,5
5	86,5	88,7	93,4
6	73,8	77,1	78,3
7	76,1	82,7	83,9
8	92,1	95,3	96,5
9	82,4	88,5	88,6
10	76,0	77,8	77,5
11	82,6	88,3	88,1
12	66,2	67,5	67,9
13	77,4	80,3	81,7
14	88,9	90,4	90,3
15	65,1	66,6	69,3
16	82,4	88,5	88,8
17	68,6	72,6	71,8
18	70,7	72,8	74,2
19	84,1	84,5	84,3
20	78,8	81,5	81,7
21	80,1	81,6	84,0
22	79,1	82,9	83,7
23	84,4	82,9	82,4
24	77,6	78,3	75,5
25	75,5	72,0	73,7
26	67,6	78,7	81,8
27	74,3	79,2	79,4

- Undersøg med et Two-Sample-paired-difference-t-test, om der er forskel på den målte skridtlængde, afhængigt af om der måles på 10 eller 20 skridt (angiv teststørrelse, p-værdi og konklusion).
- Undersøg med et Two-Sample-paired-difference-t-test, om der er forskel på den målte skridtlængde, afhængigt af om der måles på 10 eller 30 skridt.
- Undersøg med et Two-Sample-paired-difference-t-test, om der er forskel på den målte skridtlængde, afhængigt af om der måles på 20 eller 30 skridt.

Opgave 4750: \*\*\*\*\*Two-Sample-t-test (ikke parvis) \*\*\*\*\*

Opgave 4800: \*\*\*\*\*Welch's t-test \*\*\*\*\*

Opgave 4850: \*\*\*\*\*z-test \*\*\*\*\*

# KOMPLEKSE TAL

Opgave 5000: Beregn følgende:

$$a) (3,5) + (-2,4) \quad b) (6,-1) + (-5,2) \quad c) (2,-7) \cdot (-4,3) \quad d) (5,2) \cdot (-4,-9)$$

$$e) (3,5) \cdot (1,0) \quad f) (-7,2) \cdot (-7,-2) \quad g) (5,-3) \cdot (5,3) \quad h) (4,-1) \cdot (4,1)$$

Opgave 5002: Beregn følgende:

$$a) (3,0) + (7,0) \quad b) (3,0) \cdot (7,0) \quad c) (-5,0) + (2,0) \quad d) (-5,0) \cdot (2,0)$$

$$e) (0,5) + (0,-7) \quad f) (0,5) \cdot (0,-7) \quad g) (0,1) + (0,1) \quad h) (0,1) \cdot (0,1)$$

Opgave 5004: Beregn følgende:

$$a) (5,0) \cdot (-3,7) \quad b) (-4,0) \cdot (-9,3) \quad c) (0,0) + (9,-5) \quad d) (0,0) \cdot (9,-5)$$

$$e) (1,0) \cdot (9,4) \quad f) (1,0) \cdot (2,3) \quad g) (1,0) \cdot (1,0) \quad h) (1,0) \cdot (0,0)$$

Opgave 5005: Bestem de komplekse tal  $z$ , hvorom det gælder, at:

$$a) z + (9,-5) = (0,0) \quad b) z + (-5,1) = (0,0) \quad c) z \cdot (3,-4) = (1,0) \quad d) z \cdot (0,6) = (1,0)$$

Opgave 5006: Bestem de komplekse tal  $z$ , hvorom det gælder, at:

$$a) z + (4,-1) = (9,3) \quad b) z + (-2,3) = (7,1) \quad c) z + (-5,9) = (3,-2)$$

Opgave 5008: Bestem de komplekse tal  $z$ , hvorom det gælder, at:

$$a) z \cdot (0,1) = (5,-8) \quad b) z \cdot (3,1) = (4,7) \quad c) z \cdot (-4,2) = (9,5)$$

Opgave 5010: Reducér følgende udtryk:

$$a) (z_1 - z_2)^2 + (z_1 + z_2)^2 \quad b) \frac{z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3}{z_2} \quad c) 3z_1 \cdot (3z_1 + 2z_2) - (3z_1 + z_2)^2$$

$$d) \frac{(11,2) \cdot (5,-7)}{(11,2)} \quad e) \frac{(7,3) \cdot (-2,4) + (5,3) \cdot (7,3)}{(7,3)} \quad f) \frac{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 + z_2^2 \cdot z_3}{z_2 \cdot z_3}$$

Opgave 5012: Reducér følgende udtryk:

$$a) \frac{z_1^3 \cdot z_2^4}{z_1^2 \cdot z_2} \quad b) \frac{z_1^3 \cdot z_2^5 + z_1^4 \cdot z_2^2}{z_1^3 \cdot z_2^2} \quad c) \frac{(1,9)^4 \cdot (-4,5)^2 + (1,9)^3 \cdot (-4,5)^3}{(1,9)^3 \cdot (-4,5)^2} \quad d) \frac{z_1^3 + z_1^3 \cdot (3,8)}{z_1^3}$$

$$e) z_1^{-4} \cdot z_2^3 \cdot z_1^7 \cdot z_2^{-5} + (0,0) \quad f) (1,0) \cdot \frac{z_1^7 \cdot z_2^{-4} \cdot z_2^5}{z_1^7} \quad g) \frac{(-z_1)^3 \cdot (-z_2)^4 \cdot (-z_1)^5}{z_1^7 \cdot z_2^4}$$

Opgave 5014: Reducér følgende udtryk:

$$a) \frac{(1,0)}{z_1} - \frac{(1,0)}{z_2} + \frac{z_1^2 - z_1 \cdot z_2}{z_1^2 \cdot z_2} \quad b) (z_1 - z_2) + z_2 \quad c) z_1 \cdot z_2 \cdot \left( \frac{(1,0)}{z_2} - \frac{(1,0)}{z_1} \right) + z_2 + (-z_1)$$

Opgave 5016: Udregn disse parenteser:

$$a) (z_1 + z_2)^3 \quad b) (z + (1,0))^3 \quad c) (z \cdot (1,0))^3 \quad d) (z_1 + z_2)^4 \quad e) (z_1 - z_2)^3$$

Opgave 5020: Bestem følgende realdele og imaginærdele. Tjek ved at indtaste i Maple.

$$a) \operatorname{Re}(5-7i) \quad b) \operatorname{Im}(5-7i) \quad c) \operatorname{Re}(1-4i) \quad d) \operatorname{Im}(6+i) \quad e) \operatorname{Re}(-i) \quad f) \operatorname{Im}(-i) \quad g) \operatorname{Re}(6) \quad h) \operatorname{Im}(-5)$$

Opgave 5022: Udregn følgende i hånden. Tjek med Maple.

$$a) (8+5i) + (3+4i) \quad b) (-4+3i) + (9-5i) \quad c) (3-4i) + (-5+3i) \quad d) (2+3i) \cdot (6+5i)$$

$$e) (2-i) \cdot (6+3i) \quad f) (-4+2i) \cdot (3-5i) \quad g) 4i + (2-6i) \quad h) 9 + (-6+4i)$$

$$k) (3-5i) + i \quad l) 7i \cdot (3+5i) \quad m) -i \cdot (-2+3i) \quad n) 3i \cdot 4i$$

Opgave 5024: Udregn følgende i hånden. Tjek med Maple.

$$a) 3i \cdot (5i + 7) \quad b) 8 \cdot (i + 1) \quad c) i^3 \quad d) i^4 \quad e) i^7 \quad f) i^{4003} \quad g) i^{15361} \quad h) (-i)^{32783}$$

$$k) (1+i) \cdot (1-i) \quad l) (4+3i) \cdot (4-3i) \quad m) (-9+2i) \cdot (-9-2i) \quad n) (5+2i)^2$$

$$o) (7+5i)^2 \quad p) (4-2i)^2 \quad q) (7-3i)^2 \quad r) (1+i)^2 \quad s) (1+i)^4 \quad t) (1+i)^8$$

Opgave 5026: Udregn følgende i hånden. Tjek med Maple.

$$a) \operatorname{Re}((4-3i) \cdot (4+3i)) \quad b) \operatorname{Im}((4-3i) \cdot (4+3i)) \quad c) \operatorname{Re}((-8+5i) \cdot (-8-5i)) \quad d) \operatorname{Im}((-8+5i) \cdot (-8-5i))$$

$$e) \operatorname{Re}((1+i) \cdot (1-i)) \quad f) \operatorname{Im}((132-45i) \cdot (132+45i)) \quad g) \operatorname{Re}(7-6i) + i \cdot \operatorname{Im}(7-6i)$$

Opgave 5030: Bestem i hånden **både** den komplekst konjugerede  $\bar{z}$  **og** modulus  $|z|$  af følgende komplekse tal. Tjek med Maple.

$$a) 6+8i \quad b) 6-8i \quad c) -4-3i \quad d) 3-4i \quad e) 2+7i \quad f) 9-3i \quad g) 1+i \quad h) 5i$$

$$j) -13i \quad k) i \quad l) 8 \quad m) -4 \quad n) 0 \quad o) 12+5i \quad p) i+5 \quad q) -i3+8$$

Opgave 5032: Bestem for følgende komplekse tal  $z$  **både** produktet  $z \cdot \bar{z}$  **og** modulus  $|z|$  (der er facitliste):

$$a) 2+7i \quad b) 5-3i \quad c) -2+5i \quad d) -3-8i \quad e) 7i \quad f) -5i \quad g) 9 \quad h) 1+i$$

Opgave 5034: Bestem for følgende komplekse tal  $z$  **både**  $\frac{1}{2}(z + \bar{z})$  **og**  $\frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ . Der er facitliste.

$$a) 5+2i \quad b) -7+4i \quad c) 6-5i \quad d) -9-3i \quad e) 8i \quad f) -13i \quad g) 5 \quad h) 1+i$$

Opgave 5040: Udregn følgende udtryk i hånden. Tjek med Maple.

$$a) (6+4i) - (3+2i) \quad b) (8+4i) - (2-5i) \quad c) (-9-3i) - (2+5i)$$

Opgave 5042: Foretag følgende divisioner ved først at forlænge brøken med den komplekst konjugerede af nævneren (tjek resultatet med Maple):

$$a) \frac{3+4i}{5+2i} \quad b) \frac{7+i}{6-5i} \quad c) \frac{4-6i}{4+3i} \quad d) \frac{3-5i}{5-8i} \quad e) \frac{1}{-3+4i} \quad f) \frac{1}{i} \quad g) \frac{1-i}{1+i} \quad h) \frac{5+3i}{i}$$

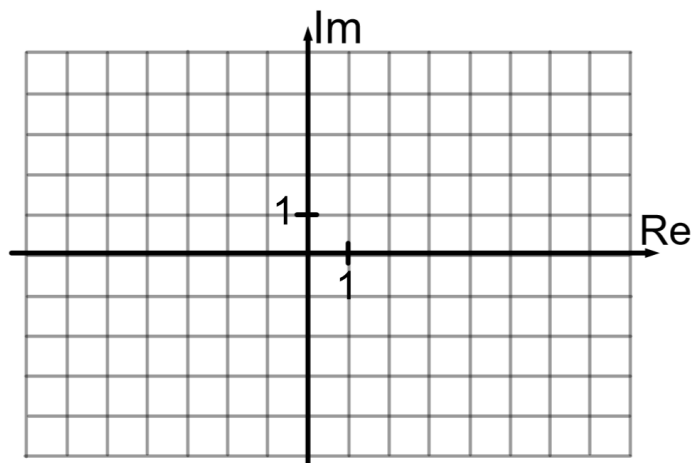
Opgave 5044: Udregn følgende i hånden og tjek med Maple:

$$a) \frac{1}{1+i} \quad b) \frac{i}{1+i} \quad c) \frac{-5+3i}{8-6i} \quad d) \frac{4i+3-i-2}{4i+3} \quad e) \frac{i \cdot (3-i)}{2 \cdot (3-i)} \quad f) \frac{(2+i) \cdot (-1+3i)}{(6i+5) \cdot (-2+7i)}$$

Opgave 5046: Vis, at  $\frac{1}{a+ib}$  kan skrives  $\frac{a}{a^2+b^2} - i \cdot \frac{b}{a^2+b^2}$

Opgave 5050: Placér følgende komplekse tal i den komplekse talplan:

$$a) 5+3i \quad b) -6+2i \quad c) -3-4i \quad d) (5, -2) \quad e) 4i \quad f) (7, 0) \quad g) -i \quad h) -6$$



Opgave 5052: Tegn en kompleks talplan og afsæt følgende komplekse tal **og** deres komplekst konjugerede:

$$a) 5+2i \quad b) -4+6i \quad c) 7-3i \quad d) -2-i \quad e) i \quad f) 5 \quad g) -5i$$

Opgave 5054: Hvad har addition og subtraktion af komplekse tal med vektorregning at gøre?

