Vejledende eksempler på eksamensopgaver og eksamensopgaver i matematik 2010 STX A-niveau LØSNINGER (Rød bog)

1.001: C(3,-2) r = 5

Cirklens ligning er: $(x-3)^2+(y+2)^2=25$

Koordinatsystemets andenakse har x = 0, og det bruges til at finde skæringspunkterne:

$(-3)^2+(y+2)^2=25 \quad \Leftrightarrow \quad (y+2)^2=16 \quad \Leftrightarrow \quad y+2=\pm 4 \quad \Leftrightarrow \quad y=-6 \vee y=2$

Dvs. skæringspunkterne er $\underline{\underline{(0,-6)\ og\ (0,2)}}$

1.002: $l: \quad 2x-y+1=0 \quad P(4,3)$

Metode 1:

Først bestemmes hældningen for linjen *l*.

$2x-y+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=2x+1$

Dvs. hældningen er 2, og linjen vinkelret på *l* har dermed hældningen: $a\cdot 2=-1 \quad \Leftrightarrow \quad a=-\frac{1}{2}$

Og med punktet P bliver linjens ligning: $y-3=-\frac{1}{2}\cdot(x-4) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y=-\frac{1}{2}x+5}}$

Metode 2:

En normalvektor til linjen aflæses ud fra koefficienterne til *x* og *y* til: $\vec{n_l}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

Da den søgte linje står vinkelret på *l*, vil tværvektoren til ovenstående vektor være en normalvektor til den:

$\vec{n}=\hat{n_l}=\begin{pmatrix}-(-1)\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Da man nu både kender en normalvektor og et punkt (P), bliver linjens ligning:

$1\cdot(x-4)+2\cdot(y-3)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{2y+x-10=0}}$

(Det er naturligvis samme linje. Ligningerne er bare angivet på to forskellige former).

1.003: a) Man kan opskrive cirklens ligning, omskrive linjens ligning og derefter indsætte den i cirklens ligning for at finde evt. skæringspunkter og dermed også afgøre, om der er nogle.

Men det kan nemmere undersøges ved at undersøge afstanden fra linjen til cirklens centrum og sammenligne med cirklens radius:

$dist(l,C)=\frac{|2\cdot(-2)+1-6|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|-9|}{\sqrt{5}}=\frac{9}{\sqrt{5}}<\frac{10}{\sqrt{5}}<\frac{10}{\sqrt{4}}=\frac{10}{2}=5=r$

Da afstanden mellem linjen og centrum er mindre end radius, <u>skærer linjen cirklen.</u>

Hvis det ikke var så oplagt at sammenligne tallene 5 og $\frac{9}{\sqrt{5}}$, kan man sammenligne deres kvadrater 25 og $\frac{81}{5}$.

1.004: $A(4,2) \quad B(12,8) \quad C(9,14)$

(Der skal tegnes en skitse, men det gøres ikke her.)

Arealet af trekanten kan beregnes ud fra to vektorer, der udspænder denne, så først findes disse:

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}$

Så findes trekantens areal: $T=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}8 & 5\\6 & 12\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}|96-30|=\frac{1}{2}\cdot 66=\underline{\underline{33}}$

1.005: $C: x^2-4x+y^2+2y=11 \qquad l: y=x+1$

For at finde skæringspunkter indsættes linjens ligning i cirklens:

$x^2-4x+(x+1)^2+2\cdot(x+1)=11 \quad \Leftrightarrow$

$x^2-4x+x^2+1+2x+2x+2-11=0 \quad \Leftrightarrow$

$2x^2-8=0 \quad \Leftrightarrow$

$2x^2=8 \quad \Leftrightarrow$

$x^2=4 \quad \Leftrightarrow$

$x=\pm 2$

Disse værdier indsættes i linjens ligning (fordi det er nemmest, og fordi cirklens ligning ville give to muligheder for hver *x*-værdi, hvoraf kun den ene kunne bruges):

$x=-2: \quad y=-2+1=-1$

$x=2: \quad y=2+1=3$

Hermed er koordinatsættene til skæringspunkterne $\underline{\underline{(-2;-1)\ \&\ (2;3)}}$

1.006: $C(3,-2) \quad P(0,2)$

En normalvektor for den søgte tangent er: $\vec{n}=\overrightarrow{PC}=\begin{pmatrix}3-0\\-2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$

Da den går gennem punktet *P*, bliver dens ligning:

$3(x-0)-4(y-2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{3x-4y+8=0}}$

1.007: Cirklens ligning omskrives, så centrum og radius kan aflæses:

$x^2+8x+y^2-4y=10 \quad \Leftrightarrow$

$(x+4)^2+(y-2)^2=10+16+4=30$

Hermed er: $\underline{\underline{C(-4;2) \quad r=\sqrt{30}}}$

1.008: Opgaven løses på to forskellige måder:

1. metode (substitution): x isoleres i linjens ligning og indsættes cirklens:

$x=8-2y$ indsættes:

$(8-2y)^2-6\cdot(8-2y)+y^2+4y-3=0 \quad \Leftrightarrow$

$64+4y^2-32y-48+12y+y^2+4y-3=0 \quad \Leftrightarrow$

$5y^2-16y+13=0$

Dette er en andengradsligning, hvor diskriminanten bestemmes:

$d=(-16)^2-4\cdot 5\cdot 13=256-260=-4<0$

Der er altså ingen løsninger til ligningen, dvs. der er ingen punkter (x,y), der ligger på både cirklen og linjen, og altså kan linjen heller ikke være tangent til cirklen.

Så $\underline{\underline{l \text{ er ikke tangent til } C}}$

2. metode (afstandsformlen punkt-linje): Først bestemmes cirklens centrum og radius.

$x^2-6x+y^2+4y-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)^2+(y+2)^2=3+9+4=16$

$C(3;-2) \quad r=4$

Afstanden fra cirklens centrum til linjen bestemmes:

$$dist(C,l)=\frac{|3+2\cdot(-2)-8|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|-9|}{\sqrt{5}}=\frac{9}{\sqrt{5}}\neq 4$$

Da afstanden fra centrum til linjen ikke svarer til radius, er $\underline{\underline{l \text{ ikke tangent til } C}}$.

1.009: $(x+2)^2+(y-2)^2=8$

Koordinatsystemets førsteakse er karakteriseret ved, at y = 0, så cirklens skæringspunkters førstekoordinater bestemmes ved:

$(x+2)^2+(0-2)^2=8 \quad \Leftrightarrow$

$x^2+4x+4+4=8 \quad \Leftrightarrow$

$x^2+4x=0 \quad \Leftrightarrow$

$x\cdot(x+4)=0 \quad \Leftrightarrow$

$x=0 \vee x=-4$

Dvs. koordinatsættene til skæringspunkterne er $\underline{(-4,0) \text{ og } (0,0)}$

1.010: $P(1,-5) \quad \vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

En ligning for linjen gennem P og med den angivne vektor som normalvektor bestemmes ved at indsætte i:

$a\cdot(x-x_0)+b\cdot(y-y_0)=0$

$3\cdot(x-1)-2\cdot(y-(-5))=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{3x-2y=13}}$

Den opgivne punkt vælges som udgangspunkt for parameterfremstillingen, og med den angivne vektor som retningsvektor får man:

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} \quad ; \quad t\in R}}$$

1.011: $\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} \quad \vec{c_t}=\begin{pmatrix}2t\\t-3\end{pmatrix} \quad ; \quad t\in R$

Først findes koordinatsættet til den anden vektor: $\vec{c_2}=\begin{pmatrix}2\cdot 2\\2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$

Diagonalerne repræsenteret ved vektorer er $\vec{a}+\vec{c_2}$ og $\vec{a}-\vec{c_2}$ (eller $\vec{c_2}-\vec{a}$).

$$\vec{a}+\vec{c_2}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\1\end{pmatrix} \qquad \left|\vec{a}+\vec{c_2}\right|=\sqrt{9^2+1^2}=\sqrt{82}$$

$$\vec{a}-\vec{c_2}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \qquad \left|\vec{a}-\vec{c_2}\right|=\sqrt{1^2+3^2}=\underline{\underline{\sqrt{10}}}$$

Den anden diagonal var altså den korteste.

1.012: Udtrykket reduceres ved i første led at benytte den første kvadratsætning og i andet led gange ind i parentesen:

$$3(p+q)^2-6p(q-p)=3\cdot\left(p^2+q^2+2pq\right)-6pq+6p^2=$$

$$3p^2+3q^2+6pq-6pq+6p^2=9p^2+3q^2=\underline{\underline{3\left(3p^2+q^2\right)}}$$

1.013: Første og tredje led udregnes ved anvendelse af kvadratsætninger, mens der ganges ind i en parentes i første led:

a) $\quad (2a+3b)^2-3b(4a+2b)-(2a+b)(2a-b)=$

$4a^2+9b^2+12ab-12ab-6b^2-\left(4a^2-b^2\right)=\underline{\underline{4b^2}}$

1.014: Tælleren genkendes som højresiden i en kvadratsætning, og man får så:

$$\frac{a^2-2ab+b^2}{2(a-b)}=\frac{(a-b)\cdot(a-b)}{2\cdot(a-b)}=\underline{\underline{\frac{a-b}{2}}}$$

1.015: Da man kender hældningskoefficienten, -2, for den rette linje og et punkt, P(3,0), den går igennem, kan en ligning for linjen bestemmes ved:

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

$$y - 0 = -2 \cdot (x - 3) \quad \Leftrightarrow \quad y = -2x + 6$$

Der spørges efter en forskrift og ikke en ligning, så svaret er $\underline{\underline{f(x) = -2x + 6}}$

1.016: Det er opgivet, at der er en lineær sammenhæng mellem y og x^{-1}.

Tabellen giver punkterne (1,-1) og (3,-3).

Den lineære sammenhæng kan generelt skrives: $y = a \cdot \frac{1}{x} + b$

Ved indsættelse af punkternes koordinater fås ligningerne:

$$\left.\begin{aligned} -1 &= a \cdot \frac{1}{1} + b \\ -3 &= a \cdot \frac{1}{3} + b \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} -1 &= a + b \\ -3 &= \frac{a}{3} + b \end{aligned}\right\} \Rightarrow -1 - (-3) = a - \frac{a}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 2 = \frac{2a}{3} \quad \Leftrightarrow \quad a = 3$$

Ved indsættelse i den øverste af ligningerne findes b-værdien: $-1 = 3 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = -4$

Dvs. man har: $\underline{\underline{y = \frac{3}{x} - 4}}$

1.017: $f(x) = a \cdot x + b$

a er hældningskoefficienten for grafen (der er en ret linje) og b er skæringen med y-aksen.

Blå graf (f_1):

Funktionen er voksende, så hældningskoefficienten er positiv: $\underline{\underline{a > 0}}$

Grafen skærer y-aksen på den negative del (under x-aksen), så $\underline{\underline{b < 0}}$

Rød graf (f_2):

Funktionen er aftagende, så hældningskoefficienten er negativ: $\underline{\underline{a < 0}}$

Grafen skærer y-aksen på den positive del (over x-aksen), så $\underline{\underline{b > 0}}$

Grøn graf (f_3):

Funktionen er konstant: $\underline{\underline{a = 0}}$

Grafen skærer y-aksen på den positive del (over x-aksen), så $\underline{\underline{b > 0}}$

1.018: $f(x) = 10 \cdot x + 200$

f(x) er den samlede vægt af dåse og kugler, mens x er antallet af kugler i dåsen.
Når x = 0, dvs. når der ingen kugler er i dåsen, får man funktionsværdien 200 ($f(0) = 200$), dvs. at tallet 200 fortæller, at dåsen vejer 200 (enheden er ikke oplyst).
Hældningen er 10, dvs. at hver gang x vokser med 1 (dvs. når der lægges 1 kugle mere i dåsen), så vokser funktionsværdien med 10. Dette fortæller, at hver kugle vejer 10 (igen er enheden ukendt).

1.019: $f(x) = 10 \cdot x + 200$ x angiver antallet af kugler i en dåse.
f(x) angiver den samlede vægt af dåse og kugler.

Dåsens vægt svarer til den samlede vægt, når der ikke er nogen kugler, dvs. x = 0.
Da f(0) = 200, har man altså, at dåsen vejer 200 (der er ikke oplyst en enhed)

Når x øges med 1, øges f(x) med 10 (svarende til hældningen). Derfor vejer en kugle 10

1.020: Man kan genkende andengradspolynomiet som kvadratet på (x-3), og hermed har man fundet både løsning og faktorisering. Men hvis man ikke genkender polynomiet, kan man løse ligningen med diskriminantmetoden:

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$d = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$$

Dvs. der er én løsning: $x = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = \underline{\underline{3}}$

Denne løsning fungerer som dobbeltrod i det tilsvarende andengradspolynomium, så man har:

$$x^2 - 6x + 9 = \underline{\underline{(x-3)^2}}$$

1.021: a) $\frac{1}{2}$ indsættes i ligningen for at se, om det giver et sandt udsagn:

$$8\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$8 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$1 + \frac{1}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} = 0$$

Da dette er et falsk udsagn, er $\frac{1}{2}$ ikke løsning til ligningen.

1.022: a) $p(x) = x^3 + kx^2 - 3x + 6$

-2 er rod i polynomiet, når *p(-2) = 0.*
Man får altså ligningen:

$$0 = (-2)^3 + k \cdot (-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 6 \quad \Leftrightarrow$$

$$0 = -8 + 4k + 6 + 6 \quad \Leftrightarrow$$

$$4k = -4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{k = -1}}$$

1.023: Venstresiden er et produkt, og da højresiden er nul, kan nulreglen benyttes:

$$(x-1) \cdot (x+3)^7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1) = 0 \vee (x+3)^7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 1 \vee x = -3}}$$

1.024: a) $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10 - 0}{2 - (-3)} = \frac{10}{5} = 2$

Indsættes i $y = ax + b$ for at finde *b*-værdien: $0 = 2 \cdot (-3) + b \Leftrightarrow b = 6$

Hermed er forskriften $\underline{\underline{f(x) = 2x + 6}}$ (eller $y = 2x + 6$)

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow$$

$$2x + 6 = 3 \Leftrightarrow$$

$$2x = -3 \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{x = -\frac{3}{2}}}$$

1.025: a) $f(x)=x^2-x-2$

Der er lagt op til, at man først skal finde rødderne og derefter faktorisere, men det kan gøres hurtigere i omvendt rækkefølge, hvis man kan finde to tal, hvis sum er -1, og hvis produkt er -2. Det gælder for -2 og 1, så man har:

$f(x)=x^2-x-2=\underline{\underline{(x-2)\cdot(x+1)}}$

Og så kan rødderne aflæses med brug af nulreglen:

$f(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)\cdot(x+1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x-2=0 \vee x+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=2 \vee x=-1}}$

Og nu den anden metode:

Først findes rødderne ved hjælp af diskrimanten:

$d=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)=1+8=9>0$ dvs. 2 rødder:

$$r_1=\frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\cdot1}=\frac{1+3}{2}=\underline{\underline{2}}$$

$$r_2=\frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\cdot1}=\frac{1-3}{2}=\underline{\underline{-1}}$$

Den generelle faktorisering af et polynomium er: $f(x)=a\cdot(x-r_1)\cdot(x-r_2)$.

Dvs. man har: $f(x)=1\cdot(x-2)\cdot(x-(-1))=\underline{\underline{(x-2)\cdot(x+1)}}$

1.026: $f(x)=-2x^2+6x+1$

Først beregnes diskriminanten, og derefter sættes ind i toppunktsformlen:

$d=6^2-4\cdot(-2)\cdot1=36+8=44$

$$T\left(\frac{-b}{2a};\frac{-d}{4a}\right)=T\left(\frac{-6}{2\cdot(-2)};\frac{-44}{4\cdot(-2)}\right)=\underline{\underline{T\left(\frac{3}{2};\frac{11}{2}\right)}}$$

1.027: $kx^2+kx-1=0 \quad ; \quad k\neq0$

Hvis denne 2. gradsligning skal have netop én løsning, skal diskriminanten være 0:

$d=k^2-4\cdot k\cdot(-1)=k^2+4k=0$

Da $k\neq0$ kan ligningen divideres med *k*:

$k^2+4k=0 \quad \Leftrightarrow \quad k+4=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{k=-4}}$

1.028: $f(x)=4x^2+3x-2$

c-værdien angiver skæringen med 2. aksen, så man har altså, at parablen skærer 2. aksen i (0,-2).

a-værdien 4 fortæller, at parablens ben vender opad, samt at de er stejlere end benene på $g(x)=x^2$.

Da a-værdien og b-værdien (+3) har samme fortegn, vil parablens toppunkt ligge til venstre for 2.aksen (jævnfør toppunktsformlen).

1.029: a) $y=x^2-x-2$

Diskriminanten skal bruges, så den findes først:

$d=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)=1+8=9$

Parablens toppunkt: $T\left(\frac{-b}{2a};\frac{-d}{4a}\right)=T\left(\frac{-(-1)}{2\cdot1};\frac{-9}{4\cdot1}\right)=\underline{\underline{T\left(\frac{1}{2};-\frac{9}{4}\right)}}$

Parablen har positiv a-værdi, så den har benene opad.

Så kan skitsen tegnes ud fra toppunktet. Grafen er en parallelforskydning af grafen for $y=x^2$.

1.030: a) Polynomiet med grafen F:

Benene vender opad, så $\underline{\underline{a > 0}}$

Der er 2 skæringer med x-aksen, så $\underline{\underline{d > 0}}$

Polynomiet med grafen G:

Benene vender opad, så $\underline{\underline{a > 0}}$

Der er ingen skæringer med x-aksen, så $\underline{\underline{d < 0}}$

Polynomiet med grafen H:

Benene vender nedad, så $\underline{\underline{a < 0}}$

Der er 2 skæringer med x-aksen, så $\underline{\underline{d > 0}}$

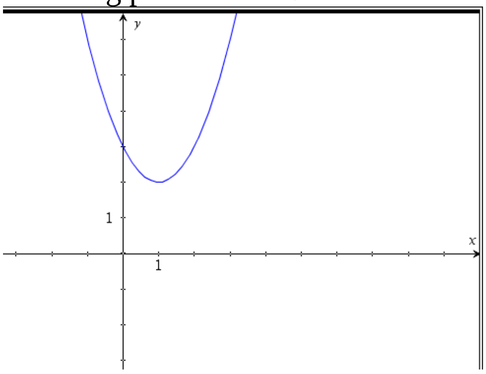
1.031: $f(x) = a \cdot x^2 - 2x + 3$, hvor a er positiv.

Parablen skal skære y-aksen i 3, <u>dvs. grafen skal gå gennem punktet (0,3).</u>

Førstekoordinaten for parablens toppunkt er $\frac{-b}{2a}$. b er negativ, mens a er positiv, så brøken bliver et positivt tal, og dermed ligger <u>parablens toppunkt til højre for y-aksen.</u>

$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-2)^2 - 4 \cdot a \cdot 3 = 4 - 12a$, og da a er positiv, kan diskriminanten både blive negativ, nul eller positiv. Man kan altså <u>ikke sige noget om toppunktets placering i forhold til x-aksen.</u>

En mulig parabel er så:



1.032: Den generelle forskrift for et 2. gradspolynomium er: $p(x) = ax^2 + bx + c$.

Oplysningerne om, at rødderne er 5 og 9, samt at punktet (7,4) ligger på grafen, skal bruges til at bestemme en forskrift.

Da rødderne er 5 og 9 har man ifølge faktoriseringsreglen, at:

$$p(x) = a(x-5)(x-9)$$

Da punktet (7,4) ligger på grafen, har man:

$$4 = a(7-5)(7-9) \quad \Leftrightarrow \quad 4 = a \cdot 2 \cdot (-2) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a = -1}$$

Dermed er forskriften: $\underline{\underline{p(x) = -(x-5)(x-9)}}$

Det kan evt. også skrives om til formen $p(x) = ax^2 + bx + c$:

$$p(x) = -(x^2 - 9x - 5x + 45) = \underline{\underline{-x^2 + 14x - 45}}$$

1.033: Højden af kassen betegnes med *h*. Da rumfanget V er 125, har man:

$$V = h \cdot b \cdot l$$

$$125 = h \cdot x \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{125}{x^2}$$

Kassen består af 6 sider, og det samlede overfladeareal O udtrykt ved *x* og *h* er:

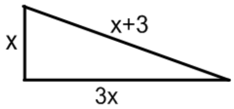
$$O = 2 \cdot x \cdot x + 4 \cdot h \cdot x = 2x^2 + 4hx$$

Da man kender *h* udtrykt ved *x*, kan man bestemme overfladearealet som funktion af *x*:

$$O(x) = 2x^2 + 4 \cdot \frac{125}{x^2} \cdot x = \underline{\underline{2x^2 + \frac{500}{x}}}$$

1.034: Længden af den korteste katete betegnes med x.

Da den længste katete er 3 gange så lang som den korteste, har den længden 3x.
Da hypotenusen er 3 enheder længere end den korteste katete har den længden x+3.
Man har altså følgende retvinklede trekant:



Da trekanten er retvinklet, kan man benytte Pythagoras' læresætning:

$$\left(3+x\right)^2 = x^2+\left(3x\right)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$9+x^2+6x = x^2+9x^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$9x^2-6x-9=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2-\frac{2}{3}x-1=0$$

Dette er en andengradsligning, der kan løses ved diskriminantmetoden:

$d=\left(-\frac{2}{3}\right)^2-4\cdot1\cdot(-1)=\frac{4}{9}+4=\frac{4}{9}+\frac{36}{9}=\frac{40}{9}>0$, dvs. der er to løsninger til ligningen.

$$x=\frac{-\left(-\frac{2}{3}\right)\pm\sqrt{\frac{40}{9}}}{2\cdot1}=\frac{\frac{2}{3}\pm\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{9}}}{2}=\frac{\frac{2}{3}\pm\frac{\sqrt{40}}{3}}{2}=\frac{2}{3\cdot2}\pm\frac{\sqrt{40}}{3\cdot2}=\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{40}}{3\cdot\sqrt{4}}=\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{10}}{3}$$

Da kvadratroden af 10 er større end 1, vil den ene løsning blive negativ, hvilket ikke er muligt for længden af en side, så længden af den korteste katete er:

$$\underline{\underline{x=\frac{1+\sqrt{10}}{3}}}$$

1.035: Kvadratet på *d* skrives med matematisk notation: d^2

Hvis to størrelser er 'omvendt proportionale', giver produktet af dem en konstant, dvs:

$N\cdot d^2=k$, hvor *k* er en konstant.

Da *N* skal udtrykkes ved *d* har man altså: $\underline{\underline{N=\frac{k}{d^2}}}$

1.036: En aftagende eksponentiel udvikling kan udtrykkes ved halveringskonstanten $X_{½}$ med:

$f(x)=b\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{X_{½}}}$, hvor *b* er begyndelsesværdien, der i dette tilfælde svarer til trykket ved jordoverfladen. Man har altså regneudtrykket:

$$P=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h}{5}}=\underline{\underline{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h}{5}}}}$$

1.037: $P=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h}{5}}$

Da voluminet er omvendt proportionalt med trykket, har man: $V\cdot P=k$
Konstanten kan bestemmes ud fra oplysningerne om at, når *h=0*, er *V=2*.
Først bestemmes *P:*

$$P=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{0}{5}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=1$$

Dvs. at $k=2\cdot1=2$

Og hermed bliver voluminet som funktion af højden: $V=\frac{2}{P}=\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h}{5}}}=\frac{2}{2^{-\frac{h}{5}}}=2^{1+\frac{h}{5}}=\underline{\underline{2^{\frac{h+5}{5}}}}$

1.038: Det er funktionen C, der har den største fordoblingskonstant, da den vokser langsommere end de to andre funktioner. Man kan også sige, at da b-værdien er ens for de tre funktioner, må a-værdien for C være mindre end for de to andre funktioner (da grafen i første kvadrant ligger under de to andre grafer). Og da $T_2 = \frac{\log 2}{\log a}$, vil en mindre a-værdi give en større T_2-værdi.

1.039: f_1 ses at være en voksende funktion, da større x-værdier fører til større y-værdier. Derfor gælder for f_1, at a>1.
f_2 ses at være en aftagende funktion, da større x-værdier fører til mindre y-værdier. Derfor gælder for f_2, at 0<a<1.
f_3 ses at være en voksende funktion, da større x-værdier fører til større y-værdier. Derfor gælder for f_3, at a>1.
Desuden ses det, at da f_1 ligger under f_3 i anden kvadrant og skærer den i første kvadrant, må dens a-værdi være større end f_3's.

1.040: $f(2)=1 \quad f(4)=9 \quad f$ er en eksponentielt voksende funktion.
Koordinaterne for de to punkter indsættes i forskriften for en eksponentiel udvikling:

$$\left.\begin{array}{l}1=b\cdot a^2\\ 9=b\cdot a^4\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{9}{1}=\frac{b\cdot a^4}{b\cdot a^2}=a^2 \quad \Leftrightarrow a^2=9$$

Da a er positiv, når man arbejder med eksponentielle udviklinger, har man altså: $a = 3$.
Dette indsættes i den øverste ligning:

$$1=b\cdot 3^2 \quad \Leftrightarrow \quad b=\frac{1}{9}$$

Altså er forskriften for *f:*

$$\underline{\underline{f(x)=\frac{1}{9}\cdot 3^x}}$$

1.041: $T_2 = 5 \quad f(3) = 4{,}5$
Fordoblingskonstanten er den værdi, der skal lægges til en valgt x-værdi for at få fordoblet funktionsværdien.
Dermed er: $f(8) = f(3+5) = 2\cdot f(3) = 2\cdot 4{,}5 = \underline{\underline{9}}$

1.042: Det er oplyst, at *f* er en eksponentiel udvikling med halveringskonstanten 10.
Det er desuden oplyst, at f(12) = 30.
Halveringskonstanten er det tal der lagt til x-værdien halverer y-værdien. Afstanden mellem x-værdierne 2 og 12 er netop 10, dvs. y-værdien er halveret, når x-værdien er øget fra 2 til 12. Altså er:
$\underline{\underline{f(2)=60}}$

1.043: Q(3,20) og P(6,40).
Det bemærkes, at y-værdien for P er dobbelt så stor som y-værdien for Q.
Dermed må forskellen mellem x-værdierne være fordoblingskonstanten: $T_2 = 6-3 = \underline{\underline{3}}$

1.044: $D(T) = 15{,}71\cdot 0{,}8913^T$
D er holdbarheden målt i døgn og T er fryserens temperatur målt i °C.

Forskriften fortæller, at holdbarheden er en eksponentielt aftagende funktion af temperaturen.
Når temperaturen er 0°C er holdbarheden 15,71døgn, og vækstraten er r = a-1 = 0,8913-1 = -0,1087 = -10,87%, dvs. at for hver grad temperaturen øges, falder holdbarheden med 10,87%.

1.045: $f(x) = x^3 + e^x$. Den afledte funktion skal bestemmes.
Der differentieres ledvist:
$f'(x) = 3\cdot x^{3-1} + e^x = \underline{\underline{3x^2 + e^x}}$

1.046: $f(x) = e^x + 3x$. Differentialkvotienten i 0 skal bestemmes.

Først differentieres ledvist og derefter indsættes det opgivne sted ($x = 0$).

$$f'(x) = e^x + 3$$

$$f'(0) = e^0 + 3 = 1 + 3 = \underline{\underline{4}}$$

1.047: $f(x) = \frac{3}{x} + x^5$. Den afledte funktion skal bestemmes.

Udtrykket omskrives og der differentieres ledvist:

$$f(x) = \frac{3}{x} + x^5 = 3x^{-1} + x^5$$

$$f'(x) = -3 \cdot x^{-1-1} + 5x^{5-1} = -3 \cdot x^{-2} + 5x^4 = \underline{\underline{-\frac{3}{x^2} + 5x^4}}$$

1.048: $f(x) = \sqrt{x} + 3x$. Differentialkvotienten i 9 skal bestemmes.

Først differentieres ledvist og derefter indsættes det opgivne sted ($x = 9$).

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3$$

$$f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} + 3 = \frac{1}{2 \cdot 3} + 3 = \frac{1}{6} + \frac{18}{6} = \underline{\underline{\frac{19}{6}}}$$

1.049: a) $f(x) = 7\ln x - 2x^2$

Tangentens ligning er: $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

For at bestemme tangentens ligning skal hældningen og funktionsværdien i røringspunktet (punktets 2. koordinat, dvs. f(1)) findes:

$$f'(x) = 7 \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot 2x = \frac{7}{x} - 4x$$

Røringspunktets andenkoordinat: $f(1) = 7\ln 1 - 2 \cdot 1^2 = 0 - 2 = -2$

Tangentens hældning: $f'(1) = \frac{7}{1} - 4 \cdot 1 = 7 - 4 = 3$

Hermed bliver tangentens ligning:

$$y - (-2) = 3 \cdot (x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = 3x - 5}}$$

1.050: $f(x) = 4\sqrt{x} - 1 \quad ; \quad P(4, f(4))$

Tangentens ligning skal bestemmes i punktet P, så man har brug for at kende P's koordinatsæt samt differentialkvotienten i 4 (tangenthældningen).

$$f(4) = 4 \cdot \sqrt{4} - 1 = 4 \cdot 2 - 1 = 7$$

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$f'(4) = \frac{2}{\sqrt{4}} = \frac{2}{2} = 1$$

Hermed bliver tangentens ligning:

$$y - 7 = 1 \cdot (x - 4) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = x + 3}}$$

1.051: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x$

Metode 1: Løsning med fortegnsskema.

a) For at bestemme monotoniforholdene findes først den afledede funktions nulpunkter:

$f'(x) = x^2 - 4x - 5$

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - 4x - 5$

$d = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$$

Fortegnet for den afledede funktion skal findes i de intervaller, der afgrænses af de fundne nulpunkter:

$f'(-2) = (-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 5 = 4 + 8 - 5 = 7 > 0$

$f'(0) = -5 < 0$

$f'(10) = 10^2 - 4 \cdot 10 - 5 = 100 - 40 - 5 = 55 > 0$

Hermed bliver fortegnsskemaet for den afledede funktion:

x		-1		5	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	↗		↘		↗

Man har altså:

$\underline{\underline{f(x) \text{ er voksende i intervallerne }]-\infty;-1] \text{ og } [5;\infty[}}$

$\underline{\underline{f(x) \text{ er aftagende i intervallet } [-1;5]}}$

Metode 2: Løsning med anden afledede.

$f'(x) = x^2 - 4x - 5$

$f''(x) = 2x - 4$

Først bestemmes de steder, hvor den afledede funktion har nulpunkter:

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - 4x - 5 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = (x-5)(x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \quad \vee \quad x = 5$

Og så bestemmes den anden afledede funktions værdier de pågældende steder:

$f''(-1) = 2 \cdot (-1) - 4 = -6 < 0$ Så her er lokalt maksimum.

$f''(5) = 2 \cdot 5 - 4 = 6 > 0$ Så her er lokalt minimum.

Hermed gælder:

$\underline{\underline{f(x) \text{ er voksende i intervallerne }]-\infty;-1] \text{ og } [5;\infty[}}$

$\underline{\underline{f(x) \text{ er aftagende i intervallet } [-1;5]}}$

1.052: **Metode 1: Løsning med fortegnsskema.**

a) $f'(x) = x^2 - 12x$

For at bestemme funktionens monotoniintervaller findes først den afledede funktions nulpunkter:

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - 12x \quad \Leftrightarrow \quad x(x-12) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = 12$

Fortegnet for den afledede funktion skal findes i de intervaller, der afgrænses af de fundne nulpunkter:

$f'(-1) = (-1)^2 - 12 \cdot (-1) = 1 + 12 = 13 > 0$

$f'(1) = 1^2 - 12 \cdot 1 = -11 < 0$

$f'(20) = 20^2 - 12 \cdot 20 = 400 - 240 = 160 > 0$

Hermed bliver fortegnsskemaet for den afledede funktion:

x		0		12	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

Man har altså:

$\underline{\underline{f(x) \text{ er voksende i intervallerne }]-\infty;0] \text{ og } [12;\infty[}}$

$\underline{\underline{f(x) \text{ er aftagende i intervallet } [0;12]}}$

Metode 2: Løsning med anden afledede.

a) $f'(x) = x^2 - 12x$

For at bestemme funktionens monotoniintervaller findes først den afledede funktions nulpunkter:

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - 12x \quad \Leftrightarrow \quad x(x-12) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = 12$

Så bestemmes den anden afledede af f:

$f''(x) = 2x - 12$

Den anden afledededes værdier bestemmes de steder, hvor den afledede funktion har nulpunkter:

$f''(0) = 2 \cdot 0 - 12 = -12 < 0$ Dvs. f har lokalt maksimum i stedet x = 0

$f''(12) = 2 \cdot 12 - 12 = 12 > 0$ Dvs. f har lokalt minimum i stedet x = 12.

Hermed må der gælde:

$\underline{\underline{f(x) \text{ er voksende i intervallerne }]-\infty;0] \text{ og } [12;\infty[}}$

$\underline{\underline{f(x) \text{ er aftagende i intervallet } [0;12]}}$

1.053: $f(x) = -2x^3 + x^2 + 4x - 3$

For at finde hældningen for tangenten til grafen for *f* i punktet bestemmes først den afledede funktion og derudfra differentialkvotienten det pågældende sted:

$f'(x) = -6x^2 + 2x + 4$

$f'(0) = 4$

Hældningen for linjen *m* findes ved at omskrive ligningen: $4x - y + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 4x + 2$

Som det ses, er hældningen 4, og dermed er tangenten enten parallel med linjen eller sammenfaldende med denne.

Så y-værdierne i stedet x=0 findes:

$f(0) = -3$

$x = 0 : y = 4 \cdot 0 + 2 = 2$

Tangenten og linjen er altså ikke sammenfaldende og $\underline{\underline{\text{må være parallelle}}}$.

1.054: $Dm(f) =]2;10[\quad Vm(f) = [-3;8]$

x	2		3		5		8		10
$f'(x)$	i.d	-	0	+	0	+	0	-	i.d
$f(x)$	i.d	↘		↗		↗		↘	i.d

$f(x)$ *er aftagende i intervallerne* $]2;3]$ *og* $[8;10[$

$f(x)$ *er voksende i intervallet* $[3;8]$

Der er lokalt minimum for $x = 3$.
Der er vandret vendetangent i x = 5.
Der er lokalt maksimum i x = 8.
Ifølge værdimængden har funktionen et globalt minimum på -3, og det kan ifølge fortegnsskemaet kun være værdien for x = 3, da funktionen ikke er defineret i x=10 og derfor ikke kunne have et globalt minimum i dette punkt. Dvs. f(3) = -3
Det lokale maksimum må også være globalt maksimum, dvs. f(8) = 8
En graf skal altså opfylde ovenstående kriterier.

1.055: $f(x) = x^3 + bx^2 + 3x + 4$

a) *f* er en voksende funktion netop hvis den afledede funktion er positiv i hele definitionsmængden evt. 0 i enkelte punkter. Derfor differentieres først:

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + 3$$

Grafen for den afledede funktion er en parabel med benene opad (a = 3 > 0), så funktionen vil opfylde ovenstående, hvis diskriminanten for den tilsvarende 2. gradsligning ikke er positiv (hvis diskriminanten er nul, vil den afledede funktion have et enkelt nulpunkt), da parablen så på intet tidspunkt kommer under x-aksen – svarende til negative funktionsværdier:

$$d = (2b)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 4b^2 - 36$$

$$d \leq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$4b^2 - 36 \leq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$4b^2 \leq 36 \quad \Leftrightarrow$$

$$b^2 \leq 9 \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{-3 \leq b \leq 3}}$$

1.056: Det er væsentligt at bemærke, at det er grafen for den afledede funktion *f'* og IKKE grafen for funktionen *f* , der er afbildet.
Man kan aflæse nulpunkterne for den afledede funktion til:

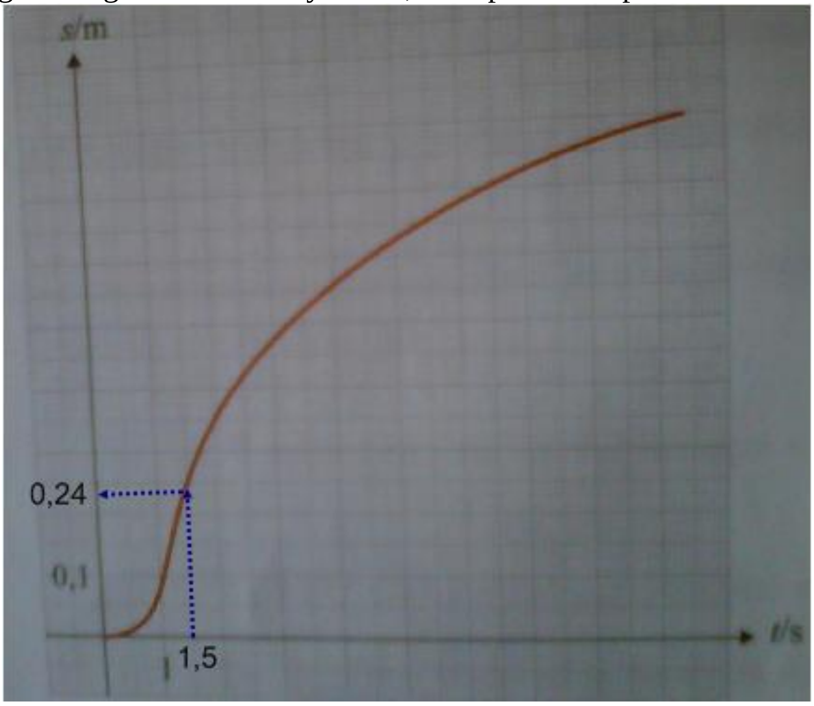
$$x = -3 \vee x = -1 \vee x = 4$$

Disse tre nulpunkter inddeler x-aksen i fire intervaller, og i disse intervaller kan man se bestemme fortegnet for den afledede funktion ved at se, om grafen ligger over eller under x-aksen i det pågældende interval. Dette bruges til at lave fortegnsskemaet:

x		-3		-1		4	
f'(x)	-	0	+	0	-	0	+
f(x)	↘		↗		↘		↗

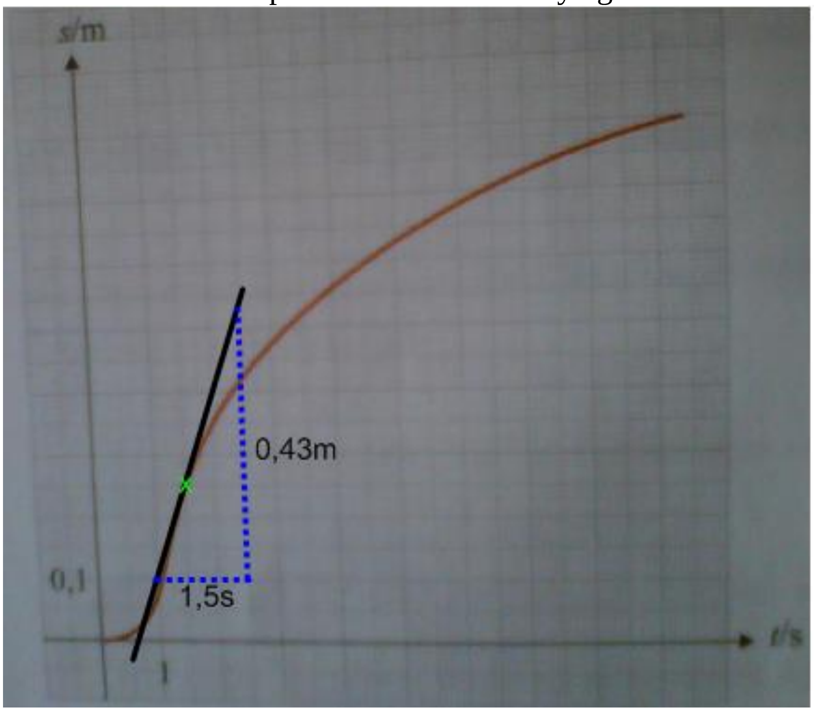
Man har altså:
f er aftagende i]-∞;-3] og i [-1;4]
f er voksende i [-3;-1] og i [4;∞[
f har lokalt minimum i x = -3 og i x = 4.
f har lokalt maksimum i x = -1