Opgave 5060: Følgende komplekse tal er angivet på polær form. Bestem modulus  $r$  og hovedargumentet:

$$a) z_1 = 7 \cdot \left( \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \quad b) z_2 = 3 \cdot \left( \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$c) z_3 = 11 \cdot \left( \cos(0,73) + i \cdot \sin(0,73) \right) \quad d) z_4 = \cos(-0,12) + i \cdot \sin(-0,12)$$

$$e) z_5 = \sqrt{2} \cdot \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \quad f) z_6 = 8 \cdot \left( \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi) \right)$$

Opgave 5062: Angiv de komplekse tal fra opgave 5060 på rektangulær form.

Opgave 5064: Bestem modulus (udregning i hånden) og hovedargumentet (udregning med *arctan* i Maple) for følgende komplekse tal. Tjek facit med Maples kommandoer *abs* og *argument*.

$$a) 6+6i \quad b) 8-3i \quad c) -5+7i \quad d) -1-i \quad e) 3i \quad f) 4 \quad g) -6i \quad h) -13$$

Opgave 5066: Nedenfor er angivet modulus og hovedargument for tre komplekse tal. Angiv dem på rektangulær form:

$$a) r_1 = 4 \quad \text{Arg}(z_1) = 0,83 \quad b) r_2 = 9 \quad \text{Arg}(z_2) = \frac{\pi}{7} \quad c) r_3 = 6,8 \quad \text{Arg}(z_3) = -3$$

Opgave 5068: Bestem uden hjælpemidler modulus og hovedargument for følgende komplekse tal. Tjek med Maples kommandoer *abs* og *argument*.

$$a) \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad b) i \cdot \left( \sin(0,4) - i \cdot \cos(-0,4) \right) \quad c) -\left( \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

Opgave 5070: Udregn følgende produkter:

$$a) 9 \cdot \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \cdot 4 \cdot \left( \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

$$b) 2 \cdot \left( \cos(-2,64) + i \cdot \sin(-2,64) \right) \cdot 11 \cdot \left( \cos(1,37) + i \cdot \sin(1,37) \right)$$

$$c) \frac{7}{3} \cdot \left( \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) \cdot 6 \cdot \left( \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right)$$

$$d) \left( \cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right) \right) \cdot 3 \cdot \left( \cos\left(-\frac{4\pi}{7}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{4\pi}{7}\right) \right)$$

Opgave 5072: Udregn følgende potenser:

$$a) \left( 2 \cdot \left( \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) \right)^5 \quad b) \left( 2 \cdot \left( \cos\left(-\frac{\pi}{11}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{11}\right) \right) \right)^7$$

$$c) \left( 3 \cdot \left( \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \right)^4 \quad d) \left( \cos(-0,1) + i \cdot \sin(-0,1) \right)^{23}$$

$$e) \left( \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)^7 \quad f) \left( \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)^{3486}$$

Opgave 5074: Vis ved at benytte additionsformlerne 2 og 4 og udnytte tricket med at forlænge brøken med nævnerens komplekst konjugerede, at Sætning 7 kan udvides med:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \left( \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right)$$

Opgave 5080: Reducér følgende udtryk:

$$a) e^{4+7i} \cdot e^{-1+8i} \quad b) e^{-7+2i} \cdot e^{5-3i} \quad c) \frac{e^{9+6i}}{e^{2+3i}} \quad d) \frac{e^{-8+7i}}{e^{6+7i}} \quad e) \frac{e^{4+i}}{e^{4-i}} \quad f) e^{9+13i} \cdot e^{2-13i}$$

Opgave 5082: Udregn følgende værdier og angiv på rektangulær form (tjek med Maple):

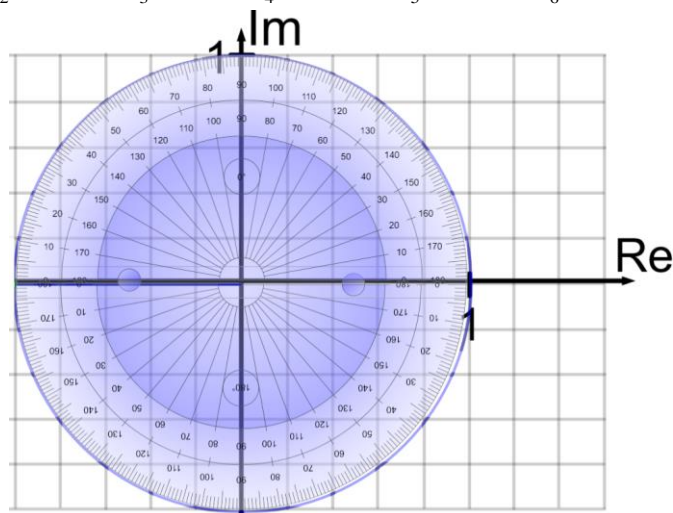
$$a) e^{1-i\pi} \quad b) e^{3-i\frac{\pi}{2}} \quad c) e^{i\pi} \quad d) e^{3+0i} \quad e) e^{1-i\frac{\pi}{4}} \quad f) e^{1+i\frac{\pi}{3}} \quad g) e^{2-i\frac{\pi}{6}} \quad h) e^{-6+i\frac{2\pi}{3}}$$

Opgave 5100: Aflæs modulus og hovedargumentet af følgende komplekse tal:

$$a) 4 \cdot e^{i\frac{\pi}{5}} \quad b) 14 \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}} \quad c) 2 \cdot e^{3,1i} \quad d) e^{i\pi} \quad e) 3 \cdot e^i \quad f) 1 \quad g) e^{5\pi i} \quad h) e^{-i\pi}$$

Opgave 5101: Placér følgende komplekse tal i den komplekse talplan:

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad z_3 = e^{i\pi}, \quad z_4 = e^{-i\frac{\pi}{3}}, \quad z_5 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad z_6 = e^{-i\frac{\pi}{2}}, \quad z_7 = e^{-i\frac{5\pi}{6}} \quad \text{og} \quad z_8 = e^{i\frac{\pi}{4}}$$



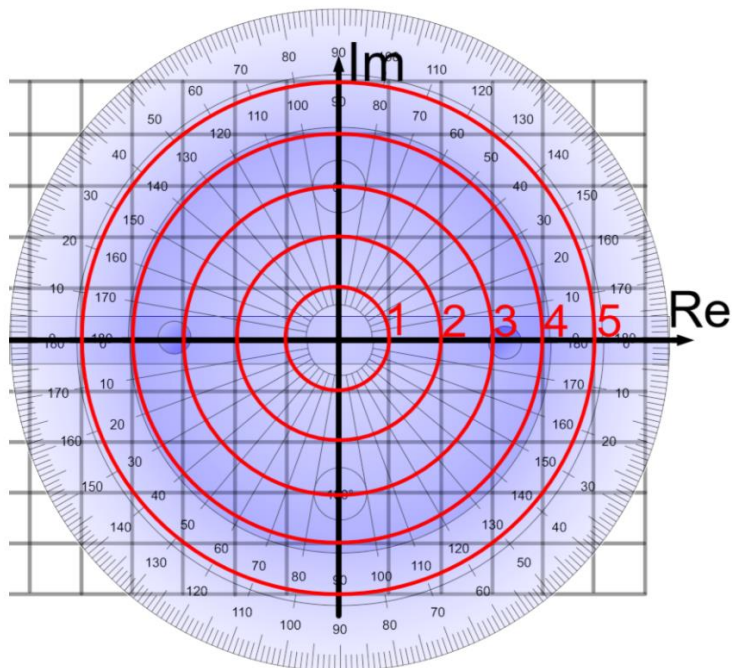
Opgave 5102: Foretag følgende multiplikationer:

$$a) 8 \cdot e^{i\frac{\pi}{5}} \cdot 6 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \quad b) 3 \cdot e^{-i\frac{\pi}{5}} \cdot 7 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} \quad c) 2 \cdot e^{0,53i} \cdot 13 \cdot e^{2,12i} \quad d) 16 \cdot e^{-2,93i} \cdot e^{1,41i}$$

$$e) 2 \cdot e^i \cdot 5 \cdot e^{-1,57i} \quad f) e^{-i} \cdot 7 \cdot e^i \quad g) 18 \cdot e^{\frac{i}{2}} \cdot 3 \cdot e^{-\frac{i}{3}} \quad h) 9 \cdot e^{-\pi i} \cdot e^{i\pi}$$

Opgave 5103: Placér følgende komplekse tal i den komplekse talplan:

$$z_1 = 4 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad z_2 = 2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad z_3 = 5 \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}, \quad z_4 = e^{-i\frac{\pi}{2}}, \quad z_5 = 4 \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}}, \quad z_6 = 5 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad z_7 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} \quad \text{og} \quad z_8 = 3e^{i\pi}$$





Opgave 5104: Omskriv følgende komplekse tal fra rektangulær form til formen  $z = r \cdot e^{i\varphi}$  (Anvend den komplekse plan til at bestemme hovedargumentet):

a)  $1+i$  b)  $-3i$  c)  $-2+2i$  d)  $i$  e)  $5-5i$  f)  $-1-i$  g)  $-1$

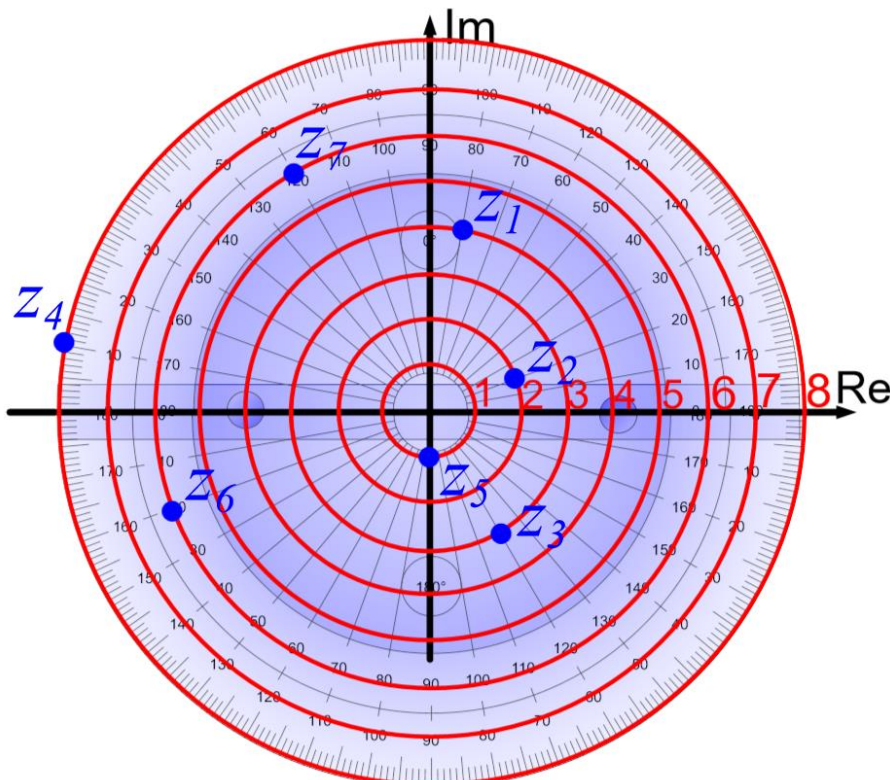
Opgave 5108: Hvad er  $\bar{z}$ , når  $z = r \cdot e^{i\varphi}$ ?