1.057: Partiklens position til tidspunktet t = 1,5 (1,5 sekunder) bestemmes ved at gå op fra x-aksen ved 1,5 til grafen og vandret ud til y-aksen, hvor partiklens position kan aflæses:



Dvs. at positionen er y = 0,24m

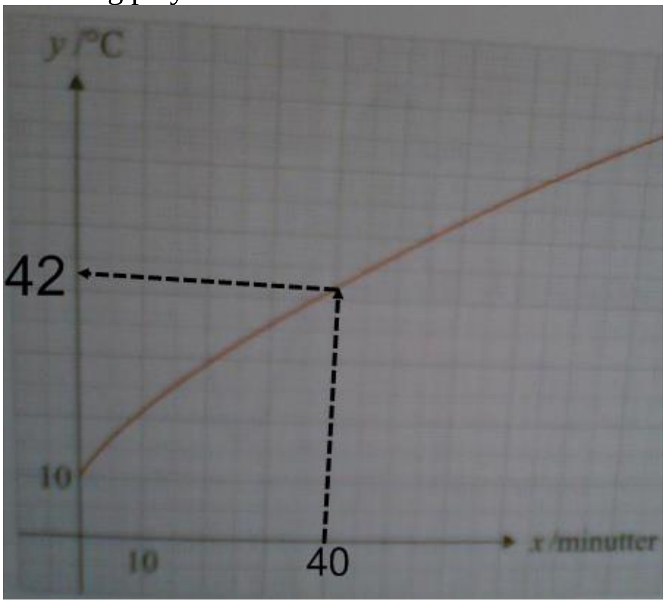
Partiklens hastighed det pågældende tidspunkt svarer til hældningen for den tangent til grafen, der rører grafen til tidspunktet t = 1,5s.
Derfor tegnes efter bedste evne en tangent, der rører det pågældende sted, og hældningen kan bestemmes ved at se på forholdet mellem Δy og Δx:



Tangenthældningen: $a_{tangent} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,43m}{1,5s} \approx 0,3\frac{m}{s}$

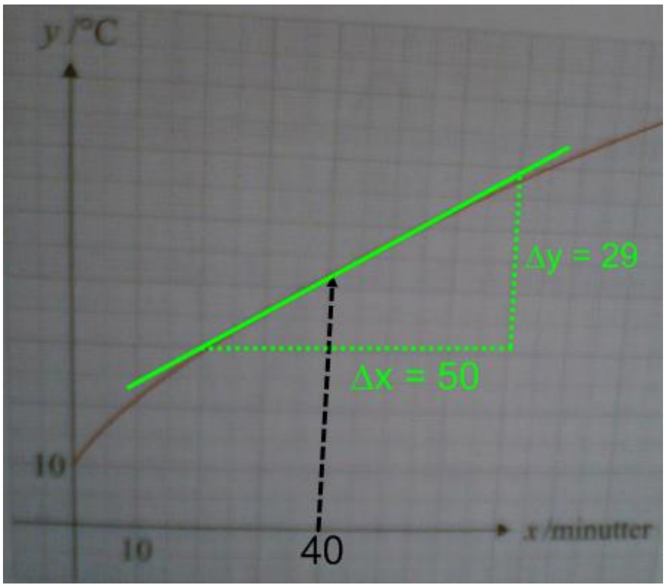
Dvs. at partiklens hastighed er y'=0,3m/s

1.058: Temperaturen i stegens indre er angivet op ad y-aksen, mens tiden er angivet ud ad x-aksen.
Så temperaturen efter 40 minutter aflæses ved fra 40 på x-aksen at gå op til grafen og vandret ud til aflæsning på y-aksen:



Dvs. efter 40 minutter er temperaturen i stegens indre på 42°C

Hastigheden det pågældende sted bestemmes ved at finde hældningen for tangenten i punktet med førstekoordinaten 40:



Hermed er:

$$y' = \frac{29°C}{50\,\text{min}} = \underline{\underline{0,58\frac{°C}{\text{min}}}}$$

1.059: $s(t) = 5 \cdot t^{\frac{1}{2}}$

s angiver strækningen målt i meter, mens t er tiden målt i sekunder.
Først bestemmes den afledede funktion og derefter differentialkvotienten i t = 16:

$$s'(t) = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot t^{\frac{1}{2}-1} = \frac{5}{2} \cdot t^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$s'(16) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{5}{8}}}$$

Dette vil sige, at efter 16 sekunder bevæger partiklen sig med hastigheden $\underline{\underline{\frac{5}{8}\frac{m}{s}}}$

1.060: Det er oplyst, at:

$f(t) = 20 + 150 \cdot \ln(8t+1)$

$f'(3) = 48$

, hvor f er temperaturen målt i °C og t er tiden i minutter.

Den oplyste differentialkvotient fortæller os, at 3 minutter efter at ovnen er tændt, øges temperaturen i den med 48 °C pr. minut.

1.061: N(t) angiver antal indbyggere i en by målt i tusinder, og t angiver tiden i år efter 1950.
Det er oplyst, at N'(40) = 0,027.
Dette fortæller, at i 1990 voksede antallet af indbyggere i byen med 27 personer om året.

1.062: a) $\int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = \frac{1}{4}\cdot 2^4 - \frac{1}{4}\cdot 0^4 = \frac{1}{4}\cdot 16 = \underline{\underline{4}}$

$$\int_0^2 x^{\frac{3}{4}} dx = \left[\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}\right]_0^2 = \frac{4}{7}\cdot 2^{\frac{7}{4}} - \frac{4}{7}\cdot 0^{\frac{7}{4}} = \frac{2^2\cdot 2^{\frac{7}{4}}}{7} = \frac{2^2\cdot 2^1\cdot 2^{\frac{3}{4}}}{7} = \underline{\underline{\frac{8\cdot 2^{\frac{3}{4}}}{7}}}$$

1.063:

$$\int_0^1 e^x dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = \underline{\underline{e-1}}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \left[\ln|x|\right]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2) - 0 = \underline{\underline{\ln(2)}}$$

1.064: a) $\int_0^2 \left(4x - x^2\right)dx = \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \left(2\cdot 2^2 - \frac{1}{3}\cdot 2^3\right) - (0-0) = 8 - \frac{8}{3} = \frac{24}{3} - \frac{8}{3} = \underline{\underline{\frac{16}{3}}}$

En geometrisk fortolkning af bestemte integraler har altid noget med arealer at gøre. Man kan dog ikke umiddelbart se, om det udregnede tal direkte svarer til et areal, da det afhænger af, hvordan grafen ligger i forhold til x-aksen i det pågældende område. Så det skal først undersøges.

Det ses, at grafen for $f(x) = -x^2 + 4x = x\cdot(-x+4)$ er en parabel med benene nedad, der skærer *x*-aksen i punkterne (0,0) og (4,0). Så grafen for *f* ligger over x-aksen i det pågældende område, og dermed er arealet af det område, der afgrænses af x-aksen, grafen for *f* og linierne med ligningerne x = 0 og x = 2, $\frac{16}{3}$.

1.065: $\int_2^4 \left(\frac{1}{x} + 2x\right)dx = \left[\ln|x| + x^2\right]_2^4 = \ln 4 + 4^2 - \ln 2 - 2^2 = \ln\frac{4}{2} + 16 - 4 = \underline{\underline{\ln 2 + 12}}$

1.066: Der integreres ledvist:

$$\int \left(x^5 + 2\right)dx = \underline{\underline{\frac{1}{6}x^6 + 2x + k}}$$

For at bestemme det ubestemte integral af $f(x) = 3x^2 \cdot e^{x^3+1}$ benyttes integration ved substitution:

Substitutionen:

$t = x^3 + 1$

$\frac{dt}{dx} = 3x^2$

$dt = 3x^2 dx$

Så man har: $\int 3x^2 e^{x^3+1} dx = \int e^t dt = e^t + k = \underline{\underline{e^{x^3+1} + k}}$

Man kunne også have udnyttet, at $\frac{d\left(x^3+1\right)}{dx} = 3x^2$

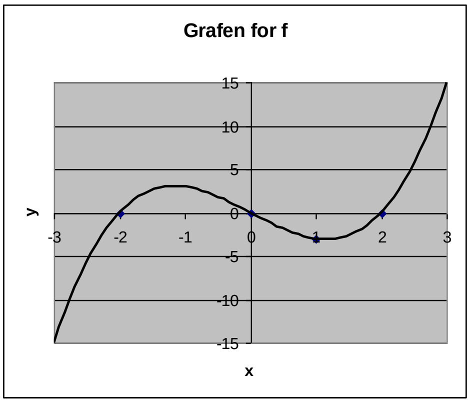
$$\int 3x^2 e^{x^3+1} dx = \int e^{x^3+1} d\left(x^3+1\right) = \underline{\underline{e^{x^3+1} + k}}$$

1.067: $f(x) = x^3 - 4x$

Først skal man finde ud af, hvor den pågældende punktmængde befinder sig.
Dertil bestemmes skæringsstederne med førsteaksen:

$$f(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 0=x^3-4x=x\cdot\left(x^2-4\right)=x\cdot(x-2)(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad x=-2 \vee x=0 \vee x=2$$

f er et tredjegradspolynomium, så en "skitse" er:



I intervallet [-2;0] kan det bestemte integral direkte benyttes til at bestemme arealet, mens man i intervallet [0;2] skal ændre fortegn:

$$A=\int_{-2}^{0} f(x)dx-\int_{0}^{2} f(x)dx=\int_{-2}^{0}\left(x^3-4x\right)dx-\int_{0}^{2}\left(x^3-4x\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^{0}-\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{0}^{2}=$$

$$0-0-\frac{1}{4}\cdot(-2)^4+2\cdot(-2)^2-\frac{1}{4}\cdot 2^4+2\cdot 2^2+0-0=-4+8-4+8=\underline{\underline{8}}$$

1.068: $f(x)=9-x^2 \qquad g(x)=x+3$

Inden, der kan tegnes en skitse, bestemmes evt. skæringspunkter mellem graferne for de 2 funktioner:

$$f(x)=g(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$9-x^2=x+3 \quad \Leftrightarrow$$

$$0=x^2+x-6 \quad \Leftrightarrow$$

$$0=(x+3)\cdot(x-2) \quad \Leftrightarrow$$

$$x=-3 \quad \vee \quad x=2$$

Skæringspunkterne kunne også være fundet ved diskriminantmetoden.
Parablen vender benene nedad, så mellem de 2 skæringspunkter må den ligge øverst:
En skitse skal så vise skæringspunkterne samt at parablen ligger øverst mellem disse.
Punktmængden areal er så:

$$A=\int_{-3}^{2}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_{-3}^{2}\left(9-x^2-x-3\right)dx=\int_{-3}^{2}\left(-x^2-x+6\right)dx=$$

$$\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+6x\right]_{-3}^{2}=\left(-\frac{1}{3}\cdot 2^3-\frac{1}{2}\cdot 2^2+6\cdot 2\right)-\left(-\frac{1}{3}\cdot(-3)^3-\frac{1}{2}\cdot(-3)^2+6\cdot(-3)\right)=$$

$$-\frac{8}{3}-2+12-9+\frac{9}{2}+18=19+\frac{9}{2}-\frac{8}{3}=\frac{114}{6}+\frac{27}{6}-\frac{16}{6}=\underline{\underline{\frac{125}{6}}}$$

1.069: Da punktmængden M_1 er placeret under førsteaksen, vil det bestemte integral give en negativ værdi, hvis størrelse svarer til arealet af M_1. Så man har:

$$\int_{-3}^{-2} f(x)dx=-A_{M_1}=\underline{\underline{-\frac{62}{15}}}$$

Det andet bestemte integrals værdi bestemmes ved at opdele i de 3 intervaller:

$$\int_{-3}^{3} f(x)dx=\int_{-3}^{-2} f(x)dx+\int_{-2}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{3} f(x)dx=-A_{M_1}+A_{M_2}-A_{M_3}=$$

$$-\frac{62}{15}+\frac{1312}{15}-\frac{62}{15}=\frac{1188}{15}=\underline{\underline{\frac{396}{5}}}$$

1.070: $f(x)=x^3-4x \qquad P(-2,0) \quad O(0,0) \quad Q(2,0)$

Da det er oplyst, at grafen skærer 1. aksen i ovenstående tre punkter, fremgår det af figuren, at punktmængden M ligger over x-aksen i intervallet [-2,0].
Dermed kan arealet af M bestemmes ved anvendelse af en vilkårlig stamfunktion til *f*:

$$\int f(x)dx = \int \left(x^3 - 4x\right)dx = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + k$$

Som stamfunktion F vælges ovenstående udtryk med k=0, og arealet er så:

$$A_M = F(0) - F(-2) = \frac{1}{4}\cdot 0^4 - 2\cdot 0^2 - \left(\frac{1}{4}\cdot(-2)^4 - 2\cdot(-2)^2\right) = -4 + 8 = \underline{\underline{4}}$$

Man kunne også have skrevet:

$$A_M = \int_{-2}^{0} f(x)dx = \int_{-2}^{0}\left(x^3 - 4x\right)dx = \left[\frac{1}{4}\cdot x^4 - 2x^2\right]_{-2}^{0} = 0 - 0 - \left(\frac{1}{4}\cdot(-2)^4 - 2\cdot(-2)^2\right) = \underline{\underline{4}}$$

1.071: Punktmængden M_1 ligger under *x*-aksen har derfor modsat fortegn af det bestemte integral:

$$\int_{-2}^{0} f(x)dx = -A_{M_1} = \underline{\underline{-\frac{16}{3}}}$$

Punktmængden M_2 ligger over *x*-aksen, så man har:

$$M_2 = \int_0^3 f(x)dx = \int_{-2}^{3} f(x)dx - \int_{-2}^{0} f(x)dx = \frac{125}{12} - \left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{125}{12} + \frac{64}{12} = \frac{189}{12} = \underline{\underline{\frac{63}{4}}}$$

1.072: For at udregne det bestemte integral udnyttes, at *f* er en stamfunktion til *g*, dvs. når der ses bort fra en eventuel konstant, der ikke er relevant ved bestemte integraler, er *f(x)=G(x)*:

$$\int_{-1}^{2} g(x)dx = \left[G(x)\right]_{-1}^{2} = \left[f(x)\right]_{-1}^{2} = f(2) - f(-1) = 10 - (-2) = \underline{\underline{12}}$$

Funktionsværdierne er aflæst i skemaet.
For at bestemme tangentens ligning skal man kende en hældning og røringspunktet. Røringspunktet aflæses af tabellen til *P(1,g(1))=P(1,3).*
For at bestemme hældningen udnyttes det, at *g* er en stamfunktion til *h*, dvs. *g'(x)=h(x)*:

$g'(1) = h(1) = 6$

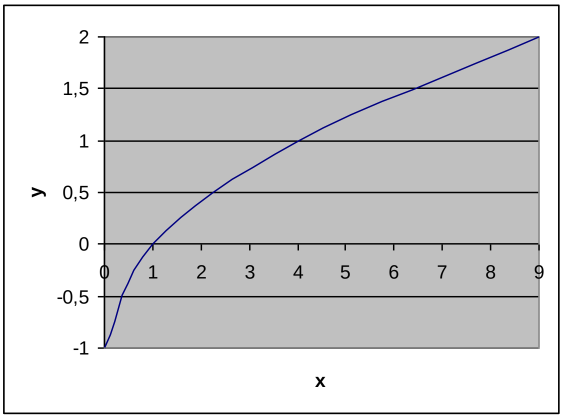
Hermed bliver tangentens ligning: $y - 3 = 6\cdot(x-1) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 6x - 3}}$

1.073: $f(x) = x^{\frac{1}{2}} - 1$

$$\int_0^9 f(x)dx = \int_0^9\left(x^{\frac{1}{2}} - 1\right)dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x\right]_0^9 = \left(\frac{2}{3}\cdot 9^{\frac{3}{2}} - 9\right) - (0 - 0) =$$

$$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{9}^3 - 9 = \frac{2}{3}\cdot 3^3 - 9 = 18 - 9 = \underline{\underline{9}}$$

Skitse:



Dvs. at den punktmængde, der afgrænses af grafen, *x*-aksen og linien med ligningen *x=9*, har et areal, der er 9 enheder større end punktmængden, der ligger under *x-aksen* og afgrænses af linien med ligningen *x=0* og grafen.

1.074: <u>Den blå graf B svarer til f'(x)</u>
<u>Den røde graf A svarer til f(x)</u>

Dette kan ses på flere måder:

1) Lige efter x = 0 ligger grafen for A over x-aksen og funktionen er voksende. Grafen for B ligger over x-aksen, men funktionen er aftagende på dette sted. Ovenstående konklusion passer med, at grafen for B ligger over x-aksen, da funktionen bag A-grafen er voksende. Og den omvendte konklusion (at B skulle svare til f(x) og A til f'(x)) passer ikke her, da funktionen bag B er aftagende, hvormed grafen for A burde ligge under x-aksen.
2) Der hvor grafen B skærer 1.aksen, har funktionen bag grafen for A lokalt maksimum. Dette passer med konklusionen, da den afledede funktion har værdien 0, når funktionen har lokalt maksimum. Den modsatte konklusion ville ikke passe, da funktionen bag B er aftagende på dette sted, hvorfor grafen for A skulle have ligget under x-aksen på dette sted.
3) Grafen for A har vendetangent det sted, hvor funktionen bag B har lokalt minimum, hvilket også passer med konklusionen.

1.075: Differentialligningen $\frac{dy}{dx} - 3y = x^2$ er givet, og det er oplyst, at *f(x)* er en løsning til den.

Da *f* er en løsning, og punktet *P(2,2)* ligger på grafen for *f*, kan hældningen for tangenten til grafen i dette punkt findes ved indsættelse i differentialligningen:

$$\frac{dy}{dx} - 3\cdot 2 = 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 10$$

Og så bliver tangentens ligning:

$$y - 2 = 10\cdot(x-2) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = 10x - 18}}$$

1.076: $f(x) = x^3 + x^2 + x$ $\qquad \frac{dy}{dx} - 3y = -3x^3 - x + 1$

Det undersøges, om funktionen er en løsning til differentialligningen ved at sætte ind i differentialligningen og se, om der fremkommer et udsagn, der er sandt for <u>alle</u> x (dvs. der skal fremkomme det, der kaldes en "identitet").