Opgave 5150: Udregn følgende kvotienter:

a)  $\frac{12 \cdot e^{i \frac{5\pi}{9}}}{3 \cdot e^{i \frac{2\pi}{9}}}$  b)  $\frac{21 \cdot e^{\frac{\pi}{3}i}}{7 \cdot e^{\frac{\pi}{2}i}}$  c)  $\frac{16 \cdot e^{1,52i}}{2 \cdot e^{-0,67i}}$  d)  $\frac{7 \cdot e^{i\pi}}{e^{-i \frac{\pi}{2}}}$  e)  $\frac{5 \cdot e^{\frac{\pi}{3}i}}{2 \cdot e^{\frac{\pi}{4}i}}$  f)  $\frac{63 \cdot e^{-1,21i}}{9 \cdot e^{0,67i}}$  g)  $\frac{119 \cdot e^{-i \frac{\pi}{2}}}{17 \cdot e^{i \frac{2\pi}{3}}}$

Opgave 5152: Placér følgende produkter og kvotienter (kald punkterne a, b, c, d, ...):

a)  $z_1 \cdot z_2$  b)  $z_5 \cdot z_3$  c)  $\frac{z_4}{z_1}$  d)  $\frac{z_7}{z_2}$  e)  $z_2 \cdot z_3$  f)  $\frac{z_1}{z_5}$  g)  $\frac{z_7}{z_6}$  h)  $\frac{z_4}{z_4}$



Opgave 5154: Udregn følgende produkter og kvotienter.

a)  $4 \cdot e^{\frac{3\pi}{8}i} \cdot 13 \cdot e^{\frac{2\pi}{9}i}$  b)  $\frac{143 \cdot e^{\frac{7\pi}{9}i}}{13 \cdot e^{\frac{5\pi}{6}i}}$  c)  $2,25 \cdot e^i \cdot 8 \cdot e^{-3i}$  d)  $\frac{221 \cdot e^{\frac{5\pi}{11}i}}{13 \cdot e^{\frac{6\pi}{7}i}}$  e)  $\frac{6 \cdot e^{\frac{\pi}{8}i} \cdot 5 \cdot e^{\frac{-3\pi}{8}i}}{10 \cdot e^{\frac{5\pi}{8}i} \cdot 3 \cdot e^{\frac{3\pi}{8}i}}$

Opgave 5156: Placér efter bedste evne tallet  $e^{\frac{i\pi}{2}}$  i den komplekse talplan. Gang det med sig selv igen og igen ved at sætte prikker i den komplekse talplan indtil du ikke gider mere.

Gør derefter det samme med tallene  $e^{-\frac{i\pi}{2}}$ ,  $e^{\frac{i2\pi}{3}}$ ,  $e^{\frac{i\pi}{6}}$ ,  $e^{-\frac{i\pi}{3}}$  og  $e^{\frac{i5\pi}{6}}$ .

Gør derefter det samme med division.

Opgave 5200: Udregn følgende:

a)  $z^5$ , når  $z = 2 \cdot e^{i \frac{\pi}{11}}$  b)  $z^{-4}$ , når  $z = 3 \cdot e^{i \frac{\pi}{5}}$  c)  $z^6$ , når  $z = 10 \cdot e^{0,25i}$   
 d)  $z^{-3}$ , når  $z = 5 \cdot e^{-0,14i}$  e)  $z^{10}$ , når  $z = e^{i \frac{\pi}{13}}$  f)  $z^{-8}$ , når  $z = e^{-i \frac{2\pi}{19}}$   
 g)  $z^5$ , når  $z = 2 \cdot e^{i \frac{\pi}{3}}$  h)  $z^0$ , når  $z = 7 \cdot e^{i \frac{2\pi}{41}}$

Opgave 5201: Udregn følgende:

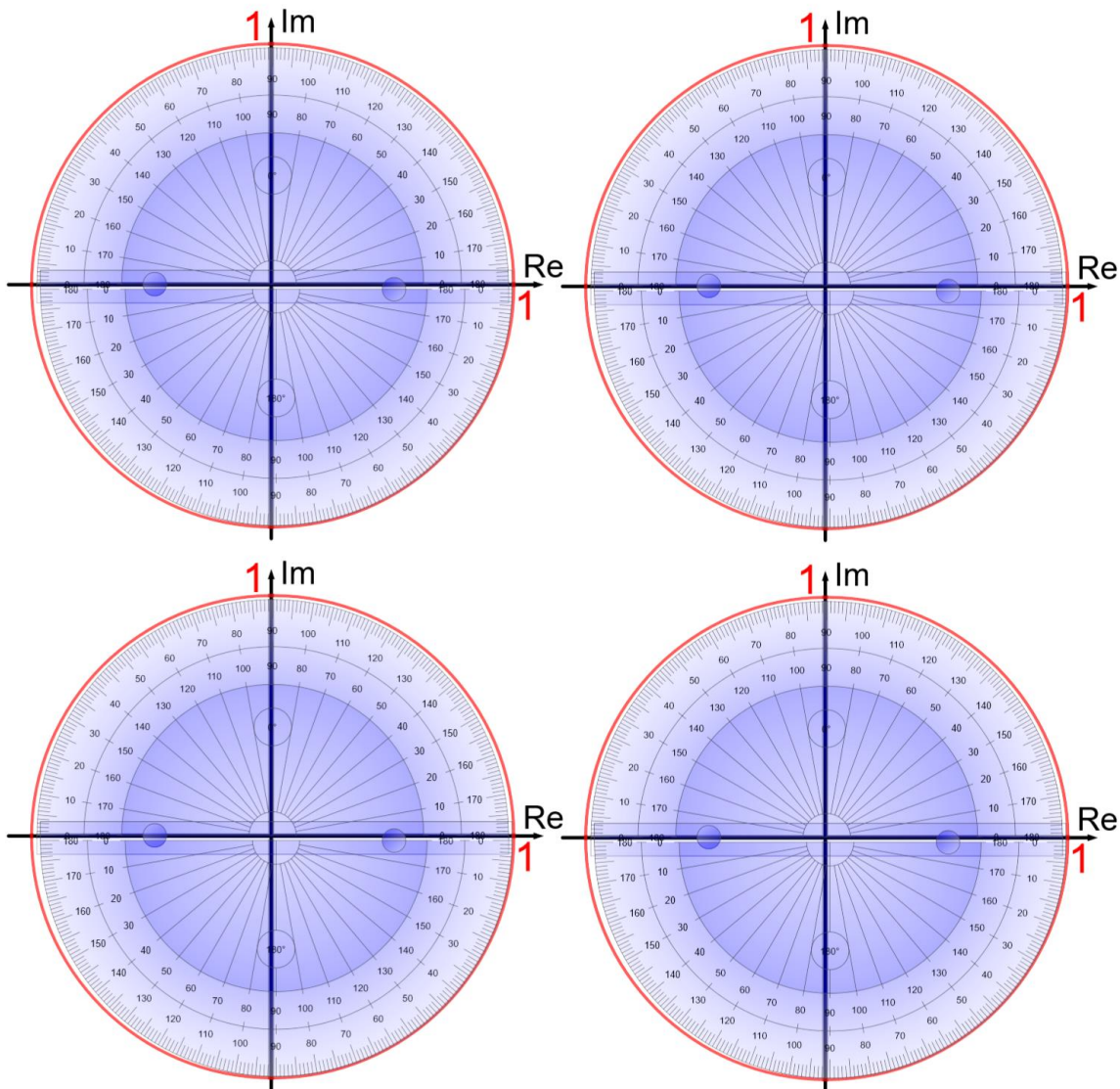
$$a) (3 \cdot e^{0,21i})^4 \quad b) \left(2 \cdot e^{\frac{\pi}{7}i}\right)^{-6} \quad c) (5 \cdot e^{-0,35i})^4 \quad d) (6 \cdot e^{-0,17i})^{-3} \quad e) \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^{11} \quad f) \left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^9$$

Opgave 5202: a) Afsæt potenserne  $z^3, z^7, z^{-2}$  og  $z^{-6}$  i den komplekse talplan, når  $z = e^{i\frac{\pi}{6}}$ .

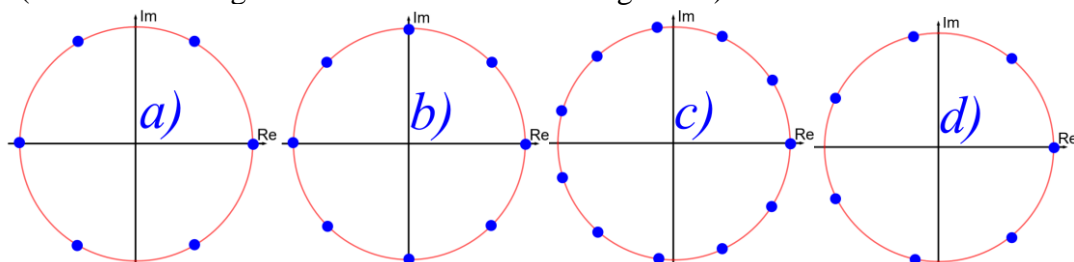
b) Afsæt potenserne  $z^5, z^8, z^{-3}$  og  $z^{-13}$  i den komplekse talplan, når  $z = e^{i\frac{\pi}{12}}$ .

c) Afsæt potenserne  $z^5, z^{12}, z^0$  og  $z^{-15}$  i den komplekse talplan, når  $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

d) Afsæt potenserne  $z^7, z^{15}, z^{-6}$  og  $z^{-13}$  i den komplekse talplan, når  $z = e^{0,17453i}$ .



Opgave 5204: I nedenstående komplekse talplaner er afsat **samtlig**e heltallige potenser af et komplekst tal med positivt hovedargument. Angiv i hvert tilfælde det komplekse tal (den blandt mulighederne med mindst hovedargument):



Opgave 5206: Tegn selv en kompleks talplan med en enhedscirkel og benyt den til at finde svarene på nedenstående opgaver (anvend polær repræsentation):

- Find tre forskellige komplekse tal, der opfylder  $z^3 = 1$ .
- Find fire forskellige komplekse tal, der opfylder  $z^4 = 1$ .
- Find fem forskellige komplekse tal, der opfylder  $z^5 = 1$ .
- Find seks forskellige komplekse tal, der opfylder  $z^6 = 1$ .
- Find syv forskellige komplekse tal, der opfylder  $z^7 = 1$ .
- Find to forskellige komplekse tal, der opfylder  $z^2 = -1$ .
- Find tre forskellige komplekse tal, der opfylder  $z^3 = -1$ .
- Find fire forskellige komplekse tal, der opfylder  $z^4 = -1$ .
- Find to forskellige komplekse tal, der opfylder  $z^2 = i$ .
- Find tre forskellige komplekse tal, der opfylder  $z^3 = i$ .
- Find fire forskellige komplekse tal, der opfylder  $z^4 = i$ .
- Find fire forskellige komplekse tal, der opfylder  $z^4 = -i$ .

Opgave 5207: Løs følgende ligninger og tjek med 'solve' på Maple:

$$a)(1+z)^3 = 1 \quad b)(1+z)^4 = 1 \quad c)(1+z)^5 = 1 \quad d)(1+z)^6 = 1 \quad e)(1+z)^7 = 1 \quad f)(1+z)^8 = 1$$

Opgave 5208: Beregn i hånden følgende potenser ved først at omskrive til polær form. Tjek facit med Maple.

$$a)(1+i)^4 \quad b)(1-i)^8 \quad c)(1+i)^6 \quad d)(-1+i)^7$$

Opgave 5209: Løs følgende ligninger og tjek med 'solve' på Maple:

$$a)(1+z)^3 = 8 \quad b)(1+z)^4 = 16 \quad c)(1+z)^5 = 32 \quad d)(1+z)^6 = 64 \quad e)(1+z)^7 = 128$$

$$f)(1+i+z)^3 = 8 \quad g)(1+i+z)^4 = 16 \quad h)(1+i+z)^5 = 32 \quad j)(1+i+z)^6 = 64$$

Opgave 5250: Udfør følgende punkter for hver rod.