For at kunne sætte ind, skal den afledede funktion bestemmes:

$$f'(x) = 3\cdot x^2 + 2\cdot x + 1$$

Hermed kan der sættes ind i differentialligningen:

$$(3x^2 + 2x + 1) - 3(x^3 + x^2 + x) = -3x^3 - x + 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$3x^2 + 2x + 1 - 3x^3 - 3x^2 - 3x = -3x^3 - x + 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$-3x^3 - x + 1 = -3x^3 - x + 1$$

Da der er fremkommet en identitet, kan det altså konkluderes, at:

$$\underline{\underline{f \text{ er en løsning til differentialligningen}}}$$

1.077: $\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-1)$, $x \in R$ og $y > 1$ Og integralkurven forløber i området $R \times]1;\infty[$

Da $y > 1$, er $y - 1 > 0$, så det er x-værdierne, der afgør fortegnet for den afledede funktion:

$$\frac{dy}{dx} < 0 \ \ for \ x < -1$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \ \ for \ x = -1$$

$$\frac{dy}{dx} > 0 \ \ for \ x > -1$$

Dette giver fortegnsskemaet:

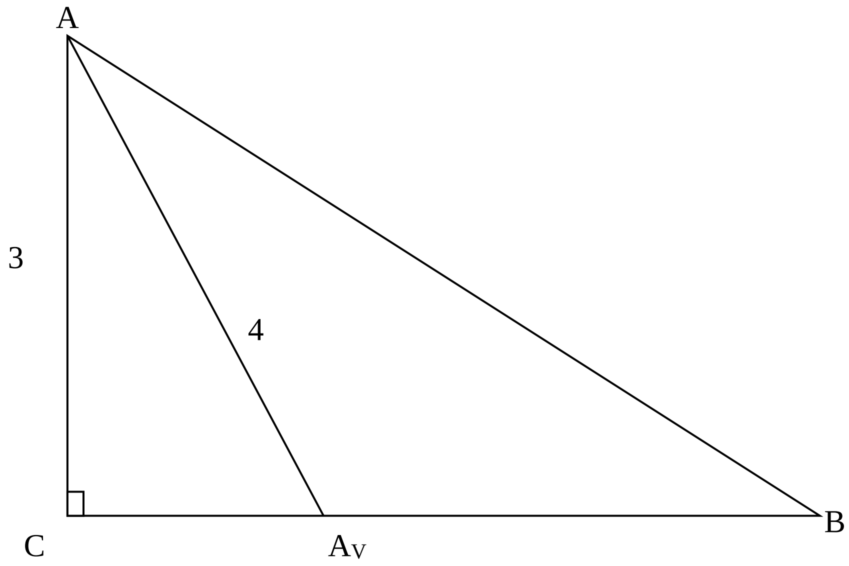
x		-1	
f'(x)	-	0	+
f(x)	$\searrow$		$\nearrow$

Så løsningskurven har $\underline{\underline{globalt\ minimumssted\ i\ x = -1}}$

Og den er: $\underline{\underline{aftagende\ i\ intervallet\ ]-\infty;-1]}}$

$\underline{\underline{voksende\ i\ intervallet\ [-1;\infty[}}$

2.001: Vinkel A er halveret af den tegnede vinkelhalveringslinie.



Den halve vinkel A kan bestemmes ved at se på den retvinklede $\Delta AA_V C$. Her kendes den hosliggende katete og hypotenusen. Så man har:

$$\cos\left(\frac{1}{2}A\right)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{2}A=\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\Leftrightarrow A=2\cdot 41{,}4096^0=\underline{\underline{82{,}8192^0}}$$

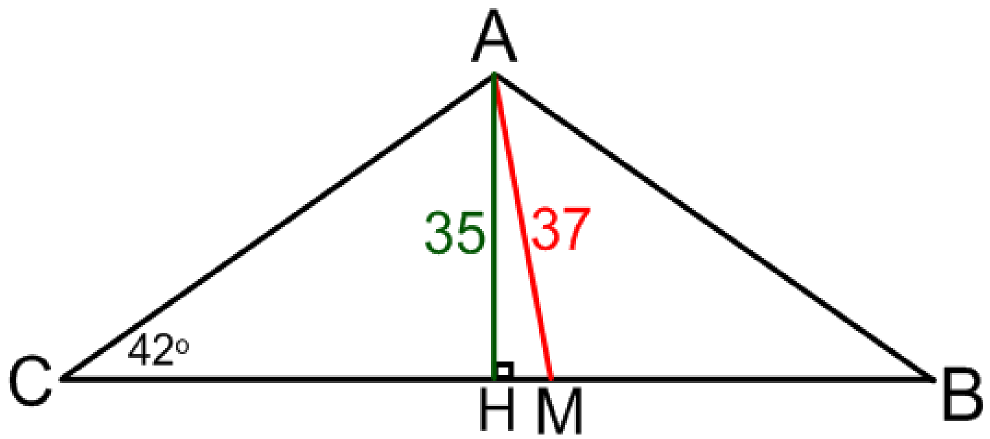
Så er: $B=90^0-A=90^0-82{,}8192^0=\underline{\underline{7{,}1808^0}}$

Ud fra vinkel A kan de 2 resterende sider også bestemmes:

$$\tan A=\frac{|BC|}{|AC|}\Leftrightarrow|BC|=\tan 82{,}8192^0\cdot 3=\underline{\underline{23{,}8118}}$$

$$\cos A=\frac{|AC|}{|AB|}\Leftrightarrow|AB|=\frac{3}{\cos 82{,}8192^0}=\underline{\underline{24}}$$

2.002: $\angle C=42°$, $h_a=35$, $m_a=37$, $\angle AMC<90°$



Oplysningen om, at $\angle AMC$ er spids er udnyttet til at placere M, så det ikke ligger på linjestykket CH. Da trekant AHM er retvinklet, kan det søgte stykke bestemmes ved Pythagoras:

$$|MH|^2+|AH|^2=|AM|^2\quad\Leftrightarrow\quad|MH|=\sqrt{37^2-35^2}=\underline{\underline{12}}$$

b) Vinkel A i trekant ABC kan bestemmes ved:

$$\angle A_{ABC} = \angle CAH + \angle HAB = \left(90° - \angle ACH\right) + \angle HAB = \left(90° - 42°\right) + \angle HAB = 48° + \angle HAB$$

For at bestemme den manglende vinkel, skal man gå en lille omvej.
Først bestemmes længden af stykket CH i den retvinklede trekant ACH:

$$\tan(C) = \frac{|AH|}{|CH|} \quad \Leftrightarrow \quad |CH| = \frac{35}{\tan(42°)} = 38{,}871438019$$

Hermed er: $|CM| = |CH| + |MH| = 38{,}871438019 + 12 = 50{,}871438019$

Da m_a er medianen fra A (dvs. linjen der deler siden BC i to lige store stykker), har man: $|CM| = |MB|$

Og dermed er: $|BH| = |MH| + |BM| = 12 + 50{,}871438019 = 62{,}871438019$

Og da trekant AHB er retvinklet, har man altså:

$$\tan(\angle HAB) = \frac{|BH|}{|AH|} \quad \Leftrightarrow \quad \angle HAB = \tan^{-1}\left(\frac{62{,}871438019}{35}\right) = 60{,}8956818749°$$

Hermed er: $\angle A_{ABC} = 48° + 60{,}8956818749° = \underline{\underline{108{,}8956818749°}}$

<u>2.003:</u> a) Lad A_l være projektionen af A på linjen l, dvs. det punkt på l, der ligger til venstre for F og er røringspunktet mellem den stiplede linie og l. Lad B_l være det tilsvarende punkt til højre for F. Da skibene sejler parallelt med kystlinien, vil vinklerne v og u svare til henholdsvis:

$v = \angle AFA_l \quad og \quad u = \angle BFB_l$.

Trekanterne AFA_l og BFB_l er retvinklede, så man har:

$$\sin \angle AFA_l = \frac{|AA_l|}{|AF|} \Leftrightarrow \quad |AF| = \frac{1200m}{\sin 40^0} = 1866{,}86859m = \underline{\underline{1867m}}$$

$$\sin \angle BFB_l = \frac{|BB_l|}{|BF|} \Leftrightarrow \quad |BF| = \frac{1000m}{\sin 48^0} = 1345{,}6327m = \underline{\underline{1346m}}$$

b) Afstanden mellem skibene bestemmes ved at regne på trekant ABF, hvor man allerede kender to af siderne. Vinklen $\angle AFB$ kan hurtigt findes:

$$\angle AFB = 180^0 - \angle AFA_l - \angle BFB_l = 180^0 - 40^0 - 48^0 = \underline{92^0}$$

Så kan man benytte en cosinusrelation:

$$|AB|^2 = |AF|^2 + |BF|^2 - 2 \cdot |AF| \cdot |BF| \cdot \cos \angle AFB \qquad \Leftrightarrow$$

$$|AB| = \sqrt{(1867m)^2 + (1346m)^2 - 2 \cdot 1867m \cdot 1346m \cdot \cos 92^0} = 2339{,}07443m = \underline{\underline{2339m}}$$

c) Det er punkterne A_l og B_l, der afgør, hvornår de 2 skibe passerer hinanden, nemlig når afstanden mellem punkterne er 0. Denne afstand kan beregnes ved at kigge på de 2 retvinklede trekanter AFA_l og BFB_l. Først ses på tidspunktet 12.00:

$$|A_l B_l| = |A_l F| + |FB_l| = \frac{|AA_l|}{\tan v} + \frac{|BB_l|}{\tan u} = \frac{1200m}{\tan 40^0} + \frac{1000m}{\tan 48^0} = 2330{,}508m$$

Samme udregning foretages for tiden 12.00:30:

$$|A_l B_l|_{Nyt\ tidspunkt} = |A_l F| + |FB_l| = \frac{|AA_l|}{\tan v} + \frac{|BB_l|}{\tan u} = \frac{1200m}{\tan 42^0} + \frac{1000m}{\tan 51^0} = 2142{,}519m$$

Dvs. at på et ½ minut er afstanden parallelt med kystlinien mindsket med $2330{,}508m - 2142{,}519m = 187{,}989m$

Da afstanden til at begynde med er 2330,508m, vil det altså tage:

$t = \dfrac{2330{,}508m}{187{,}989m} \cdot ½ minut = 6{,}1985 minutter$ før skibene passerer hinanden. Det vil altså ske til tidspunktet $\underline{\underline{12.06:12}}$.

2.004: ΔACD er retvinklet, og da man allerede kender vinklen α ved A, har man kun brug for én side i trekanten for at kunne bestemme længden af linjestykket CD, der i forhold til α ligger som den modstående katete (Man ville kunne sige det samme om ΔBCD).
Længden af stykket AC kan bestemmes ved at benytte sinusrelationerne på ΔABC, når man først har bestemt vinklerne i denne trekant:

$$\angle ABC = 180° - \beta = 180° - 37{,}6° = 142{,}4°$$

$$\angle ACB = 180° - \alpha - \angle ABC = 180° - 27{,}2° - 142{,}4° = 10{,}4°$$

Så er:

$$\frac{|AC|}{\sin(\angle ABC)} = \frac{|AB|}{\sin(\angle ACB)} \quad \Leftrightarrow \quad |AC| = 50km \cdot \frac{\sin(142{,}4°)}{\sin(10{,}4°)} = 168{,}99735567\,km$$

Dette bruges i den retvinklede ΔACD:

$$\sin(\alpha) = \frac{|CD|}{|AC|} \quad \Leftrightarrow \quad |CD| = |AC| \cdot \sin(\alpha) = 168{,}997km \cdot \sin(27{,}2°) = 77{,}2483409549\,km = \underline{\underline{77km}}$$

2.005: Lad jordens centrum være betegnet med O.
Afstanden fra jordens centrum og ud til AWACS-flyet er: $|OF| = 6371km + 9km = 6380km$

a) ΔAFO er retvinklet, da liniestykket AF er en del af tangenten til cirklen i punktet A, og tangenten er vinkelret på radien.
Dermed er:

$$\cos\angle AOF = \frac{r}{|OF|} \Leftrightarrow \angle AOF = \cos^{-1}\left(\frac{6371km}{6380km}\right) = 3{,}04368435689^0$$

Så kan den store vinkel inde fra centrum bestemmes:

$$\angle AOB = 2 \cdot \angle AOF = 6{,}08736871379^0$$

Nu ses på ΔABO. En cosinusrelation giver:

$$|AB|^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos\angle AOB \Leftrightarrow$$

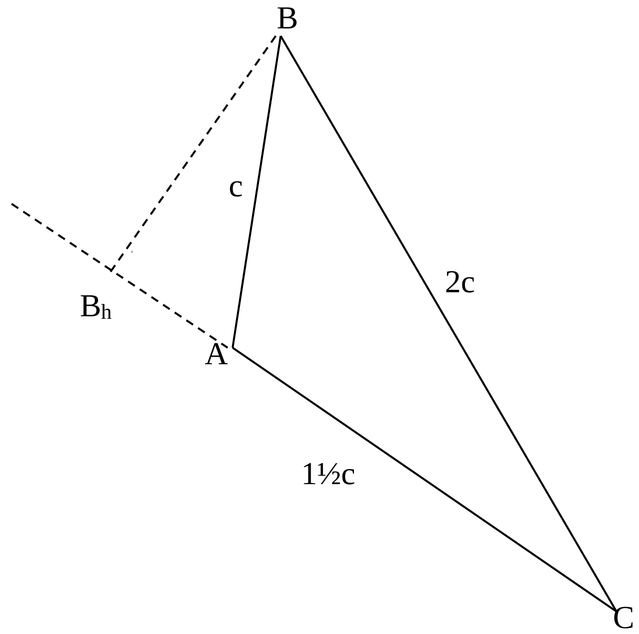
$$|AB|^2 = 2 \cdot r^2 \cdot (1 - \cos\angle AOB)$$

$$|AB| = \sqrt{2 \cdot (6371km)^2 \cdot (1 - \cos 6{,}087^0)} = 676{,}566203389\,km = \underline{\underline{676{,}6km}}$$

Cirkelbuen AB bestemmes ud fra omkredsen af en cirkel og den del af cirklen, som vinklen spænder over:

$$\overset{\frown}{AB} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{6{,}087^0}{360^0} = 676{,}884517588\,km = \underline{\underline{676{,}9km}}$$

2.006: En skitse af trekanten er:



a) Vinklerne bestemmes ved hjælp af cosinusrelationerne:

$$A = \cos^{-1}\left(\frac{c^2 + (1½c)^2 - (2c)^2}{2 \cdot c \cdot 1½c}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1^2 + 1{,}5^2 - 2^2}{2 \cdot 1 \cdot 1{,}5}\right) = \underline{\underline{104{,}4775^0}}$$

$$B = \cos^{-1}\left(\frac{c^2 + (2c)^2 - (1½c)^2}{2 \cdot c \cdot 2c}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1^2 + 2^2 - 1{,}5^2}{2 \cdot 1 \cdot 2}\right) = \underline{\underline{46{,}5675^0}}$$

$$C = \cos^{-1}\left(\frac{(1½c)^2 + (2c)^2 - c^2}{2 \cdot 1½c \cdot 2c}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1½^2 + 2^2 - 1^2}{2 \cdot 1½ \cdot 2}\right) = \underline{\underline{28{,}9550^0}}$$

b) Vinkel A er stump, så højden fra B falder uden for trekanten.
Trekant BB_hC er retvinklet, så man har:

$$\sin C = \frac{|BB_h|}{|BC|} \Leftrightarrow \sin 28{,}9550^0 = \frac{5}{2c} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{5}{2 \cdot \sin 28{,}9550^0} = 5{,}16398$$

Dvs. at man har:

$$|AB| = c = \underline{\underline{5{,}16}}$$

$$|AC| = 1½c = 1{,}5 \cdot 5{,}16398 = 7{,}74597 = \underline{\underline{7{,}75}}$$

$$|BC| = 2 \cdot c = 2 \cdot 5{,}16398 = 10{,}32796 = \underline{\underline{10{,}33}}$$

$$T = ½ \cdot h_B \cdot |AC| = 0{,}5 \cdot 5 \cdot 7{,}74597 = 19{,}36492 = \underline{\underline{19{,}36}}$$

2.007: Da $x > y$, den sidste side 1 og omkredsen 10, så må x være den længste side i trekanten. Da trekanten er retvinklet, er x altså hypotenusen, og man har så følgende 2 ligninger:

$$x + y + 1 = 10 \Leftrightarrow x + y = 9 \Leftrightarrow y = 9 - x$$

$$x^2 = y^2 + 1^2$$

Ved indsættelse af den øverste ligning i den nederste fås:

$$x^2 = (9 - x)^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$x^2 = 81 + x^2 - 18x + 1 \Leftrightarrow$$

$$18x = 82 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{82}{18} = \underline{\underline{\frac{41}{9}}}$$

2.008: $C: \quad x^2+4x+y^2-6y-23=0 \qquad l: 3x-4y-4=0$

a) For at bestemme afstanden fra cirklens centrum til linien, skal man omskrive cirklens ligning, så centrum (og radius) kan aflæses:

$$x^2+4x+y^2-6y-23=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)^2+(y-3)^2=23+4+9=36$$

$$C(-2,3) \qquad r=6$$

Så er afstanden fra linien til cirklens centrum:

$$dist(P,l)=\frac{|a\cdot x_0+b\cdot y_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3\cdot(-2)-4\cdot3-4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-22|}{\sqrt{25}}=\underline{\underline{\frac{22}{5}}}$$

b) Linjer, der er parallelle med *l*, er på formen $3x-4y+k=0$

Hvis de samtidig skal være tangenter til cirklen, skal deres afstand til cirklens centrum svare til radius. Dermed skal gælde:

$$\frac{|3\cdot(-2)-4\cdot3+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=6 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|-18+a|}{5}=6 \quad \Leftrightarrow \quad |-18+a|=30 \quad \Leftrightarrow$$

$$-18+a=30 \quad \vee \quad -18+a=-30 \quad \Leftrightarrow \quad a=48 \quad \vee \quad a=-12$$

Hermed er de søgte tangenters ligninger:

$$t_1: 3x-4y+48=0$$

$$\underline{\underline{t_2: 3x-4y-12=0}}$$

2.009: $\vec{a}=\begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix} \quad \vec{b}=\begin{pmatrix} -t \\ t+1 \end{pmatrix}$

For $t = 2$, der skal bruges i de to første spørgsmål, har man:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b}=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Arealet af det af vektorerne udspændte parallelogram:

$$A=\left|\det\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right|=\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}\right\|=\left|\begin{matrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{matrix}\right|=|2\cdot3-3\cdot(-2)|=|12|=\underline{\underline{12}}$$

b) Projektionsvektoren: $\vec{b_a}=\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a}=\frac{-2\cdot2+3\cdot3}{2^2+3^2}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\frac{5}{13}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{10}{13} \\ \frac{15}{13} \end{pmatrix}}}$

c) De værdier af *t*, for hvilke vinklen mellem de to vektorer er 60°, bestemmes:

$$\cos 60°=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}=\frac{-t^2+t^2+1+2t}{\sqrt{t^2+t^2+1+2t}\cdot\sqrt{t^2+t^2+1+2t}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1+2t}{2t^2+2t+1} \quad \Leftrightarrow \quad 2t^2+2t+1=2+4t \quad \Leftrightarrow \quad 2t^2-2t-1=0$$

Det ses, at denne andengradsligning ikke giver pæne løsninger, så den løses med 'solve':

$$solve\left(2x^2-2x-1=0,x\right) \quad der \quad giver \quad x=-0,3660 \quad \vee \quad x=1,3660$$

Dvs. at de søgte *t*-værdier er:

$$\underline{\underline{t=-0,3660 \quad \vee \quad t=1,3660}}$$

2.010: $A(0;0;3,6)\quad B(-3,2;6,4;10,8)\quad C(0;12,8;3,6)$

a) En parameterfremstilling for linjen gennem B og C findes ved at tage udgangspunkt i punktet C og benytte $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}0-(-3,2)\\12,8-6,4\\3,6-10,8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3,2\\6,4\\-7,2\end{pmatrix}$ som retningsvektor:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\12,8\\3,6\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3,2\\6,4\\-7,2\end{pmatrix}$$

Pløkken skal anbringes, hvor denne linje skærer xy-planen, dvs. der hvor z-koordinaten er 0:

$$3,6-7,2t=0\quad\Leftrightarrow\quad t=\frac{3,6}{7,2}=\frac{1}{2}$$

Skæringspunktet bestemmes så ved indsættelsen i linjens parameterfremstilling:

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\12,8\\3,6\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}3,2\\6,4\\-7,2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,6\\16\\0\end{pmatrix}$. Dvs. pløkken skal sættes i punktet $\underline{\underline{(1,6;16;0)}}$

b) Teltfladen ABC er en trekant, der udspændes af $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}3,2\\6,4\\-7,2\end{pmatrix}$ og $\overrightarrow{BA}=\begin{pmatrix}0-(-3,2)\\0-6,4\\3,6-10,8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3,2\\-6,4\\-7,2\end{pmatrix}$.