- Bestem værdierne af roden, udpeg hovedværdien og tjek med facitlisten.
- Uddrag roden med Maple og tjek, at Maple giver hovedværdien.
- Indtegn værdierne for roden i den komplekse talplan (skitsetegning).
- Opstil den tilsvarende ligning (dvs. for f.eks.  $\sqrt[7]{i}$  er det  $z^7 = i$ ), og lad Maple løse den. Sammenlign med din skitse.

$$a) \sqrt[3]{8 \cdot e^{i \frac{3\pi}{4}}} \quad b) \sqrt[5]{32 \cdot e^{-i \frac{5\pi}{6}}} \quad c) \sqrt[4]{625 \cdot i} \quad d) \sqrt[6]{64} \quad e) \sqrt{-49} \quad f) \sqrt[3]{-27 \cdot i} \quad g) \sqrt[5]{-32}$$

$$h) \sqrt[4]{e^{i \frac{9\pi}{2}}} \quad j) \sqrt[2]{e^{i \frac{12\pi}{5}}} \quad k) \sqrt[3]{e^{-i \frac{5\pi}{3}}} \quad l) \sqrt[8]{1} \quad m) \sqrt{e^{-i \frac{13\pi}{11}}} \quad n) \sqrt[4]{i} \quad o) \sqrt[3]{-i}$$

Opgave 5252: Løs følgende ligninger og tjek med Maples 'solve':

$$a) z^6 = 3\sqrt{3} + 9 \cdot i \quad b) z^5 = -2 + 2 \cdot i \quad c) z^9 = -5 - 5i \quad d) z^{12} = 9 - 9\sqrt{3} \cdot i$$

Opgave 5300: Uddrag følgende **komplekse** kvadratrødder:

$$a) \sqrt{36} \quad b) \sqrt{144} \quad c) \sqrt{1} \quad d) \sqrt{0} \quad e) \sqrt{-4} \quad f) \sqrt{-81} \quad g) \sqrt{-64} \quad h) \sqrt{-121} \quad i) \sqrt{-1}$$

Opgave 5302: Uddrag følgende **komplekse** kvadratrødder:

$$a) \sqrt{i} \quad b) \sqrt{-i} \quad c) \sqrt{4i} \quad d) \sqrt{-16i} \quad e) \sqrt{64i} \quad f) \sqrt{-169i} \quad g) \sqrt{484i} \quad h) \sqrt{-900i}$$

Opgave 5304: Uddrag følgende **komplekse** kvadratrødder:

$$a) \sqrt{9 \cdot e^{i \frac{3\pi}{4}}} \quad b) \sqrt{36 \cdot e^{i \frac{2\pi}{5}}} \quad c) \sqrt{\frac{1}{4} \cdot e^{-i \frac{\pi}{4}}} \quad d) \sqrt{\frac{1}{81} \cdot e^{-i \frac{5\pi}{7}}} \quad e) \sqrt{e^{i \frac{\pi}{7}}} \quad f) \sqrt{196 \cdot e^{-i \frac{4\pi}{5}}} \quad g) \sqrt{225 \cdot e^{i \frac{2\pi}{9}}}$$

Opgave 5306: Uddrag følgende **komplekse** kvadratrødder:

$$a) \sqrt{1+i} \quad b) \sqrt{5-2i} \quad c) \sqrt{-3+4i} \quad d) \sqrt{8-i} \quad e) \sqrt{11+4i}$$

Opgave 5350: Beregn i hånden følgende værdier og tjek med Maple:

$$a) \operatorname{Ln}\left(17 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \quad b) \operatorname{Ln}\left(e^5 \cdot e^{-i\frac{4\pi}{7}}\right) \quad c) \operatorname{Ln}\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) \quad d) \operatorname{Ln}(-1) \quad e) \operatorname{Ln}(4i) \quad f) \operatorname{Ln}(-i)$$

Opgave 5352: Der ses på et komplekst tal  $z = r \cdot e^{i\varphi}$ , hvor  $r$  er modulus og  $\varphi$  er hovedargumentet.

- Hvad ved man om enten  $r$  eller  $\varphi$ , hvis det oplyses, at  $\operatorname{Ln}(z)$  er placeret i 2. eller 3. kvadrant i den komplekse talplan?
- Hvad ved man, hvis det oplyses, at  $\operatorname{Ln}(z)$  er placeret i 4. kvadrant i den komplekse talplan?
- Hvad ved man, hvis det oplyses, at  $\operatorname{Ln}(z)$  ligger på den negative del af førsteaksen i den komplekse talplan?
- Hvad ved man, hvis det oplyses, at  $\operatorname{Ln}(z)$  ligger på den positive del af den imaginære akse?

Opgave 5354: a) Gælder udsagnet  $e^{\ln(z)} = z$  inden for de komplekse tal?

b) Gælder udsagnet  $\ln(e^z) = z$  inden for de komplekse tal?

c) Findes der to forskellige komplekse tal, hvor mindst én af logaritmeværdierne er den samme?

d) Gælder logaritmeregnereglen  $\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln}(z_1) + \operatorname{Ln}(z_2)$ ?

e) Hvordan ligger  $\operatorname{Ln}(z)$  og  $\operatorname{Ln}(\bar{z})$  i forhold til hinanden i den komplekse talplan?

Opgave 5400: Benyt Sætning 17 til at beregne følgende (Tjek med Maple):

$$a) \cos(-i) \quad b) \sin(-i) \quad c) \cos(3i) \quad d) \sin(3i) \quad e) \cos(-3i) \quad f) \sin(-3i)$$

Opgave 5402: Benyt Sætning 17 til at undersøge, om følgende identiteter, der kendes fra de reelle tal, også gælder for de komplekse trigonometriske funktioner:

$$a) \cos(-z) = \cos(z) \quad b) \sin(-z) = -\sin(z) \quad c) \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$$

Opgave 5420: Benyt Sætning 17 til at udregne følgende værdier (tjek med Maple):

$$a) \cos\left(\frac{\pi}{4} + i\right) \quad b) \sin\left(\frac{\pi}{4} + i\right) \quad c) \cos(3\pi - 7i) \quad d) \sin(3\pi - 7i)$$

Opgave 5422: Tjek, at resultaterne i opgave 5420 er i overensstemmelse med grundrelationen.

Opgave 5424: Beregn følgende værdier (tjek med Maple):

$$a) \cos(\pi - 7i) \quad b) \sin(\pi - 7i) \quad c) \cos\left(\frac{5\pi}{4} + i\right) \quad d) \sin\left(\frac{5\pi}{4} + i\right)$$

Opgave 5426: Undersøg, om  $\cos(z + 2\pi) = \cos(z)$  og  $\sin(z + 2\pi) = \sin(z)$  er sande for alle  $z$ .

Undersøg, om flere af overgangsformlerne også gælder for komplekse tal.

Opgave 5500: Løs følgende andengradsligninger inden for de komplekse tal (tjek med Maple):

$$a) z^2 + 3z - 28 = 0, G = \mathbb{C} \quad b) z^2 + 6z + 13 = 0, G = \mathbb{C} \quad c) z^2 + 11z + 30 = 0, G = \mathbb{C}$$

$$d) z^2 - 8z + 25 = 0, G = \mathbb{C} \quad e) z^2 + 25 = 0, G = \mathbb{C} \quad f) z^2 + 2z + 2 = 0, G = \mathbb{C}$$

$$g) z^2 - 2z + 2 = 0, G = \mathbb{C} \quad h) z^2 + 2z - 2 = 0, G = \mathbb{C} \quad j) 3z^2 + 36z + 183 = 0, G = \mathbb{C}$$

Opgave 5502: Løs følgende andengradsligninger inden for de komplekse tal (tjek med Maple):

$$a) z^2 + 2z + 82 = 0, G = \mathbb{C} \quad b) z^2 + 18z + 82 = 0, G = \mathbb{C} \quad c) z^2 + 4z + 68 = 0, G = \mathbb{C}$$

$$d) z^2 + 16z + 68 = 0, G = \mathbb{C} \quad e) z^2 + 2z + 170 = 0, G = \mathbb{C} \quad f) z^2 + 26z + 170 = 0, G = \mathbb{C}$$

$$g) z^2 + 2z + 901 = 0, G = \mathbb{C} \quad h) z^2 + 60z + 901 = 0, G = \mathbb{C}$$

Opgave 5504: Multiplicér parenteserne og reducér:  $(z + a + i \cdot b) \cdot (z + a - i \cdot b)$

Opgave 5506: Benyt resultatet fra opgave 5504 til at løse følgende andengradsligninger inden for de komplekse tal (tjek med Maple):

$$a) z^2 + 6z + 25 = 0, G = \mathbb{C} \quad b) z^2 + 8z + 65 = 0, G = \mathbb{C} \quad c) z^2 - 4z + 68 = 0, G = \mathbb{C}$$

$$d) z^2 - 2z + 5 = 0, G = \mathbb{C} \quad e) z^2 + 10z + 146 = 0, G = \mathbb{C} \quad f) z^2 + 16z + 65 = 0, G = \mathbb{C}$$

Opgave 5520: Benyt Sætning 21 til at bestemme følgende komplekse kvadratrødder:

$$a) \sqrt{-21-20i} \quad b) \sqrt{-48+14i} \quad c) \sqrt{-7-24i} \quad d) \sqrt{32-24i} \quad e) \sqrt{77+36i} \quad f) \sqrt{85-132i}$$

Opgave 5522: Løs følgende andengradsligninger i hånden ( $G = \mathbb{C}$ ). Tjek med Maple.

$$a) i \cdot z^2 + (6-i) \cdot z - 13 - 11i = 0 \quad b) 3z^2 - (36+9i)z + 117 + 69i = 0$$

$$c) (1+i) \cdot z^2 - (5+9i) \cdot z + 12 + 14i = 0 \quad d) (4+2i) \cdot z^2 - (18+4i) \cdot z + 18 + 14i = 0$$

$$e) (2-i) \cdot z^2 + (-15+5i) \cdot z + 33 - 4i = 0 \quad f) (3+2i) \cdot z^2 + (3+2i) \cdot z - 39 - 65i = 0$$

# FACITLISTE

1000: a)  $45^\circ$  b)  $A, C, D$  c)  $t = -13 \vee t = 13$

1002: a)  $x^2 + y^2 = 3,2546 \cdot z^2$  b)  $55,52^\circ$  c)  $42,51^\circ$

1004: a)  $z = 5, G = \mathbb{R}^3$  b) cirkel c)  $r = \frac{5}{2}$

1020: a)  $1 = \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25}$  b)  $1 = \frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-6)^2}{4}$  c)  $1 = \frac{(x-9)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{9}$

1022: a)  $1 = \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25}$  b) 26 c) 26 d) 26

1030: a)  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \cdot \cos(t) \\ 11 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$  b)  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \cdot \cos(t) \\ 4 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$  c)  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 \cdot \cos(t) \\ 5 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$

1032:  $(4, 7)$  og  $(-12, 7)$

1040: a)  $T(0, 0)$  b)  $F\left(0, \frac{1}{8}\right)$  c)  $y = -\frac{1}{8}$  d)  $\frac{1}{4}$

1042: a)  $y = \frac{1}{20} \cdot x^2$  b)  $y = -\frac{1}{20} \cdot x^2$  c)  $y = \frac{1}{40} \cdot x^2 + 2$  d)  $y = \frac{1}{26} \cdot x^2 - \frac{3}{13} \cdot x - \frac{54}{13}$  e)  $x = \frac{1}{20} \cdot y^2$

1044: a)  $T(0, 0), F(0, 2)$  og  $y = -2$  b)  $T(0, 5), F(0, 8)$  og  $y = 2$

c)  $T(0, -4), F(0, -8)$  og  $y = 0$  d)  $T(-5, 3), F(-5, -2)$  og  $y = 8$

1050: a)  $T(0, 0) F(0, 1)$  b)  $(2, 1)$  c)  $x = 2$  d)  $(4, 4)$  e)  $x = 4$  f)  $\left(-1, \frac{1}{4}\right)$  g)  $x = -1$

1060: a)  $e = \frac{3}{2}$  b) 12 c)  $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{45} = 1$

1062: a)  $e = \frac{3}{2}$  b)  $\frac{(x+3)^2}{36} - \frac{y^2}{45} = 1$

1064: a)  $e = \frac{5}{4}$  b)  $\frac{(x-5)^2}{400} - \frac{(y-3)^2}{225} = 1$

1066: a)  $e = 3$  b)  $\frac{(y+4)^2}{144} - \frac{(x-2)^2}{1152} = 1$

2001:

<b>U</b>	Spar	Hjertes	Ruder	Klør
<b>P</b>	0,25	0,25	0,25	0,25

2002:

<b>U</b>	Spar	Hjertes	Ruder	Klør	Joker
<b>P</b>	$\frac{13}{55}$	$\frac{13}{55}$	$\frac{13}{55}$	$\frac{13}{55}$	$\frac{3}{55}$

2003:

<b>U</b>	Højere	Samme	Mindre
<b>P</b>	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$

2010:

<b>U</b>	1	2	3	4	5	...
<b>P</b>	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{3^3}{4^4}$	$\frac{3^4}{4^5}$	...

2020:  $P(H_1) = \frac{1}{2}$  ;  $P(H_2) = \frac{1}{2}$  ;  $P(H_3) = \frac{5}{12}$  ;  $P(H_4) = 0$  ;  $P(H_5) = 1$

$$2021: P(H_1) = \frac{1}{12}; P(H_2) = \frac{1}{6}; P(H_3) = \frac{5}{18}; P(H_4) = \frac{23}{36}; P(H_5) = \frac{7}{18}$$

$$2030: p = \frac{36}{37}$$

$$2031: p = \frac{7775}{7776}$$

$$2032: p = \frac{31}{32}$$

$$2033: p = \frac{511}{512}$$

$$2034: P(A) = 0,75$$

$$2040: p = 0,54\%$$

$$2041: p = 67\%$$

$$2042: p = 0,0096\%$$

$$2043: p = 23,5\%$$

$$2050: \text{a) } 32,0\% \quad \text{b) } 83,8\% \quad \text{c) } 97,9\% \quad \text{d) } 99,76\% \quad \text{e) } 99,978\% \quad \text{f) } 0\% \quad \text{g) } 100\% \\ \text{h) } 0,07\% \quad 0,79\% \quad 6,67\% \quad 39,1\% \quad 87,6\% \quad 0\% \quad 100\%$$

$$2052: \text{a) } 10,5\% \quad \text{b) } 91,8\% \quad \text{c) } 0\% \quad \text{d) } 100\%$$

$$2053: \text{a) Nej} \quad \text{b) Ja}$$

$$2054: 41,4\%$$

$$2060: \text{a) } P(A|B) = \frac{1}{6} \quad P(A) = \frac{1}{6} \quad \text{Ja} \quad \text{b) } P(A|B) = \frac{1}{2} \quad P(A) = \frac{1}{2} \quad \text{Ja}$$

$$\text{c) } P(A|B) = \frac{1}{6} \quad P(A) = \frac{5}{36} \quad \text{Nej} \quad \text{d) } P(A|B) = \frac{2}{3} \quad P(A) = \frac{1}{2} \quad \text{Nej}$$

$$\text{e) } P(A|B) = \frac{1}{6} \quad P(A) = \frac{1}{6} \quad \text{Ja} \quad \text{f) } P(A|B) = \frac{1}{6} \quad P(A) = \frac{1}{6} \quad \text{Ja}$$

$$\text{g) } P(A|B) = \frac{1}{5} \quad P(A) = \frac{1}{6} \quad \text{Nej} \quad \text{h) } P(A|B) = 1 \quad P(A) = \frac{3}{4} \quad \text{Nej}$$

$$2062: \text{a) } P(A|B) = \frac{3}{13} \quad P(A) = \frac{3}{13} \quad \text{Ja} \quad \text{b) } P(A|B) = \frac{1}{2} \quad P(A) = \frac{1}{4} \quad \text{Nej}$$

$$\text{c) } P(A|B) = 0 \quad P(A) = \frac{1}{4} \quad \text{Nej} \quad \text{d) } P(A|B) = \frac{1}{13} \quad P(A) = \frac{1}{52} \quad \text{Nej}$$

$$\text{e) } P(A|B) = \frac{1}{4} \quad P(A) = \frac{1}{4} \quad \text{Ja} \quad \text{f) } P(A|B) = 1 \quad P(A) = \frac{1}{2} \quad \text{Nej}$$

$$\text{g) } P(A|B) = 0 \quad P(A) = \frac{1}{4} \quad \text{Nej} \quad \text{h) } P(A|B) = 1 \quad P(A) = \frac{1}{4} \quad \text{Nej}$$

$$2070: P(A \cap B) = 0,24$$

$$2071: P(A) = 0,8$$

$$2072: \text{a) Nej} \quad \text{b) } P(B|A) = 0,5$$

$$2073: \text{a) } 37,4\% \quad \text{b) } 6,2\% \quad \text{c) } 0,8\%$$

$$2074: \text{a) } P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{3}{8}, P(C) = \frac{1}{2} \text{ og } P(D) = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } P(A \cap B) = \frac{1}{8}, P(A \cap C) = \frac{1}{8}, P(A \cap D) = \frac{1}{8}, P(B \cap C) = \frac{1}{4}, P(B \cap D) = \frac{1}{4} \text{ og } P(C \cap D) = \frac{1}{8}$$

$$\text{c) } A \text{ og } C \text{ samt } A \text{ og } D.$$

$$\text{d) Nej.}$$

$$2080: \text{Hændelser: } A, C, G \text{ og } H \quad \text{Stokastiske variable: } B, D, E, F \text{ og } I.$$

2082:

<b>t</b>	0	1	2	3	4
$P(X=t)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

<b>t</b>	-4	-2	0	2	4
$P(Y=t)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

<b>t</b>	5	8	11	14	17
$P(Z=t)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

<b>t</b>	0	1	2	3
$P(W=t)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2084:

<b>t</b>	-50	1	5
$P(X=t)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$

2086:

<b>t</b>	0	1	2	<b>t</b>	0	1	2	3	4	5
$P(X=t)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$P(Y=t)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

2100: a)  $\mu = -1$       b) Nej

2101: c)  $\mu = 3$

2102: a)  $\mu = -3$       b)  $\sigma(X) = 20,67$

2103: a)  $\mu = -30$       b)  $\sigma(X) = 206,7$

2110: a) 25    b) 12    c) 12    d) 144    e) 20

2112: a)

<b>X</b>	<b>t</b>	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	<b>P(t)</b>	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

$$\mu(X) = 7, \text{ var}(X) = 5,8 \text{ og } \sigma(X) = 2,4$$

<b>Y</b>	<b>t</b>	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
	<b>P</b>	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

$$\mu(Y) = 12,25, \text{ var}(Y) = 80,0 \text{ og } \sigma(Y) = 8,9$$

<b>Z</b>	<b>t</b>	0	1	2
	<b>P(t)</b>	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{36}$

$$\mu(Z) = \frac{1}{3}, \text{ var}(Z) = 0,28 \text{ og } \sigma(Z) = 0,53$$

<b>W</b>	<b>t</b>	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
	<b>P(t)</b>	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

$$\mu(W) = 0, \text{ var}(W) = 5,8 \text{ og } \sigma(W) = 2,4$$

<b>T</b>	<b>t</b>	-1	1
	<b>P(t)</b>	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$\mu(T) = -\frac{1}{2}, \text{ var}(T) = 0,75 \text{ og } \sigma(T) = 0,87$$

<b>S</b>	<b>t</b>	-3	0	1
	<b>P(t)</b>	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{3}$

$$\mu(S) = -0,25, \text{ var}(S) = 3,35 \text{ og } \sigma(S) = 1,83$$

b)  $E(X+Y) = 19,25$  ,  $E(Z+T) = -\frac{1}{6}$  og  $E(T+S) = -\frac{3}{4}$



$$2120: N = \frac{X-10}{3}$$

$$2121: \mu = 0, \sigma = 1$$

2122:

<b>t</b>	-2	-1	0	1	2
$P(N=t)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

2124:

<b>t</b>	-1,73	-0,58	0,58	1,73
$P(N=t)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$2130: p = \frac{1}{12}$$

$$2131: p = \frac{3}{16}$$

$$2132: p = \frac{1}{4}$$

2133: b, d, g, j

$$2140: E(X \cdot Y) = 35$$

$$2141: E(X+Y) = -5, \quad E(X \cdot Y) = -36$$

$$2142: E(X) = 49$$

$$2143: E(X) = 5; \quad E(Y) = \frac{1}{1024}$$

$$2144: E(X) = 27,5; \quad E(Y) = 2687,34375$$

$$2145: E(X) = 3,5; \quad E(Y) = 6,125$$

$$2150: E(X+Y) = 1, \quad E(X \cdot Y) = -6, \quad \text{var}(X+Y) = 9$$

$$2151: E(X) = -2, \quad E(X \cdot Y) = -14, \quad \text{var}(X+Y) = 20$$

$$2152: a) E(X) = 0,5, \quad \text{var}(X) = 0,25, \quad \sigma(X) = 0,5$$

$$b) E(Y) = 2, \quad \text{var}(Y) = 1, \quad \sigma(Y) = 1$$

$$c) E(Z) = 32, \quad \text{var}(Z) = 16, \quad \sigma(Z) = 4$$

$$2153: E(X) = 5, \quad E(Y) = 2, \quad \sigma(X) = 3$$

$$2154: a) E(X) = 3,5, \quad \text{var}(X) = 2,92, \quad \sigma(X) = 1,71$$

$$b) E(Y) = 17,5, \quad \text{var}(Y) = 14,6, \quad \sigma(Y) = 3,8$$

$$c) E(Z) = 525,22$$

$$2160: a) 24,2\% \quad b) 38,3\% \quad c) 0,13\% \quad d) 0\% \quad e) 68,3\% \quad f) 95,4\% \quad g) 19,6 \quad h) 25,8$$

$$2162: a) 0\% \quad b) 68,3\% \quad c) 95,4\% \quad d) 99,7\% \quad e) 1,96 \quad f) 2,58$$

$$2164: a) 0\% \quad b) 68,3\% \quad c) 95,4\% \quad d) 99,7\% \quad e) 1,96 \quad f) 2,58$$

$$3000: |A| = 12$$

$$3001: 21$$

$$3002: 3$$

$$3004: a) 26154 \quad b) 4571 \quad c) 233$$

$$3010: a) 26,154\% \quad b) 54,29\% \quad c) 23,3\%$$

3020: Nej

3022: Ja

$$3030: a) P(n,r) \quad b) P_n \quad c) K(n,r) \quad d) K_n \quad e) K_n \quad f) K_n$$

3032: a)  $K(n, r)$  b)  $P(n, r)$  c)  $P_n$  d)  $K(n, r)$  e)  $K_n$  f)  $K(n, r)$

3040:  $N = 72$

3041:  $N = 6^9$

3042:  $N = 17550$

3043:  $N = 506$

3044:  $N = 8192$

3045:  $N = 140$

3046:  $N = 6$

3050:  $p = \frac{1}{36}$

3051:  $p = \frac{1}{140}$

3052:  $p = \frac{1}{256}$

3053: b

3054: a) Nej b) Ja c) Ja d) Nej e) Nej f) Ja g) Nej h) Ja

3060: c, f og j.

3062: A og B , A og D , B og C , B og E , C og D

3064: Nej

3065: Nej

3066: Nej

3070: 37

3071: 39

3072: b og c

3080:  $p = \frac{2}{3}$

3081:  $p = \frac{1}{4}$

3082: a)  $\frac{29}{55}$  b)  $\frac{19}{55}$  c)  $\frac{2}{5}$

3083: a)  $\frac{1}{2}$  b)  $\frac{1}{8}$  c)  $\frac{1}{2}$  d)  $\frac{3}{4}$  e)  $\frac{7}{8}$  f)  $\frac{15}{16}$

3084: a)  $\frac{1}{8}$  b)  $\frac{7}{16}$  c) 1

3100:  $N = 120$

3101:  $N = 52!$  eller  $N = 8065817517094387857166063685640376697528950544088327782400000000000$

3102: a) Nej b) Nej c) Nej d) Ja e) Nej f) Ja g) Nej h) Nej i) Nej j) Ja

3112:  $N = 5040$

3113:  $N = 6840$

3114:  $N = 6302555018760$

3116: a) Nej b) Nej c) Nej d) Ja e) Ja f) Nej g) Ja

3120: a)  $p = 62,7\%$  b)  $p = 99,986\%$  c)  $N = 23$  d)  $p = 1$  e)  $p = 0$  f)  $p = \frac{1}{365}$  g)  $N = 47$

3130: 1024

3132:  $2^{173}$  eller 11972621413014756705924586149611790497021399392059392

3134: a) Ja b) Ja c) Nej d) Nej e) Nej f) Ja g) Nej h) Ja i) Nej j) Nej

3142: a) 351 b) 351

3144: 45795673964460816

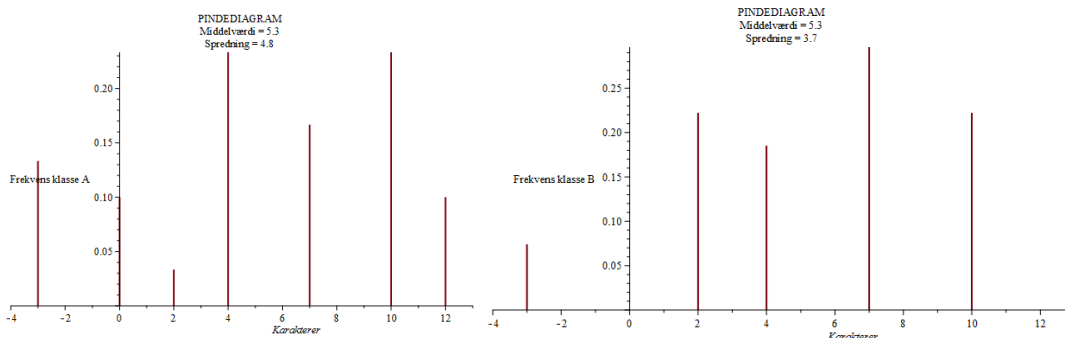
3146: a) Ja b) Nej c) Ja d) Nej e) Nej f) Nej g) Ja h) Nej i) Nej j) Ja k) Nej