Arealet af teltfladen er så det halve af længden af krydsproduktet mellem disse to vektorer:
Dette bestemmes på TI n'spire ved:

$bc:=\begin{bmatrix}3.2\\6.4\\-7.2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3.2\\6.4\\-7.2\end{bmatrix}$
$ba:=\begin{bmatrix}3.2\\-6.4\\-7.2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3.2\\-6.4\\-7.2\end{bmatrix}$
crossP(bc,ba)	$\begin{bmatrix}-92.16\\0.\\-40.96\end{bmatrix}$
$0.5\cdot\sqrt{(-92.16)^2+0^2+(-40.96)^2}$	50.4261519452

Dvs:
$T_{ABC}=\underline{\underline{50,43}}$

2.011: $P(1,-5,4)\quad C(-5,5,0)$

a) En retningsvektor for linjen *m* gennem *P* og *C* bestemmes:

$$\overrightarrow{PC}=\begin{pmatrix}-5-1\\5-(-5)\\0-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\10\\-4\end{pmatrix}$$

For at få en lidt simplere retningsvektor vælges vektoren ensrettet med ovenstående, men halvt så lang:

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}-3\\5\\-2\end{pmatrix}$$

Og med punktet *P* som udgangspunkt har man så parameterfremstillingen:

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-5\\4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-3\\5\\-2\end{pmatrix}\quad;\quad s\in R}}$$

b) Skæringspunktet (og kontrollen af dette) findes ved at sammenstille de to parameterfremstillinger, så der er 3 ligninger med 2 ubekendte:

Da disse værdier for *s* og *t* opfylder alle tre ligninger, er der – som oplyst i opgaven – et skæringspunkt mellem de to linjer. Dets koordinatsæt findes:

$$\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ -5+5 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Skæringspunktet *S* har altså koordinatsættet $\underline{\underline{(-2,0,2)}}$

<u>2.012:</u> $E(1,-6,4) \quad F(-4,-5,3) \quad G(-4,5,3) \quad H(1,6,4)$

Først findes to retningsvektorer for planen
$$\left.\begin{array}{r} 1-3t = 1-3s \\ 5-5t = -5+5s \\ 4-2t = 4-2s \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} s = t \\ s+t = 2 \\ s-t = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad s = t = 1:$$

$$\overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 6-(-6) \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Så den ene retningsvektor kan vælges til enhedsvektoren ensrettet med ovenstående: $\vec{r_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Man kan ikke bruge en vektor fra F til G, da den er parallel med den første retningsvektor, så der tages udgangspunkt i:

$$\overrightarrow{FH} = \begin{pmatrix} 1-(-4) \\ 6-(-5) \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{r_2}$$

Så skal en normalvektor for planen bestemmes, og her bruges krydsproduktet:

$$\vec{r_1} \times \vec{r_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 - 0\cdot 11 \\ 0\cdot 5 - 0\cdot 1 \\ 0\cdot 11 - 1\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

Med udgangspunkt i punktet *H* findes så en ligning for planen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-6 \\ z-4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \quad 1\cdot(x-1) + 0\cdot(y-6) - 5\cdot(z-4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 - 5z + 20 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$\underline{\underline{x - 5z = -19}}$

En normalvektor for den vandrette plan er $\overrightarrow{n_{xy}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vinklen mellem planerne er vinklen mellem deres normalvektorer, så man har:

$$\cos(v) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}\right|} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(v) = \frac{-5}{1\cdot\sqrt{1^2 + (-5)^2}} \quad \Leftrightarrow \quad v = \cos^{-1}\left(\frac{-5}{\sqrt{26}}\right) = 168{,}69°$$

Hvis det er den spidse vinkel, der søges, er denne: $w = 180° - 168{,}69° = \underline{\underline{11{,}31°}}$

2.013: Kuglens ligning: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=49$

$N(1,2,8) \quad P(3,5,7)$

Kuglens centrum aflæses ud fra ligningen til: $\underline{C(1,2,1)}$

En parameterfremstilling for linjen *l* gennem *C* og *P* skal bestemmes.
Først en retningsvektor:

$$\overrightarrow{CP}=\begin{pmatrix}3-1\\5-2\\7-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}=\vec{r}$$

Med udgangspunkt i punktet *C* bliver:

$$l:\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix} \quad ; \quad t\in R$$

Så skal en ligning til tangentplanen til kuglen i punktet *N* bestemmes.
Da radius står vinkelret på tangentplanen, findes en normalvektor ved først at se på:

$$\overrightarrow{CN}=\begin{pmatrix}1-1\\2-2\\8-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\7\end{pmatrix}$$

Og så vælges normalvektoren som enhedsvektoren ensrettet med ovenstående:

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Med udgangspunkt i punktet *N* bliver planens ligning så:

$$0\cdot(x-1)+0\cdot(y-2)+1\cdot(z-8)=0 \quad \Leftrightarrow \quad z=8$$

Skæringspunktet mellem linjen og planen findes så ved at finde den værdi for parameteren *t*, hvor z-koordinaten er 8:

$$8=1+6t \quad \Leftrightarrow \quad t=\frac{7}{6}$$

Og så findes skæringspunktet ved at indsætte i parameterfremstillingen:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\frac{7}{6}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\frac{7}{6}\cdot 2\\2+\frac{7}{6}\cdot 3\\1+\frac{7}{6}\cdot 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{10}{3}\\\frac{11}{2}\\8\end{pmatrix}$$

. Dvs. skæringspunktet er $\underline{\underline{\left(\frac{10}{3},\frac{11}{2},8\right)}}$

2.014: Oplyst punkt: $P(2, y_0, 4)$; $y_0 > 0$

Oplyst plan: $\alpha : z = 6$

a) Først bestemmes ligningen for den kugle, der har centrum i O(0,0,0), og som tangerer α.

Man mangler radius, der netop er afstanden fra O til α. Denne kunne godt bestemmes ved at anvende afstandsformlen fra punkt til plan, men man kan også udnytte, at α er parallel med xy-planen og ligger 6 enheder forskudt op ad z-aksen. Afstanden fra O til α er dermed 6, og cirklens ligning er:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 6^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 = 36$$

Da punktet P ligger på denne kugle, kan dets manglende 2. koordinat bestemmes ved indsættelse i kuglens ligning:

$2^2 + y_0^2 + 4^2 = 36 \quad \Leftrightarrow \quad y_0^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad y_0 = 4$ (i sidste skridt er oplysningen om, at y-koordinaten skal være positiv benyttet).

En parameterfremstilling for linjen *l* gennem O og P kan hermed bestemmes, hvor udgangspunktet er O, og hvor man bruger $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ som retningsvektor: $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Skæringspunktet mellem linjen og planen findes ved at udnytte, at z-værdien skal være 6, da punktet skal ligge i planen. Hermed kan parameteren *t* bestemmes:

$$6 = t \cdot 4 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{3}{2}$$

Dette indsættes i linjens parameterfremstilling for at finde skæringspunktet:

$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$, dvs. skæringspunktet er $\underline{\underline{(3,6,6)}}$

3.001: *a)* Lad *x* være vægten målt i kg, og lad *y* være højden målt i meter. Så er: $\underline{\underline{BMI(x,y)=\frac{x}{y^2}}}$

b) $BMI(70,\,1{,}80)=\frac{70}{1{,}80^2}=21{,}6$

Da dette tal ligger mellem 18,5 og 24,9, ligger personen altså i $\underline{\underline{\textit{normalvægtområdet}}}$

c) For en kvinde med *y* = 1,65 har man: $BMI(x)=\frac{x}{1{,}65^2}=\underline{\underline{\frac{x}{2{,}7225}}}$ (eller $BMI(x)=0{,}3673\cdot x$)

Først findes den nedre grænse for vægten. Her er BMI = 18,5:

$$18{,}5=\frac{x}{2{,}7225}\Leftrightarrow x=18{,}5\cdot 2{,}7225=50{,}37$$

Så findes den øvre grænse for vægten. Her er BMI = 24,9:

$$24{,}9=\frac{x}{2{,}7225}\Leftrightarrow x=24{,}9\cdot 2{,}7225=67{,}79$$

Dvs. at denne kvinde for at ligge i normalområdet skal veje mellem $\underline{\underline{50{,}4kg\ \&\ 67{,}8kg}}$.

3.002: $y=31{,}5\cdot 0{,}887^t$

a) Følgende ligning kan enten løses ved 'solve' eller ved udregningen:

$$19=31{,}5\cdot 0{,}887^t\Leftrightarrow$$

$$\frac{19}{31{,}5}=0{,}887^t\Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\frac{19}{31{,}5}\right)=t\cdot\ln 0{,}887\Leftrightarrow$$

$$t=\frac{\ln\left(\frac{19}{31{,}5}\right)}{\ln 0{,}887}=4{,}2160563=\underline{\underline{4{,}22}}$$

b) Først findes det tidspunkt, hvor vitaminindholdet er 15: $t=\frac{\ln\left(\frac{15}{31{,}5}\right)}{\ln 0{,}887}=6{,}187436$

Dette indsættes i det andet udtryk for at finde nitratindholdet:

$$z=20{,}3+61{,}4\cdot 0{,}884^{6{,}187436}=48{,}9315699=\underline{\underline{48{,}9}}$$

3.003: Ifølge opgaveteksten har man altså en eksponentiel udvikling med vækstraten r = -2,45%.

a)
$$f(x)=7g\cdot(1-0{,}0245)^x=7g\cdot 0{,}9755^x$$
$$f(2)=7g\cdot 0{,}9755^2=6{,}6612g=6{,}66g$$

Der er altså $\underline{\underline{6{,}66g}}$ tilbage efter 2 år.

b) Det matematiske udtryk er fundet allerede i spørgsmål a), men det kan forsimples yderligere, hvis det angives, at *f(x)* angiver massen af stoffet målt i gram efter tiden x målt i år. Så er udtrykket:

$$\underline{\underline{f(x)=7\cdot 0{,}9755^x}}$$

c) Hvis der skal være 1 gram af stoffet tilbage, skal der gå:

$$1=7\cdot 0{,}9755^x\Leftrightarrow\quad \frac{1}{7}=0{,}9755^x\quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{\ln\left(\frac{1}{7}\right)}{\ln 0{,}9755}=78{,}4479$$

Dvs. der skal gå $\underline{\underline{78\tfrac{1}{2}\ \textit{år}}}$, før der er under 1 gram af stoffet tilbage.

3.004: Lad trekantens højde være *h*, dens grundlinje *g* og dens areal *T*.
Lad cirklens radius være *r* og dens areal *A*.

a) Man har så: $T = ½ \cdot h \cdot g \quad og \quad A = \pi \cdot r^2$

Hvis de skal have lige store arealer, har man altså: $\underline{\underline{½ \cdot h \cdot g = \pi \cdot r^2}}$

b) Radius kan så isoleres (*r* > 0) : $½ \cdot h \cdot g = \pi \cdot r^2 \Leftrightarrow r^2 = \dfrac{h \cdot g}{2 \cdot \pi} \Leftrightarrow \underline{\underline{r = \sqrt{\dfrac{h \cdot g}{2 \cdot \pi}}}}$

3.005: Rumfanget af en kegle er $V_{kegle} = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

a) Lad alle længder være målt i enheden *dm*. Så har man:

$1 = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \Leftrightarrow \underline{\underline{h = \dfrac{3}{\pi \cdot r^2}}}$

b) Overfladearealet af cylinderens krumme overflade er produktet mellem omkredsen af cirkelfladen og højden af cylinderen, og bunden er arealet af en cirkel. Så man har:

$O(r) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + \pi \cdot r^2 = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \dfrac{3}{\pi \cdot r^2} + \pi \cdot r^2 = \underline{\underline{\dfrac{6}{r} + \pi \cdot r^2}}$

3.006: *P(2,0) Q(8,0) R(0,4)*
Forskriften for det 2. gradspolynomium, hvis graf går gennem de 3 punkter, bestemmes:
$f(x) = ax^2 + bx + c$

Punktet *R* giver: $4 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \quad \Leftrightarrow \quad c = 4$

Punkterne *P* og *Q* giver så:

$0 = a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 64a + 8b = -4$

$0 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 4a + 2b = -4 \quad \Leftrightarrow \quad 16a + 8b = -16$

Her er den sidste ligning ganget igennem med 4, så de 2 ligninger kan trækkes fra hinanden:

$64a + 8b - (16a + 8b) = -4 - (-16) \quad \Leftrightarrow$

$48a = 12 \quad \Leftrightarrow \quad a = \dfrac{1}{4}$

Denne værdi indsættes for at finde *b*: $4 \cdot \dfrac{1}{4} + 2b = -4 \quad \Leftrightarrow \quad 2b = -5 \quad \Leftrightarrow \quad b = -\dfrac{5}{2}$

Hermed er: $\underline{\underline{f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{5}{2}x + 4}}$

3.007: a) Betegnelserne *l, b* og *h* bruges om henholdsvis længde, bredde og højde.
Man har altså $h = b$ og $l = 4 \cdot b$

Klodsens overfladeareal som funktion af højden bliver:

$A(l,b,h) = 2 \cdot l \cdot b + 2 \cdot l \cdot h + 2 \cdot h \cdot b$

$A(h) = 2 \cdot 4h \cdot h + 2 \cdot 4h \cdot h + 2 \cdot h \cdot h = \underline{\underline{18h^2}}$

b) Hvis rumfanget skal være 32 cm^3, har man:

$V(l,b,h) = l \cdot b \cdot h$

$V(h) = 4 \cdot h \cdot h \cdot h$

$32cm^3 = 4h^3$

$h^3 = 8cm^3$

$h = \sqrt[3]{8cm^3} = \underline{\underline{2cm}}$

$\underline{\underline{b = 2cm}}$

$\underline{\underline{l = 8cm}}$

3.008: $\log E = 2{,}4m - 1{,}2$ m er Richtertallet E er energimængde

a) Richtertallet 6,5:

$$\log E = 2{,}4 \cdot 6{,}5 - 1{,}2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\log E = 14{,}4 \quad \Leftrightarrow$$
$$E = 10^{14{,}4} = 2{,}512 \cdot 10^{14}$$

Dvs. at der frigives $\underline{\underline{2{,}5 \cdot 10^{14}\, J}}$ ved et jordskælv med størrelsen 6,5 på Richterskalaen.

Energimængde $8{,}0 \cdot 10^{13}\, J$

$$\log\left(8{,}0 \cdot 10^{13}\right) = 2{,}4m - 1{,}2 \quad \Leftrightarrow$$
$$m = \frac{\log\left(8{,}0 \cdot 10^{13}\right) + 1{,}2}{2{,}4} = 6{,}29295$$

Dvs. at det pågældende jordskælv har værdien $\underline{\underline{6{,}3}}$ på Richterskalaen.

b) $y = 1{,}4 \cdot 10^5 \cdot 0{,}1288^m$ y gen. årlige antal med mindst Richtertallet m.

$m = 4{,}5$.

$$y = 1{,}4 \cdot 10^5 \cdot 0{,}1288^{4{,}5} = 13{,}82768$$

Dvs. at der i gennemsnit er $\underline{\underline{\textit{knap } 14}}$ jordskælv med Richtertallet mindst 4,5 om året.

$y = 10$:

$$10 = 1{,}4 \cdot 10^5 \cdot 0{,}1288^m \quad \Leftrightarrow$$
$$\frac{10}{1{,}4 \cdot 10^5} = 0{,}1288^m \quad \Leftrightarrow$$
$$m = \frac{\ln 0{,}0000714285714}{\ln 0{,}1288} = 4{,}6581$$

Dvs. at Richtertallet på de 10 årlige jordskælv er mindst $\underline{\underline{4{,}7}}$

c) En sammenhæng mellem E og y findes ved at isolere m i den første ligning og indsætte den i den anden:

$$\log E = 2{,}4m - 1{,}2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\frac{\log E + 1{,}2}{2{,}4} = m$$

Indsættes:

$$y = 1{,}4 \cdot 10^5 \cdot 0{,}1288^m = 1{,}4 \cdot 10^5 \cdot 0{,}1288^{\frac{\log E + 1{,}2}{2{,}4}} = 1{,}4 \cdot 10^5 \cdot \sqrt[2{,}4]{0{,}1288}^{\,\log E + 1{,}2} =$$
$$1{,}4 \cdot 10^5 \cdot \sqrt[2{,}4]{0{,}1288}^{\,1{,}2} \cdot \sqrt[2{,}4]{0{,}1288}^{\,\log E} = \underline{\underline{50244 \cdot 0{,}4257^{\log E}}}$$

3.009: Rumfanget af en cylinder med højden $2t$ og grundfladeradius r er givet ved:

$$V(r,t) = \pi \cdot r^2 \cdot (2t) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot t$$

Dette er altså rumfanget som funktion af 2 variable, og nu skal variablen r udtrykkes ved t, så rumfanget bliver en funktion af t alene.

Grundfladeradius r og den halve højde t udgør kateterne i en retvinklet trekant, hvor kuglens radius er hypotenusen. Da kuglens radius er 10, har man altså:

$$r^2 + t^2 = 10^2 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 = 100 - t^2.$$

Dette indsættes i det øverste udtryk, og man får:

$$V(t) = 2 \cdot \pi \cdot \left(100 - t^2\right) \cdot t = \underline{\underline{200\pi \cdot t - 2\pi \cdot t^3}}$$

3.010: $f(t) = 1{,}00 - 0{,}60 \cdot 0{,}9^t \quad ; \quad t \geq 0$

Da $f(t)$ er effektiviteten, og da det fremgår af teksten (og funktionsudtrykket hvis man kigger nærmere på det), at effektiviteten øges med tiden, begynder effektiviteten under de 0,95, og man skal altså løse ligningen $f(t)$=0,95. Dette kan gøres med 'solve':

$solve(0{,}95 = 1{,}00 - 0{,}60 \cdot 0{,}9^x, x)$ der giver x = 23,58

Udøveren skal altså være beskæftiget med arbejdet i $\underline{\underline{godt\ 23½\ uge}}$, før effektiviteten er 0,95.