3150: 1024 måder

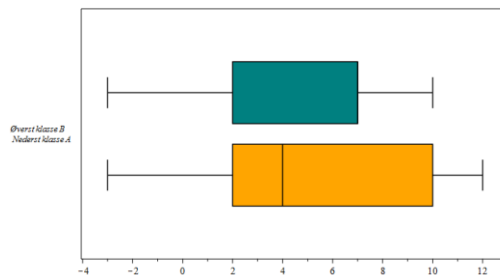
3151: 10626 måder

- 3152: 720 rækkefølger  
3153: 57657600 startopstillinger  
3154: 987840 måder  
3155: 70,6%  
3156: 37,3%  
3157: 20 forskellige  
3158: a)  $\frac{1}{36}$  b)  $\frac{1}{36}$  c)  $\frac{37}{216}$  d)  $\frac{7}{8}$   
3159a: 120 ranglister  
3159b: a) 6,5% b)  $10^{-24}\%$  c) 93,5% d) 67108864 e) 3315312000  
3162: a) 15 b) 63 c) 1023 d) 1022  
3164: 1022  
3166: 134217700  
3172: 1771  
3174: 8855  
3176: 10626  
3178: a) 0 b) Ja (se sætning 22)  
3182: a) 77520 b) 237336 c) 237336  
3184: 33554432  
3190: a) 16016 b) 20020 c) 5460 d) 54264  
3192: a) 427945518 b) 926289000 c) 26126100 d) 3190187286  
3194: a) 2880 b) 240 c) 15504 d) 0  
3200: a) Ja b) Nej c) Nej d) Nej e) Ja f) Nej g) Ja h) Nej i) Ja j) Nej  
3210: a) 24,5% b) 6,9% c) 12,6% d) 16,1% e) 14,7%  
3212: 59,8%  
3214: 96,9%  
3216: 44,4%  
3218: 46,0%  
3219: 50%  
3222: a) 8,9% b) 68,9% c) 31,1% d) 86,0% e) 14,0% f) 30,8%  
3224: a) 11,2% b) 41,5% c) 38,3% d) 6,1% e) 0% f) 41,2%  
3230: a)  $\mu = 5$ ,  $\sigma = 2$ , typetal = 5 b)  $\mu = 13,7$ ,  $\sigma = 3,02$ , typetallene er 13 og 14  
c)  $\mu = 28,6$ ,  $\sigma = 4,95$ , typetal = 28  
3232: a)  $\mu = 22,2$ ,  $\sigma = 4,4$ , typetal = 22  
b) 0,123% c) 8,23% d) 1,95% e) 0,203% f) 35,9% g) 96,42%  
h) 99,8% i) 64,1% j) 3,6% k) 35,7% l) 60,6%  
3234: a)  $\mu = 252$ ,  $\sigma = 14,48$ , typetal = 252  
b) 2,75% c) 70,4% d) 68,3% e) 95,1% f) 224 g) 281  
3240: a)  $\frac{3}{4}$  b)  $\frac{3}{16}$  c)  $\frac{3}{64}$  d)  $\frac{3}{256}$  e)  $\frac{3}{1024}$  f)  $P(n) = \frac{3}{4^{n+1}}$   
3250: a) 0,3164 b) 0,3164 c) 0,1978 d) 0,0989 e) 0,0433 f)  $P(n) = \binom{n+3}{n} \cdot \frac{3^4}{4^{n+4}}$   
3252: a) 0,00006104 b) 0,00032043 c) 0,002163 d) 0,01398 e) 1 f)  $P(n) = \binom{n+6}{n} \cdot \frac{3^n}{4^{n+7}}$   
3260: a) 0,3349 b) 0,0651 c) 1 d) 6 e) 0 f) 5  
3262: a) 0,1875 b) 0,15625 c) 3 d) 6 e) 1 og 2 f) 4 og 5  
3270: a)  $\frac{7}{15}$  b)  $\frac{7}{15}$  c)  $\frac{1}{15}$   
3271: a)  $\frac{703}{1700}$  b)  $\frac{741}{1700}$  c)  $\frac{117}{850}$  d)  $\frac{11}{850}$   
3280: a) 0,054448 b) 0,25279 c) 0,084632 d) 0,36070 e) 0,095733  
3282: a) 0,11207 b) 0,075169 c) 0 d) 0,2101177262 (Ja, decimalerne skal passe) e) 0

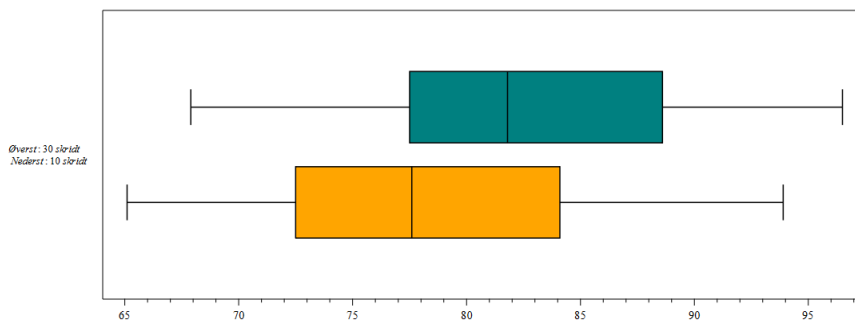
- 3290: a) 0,19867    b) 0,14591    c) 0,074664    d) 7,5    e) 11,273    f) 25,833  
 3292: a) 0,15522    b) 3,25  
 3300: a) 7,02%    b) 0,50%    c) 2,81%    d) 1,50%    e) 0%  
 3302: a) 0,13%    b) 1,54%    c) 0,13%  
 3304: a) 0,043%    b) 0,643%    c) 3,858%    d) 15,432%    e) 98,457%  
 3310: a) 10,97%    b) 5,36%  
 3312: a) 0,88%    b) 0,078%    c) 1,46%    d) 0,011%    e) 10,54%    f) 0,51%    g) 12,93%  
 3320: a) 0,118533    b) 0,172821    c) 0,155539    d) 0,0243895    e) 0,00451658    f) 0,00579693  
 3322: a) 69,1%    b) 25,6%    c) 0,6%    d) 0,608  
 3324: a) 4,69    b) 10    c) 17    d) 1  
 3326: a) 50    b) 20,6%    c) 1,6%    d) 0,03%  
 4000: a) Klasse A: Typekaraktererne 4 og 10    Klasse B: Typekarakteren 7  
       b) Klasse A: (2,4,10) eller (2,5.5,10)    Klasse B: (2,7,7)  
       c) A:  $\mu = 5,3$      $\sigma = 4,8$     B:  $\mu = 5,3$      $\sigma = 3,7$



d og e)



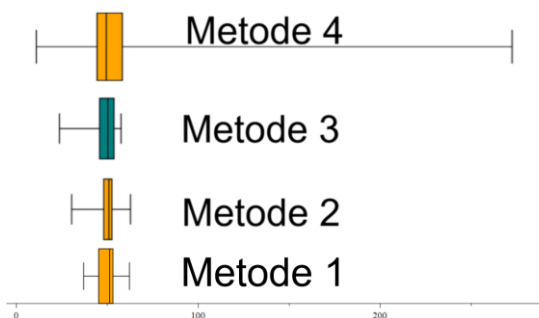
- 4004: a) 10:  $\mu = 4154$      $\sigma = 377$     30:  $\mu = 4350$      $\sigma = 312$     b) Ja og Ja



4005:

4006:

- a) M1:  $\mu = 49,4$      $\sigma = 6,5$     M2:  $\mu = 49,6$      $\sigma = 6,1$     M3:  $\mu = 46,7$      $\sigma = 9,3$     M4:  $\mu = 62,8$      $\sigma = 51,3$   
 b) M1: (45,3,51.3,53.1)    M2: (47.5,50.3,52.0)    M3: (45.2,49.8,53.1)    M4: (44.2,49.2,58.0)



c)  $IQR_1 = 7,9$   $IQR_2 = 4,5$   $IQR_3 = 7,9$   $IQR_4 = 13,8$  Metode 2: 29.8, 40.3 og 62.2

Metode 3: 23.1, 23.2, 31.4, 31.8 og 32.8 Metode 4: 10.9, 169.1 og 271.5

d) Ja

e) Median (og konklusionen kan drages, uden at man udregner afstandene til 55,86)

f) Metode 1: Ja Metode 2: Nej Metode 3: Ja Metode 4: Ja

g) Nej

4008: Exceptionelle udfald er: 10 skridt: Både mindste og største 30 skridt: Største

4010: a) 1 b) 0,683 c) 0,954 d) 1,96 e) 1 f) 0,683 g) 0,954 h) 1,96 i) 1 j) 0,683 k) 0,954 l) 1,96

4012: a) 26,82% b) 93,03% c) 85,26% d) 22,55% e) 0,016% f) 0,013%

4020: a) Binomialfordeling b) Normalfordeling c)  $\mu = 2$   $\sigma = 1,291$  d)  $\mu = 2$   $\sigma = 0,2582$

e) 0,2961

f) 0

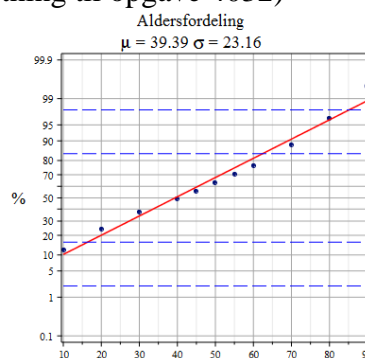
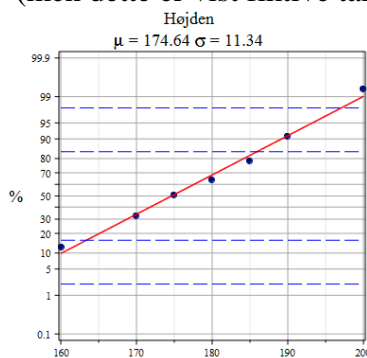
g) 94,72%

h) 0,00538%

4022: a)  $\mu = 9$   $\sigma = 3$  b) Normalfordeling c)  $\mu = 9$   $\sigma = \frac{3}{4}$  d) 38,2% e) 95,4% f) 0,0032%

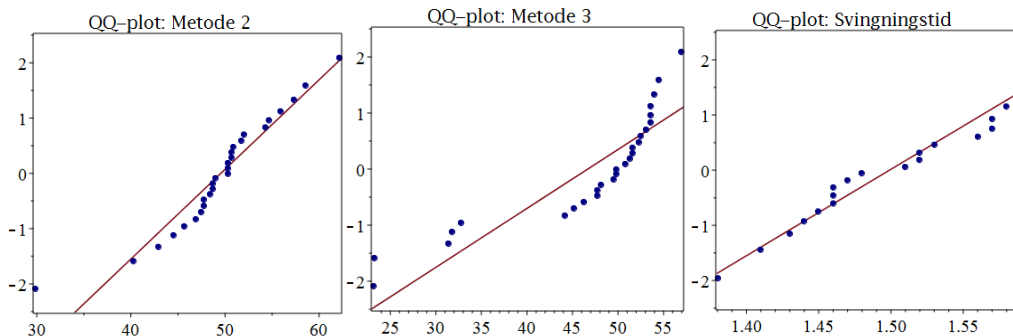
4024: a) 50,98% b) 91,55%

4030: Punkterne ligger tilnærmelsesvis på en ret linje, men der er en buet tendens. Så der er ikke nogen klar konklusion. Man kan godt sige, at højderne tilnærmelsesvis er normalfordelte (men dette er vist fiktive tal, i modsætning til opgave 4032)



4032: Se ovenfor til højre. Punkterne ligger ikke på en ret linje, men det er ikke så langt fra, som man umiddelbart kunne forvente, da der ikke er nogen grund til at tro, at aldersfordelingen skulle følge en normalfordeling. Men de store årgange i efterkrigstiden har vist givet en pukkell, der giver en klokkeform.

4034: Punkterne ligger ikke på den rette linje. Hverken metode 2 eller 3 giver normalfordelte data.



4036: Punkterne ligger tilnærmelsesvis på den rette linje. Data er tilnærmelsesvis normalfordelt.

4038: A:  $\mu = 973$   $\sigma = 403$  B:  $\mu = 4946$   $\sigma = 811$

4140: a)  $T = 1,50$   $s = 0,064$  b)  $\sigma = 0,0143$  c) [1.471, 1.527] d) [1.462, 1.536] e) [1.476, 1.522] f) [1.456, 1.542]

4180: a)  $p = 15,4\%$  b) 1,9% c) [13,5% ; 17,3%] d)  $\text{konfidensInterval}(220, 1430, 0.95) = [0.135146, 0.172546]$

4182: a)  $p = 15,4\%$  b) 5,9% c) [9,5% ; 21,3%]

4183: a)  $p = 15,4\%$  b) 0,59% c) [14,8% ; 16,0%]

4184: d) [12,9% ; 17,8%]

4186: A:[24,0% ; 27,4%] V:[19,1%,22,3%] O:[8,4% ; 10,8%] B:[7,5% ; 9,7%] Ø:[7,4% ; 9,6%]  
F:[7,0% ; 9,2%] C:[5,2% ; 7,2%] Å:[2,7% ; 4,1%] D:[2,1% ; 3,3%] I: [1,8% ; 3,0%]

4188: V og Ø ligger uden for deres konfidensintervaller.

- 4360: a) 16,2% b) 18,1% c) 11,7% d) 80,9% e) 12 f) 13 g) 2 h) 1  
 4362: a)  $A = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$  b)  $K = \{0, 1\} \cup \{13, 14, 15, \dots, 40\}$  c) Nej  
 4364: a)  $A = \{0, 1, 2, \dots, 11\}$  b)  $K = \{12, 13, 14, \dots, 40\}$  c) Ja  
 4366: a)  $A = \{3, 4, 5, \dots, 40\}$  b)  $K = \{0, 1, 2\}$  c) Ja  
 4367: a) 19,2% b) 22,5% c) 12,4% d) 23,9% e) 10 f) 10 g) 1 h) 0  
 4368: a)  $A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$   $K = \{0\} \cup \{10, 11, 12, \dots, 30\}$  b)  $A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$   $K = \{10, 11, 12, \dots, 30\}$   
 c)  $A = \{2, 3, 4, \dots, 30\}$   $K = \{0, 1\}$   
 4369: a)  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$   $K = \{7, 8, 9, \dots, 21\}$   
 4370: a) Nej. Man skal have valgt hypoteser, test og signifikansniveau, inden forsøget foretages.  
 4371: a) Nej,  $p = 22,4\% > 5\%$

4374: a)  $H_0 : p = \frac{1}{2}$   $H_1 : p \neq \frac{1}{2}$  (ligesidet test) b)  $p = 1,05\%$  c) Ja

d) Nej. Man må ikke vælge at teste, fordi/efter man har set et udfald.

4375: a)  $H_0 : p = \frac{1}{2}$   $H_1 : p > \frac{1}{2}$  (højresidet test) b)  $p = 4,4\%$  c) Personen snyder. Han har vundet signifikant flere gange end sin modstander.

4376: a)  $H_0 : p = \frac{1}{6}$   $H_1 : p \neq \frac{1}{6}$  (ligesidet test) b)  $p = 4,2\%$  c) Nej

4380: a)  $n = 120$   $m = 6$  b) 0,042% c) 0,05

4382: a) 19900 b) 199 c) 0,0000503% d) 0,01

4384: a) Ligesidet b) 10 c) 0,5 % d) 1526 (det kan være ethvert tal mellem 1523 og 1528)  
 e) Nej,  $0,72\% > 0,25\%$  f) Nej,  $1,2\% > 0,25\%$  g) Ja,  $0,00023\% < 0,25\%$

4390: a)  $H_0 : p = 0,75$   $H_1 : p > 0,75$  (højresidet test) b)  $p = 10,1\%$  c) Nej

4391: a)  $H_0 : p = 0,75$   $H_1 : p < 0,75$  (venstresidet test) b)  $p = 2,8\%$  c) Nej

4392: Nej, hun bør foretage en hel række skudserier, så man kan lave t-test eller z-test.

4393: a) 97,7% b) 63,6% c) 2,44% d) 0,0174% e)  $9,86 \cdot 10^{-17}\%$

4400: a) 91 b) 5 c)  $Q = 4,04$  d) 2

4402: a) 920 b) 5 c)  $Q = 40,4$  d) 2

4404: Opgave 4402

4406: a) se tabellen nedenfor b) 1 c)  $Q = 4,89$  d) Pige-krone

	Dreng	Pige	I alt
Plat	117	45	162
Krone	83	55	138
I alt	200	100	300

4408: b)  $Q_A = 1,775$   $Q_B = 0,413$   $Q_C = 83,6$   $Q_D = 59,8$  c) Blå-D d) Grøn

4409:  $Q_A = 0,32$   $Q_B = 19,69$   $Q_C = 3,81$   $Q_D = 40,44$   $Q_E = 2,93$   $Q_F = 4,23$

$Q_G = 5,47$   $Q_H = 7,99$   $Q_I = 18,1$   $Q_J = 10,85$   $Q_K = 24,3$   $Q_L = 9,45$

4412: a)  $p = 0,248$  b)  $Q = 13,26$  c)  $p = 0,943$  d)  $Q = 20,49$  e)  $p = 0,067$  f)  $Q = 4,26$

4414: a)  $Q_{kritisk} = 19,68$  b)  $Q_{kritisk} = 24,72$  c)  $Q_{kritisk} = 31,26$  d)  $Q_{kritisk} = 17,28$

4416: a)  $\alpha = 1\%$  b)  $\alpha = 5\%$  c)  $\alpha = 10\%$  d)  $\alpha = 3\%$

4450: a)  $p = 59\% > 5\%$ , så nulhypotesen forkastes ikke. Der er ikke belæg for ikke at stole på den oplyste procentvise fordeling.

b)  $Q_{rød} = 1,11$

4455: a)  $H_0$ : Lykkehjulet opfylder den oplyste fordeling.  $Q_{kritisk} = 9,84$

b)

Udfald	Grøn	Blå	Rød	Sort
Observeret	284	138	157	21
Forventet	282	126	168	24
$Q_{bidrag}$	0,014	1,143	0,720	0,375

c)  $Q = 2,252 < 9,84$ . Nulhypotesen forkastes ikke. Lykkehjulets resultater afviger ikke signifikant fra det oplyste, så der er ikke grund til at tro, at der er fiflet med lykkehjulet.

4500: a)  $H_0$ : Fordelingen af mænd og kvinder blandt de 15-69 årige med en længerevarende naturvidenskabelig uddannelse afhænger ikke af, om der er tale om indvandrere, efterkommere eller personer med dansk oprindelse.

$p = 0,018\% < 3\%$ , dvs. nulhypotesen forkastes. Der er signifikant forskel på fordelingen afhængigt af, om der er tale om indvandrere, efterkommere eller personer med dansk oprindelse.

$$b) N_{\text{kvinder, indvandrere}} = \frac{N_{\text{kvinder i alt}} \cdot N_{\text{indvandrere i alt}}}{N_{\text{personer i alt}}} = \frac{10540 \cdot 3366}{27268} = 1301$$

4505: a)  $H_0$ : Den relative forekomst afhænger ikke af, hvilket hav man befinder sig i.  $f = 6$

$$b) \begin{bmatrix} 371.20 & 243.09 & 539.15 & 427.56 \\ 179.62 & 117.62 & 260.88 & 206.88 \\ 437.18 & 286.29 & 634.97 & 503.55 \end{bmatrix}$$

c)  $p = 0,02 < 0,05$ . Da  $p$ -værdien er mindre end signifikansniveauet, skal nulhypotesen forkastes. Dvs. der er signifikant forskel på den relative forekomst af arterne i de forskellige have.

4652: a)  $T = -0,934$   $p = 35,9\%$  Der er ikke signifikant forskel

b)  $T = 2,077$   $p = 4,8\%$  Der er signifikant forskel

4654: a) Metode 2:  $T = -5,32$   $p = 0,0015\%$  Der er signifikant forskel

Metode 3:  $T = -5,02$   $p = 0,0032\%$  Der er signifikant forskel

Metode 4:  $T = 0,65$   $p = 52,1\%$  Der er ikke signifikant forskel

h) Nej

4702: a)  $T = 5,40$   $p = 0,00118\%$  Der er signifikant forskel

b)  $T = 5,42$   $p = 0,00112\%$  Der er signifikant forskel

c)  $T = 2,00$   $p = 5,65\%$  Der er IKKE signifikant forskel

5000: a)(1,9) b)(1,1) c)(13,34) d)(-2,-53) e)(3,5) f)(53,0) g)(34,0) h)(17,0)

5002: a)(10,0) b)(21,0) c)(-3,0) d)(-10,0) e)(0,-2) f)(35,0) g)(0,2) h)(-1,0)

5004: a)(-15,35) b)(36,-12) c)(9,-5) d)(0,0) e)(9,4) f)(2,3) g)(1,0) h)(0,0)

5005: a)  $z = (-9,5)$  b)  $z = (5,-1)$  c)  $z = \left(\frac{3}{25}, \frac{4}{25}\right)$  d)  $z = \left(0, -\frac{1}{6}\right)$

5006: a)  $z = (5,4)$  b)  $z = (9,-2)$  c)  $z = (8,-11)$

5008: a)  $z = (-8,-5)$  b)  $z = \left(\frac{19}{10}, \frac{17}{10}\right)$  c)  $z = \left(-\frac{13}{10}, -\frac{19}{10}\right)$

5010: a)  $2 \cdot z_1^2 + 2 \cdot z_2^2$  b)  $z_1 + z_3$  c)  $-z_2^2$  d)  $(5,-7)$  e)  $(3,7)$  f)  $z_1 + z_2$

5012: a)  $z_1 \cdot z_2^3$  b)  $z_2^3 + z_1$  c)  $(-3,14)$  d)  $(4,8)$  e)  $\frac{z_1^3}{z_2^2}$  f)  $z_2$  g)  $z_1$

5014: a)  $(0,0)$  b)  $z_1$  c)  $(0,0)$

5016: a)  $z_1^3 + 3 \cdot z_1^2 \cdot z_2 + 3 \cdot z_1 \cdot z_2^2 + z_2^3$       b)  $z^3 + 3 \cdot z^2 + 3 \cdot z + (1,0)$       c)  $z^3$

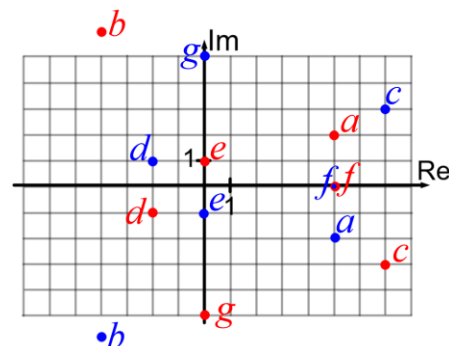
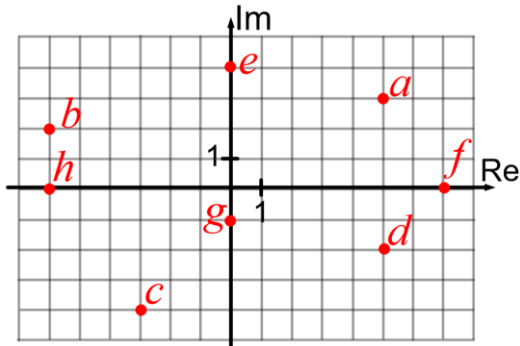
d)  $z_1^4 + 4z_1^3z_2 + 6z_1^2z_2^2 + 4z_1z_2^3 + z_2^4$       e)  $z_1^3 - 3z_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 - z_2^3$

5032: a)  $z \cdot \bar{z} = 53$   $|z| = \sqrt{53}$     b)  $z \cdot \bar{z} = 34$   $|z| = \sqrt{34}$     c)  $z \cdot \bar{z} = 29$   $|z| = \sqrt{29}$     d)  $z \cdot \bar{z} = 73$   $|z| = \sqrt{73}$

e)  $z \cdot \bar{z} = 49$   $|z| = 7$     f)  $z \cdot \bar{z} = 25$   $|z| = 5$     g)  $z \cdot \bar{z} = 81$   $|z| = 9$     h)  $z \cdot \bar{z} = 2$   $|z| = \sqrt{2}$

5034: a) 5 og 2    b) -7 og 4    c) 6 og -5    d) -9 og -3    e) 0 og 8    f) 0 og -13    g) 5 og 0    h) 1 og 1

5050:



5052:

5060: a)  $r = 7$   $\text{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{3}$     b)  $r = 3$   $\text{Arg}(z_2) = -\frac{\pi}{2}$     c)  $r = 11$   $\text{Arg}(z_3) = 0,73$

d)  $r = 1$   $\text{Arg}(z_4) = -0,12$     e)  $r = \sqrt{2}$   $\text{Arg}(z_5) = \frac{\pi}{4}$     f)  $r = 8$   $\text{Arg}(z_6) = \pi$

5062: a)  $3,5 + 6,06i$     b)  $-3i$     c)  $8,20 + 7,34i$     d)  $0,993 - 0,120i$     e)  $1 + i$     f)  $-8$

5066: a)  $2,70 + 2,95i$     b)  $8,11 + 3,90i$     c)  $-6,73 - 0,96i$

5070: a)  $36 \cdot \left( \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right)$     b)  $22 \cdot \left( \cos(-1,27) + i \cdot \sin(-1,27) \right)$

c)  $14 \cdot \left( \cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \right)$     d)  $3 \cdot \left( \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{7}\right) \right)$