3.011: $$f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x-\pi}{2}\right) + 2 \quad ; \quad 0 \leq x \leq 4\pi$$

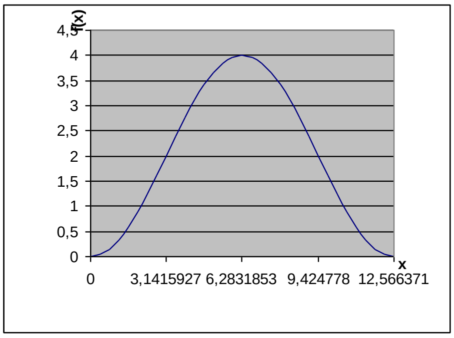
a) Nulpunkterne kan bestemmes på forskellige måder. En måde er at tegne grafen på lommeregneren i vinduet $x \in [0;4\pi]$ og bestemme nulpunkter ved "zero". En anden måde er at bestemme dem analytisk:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot \sin\left(\frac{x-\pi}{2}\right) + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{x-\pi}{2}\right) = -1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{x-\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + p \cdot 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x - \pi = 3\pi + p \cdot 4\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = 4\pi + p \cdot 4\pi$$

De eneste af disse værdier, der ligger inden for definitionsmængden er: $\underline{\underline{x = 0 \quad \vee \quad x = 4\pi}}$

En "skitse" af grafen er så:



b) For at vise at funktionen har et maksimum (som det tydeligt ses på grafen), arbejdes med den afledede funktion:

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{x-\pi}{2}\right)$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\cos\left(\frac{x-\pi}{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{x-\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + p \cdot \pi \quad \Leftrightarrow$$

$$x - \pi = \pi + p \cdot 2\pi \quad \Leftrightarrow$$

$$x = 2\pi + p \cdot 2\pi$$

Af disse værdier er der 3 inden for definitionsmængden: $x = 0 \quad \vee \quad x = 2\pi \quad \vee \quad x = 4\pi$

Fortegnet for den afledede funktion bestemmes i de 2 intervaller afgrænset af ovenstående 3 værdier:

$f'(1) = 0{,}48 > 0$

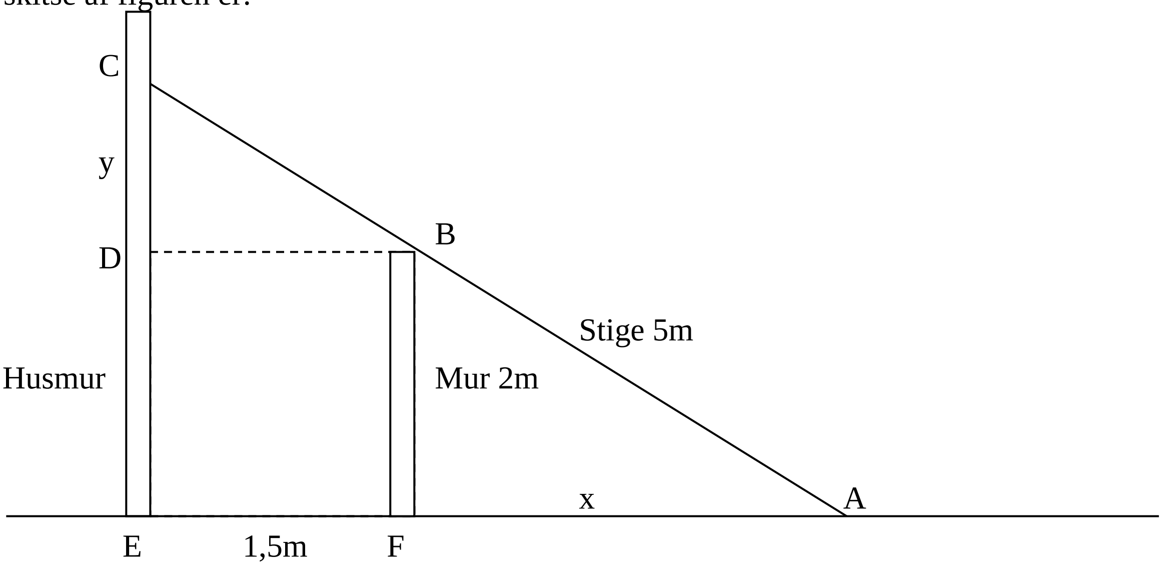
$f'(10) = -0{,}96 < 0$

Hermed bliver fortegnsskemaet:

x	0		2π		4π
$f'(x)$	0	+	0	-	0
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Det ses altså, at funktionen har et $\underline{\underline{maksimum\ \ for\ x = 2\pi}}$

3.012: a) En skitse af figuren er:



Da husmuren og muren er parallelle, danner stigen de 2 ensvinklede trekanter ABF og BCD.
Hermed er:

$$\frac{|CD|}{|BF|} = \frac{|DB|}{|FA|} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{2} = \frac{1{,}5}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = \frac{3}{x}}}$$

Da husmuren må formodes at stå vinkelret på jordoverfladen, er trekant ACE retvinklet, så Pythagoras giver:

$$|AE|^2 + |CE|^2 = |AC|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(|EF| + |FA|\right)^2 + \left(|CD| + |DE|\right)^2 = 5^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{(1{,}5 + x)^2 + (y+2)^2 = 25}}$$

b) Den første ligning indsættes i den anden:

$$(1{,}5 + x)^2 + \left(\frac{3}{x} + 2\right)^2 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad 2{,}25 + x^2 + 3x + \frac{9}{x^2} + 4 + \frac{12}{x} = 25$$

Hvis x = 0, svarer det til, at stigen står lodret, og så kan den ikke stå op ad husmuren, så denne værdi kan ikke bruges. Derfor kan ovenstående ligning ganges igennem med x^2:

$$x^4 + 3x^3 - 18{,}75x^2 + 12x + 9 = 0$$

Dette er en fjerdegradsligning, der kan have op til 4 løsninger. De findes med solve:

Solve($x^4 + 3x^3 - 18{,}75x^2 + 12x + 9 = 0$,x), der giver løsningerne:

$$x = 2{,}1987 \quad \vee \quad x = 1{,}5 \quad \vee \quad x = -0{,}4357 \quad \vee \quad x = -6{,}263$$

Alle løsninger er altså fundet, og da x skal være positiv, har man, at de mulige afstande mellem muren og stigens fodpunkt er $\underline{\underline{1{,}5m \quad og \quad 2{,}20m}}$

3.013: Længderne angives i meter, så ligningerne bliver uden enheder.

Arealet af dugen er:

$$A = 2{,}0 \cdot 1{,}1$$

Arealet af dugen efter vask er:

$$A \cdot (1 - 0{,}05) = 2{,}0 \cdot (1 - x) \cdot 1{,}1 \cdot (1 - x)$$

Ved at dividere den nederste ligning med den øverste fås:

$$\frac{A \cdot 0{,}95}{A} = \frac{2{,}0 \cdot (1-x) \cdot 1{,}1 \cdot (1-x)}{2{,}0 \cdot 1{,}1} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{0{,}95 = (1-x)^2}}$$

Man skal åbenbart ikke løse ligningen, men kun opstille den, så ovenstående er et facit.

3.014: a) Da beholderen består af en cylinder med en halvkugleudhulning, har man:

$$V_{beholder} = V_{cylinder} - V_{halvkugle} = \pi \cdot r^2 \cdot h - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \underline{\underline{\pi \cdot r^2 \cdot \left(h - \frac{2}{3} \cdot r\right)}}$$

Da rumfanget er 20 dm^3 :

$$20 = \pi \cdot r^2 \cdot h - \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad \Leftrightarrow \quad \pi \cdot r^2 \cdot h = 20 + \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad \Leftrightarrow$$

$$h = \frac{20 + \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3}{\pi \cdot r^2} = \underline{\underline{\frac{20}{\pi \cdot r^2} + \frac{2}{3} \cdot r}}$$

Det er dog lidt uklart, om beholderen skal kunne rumme 20 dm^3 inden i cylinderen eller oven i halvkuglen. Her er opgaven løst, som om der spørges efter rumfanget inden i cylinderen, da den anden mulighed ikke inddrager cylinderens højde, hvorfor den sidste del af spørgsmålet ikke ville give mening.

b) Overfladen består en cylinder med bund men uden top samt en halvkugle. Så man har:

$$A_{beholder} = A_{cylinderbund} + A_{cylinderside} + A_{halvkugle} =$$

$$\pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 3 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = \underline{\underline{\pi \cdot r \cdot (3 \cdot r + 2 \cdot h)}}$$

3.015:

a) Kvadratet har arealet 1, da sidelængderne begge er 1.
Trekant ABC's areal bestemmes ved at trække arealerne af de 3 andre trekanter fra kvadratets areal:

$$T_{ABC} = 1 - \frac{1}{2} \cdot x \cdot x - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1 - x) = 1 - \frac{x^2}{2} - 1 + x = \underline{\underline{x - \frac{x^2}{2}}}$$

b) *x* skal ligge mellem 0 og 1, så på grafregneren indtastes arealet som funktion af *x*, og vinduet sættes, så $x \in [0;1]$ og $y \in [0,1]$.
Tegn en skitse!!!
Ved hjælp af 'maximum' bestemmes det sted (markér det på skitsen og angiv koordinatsættet), hvor arealet er størst (eller også bemærkes det, at det er i intervalendepunktet):

Man har altså, at $\underline{\underline{x = 1}}$ giver det største areal (der så er ½).

3.016: a) Gavlen indtegnes i et koordinatsystem, så dens højeste punkt ligger på *y*-aksen og fodpunkterne ligger på *x*-aksen.

Lad forskriften være $f(x) = ax^2 + bx + c$

Med det pågældende valg af koordinatsystem bliver skæringen med *y*-aksen og dermed *c*-værdien: $c = 4{,}8$

Toppunktets førstekoordinat er $-\frac{b}{2a}$, og da den er 0, har man: $b = 0$

Et af fodpunkterne har koordinatsættet (2,5 ; 0), hvilket bruges til at bestemme *a*-værdien:

$$0 = a \cdot 2{,}5^2 + 4{,}8 \quad \Leftrightarrow \quad -4{,}8 = 6{,}25a \quad \Leftrightarrow \quad a = -0{,}768$$

$$\underline{\underline{f(x) = -0{,}768x^2 + 4{,}8}}$$

b) Hvis portens bredde skal være 3m, kan dens maksimale højde findes ved at bestemme:

$f(1{,}5) = -0{,}768 \cdot 1{,}5^2 + 4{,}8 = 3{,}072$, da den så er placeret lige i midten af gavlen.

Porten kan altså højest være $\underline{\underline{3{,}07m}}$

Hvis portens højde skal være 3,5m, kan dens maksimale bredde bestemmes ud fra:

$$3{,}5 = -0{,}768x^2 + 4{,}8 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1{,}3}{0{,}768} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1{,}30104$$

Igen er den optimale placering af porten i midten af gavlen, så den maksimale bredde bliver:
$B_{maks} = 2 \cdot 1{,}30104m = \underline{\underline{2{,}6m}}$

4.001: a) På boksplottet aflæses mindste og største observation (som der ikke spørges om) ved endepunkterne angivet med lodrette streger.

Nedre kvartil aflæses ved den lodrette streg, der udgør boksens venstre side, øvre kvartil ved stregen, der udgør boksens højre side, og medianen aflæses ved stregen, der ligger inden i boksen:

$$X_{\min} = 00$$

$$Nedre\ kvartil = \underline{\underline{6}}$$

$$Median = \underline{\underline{8}}$$

$$Øvre\ Kvartil = \underline{\underline{9}}$$

$$X_{\max} = 13$$

4.002: a) På TI n'spire under 'Lister og regneark' indtastes de 15 observationer blandt læger i liste A og de 10 observationer blandt kvinder i liste B. Listerne navngives 'Læger' og 'Kvindelæger'

Der er kun én variabel i spil (nemlig antal indgreb), så der vælges:

'Statistik'→'Statistiske beregninger'→'Statistik med én variabel'.

Så vælges 2 lister (fordi der er to sæt observationer).

Som den første liste vælges liste A, og som den anden liste vælges liste B.

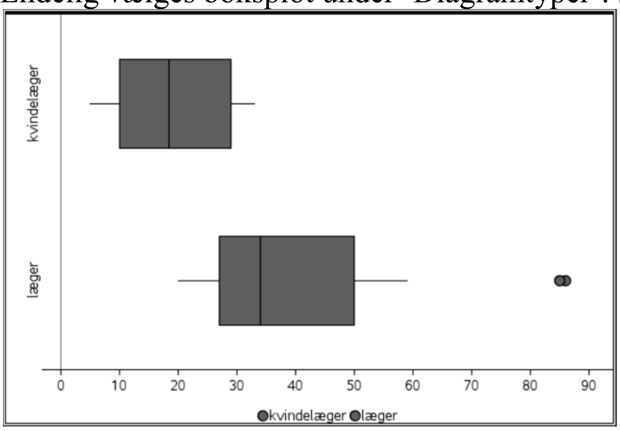
	A læger	B kvinde...	C	D	E	F	G	H	I
◆				=OneVar(a	=OneVar(b				
1	27	19	Titel	Statistik ...	Statistik ...				
2	50	7	$\bar{x}$	41.3333...	19.1				
3	33	14	Σx	620.	191.				
4	25	25	Σx²	31572.	4571.				
5	86	5	sx := sn-...	20.6074...	10.1264...				
6	25	33	σx := σn...	19.9086...	9.60676...				
7	85	29	n	15.	10.				
8	31	18	MinX	20.	5.				
9	37	31	Q₁X	27.	10.				
10	44	10	MedianX...	34.	18.5				
11	20		Q₃X	50.	29.				
12	36		MaxX	86.	33.				
13	59		SSX := Σ...	5945.33...	922.9				
14	34								
15	28								

E15

Ud fra dette kan man aflæses største og mindste observation samt kvartilsættet, der kan bruges til at tegne et boksplot.

Hvis lommeregneren skal tegne et boksplot, skal man åbne en ny side med 'diagrammer og statistik' og der tilføjes en variabel på x-aksen. Derefter højreklikkes på x-aksen, så man kan tilføje endnu en x-variabel.

Endelig vælges boksplot under 'Diagramtyper'. Så man får:



Det bemærkes, at den højeste observation hos lægerne ikke er angivet ordentligt. Stregen skulle have været forlænget ud til de to cirkler.

På TI-89:

Tallene indtastes i stat/list editoren, og der laves 1-variabel statistik på dem hver for sig. Dette giver:

Læger generelt:

$X_{\min} = 20$

$\textit{Nedre kvartil} = 27$

$\textit{Median} = 34$

$\textit{Øvre Kvartil} = 50$

$X_{\max} = 86$

Kvindelige læger:

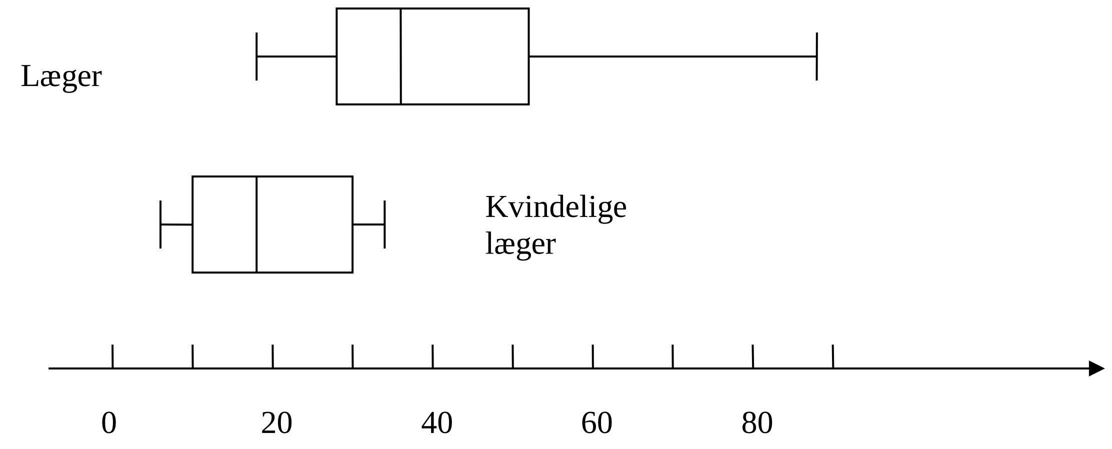
$X_{\min} = 5$

$\textit{Nedre kvartil} = 10$

$\textit{Median} = 18{,}5$

$\textit{Øvre Kvartil} = 29$

$X_{\max} = 33$



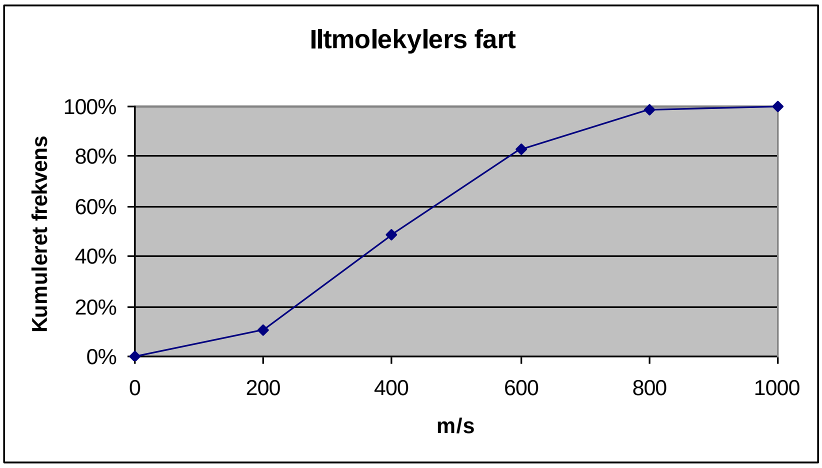
b) Ved at se på boksplottene ses det for det første, at de mandlige læger er langt mere tilbøjelige til at foretage indgrebet (Den største observation blandt kvinderne ligger under medianen blandt lægerne, så der må være en betydelig andel af de 15 læger, der er mænd, og de er tydeligvis mere tilbøjelige til at foretage indgrebet).

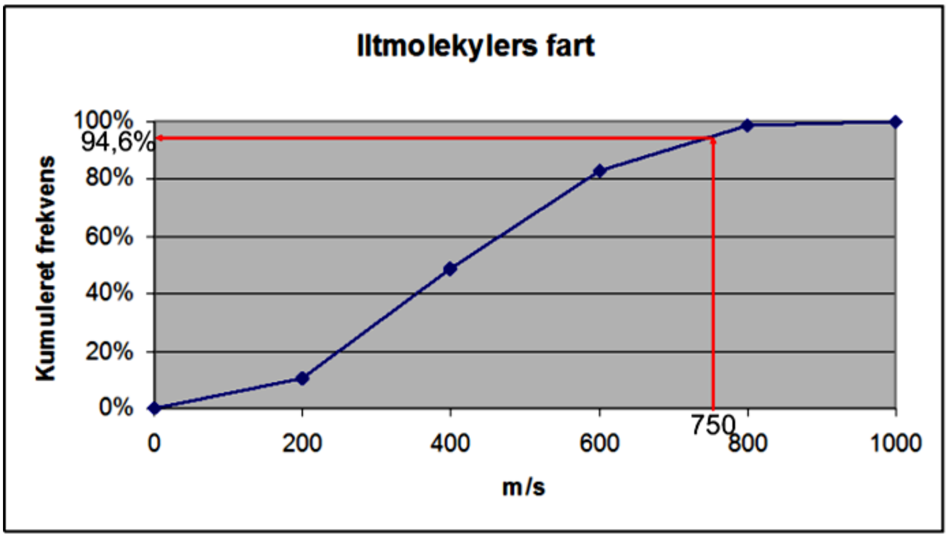
Og så er der åbenbart ikke så mange kvindelige læger blandt de 15, for 50% af de kvindelige læger ligger under den laveste af lægerne generelt.

Der er desuden nogle få (måske én) ret ekstrem mandlig læge. Blandt kvinderne ses der ikke de store afvigelser mellem de enkelte læger.

4.003: a) Den kumulerede frekvens udregnes og bruges til at tegne sumkurven:

Fart i m/s	0-200	200-400	400-600	600-800	800-1000
Kumuleret frekvens	10,5	48,5	83	98,5	100





Man går lodret op fra 1. aksen ved 750 m/s og vandret ud fra skæringen med sumkurven. Her aflæses, at det er 94,6%, der har hastigheder under 750 m/s. Dvs. at det er 5,4%, der har hastigheder over 750m/s.

4.004: a) Nulhypotesen er, at dødeligheden inden for 30 dage er den samme på OUH og de øvrige hjertecentre.

Med andre ord skal det undersøges, om dødeligheden inden for 30 dage er uafhængig af, om hjerteklapoperationen foretages på OUH eller på de øvrige hjertecentre, og dermed er det et χ^2-uafhængighedstest, der skal foretages.

TI n'spire:
Først gemmes tallene i en matrice:

$$a := \begin{bmatrix} 11 & 206 \\ 32 & 1374 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 11 & 206 \\ 32 & 1374 \end{bmatrix}$$

Derefter vælges under 'menu' (lommeregner) eller værktøjerne (computer): 'Statistik'→'Statistiske tests'→'χ^2-uafhængighedstest'.
Da matricen er gemt som 'a', vælges denne som observerede matrix, og man får:

χ²2way *a*: *stat.results*

"Titel"	"χ²–uafhængighedstest"
"χ²"	5.68631589325
"PVal"	0.017097712715
"df"	1.
"ExpMatrix"	"[...]"
"CompMatrix"	"[...]"

Lommeregneren har angivet, at der er 1 frihedsgrad (df), og den giver χ^2-testværdien 5,69.
Endelig giver den sandsynlighedsværdien 1,7%, og da testet blev udført med et 5%-signifikansniveau, må nulhypotesen forkastes, dvs. dødeligheden inden for 30 dage efter en hjerteklapoperation er IKKE ens ved OUH og de øvrige hjertecentre.

Alternativt kan man klare det hele direkte ved:

χ²2way $\begin{bmatrix} 11 & 206 \\ 32 & 1374 \end{bmatrix}$:*stat.results*

"Titel"	"χ²–uafhængighedstest"
"χ²"	5.68631589325
"PVal"	0.017097712715
"df"	1.
"ExpMatrix"	"[...]"
"CompMatrix"	"[...]"

Første del af udtrykket er skrevet "chi22way"

TI-89: Først skal der skabes en matrix. Dette gøres ved:
[11,32;206,1374]→a (bemærk hvor der er anvendt komma og semikolon inden i []).
Under Flashapplikationerne (FlashAPPS) vælges 'Stat/List-editoren'.
Med F6 vælges 'Tests' og 'Chi2 2-way' og som matrix vælges 'a'.
Lommeregneren giver så:
Chi-2 = 5,6863
P value = 0,0170977
Df = 1
Dermed kan man konkludere det samme som vist ovenfor.

Delvist i hånden:

Først skal man bestemme de værdier, der svarer til nulhypotesen.

Man udregner summen af rækkerne og søjlerne:

	Død inden for 30 dage	Overlevet	I alt opereret
OUH	11	206	217
Øvrige	32	1374	1406
I alt	43	1580	**1623**

Da i alt 43 ud af 1623 er døde inden for 30 dage, og da 217 er opereret på OUH og 1406 på øvrige har man:

$$OUH_{død} = \frac{43}{1623} \cdot 217 = 5,74922982132$$

$$OUH_{overlevet} = \frac{1580}{1623} \cdot 217 = 211,250770179$$

$$Øvrige_{død} = \frac{43}{1623} \cdot 1406 = 37,2507701787$$

$$Øvrige_{overlevet} = \frac{1580}{1623} \cdot 1406 = 1368,74922982$$

Dvs. den forventede tabel er:

FORVENTET	Død inden for 30 dage	Overlevet	I alt opereret
OUH	6	211	217
Øvrige	37	1369	1406
I alt	43	1580	**1623**

Så kan teststørrelsen χ^2 beregnes:

$$\sum \frac{(obs - forv)^2}{forv} =$$

$$\frac{(11-5,74923)^2}{5,74923} + \frac{(32-37,25077)^2}{37,25077} + \frac{(206-211,25077)^2}{211,25077} + \frac{(1374-1368,74923)^2}{1368,74923} =$$

5,6863158932529

For at se, om nulhypotesen skal forkastes, indtastes på TI n'spire:

χ²Cdf(0,5.68631589,1)	0.982902287253
1−0.98290228725345	0.017097712747

Dette viser altså, at der kun er 1,7% chance for, at nulhypotesen er rigtig, dvs. den skal forkastes.

b) Da p = 0,017 = 1,7%, ville konklusionen være, at man ikke kan forkaste hypotesen om, at dødeligheden ved operationen er ens ved OUH og de øvrige hjertecentre.

Hvis man benytter signifikansniveauet 5%, vil man ifølge a) konkludere, at dødeligheden er større på OUH ved hjerteklapoperationer end på de øvrige hjertecentre.

Konklusionen er dog ikke nødvendigvis korrekt, for hvis man forestiller sig, at OUH er eksperter i operationen og derfor får de mest komplicerede af hjerteklapoperationerne, vil "sværhedsgraden" være en skjult variabel, der giver en systematisk fejl.

"Sværhedsgraden" vil nemlig både korrelere med den uafhængige variabel (De sværeste operationer ender på OUH) og på den afhængige variabel (jo højere sværhedsgrad, jo større dødelighed).

4.005: Der er spurgt 500 i alt, og man nu udregne:

$$Kvinder_{for} = \frac{sum_{for}}{Antal\ personer} \cdot Antal\ kvinder = \frac{266}{500} \cdot 264 = 140,448$$

$$Kvinder_{imod} = \frac{sum_{imod}}{Antal\ personer} \cdot Antal\ kvinder = \frac{149}{500} \cdot 264 = 78,672$$

$$Kvinder_{ved\ ikke} = \frac{sum_{ved\ ikke}}{Antal\ personer} \cdot Antal\ kvinder = \frac{85}{500} \cdot 264 = 44,88$$

$$Mænd_{for} = \frac{sum_{for}}{Antal\ personer} \cdot Antal\ mænd = \frac{266}{500} \cdot 236 = 125,552$$

$$Mænd_{imod} = \frac{sum_{imod}}{Antal\ personer} \cdot Antal\ mænd = \frac{149}{500} \cdot 236 = 70,328$$

$$Mænd_{ved\ ikke} = \frac{sum_{ved\ ikke}}{Antal\ personer} \cdot Antal\ mænd = \frac{85}{500} \cdot 236 = 40,12$$

Dvs. at tabellen bliver:

FORVENTET	For	Imod	Ved ikke	Sum
Kvinder	140	79	45	264
Mænd	126	70	40	236
Sum	266	149	85	500

Så kan χ^2-teststørrelsen beregnes:

$$\chi^2 = \sum \frac{(obs - forv)^2}{forv} = \frac{(151-140,448)^2}{140,448} + \frac{(79-78,672)^2}{78,672} + \frac{(34-44,88)^2}{44,88} +$$

$$\frac{(115-125,552)^2}{125,552} + \frac{(70-70,328)^2}{70,328} + \frac{(51-40,12)^2}{40,12} = \underline{\underline{7,2706052302}}$$

p-værdien bestemmes nu ved indtastningen (antallet af frihedsgrader er to, da man ud fra kendskabet til to "passende" observationer kan beregne resten):

$\chi^2Cdf(0,7.2706052302,2)$	0.973624048582
1−0.97362404858158	0.026375951418

Dvs. at $\underline{\underline{p = 0,026 = 2,6\%}}$

Hvis man arbejder med et signifikansniveau på 5% (hvilket er det normale), vil man altså forkaste hypotesen om, at de to køn har samme indstilling.

Man kunne også have fundet svarene på de to spørgsmål ved på TI n'spire at indtaste:

$\chi^2 2way \begin{bmatrix} 151 & 79 & 34 \\ 115 & 70 & 51 \end{bmatrix} : stat.results$

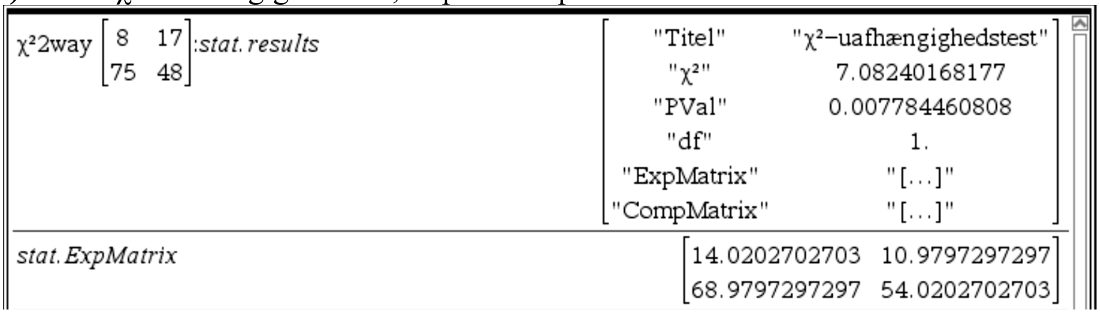
$$\begin{bmatrix} \text{"Titel"} & \text{"}\chi^2\text{–uafhængighedstest"} \\ \text{"}\chi^2\text{"} & 7.2706052302 \\ \text{"PVal"} & 0.026375951418 \\ \text{"df"} & 2. \\ \text{"ExpMatrix"} & \text{"[...]"} \\ \text{"CompMatrix"} & \text{"[...]"} \end{bmatrix}$$

$stat.ExpMatrix$

$$\begin{bmatrix} 140.448 & 78.672 & 44.88 \\ 125.552 & 70.328 & 40.12 \end{bmatrix}$$

På TI-89 kan man udregne det hele ved:
[151,79,34;115,70,51]→a (bemærk hvor der er anvendt komma og semikolon inden i []).
Under Flashapplikationerne (FlashAPPS) vælges 'Stat/List-editoren'.
Med F6 vælges 'Tests' og 'Chi2 2-way' og som matrix vælges 'a'.
Lommeregneren giver så:
Chi-2 = 7,2706052302
P value = 0,026375951418
Df = 2

<u>*4.006:*</u> a) Det er χ^2-uafhængighedstest, så på TI n'spire indtastes:



Den opstillede tabel bliver altså:

FORVENTET	Gruppe A	Gruppe B	I alt
Død	14	11	25
Overlevende	69	54	123
I alt	83	65	148

b) Med et signifikansniveau på 5% og p-værdi på 0,778%, kan man altså forkaste nulhypotesen og konkludere, at <u>medicineringen ser ud til at have (positiv) betydning for patienternes overlevelseschancer.</u>

<u>På TI-89</u> kan man bestemme p-værdien ved:
[8,17;75,48]→a (bemærk hvor der er anvendt komma og semikolon inden i []).
Under Flashapplikationerne (FlashAPPS) vælges 'Stat/List-editoren'.
Med F6 vælges 'Tests' og 'Chi2 2-way' og som matrix vælges 'a'.
Lommeregneren giver så:
Chi-2 = 7,08240168177
P value = 0,007784460808
Df = 1

4.007: a) Nulhypotesen er, at de to operationstyper giver samme problemer med forstoppelse, og man kan så beregne de forventede værdier ved:

$$Ja_{hjerte} = \frac{Ja_{total}}{Antal\ patienter} \cdot Total_{hjerte} = \frac{24}{111} \cdot 60 = \underline{\underline{12,972972973}}$$

$$Nej_{hjerte} = \frac{Nej_{total}}{Antal\ patienter} \cdot Total_{hjerte} = \frac{87}{111} \cdot 60 = \underline{\underline{47,027027027}}$$

$$Ja_{lunge} = \frac{Ja_{total}}{Antal\ patienter} \cdot Total_{lunge} = \frac{24}{111} \cdot 51 = \underline{\underline{11,027027027}}$$

$$Nej_{lunge} = \frac{Nej_{total}}{Antal\ patienter} \cdot Total_{lunge} = \frac{87}{111} \cdot 51 = \underline{\underline{39,972972973}}$$

b) Så kan χ^2-teststørrelsen beregnes:

$$\chi^2 = \sum \left(\frac{(obs - forv)^2}{forv} \right)$$

$$= \frac{(9-12,97)^2}{12,97} + \frac{(51-47,03)^2}{47,03} + \frac{(15-11,03)^2}{11,03} + \frac{(36-39,97)^2}{39,97} = \underline{\underline{3,3735}}$$

Der er 1 frihedsgrad i undersøgelsen, da man kun behøver at kende ét af tallene for at udregne de andre, og så kan p-værdien bestemmes på TI n'spire ved:

χ²Cdf(0,3.3735,1)	0.933747136481
1−0.93374713648094	0.066252863519

Dvs. at $\underline{\underline{p = 6,6\%}}$

Da man normalt arbejder med et 5% signifikansniveau, kan man ikke forkaste nulhypotesen, dvs. <u>der er ikke signifikant forskel på omfanget af forstoppelse ved de to operationer.</u>

Det kunne også have været beregnet på TI n'spire ved:

$\chi^2 2way \begin{bmatrix} 9 & 51 \\ 15 & 36 \end{bmatrix} : stat.results$

"Titel"	"χ²−uafhængighedstest"
"χ²"	3.37868914807
"PVal"	0.066044563449
"df"	1.
"ExpMatrix"	"[...]"
"CompMatrix"	"[...]"

4.008: a) Der er 179 adspurgte, og man kan så beregne:

$$Hunkøn_{ryger} = \frac{Sum_{ryger}}{Antal\ elever} \cdot Hunkøn_{sum} = \frac{36}{179} \cdot 78 = 15,687150838$$

$$Hunkøn_{Ikke-ryger} = \frac{Sum_{Ikke-ryger}}{Antal\ elever} \cdot Hunkøn_{sum} = \frac{143}{179} \cdot 78 = 62,312849162$$

$$Hankøn_{ryger} = \frac{Sum_{ryger}}{Antal\ elever} \cdot Hankøn_{sum} = \frac{36}{179} \cdot 101 = 20,312849162$$

$$Hankøn_{Ikke-ryger} = \frac{Sum_{Ikke-ryger}}{Antal\ elever} \cdot Hankøn_{sum} = \frac{143}{179} \cdot 101 = 80,687150838$$

Man har altså:

Forventet	Ryger	Ikke-ryger	Sum
Hunkøn	15,687	62,313	78
Hankøn	20,313	80,687	101
Sum	36	143	179

b) På TI n'spire kan man finde både χ^2-teststørrelsen og p-værdien (og man kunne også have fået tabellen ovenfor) ved:

$\chi^2 2way \begin{bmatrix} 21 & 57 \\ 15 & 86 \end{bmatrix}$: stat.results

$$\begin{bmatrix} \text{"Titel"} & \text{"}\chi^2\text{–uafhængighedstest"} \\ \text{"}\chi^2\text{"} & 3.99171522182 \\ \text{"PVal"} & 0.045724495373 \\ \text{"df"} & 1. \\ \text{"ExpMatrix"} & \text{"[...]"} \\ \text{"CompMatrix"} & \text{"[...]"} \end{bmatrix}$$

stat.ExpMatrix

$$\begin{bmatrix} 15.687150838 & 62.312849162 \\ 20.312849162 & 80.687150838 \end{bmatrix}$$

Man har altså:

$$\chi^2 = 3,9917 \qquad p = 4,57\%$$

c) Man har fået en χ^2-teststørrelse på 6,34, og da der er én frihedsgrad i undersøgelsen, da man kun behøver at kende én værdi for at beregne resten, kan man finde p-værdien på TI n'spire ved:

χ^2Cdf(0,6.34,1)	0.988195511879
1−0.98819551187917	0.011804488121

Dvs. p = 1,2%, og dermed kan man med signifikansniveauet 5% forkaste nulhypotesen. Dermed giver undersøgelsen IKKE belæg for at hævde, at rygevaner er uafhængige af køn.

4.009: a) Det er et χ^2-uafhængighedstest, og det foretages på TI n'spire ved:

$\chi^2 2way \begin{bmatrix} 18 & 43 & 10 \\ 48 & 175 & 41 \end{bmatrix}$: *stat.results*

"Titel"	"χ^2–uafhængighedstest"
"χ^2"	1.8187191938
"PVal"	0.402782084641
"df"	2.
"ExpMatrix"	"[...]"
"CompMatrix"	"[...]"

Da p = 40%, vil man ikke forkaste nulhypotesen med et signifikansniveau på 5%. <u>Man vil altså ikke kunne sige, at drikkevanerne ikke er uafhængige af køn.</u> Men egentlig spørges der jo om noget andet. Der spørges om, hvorvidt der er belæg for at antage, at drikkevaner er uafhængige af køn, men den type spørgsmål kan slet ikke besvares.

b) Den nye tabel bliver:

	Drikker	Drikker ikke	Sum
Pige	61	10	71
Dreng	223	41	264
Sum	284	51	335

Dette undersøges på TI n'spire ved:

$\chi^2 2way \begin{bmatrix} 61 & 10 \\ 223 & 41 \end{bmatrix}$: *stat.results*

"Titel"	"χ^2–uafhængighedstest"
"χ^2"	0.090621781811
"PVal"	0.76338817209
"df"	1.
"ExpMatrix"	"[...]"
"CompMatrix"	"[...]"

Man får p=76%, og dermed kommer man frem til samme konklusion som i spørgsmål a), som egentlig er, at man ikke kan besvare spørgsmålet.
Og egentlig må man slet ikke ændre kategorierne uden at lave en ny undersøgelse.

4.010: Dette er et χ^2-GOF-test, da man har en række observationer, der skal sammenlignes med en forventning.

Først udregnes det forventede antal legetøjsbolde af de forskellige slags ud fra den angivne procentdel og antallet af bolde (200):

$10\% \cdot 200 = 0{,}1 \cdot 200 = 20$

$85\% \cdot 200 = 0{,}85 \cdot 200 = 170$

$5\% \cdot 200 = 0{,}05 \cdot 200 = 10$

Mindre end 20 cm	Mellem 20cm og 22cm	Over 22cm
20	170	10

Det laves så et GOF-test på TI n'spire ved:

Under'Lister og regneark' indtastes den observerede tabel (28,160,12) i liste A. I liste B indtastes den forventede tabel (ovenstående). Der vælges 'Statistik'→'Statistiske tests'→'χ^2-Goodness of Fit test'. Som observeret tabel vælges liste A, og som forventet tabel vælges liste B.

Antallet af frihedsgrader er 2, da der er tre observationer, og da man kan udregne den sidste af de tre observationer, når man kender de to første:

	A	B	C	D	E
◆				=χ²GOF(a	
1	28	20	Titel	χ²-Good...	
2	160	170	χ²	4.18823...	
3	12	10	PVal	0.12317...	
4			df	2.	
5			CompLis...	{3.2,0.58...	

P-værdien er 12,3%, dvs. med et signifikansniveau på 5% vil man ikke forkaste hypotesen om, at legetøjsboldene stammer fra den omtalte storproducent. <u>Dvs. forsendelsen kan godt stamme fra storproducenten.</u>

På TI-89 vælges FlashAPPS 'Stat/list-editor' og de observerede observationer lægges i liste 1 og de forventede i liste 2. Så vælges f6 (tests) og chi-2 GOF med obs: list 1 og forv: list2 og df: 2.

Det giver det samme resultat som med TI-n'spire.

4.011: a) De forventede hyppigheder, når der er 236 blomster beregnes:

$$h_{rød} = 0,25 \cdot 236 = \underline{\underline{59}}$$

$$h_{lyserød} = 0,50 \cdot 236 = \underline{\underline{118}}$$

$$h_{hvide} = 0,25 \cdot 236 = \underline{\underline{59}}$$

b) Man kan nu beregne χ^2-teststørrelsen på TI n'spire ved:

$$\frac{(66-59)^2}{59}+\frac{(115-118)^2}{118}+\frac{(55-59)^2}{59} \qquad 1.17796610169$$

Dvs. at $\underline{\underline{\chi^2 = 1,178}}$

Der er to frihedsgrader, så man kan udregne p-værdien ved:

χ²Cdf(0,1.17796610169,2)	0.445108705823
1−0.44510870582261	0.554891294177

Dvs. p-værdien er 55,5% og med et signifikansniveau på 5% kan man ikke forkaste nulhypotesen, dvs. <u>der er ikke belæg for at forkaste arvelighedslovene.</u>

Man kunne også have beregnet de søgte størrelser ved et GOF-test:

	A	B	C	D	E
◆				=χ²GOF(a	
1	66	59	Titel	χ²-Good...	
2	115	118	χ²	1.17796...	
3	55	59	PVal	0.55489...	
4			df	2.	
5			CompLis...	{0.83050...	

4.012: Nulhypotesen er, at klagebehandlingstiden den pågældende måned fulgte firmaets 'erfaring'. Dvs. man kan få en forventet række ved at gange procentdelen med det samlede antal klager (120):

Antal minutter	0-5	5-10	10-15	Over 15	I alt
Observeret	37	53	25	5	120
Forventet	36	48	24	12	120

Der er tre frihedsgrader, da der er fire observationer (så den sidste kan udregnes med kendskab til de tre første).