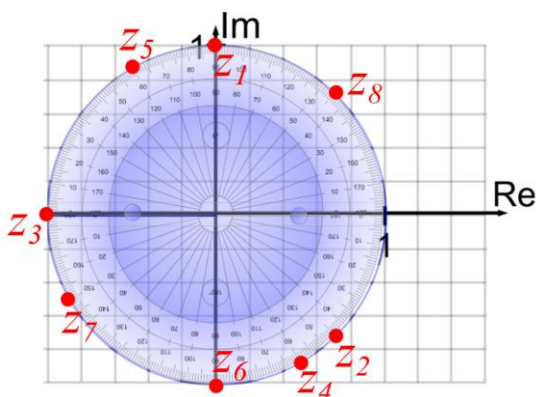
5072: a)  $32 \cdot \left( \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right)$     b)  $128 \cdot \left( \cos\left(-\frac{7\pi}{11}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{7\pi}{11}\right) \right)$     c)  $81 \cdot \left( \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right)$

d)  $\cos(-2,3) + i \cdot \sin(-2,3)$     e)  $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$     f)  $\cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi)$

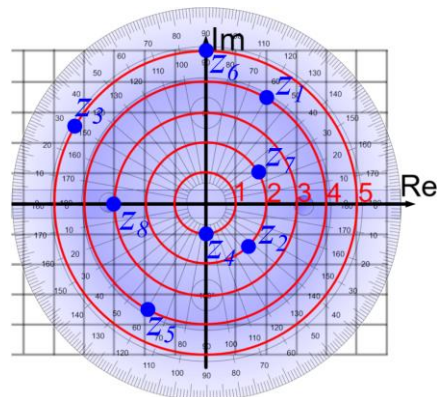
5080: a)  $e^{3+15i}$     b)  $e^{-2-i}$     c)  $e^{7+3i}$     d)  $e^{-14}$     e)  $e^{2i}$     f)  $e^{11}$

5100: a)  $4 \text{ og } \frac{\pi}{5}$     b)  $14 \text{ og } -\frac{2\pi}{3}$     c)  $2 \text{ og } 3,1$     d)  $\log \pi$     e)  $3 \text{ og } 1$     f)  $1 \text{ og } 0$     g)  $1 \text{ og } \pi$     h)  $1 \text{ og } \pi$

5101:



5103:



5102: a)  $48 \cdot e^{i \frac{9\pi}{20}}$     b)  $21 \cdot e^{i \frac{2\pi}{15}}$     c)  $26 \cdot e^{2,65i}$     d)  $16 \cdot e^{-1,52i}$     e)  $10 \cdot e^{-0,57i}$     f)  $7$     g)  $54 \cdot e^{\frac{i}{6}}$     h)  $9$

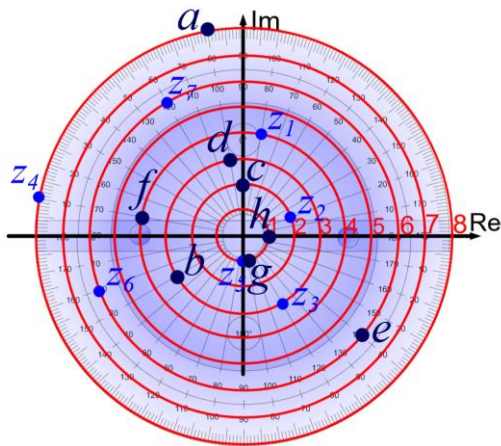


5104: a)  $\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$  b)  $3 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$  c)  $\sqrt{8} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$  d)  $e^{i\frac{\pi}{2}}$  e)  $\sqrt{50} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$  f)  $\sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}}$  g)  $e^{i\pi}$

5108:  $\bar{z} = r \cdot e^{-i\varphi}$

5150: a)  $4 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$  b)  $3 \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}}$  c)  $8 \cdot e^{2.19i}$  d)  $7 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$  e)  $\frac{5}{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{12}}$  f)  $7 \cdot e^{-1.88i}$  g)  $7 \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}$

5152:

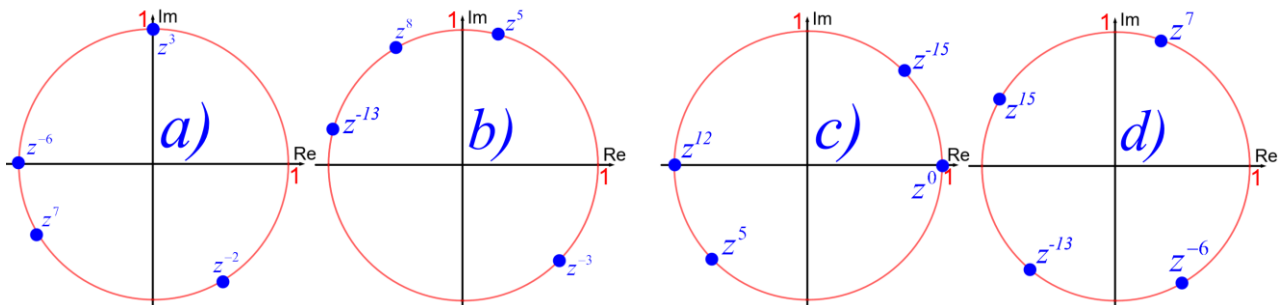


5154: a)  $52 \cdot e^{\frac{43\pi}{72}i}$  b)  $11 \cdot e^{\frac{7\pi}{18}i}$  c)  $18 \cdot e^{-2i}$  d)  $17 \cdot e^{\frac{53\pi}{77}i}$  e) 1

5200: a)  $32 \cdot e^{i\frac{5\pi}{11}}$  b)  $\frac{1}{81} \cdot e^{-i\frac{4\pi}{5}}$  c)  $10^6 \cdot e^{1.5i}$  d)  $\frac{1}{125} \cdot e^{0.42i}$  e)  $e^{i\frac{10\pi}{13}}$  f)  $e^{i\frac{16\pi}{19}}$  g)  $32 \cdot e^{i\frac{-\pi}{3}}$  h) 1

5201: a)  $81 \cdot e^{0.84i}$  b)  $\frac{1}{64} \cdot e^{-\frac{6\pi}{7}i}$  c)  $625 \cdot e^{-1.4i}$  d)  $\frac{1}{216} \cdot e^{0.51i}$  e)  $e^{-i\frac{\pi}{2}}$  f)  $e^{-i\frac{\pi}{4}}$

5202:



5204: a)  $e^{i\frac{\pi}{3}}$  b)  $e^{i\frac{\pi}{4}}$  c)  $e^{i\frac{2\pi}{11}}$  d)  $e^{i\frac{2\pi}{7}}$

5206: a)  $1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}$  b)  $1, -1, i, -i$  c)  $1, e^{i\frac{2\pi}{5}}, e^{-i\frac{2\pi}{5}}, e^{i\frac{4\pi}{5}}, e^{-i\frac{4\pi}{5}}$  d)  $1, -1, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

e)  $1, e^{i\frac{2\pi}{7}}, e^{-i\frac{2\pi}{7}}, e^{i\frac{4\pi}{7}}, e^{-i\frac{4\pi}{7}}, e^{i\frac{6\pi}{7}}, e^{-i\frac{6\pi}{7}}$  f)  $i, -i$  g)  $-1, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}$  h)  $e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{-i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

j)  $e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{-i\frac{3\pi}{4}}$  k)  $-i, e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{-i\frac{\pi}{6}}$  l)  $e^{i\frac{\pi}{8}}, e^{-i\frac{3\pi}{8}}, e^{i\frac{5\pi}{8}}, e^{-i\frac{7\pi}{8}}$  m)  $e^{-i\frac{\pi}{8}}, e^{i\frac{3\pi}{8}}, e^{-i\frac{5\pi}{8}}, e^{i\frac{7\pi}{8}}$

5250: a)  $2 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}, 2 \cdot e^{-i\frac{11\pi}{12}}, 2 \cdot e^{-i\frac{5\pi}{12}}$  b)  $2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}}, 2 \cdot e^{i\frac{7\pi}{30}}, 2 \cdot e^{i\frac{19\pi}{30}}, 2 \cdot e^{-i\frac{17\pi}{30}}, 2 \cdot e^{-i\frac{29\pi}{30}}$

c)  $\frac{1}{5} \cdot e^{-i\frac{\pi}{8}}, \frac{1}{5} \cdot e^{-i\frac{5\pi}{8}}, \frac{1}{5} \cdot e^{i\frac{3\pi}{8}}, \frac{1}{5} \cdot e^{i\frac{7\pi}{8}}$  d)  $2, -2, 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}, 2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}, 2 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}, 2 \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}}$  e)  $7i, -7i$

f)  $\frac{1}{3} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}, \frac{1}{3} \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}, \frac{1}{3} \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}$  g)  $2 \cdot e^{i\frac{\pi}{5}}, 2 \cdot e^{i\frac{3\pi}{5}}, -2, 2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{5}}, 2 \cdot e^{-i\frac{3\pi}{5}}$  h)  $e^{i\frac{\pi}{8}}, e^{-i\frac{3\pi}{8}}, e^{-i\frac{7\pi}{8}}, e^{i\frac{5\pi}{8}}$

j)  $e^{-i\frac{\pi}{5}}, e^{i\frac{4\pi}{5}}$  k)  $e^{-i\frac{\pi}{9}}, e^{-i\frac{7\pi}{9}}, e^{i\frac{5\pi}{9}}$  l)  $1, -1, i, -i, e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{-i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{-i\frac{3\pi}{4}}$  m)  $e^{i\frac{9\pi}{22}}, e^{-i\frac{13\pi}{22}}$

n)  $e^{-i\frac{\pi}{8}}, e^{-i\frac{5\pi}{8}}, e^{i\frac{3\pi}{8}}, e^{i\frac{7\pi}{8}}$  o)  $i$

5300: a)  $\pm 6$  b)  $\pm 12$  c)  $\pm 1$  d) 0 e)  $\pm 2i$  f)  $\pm 9i$  g)  $\pm 8i$  h)  $\pm 11i$  i)  $\pm i$

5302: a)  $e^{i\frac{\pi}{4}}$  og  $e^{-i\frac{3\pi}{4}}$  b)  $e^{-i\frac{\pi}{4}}$  og  $e^{i\frac{3\pi}{4}}$  c)  $2e^{i\frac{\pi}{4}}$  og  $2e^{-i\frac{3\pi}{4}}$  d)  $4e^{-i\frac{\pi}{4}}$  og  $4e^{i\frac{3\pi}{4}}$  e)  $8e^{i\frac{\pi}{4}}$  og  $8e^{-i\frac{3\pi}{4}}$   
 f)  $13e^{-i\frac{\pi}{4}}$  og  $13e^{i\frac{3\pi}{4}}$  g)  $22e^{i\frac{\pi}{4}}$  og  $22e^{-i\frac{3\pi}{4}}$  h)  $30e^{-i\frac{\pi}{4}}$  og  $30e^{i\frac{3\pi}{4}}$

5304: a)  $3 \cdot e^{i\frac{3\pi}{8}}$  og  $3 \cdot e^{-i\frac{5\pi}{8}}$  b)  $6 \cdot e^{i\frac{\pi}{5}}$  og  $6 \cdot e^{-i\frac{4\pi}{5}}$  c)  $\frac{1}{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{8}}$  og  $\frac{1}{2} \cdot e^{i\frac{7\pi}{8}}$  d)  $\frac{1}{9} \cdot e^{-i\frac{5\pi}{14}}$  og  $\frac{1}{9} \cdot e^{i\frac{9\pi}{14}}$   
 e)  $e^{i\frac{\pi}{14}}$  og  $e^{-i\frac{13\pi}{14}}$  f)  $14 \cdot e^{-i\frac{2\pi}{5}}$  og  $14 \cdot e^{i\frac{3\pi}{5}}$  g)  $15 \cdot e^{i\frac{\pi}{9}}$  og  $15 \cdot e^{-i\frac{8\pi}{9}}$

5306: a)  $1,097 + 0,455i$  og  $-1,097 - 0,455i$  b)  $2,279 - 0,439i$  og  $-2,279 + 0,439i$  c)  $1 + 2i$  og  $-1 - 2i$   
 d)  $2,834 - 0,176i$  og  $-2,834 + 0,176i$  e)  $3,369 + 0,594i$  og  $-3,369 - 0,594i$

5352: a)  $r < 1$  b)  $r > 1$  og  $-\pi < \varphi < 0$  c)  $r < 1$  og  $\varphi = 0$  d)  $r = 1$  og  $0 < \varphi \leq \pi$

5354: a) Ja b) Nej c) Nej d) Nej e) Symmetrisk omkring førsteaksen.

5402: a) Den gælder b) Den gælder c) Den gælder

5504:  $z^2 + 2az + a^2 + b^2$

5520: a)  $2 - 5i$  og  $-2 + 5i$  b)  $1 + 7i$  og  $-1 - 7i$  c)  $3 - 4i$  og  $-3 + 4i$

d)  $6 - 2i$  og  $-6 + 2i$  e)  $9 + 2i$  og  $-9 - 2i$  f)  $11 - 6i$  og  $-11 + 6i$