Det laves så et GOF-test på TI n'spire ved:

Under'Lister og regneark' indtastes den observerede række i liste A. I liste B indtastes den forventede række. Der vælges 'Statistik'→'Statistiske tests'→'χ^2-Goodness of Fit test'.

Som observeret tabel vælges liste A, og som forventet tabel vælges liste B.

	A	B	C	D
◆				=χ²GOF(a
1	37	36	Titel	χ²-Good...
2	53	48	χ²	4.67361...
3	25	24	PVal	0.19731...
4	5	12	df	3.
5			CompLis...	{0.02777...

Da p-værdien er 19,7%, kan man med signifikansniveauet 5% ikke forkaste nulhypotesen, dvs. <u>der er ikke belæg for at hævde, at klagebehandlingstiden har ændret sig</u>.

4.013: a) Populationen er den del af danskerne, der stemmer.

Stikprøven er de 968 respondenter i meningsmålingen.

Procenterne omregnes til forventede og observerede stemmetal ved at multiplicere procentdelen med 968.

Parti	S	Rad	Kons	SF	DF	V	EL	Lib.All	Kr. Dem
Observeret antal stemmer	255	52	93	164	137	232	20	11	5
Forventet antal stemmer	247	49	101	126	134	255	21	27	9

b) Der laves χ^2-GOF test på tabellen. Der er 8 frihedsgrader. Det er lidt betænkeligt, at der kun er observeret 5 stemmer hos Kr. Dem, da testet så er lige på grænsen til, at det kan bruges:

Det laves så et GOF-test på TI n'spire ved:

Under'Lister og regneark' indtastes den observerede række i liste A. I liste B indtastes den forventede række. Der vælges 'Statistik'→'Statistiske tests'→'χ^2-Goodness of Fit test'.

Som observeret tabel vælges liste A, og som forventet tabel vælges liste B.

	A	B	C	D	E
◆					=χ²GOF(a
1	255	247	Titel	Titel	χ²−Good...
2	52	49	χ²	χ²	25.9853...
3	93	101	PVal	PVal	0.00105...
4	164	126	df	df	8.
5	137	134	CompLis...	CompLis...	{0.25910...
6	232	255			
7	20	21			
8	11	27			
9	5	9			

Dvs. $\chi^2 = 25{,}985 \qquad p = 0{,}1\%$

Med et signifikansniveau på 5% må nulhypotesen altså forkastes, dvs. stemmefordelingen ser ud til at have ændret sig.

c) Når tabellens værdier slås sammen (hvilket inden for statistisk er en strengt ulovlig fremgangsmåde, når det ikke er sket, før man har set resultaterne) får man:

Parti	SF	Ikke-SF
Observeret antal stemmer	164	804
Forventet antal stemmer	126	842

Der er nu kun 1 frihedsgrad, men ellers testes det på samme måde:

	A	B	C	D
◆				=χ²GOF(a[],b[],1): Co
1	164	126	Titel	χ²−Goodness of Fit t...
2	804	842	χ²	13.1752818309
3			PVal	2.8366606332E-4
4			df	1.
5			CompLis...	{11.460317460317,1...

Da p-værdien ikke kan være større end 1, kan man se, at man skal have det hele med, så man kan se, at $p = 2{,}83666 \cdot 10^{-4} = 0{,}0284\%$

Som nævnt har man foretaget en ulovlig sammentælling, men hvis man bare skal konkludere på tallene, er SF's fremgang signifikant med et signifikansniveau på 5%.

5.001:

a) Der benyttes stat/list-editoren, og værdierne fra tabellen indskrives som henholdsvis list1 og list2, hvorefter der laves lineær regression med list2 som funktion af list1:
Det giver: $\underline{\underline{g(t) = 0{,}830 \cdot t + 226{,}8}}$

b) Først isoleres t i udtrykket med Fahrenheit-temperaturen:

$$F = 1{,}8 \cdot t + 32 \Leftrightarrow$$

$$F - 32 = 1{,}8 \cdot t \Leftrightarrow$$

$$\frac{F - 32}{1{,}8} = t$$

Dette indsættes i udtrykket for trykket:

$$g(F) = 0{,}830 \cdot \frac{F - 32}{1{,}8} + 226{,}8 = \underline{\underline{0{,}461 \cdot F + 212{,}0}}$$

I Maple bliver udregningerne:

restart
with(*Gym*) :
a) Da det er en lineær funktion, og da man har mere end to punkter, skal der anvendes lineær regression:
temperatur := [5.0, 10.1, 29.9, 40.0, 70.2, 90.1] :
tryk := [231.1, 235.1, 251.1, 260.2, 285.1, 301.5] :
$g(t)$:= *LinReg*(*temperatur*, *tryk*, *t*) :
$g(t) = 0.829926577718869\, t + 226.753168414260$
Forskriften for trykfunktionen er altså:
$\underline{\underline{g(t) = 0,83 \cdot t + 226,75}}$

b) Da Fahrenheit-temperaturen som funktion af celsius-temperaturen er givet ved $F(t) := 1,8 \cdot t + 32$: , kan man isolere t i denne forskrift og efterfølgende indsætte dette i den første forskrift:

$$F(t) = 1,8 \cdot t + 32 \Leftrightarrow$$

$$F(t) - 32 = 1,8 \cdot t \Leftrightarrow$$

$$\frac{F(t) - 32}{1,8} = t$$

Dette indsættes i den første funktion:

$$g(F) = 0,829926577718869 \cdot \frac{F(t) - 32}{1,8} + 226,753168414260$$

$$\underline{\underline{g(F) = 0,4610703209 \cdot F + 211,9989181}}$$

5.002: a) På Maple laves potensregression, da det er oplyst, at funktionen er en potensfunktion.

$restart$

$with(Gym):$

$Diameter := [4, 5, 6, 8, 10, 14, 16, 20, 24, 26]:$

$Brudstyrke := [250, 400, 600, 1000, 1550, 3200, 4000, 6000, 8600, 10000]:$

$f(x) := PowReg(Diameter, Brudstyrke, x):$

$$f(x) = 17.0921822651829\, x^{1.96192249099996}$$

Dvs. $\underline{\underline{f(x) = 17.0922 \cdot x^{1.961922}}}$

På TI-89 benyttes stat/list-editoren, og diameteren indskrives som list1 og tovets brudstyrke som list2, hvorefter der laves potensregression (powerregression) med list2 som funktion af list1:

Det giver: $\underline{\underline{f(x) = 17{,}1 \cdot x^{1{,}962}}}$

På TI-n'spire vælges siden "Lister og Regneark", hvorefter diameteren indskrives i søjlen A og tovets brudstyrke i søjlen B. Der trykkes på 'Menu'-knappen og vælges 'statistik'→ 'statistiske beregninger' → 'potensregression'.

Som x-liste vælges: a[]

Som y-liste vælges: b[]

Resultatet gemmes som f1 og funktionsudtrykket bliver:

$\underline{\underline{f(x) = 17{,}1 \cdot x^{1{,}962}}}$

b) Metode 1: Da brudstyrken skal fordobles, fås de 2 ligninger:

$$\left.\begin{aligned} f(x_1) &= 17{,}1 \cdot x_1^{1{,}962} \\ 2 \cdot f(x_1) &= 17{,}1 \cdot x_2^{1{,}962} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{2 \cdot f(x_1)}{f(x_1)} = \frac{17{,}1 \cdot x_2^{1{,}962}}{17{,}1 \cdot x_1^{1{,}962}} \Leftrightarrow 2 = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1{,}962} \Leftrightarrow \frac{x_2}{x_1} = \sqrt[1{,}962]{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x_2}{x_1} = 1{,}424$$

Dvs. at diameteren skal være $\underline{\underline{1{,}424 \ gange}}$ så stor.

Metode 2: Da det er en potensfunktion, kan man bruge $(1+r_y) = (1+r_x)^a$, r_y er vækstraten for den afhængige variabel, når den uafhængige variabel har haft vækstraten r_x.

Da brudstyrken skal fordobles, er $r_y = 100\% = 1$, så man får:

$$(1+1) = (1+r_x)^{1{,}961922} \quad \Leftrightarrow \quad (1+r_x) = \sqrt[1{,}961922]{2} = 1{,}423758$$

$(1+r_x)$ er fremskrivningsfaktoren for den uafhængige variabel, så <u>diameteren skal altså være 1,42 gange så stor, hvis brudstyrken skal fordobles.</u>

5.003: a) Der er mere end to punkter til rådighed, så der skal bruges regression. Derfor benyttes stats/list-editoren, og tabellens værdier indtastes, så antallet af år efter 1970 lægges i List1 og antal unger i List2, og det er opgivet, at $f(x) = b \cdot a^x$, så der benyttes ExpRegression med List2 som funktion af List1. Dette giver:

$\underline{\underline{a = 1{,}1404}}$

$\underline{\underline{b = 787}}$

Forskriften for funktionen er altså: $f(x) = 787 \cdot 1{,}1404^x$

b) 50000 unger svarer til f(x)=50000, og grafregnerens 'solve' bruges:

$solve(50000 = 787 \cdot 1{,}1404^x, x)$, der giver: x=31,6

Dvs. der vil være 50000 unger i løbet af år $\underline{\underline{2001}}$

I Maple løses opgaven ved:

restart

with(*Gym*) :

a) Modellen er en eksponentiel udvikling, da x står som eksponent. Da der er oplyst mere end to punkter, skal man anvende regression. Det bemærkes, at tiden skal være antal år EFTER 1970:

$tid := [0, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 27]$:

$unger := [700, 2500, 3400, 5200, 7500, 11000, 16000, 25300]$:

Først defineres den søgte funktion:

$f(x) := ExpReg(tid, unger, x)$:

Derefter beder man Maple om at angive funktionen:

$f(x) = 787.036654960656\ 1.14038665297092^x$

Dvs. $\underline{\underline{a = 1,14038665}}$ og $\underline{\underline{b = 787,03665}}$

b) Hvis antallet af unger skal være 50000, har man $f(x) = 50000$. Denne ligning løses ved:

$fsolve(f(x) = 50000, x) = 31.60224133$

Da tiden er antal år efter 1970, vil dette svare til år $\underline{\underline{2002}}$

5.004: a) Da det er oplyst, at sammenhængen er en eksponentiel udvikling, laves eksponentiel regression i Maple:

restart

with(*Gym*) :

Temperatur := [−25, −20, −15, −10] :

Holdbarhed := [280, 154, 91, 49] :

local D

$D(T) := ExpReg(Temperatur, Holdbarhed, T)$:

$D(T) = 15.7109064418162\ 0.891276993745327^T$

Dvs. at $\underline{\underline{D(T) = 15.7109 \cdot 0.891277^T}}$

b) $D(-18) = 15{,}7 \cdot 0{,}891^{-18} = 124{,}7305$

Dvs. at ved -18^{0}C er holdbarheden $\underline{\underline{125\ dage}}$

Hvis holdbarheden er 180 døgn har man:

$$180 = 15{,}7 \cdot 0{,}891^T \Leftrightarrow$$

$$\frac{180}{15{,}7} = 0{,}891^T \Leftrightarrow$$

$$T = \frac{\ln\left(\frac{180}{15{,}7}\right)}{\ln 0{,}891} = -21{,}18681$$

Dvs at temperaturen er $\underline{\underline{-21{,}2^0 C}}$

c) $T_{½} = \frac{\ln ½}{\ln a} = \frac{\ln ½}{\ln 0{,}891} = 6{,}0221291 = \underline{\underline{6{,}0}}$

Når temperaturen øges med 2 grader celsius har man:

$$D(T+2) = 15{,}7 \cdot 0{,}891^{T+2} = 15{,}7 \cdot 0{,}891^T \cdot 0{,}891^2 = D(T) \cdot 0{,}891^2 = D(T) \cdot 0{,}794375$$

Man har altså:

$$(1+r) = 0{,}794 \Leftrightarrow r = 0{,}794 - 1 = -0{,}206 = \underline{\underline{-20{,}6\%}}$$

5.005: a) Der er mere end to punkter til rådighed, så der skal bruges regression. Derfor benyttes stats/list-editoren, og tabellens værdier indtastes, så alderen lægges i List1 og længden i List2, og det er opgivet, at $f(x)=b\cdot x^a$, så der benyttes Powerregression med List2 som funktion af List1.

Dette giver:

$a=0{,}1178$

$b=1{,}8367$

$\underline{\underline{f(x)=1{,}8367\cdot x^{0{,}1178}}}$

b) Længden af en søko, der er 8 år gammel:

$f(8)=1{,}8367\cdot 8^{0{,}1178}=2{,}34652$

Dvs. at længden (ifølge modellen) er $\underline{\underline{2{,}35m}}$ (hvor det ses, at tabellen ved 7år afviger lidt fra modellen).

Alderen af en søko, der er 2,25 meter lang:

Dette bestemmes med grefregnerens 'solve': $solve\left(2{,}25=1{,}8367\cdot x^{0{,}1178},x\right)$, der giver x=5,600598

Dvs. at søkoen er $\underline{\underline{5{,}6\,år}}$

Regnet i Maple:

restart

a) Der er oplyst mere end to par af måleværdier, så der skal anvendes regression.

Funktionstypen er oplyst til at være $f(x)=b\cdot x^a$, så der skal anvendes potensregression.

Derfor hentes Gym-pakken og værdierne lægges ind som lister:

$with(Gym):$

$Alder := [1.5, 2.5, 5.0, 7.0, 9.5, 10.0, 13.0, 17.0, 22.5, 29.0]:$

$Længde := [1.97, 2.02, 2.15, 2.35, 2.39, 2.41, 2.47, 2.56, 2.7, 2.72]:$

$f(x) := PowReg(Alder, Længde, x):$

$f(x) = 1.83673016463457\,x^{0.117793509192114}$

Dvs. man har $\underline{\underline{b=1,\ 836730}}$ og $\underline{\underline{a=0,\ 1177935}}$ samt $\underline{\underline{f(x)=1,\ 8367\cdot x^{0,\ 11779}}}$

b) Når søkoen er 8 år gammel, er $x=8$, så man har:

$f(8) = 2.34651587740524$

Dvs. er søko på 8 år er $\underline{\underline{2,\ 35\ m}}$ lang.

Når længden er 2,25m, er $f(x)=2,\ 25$, så man har:

$solve(f(x)=2.25) = 5.600598414$

Dvs. en søko på 2,25m er $\underline{\underline{5,\ 6\ år}}$

5.006: $I = I_0 \cdot e^{-0,0393x}$

Dette er en eksponentielt aftagende funktion på formen $I = I_0 \cdot e^{-k\cdot x}$, hvor halveringskonstanten er $X_{½} = \frac{\ln(2)}{k}$, dvs. man har: $X_{½} = \frac{\ln 2}{0,0393} = 17,63733$

Da x svarer til blyvæggens tykkelse målt i mm, svarer dette til, at gammastrålingens intensitet halveres for hver $\underline{\underline{17,6mm}}$ blyvæg.

5.007: $f(t) = 3,00 - 3,00 \cdot e^{-0,0116\cdot t}$

f(t) er bromkoncentrationen målt i mmol pr. L som funktion af tiden *t*.

a) Til at begynde med er bromkoncentrationen altså 0, da *f(0)=0*. Den vil så vokse i tidens løb og nærme sig 3mmol pr. L, da $e^{-0,0116\cdot t} \to 0 \text{ for } t \to \infty$.

5.008:

$p(h) = 226 \cdot e^{-0,157\cdot(h-11)} \quad ; \quad 11 \le h \le 25$

h: Højden målt i km

p: Trykket målt i mb

a) For at finde den højde, hvor trykket er 50mb, skal man løse ligningen $p(h) = 50$

Dette gøres på et CAS-redskab med:

$solve\left(50 = 226 \cdot e^{-0,157(x-11)}, x\right)$ der giver $x = 20,60$

Dvs. at trykket er 50mb i $\underline{\underline{\text{højden } 20,6\text{km}}}$

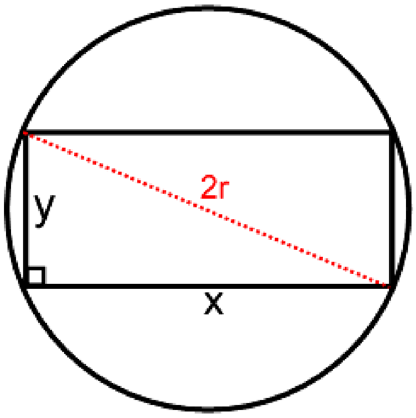
Det bemærkes, at denne højde ligger inden for det område, hvor udtrykket gælder.

b) Trykket er 226mb i 11km's højde (p(11)=226), og så aftager det eksponentielt med højden indtil 25km's højde.

Da $e^{-0,157} = 0,855$, falder trykket med 14,5% pr. km.

5.009: a) Da rektanglet skal have en længde, skal $x > 0$. Og da det er indskrevet i en cirkel, skal dets længde være mindre end cirklens diameter, dvs. $x < 2\cdot r = 2\cdot 2 = 4$

Altså er: $\underline{\underline{Dm(f) =]0;4[}}$



Da diagonalen i rektanglet er en diameter i cirklen (den går gennem centrum), giver den retvinklede trekant:

$$y^2 + x^2 = (2 \cdot r)^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \sqrt{4r^2 - x^2}$$

dvs.

$$y = \sqrt{4 \cdot 2^2 - x^2} = \sqrt{16 - x^2}$$

Og så er funktionen, der angiver arealet:

$$f(x) = x \cdot y = \underline{\underline{x \cdot \sqrt{16 - x^2}}}$$

<u>5.010:</u> Opgaven løses både i Maple og i n'spire. Først Maple:

a) Forskriften er angivet til at være $B = k \cdot M^r$, og da den uafhængige variabel M står som rod i en potens, skal der anvendes potensregression:

with(*Gym*) :
Masse := [0.16, 0.26, 0.30, 2, 11, 16, 45, 60, 70, 400, 680] :
Hvilestofskifte := [0.97, 1.45, 1.55, 4.8, 14.5, 20, 50, 68, 87, 266, 411] :
$B(M)$:= *PowReg*(*Masse*, *Hvilestofskifte*, M) :

$$B(M) = 3.37123379639039\, M^{0.721006481362033}$$

Dvs. at $\underline{\underline{k = 3,3712338}}$ og $\underline{\underline{r = 0,7210065}}$

b) Hvis hvilestofskiftet skal være 100 watt, skal $B(M) = 100$, og denne ligning løses ved:
solve($B(M) = 100$) = 110.1243476
Dvs. at massen af dyrearten er $\underline{\underline{110,1\ kg}}$

a) Det er opgivet, at sammenhængen er en potensfunktion, og det benyttes så til at lave powerregression på tabellens værdier med massen i list1 og hvilestofskiftet i list2. Det giver:

$$B = 3{,}37 \cdot M^{0{,}721}$$

Man har altså: $\underline{\underline{k = 3{,}37 \qquad r = 0{,}721}}$

På TI n'spire udføres det ved under 'Lister og regneark' at indtaste massen i liste A og hvilestofskiftet i liste B. Der vælges 'Statistik'→'Statistiske beregninger'→'Potensregression', og som x-liste vælges a[], mens y-listen er b[]. Resultatet gemmes som f1:

	A	B	C	D
◆				=PowerRe
1	0.16	0.97	Titel	Potensre...
2	0.26	1.45	RegEqn	a*x^b
3	0.3	1.55	a	3.37123...
4	2	4.8	b	0.72100...
5	11	14.5	r²	0.99499...
6	16	20	r	0.99749...
7	45	50	Resid	{0.07059...
8	60	68	ResidTra...	{0.07556...
9	70	87		
10	400	266		
11	680	411		

Man bemærker, at a-værdien svarer til k, og b-værdien svarer til r, og så har man udtrykket angivet ovenfor.

b) Hvis et dyr har et hvilestofskifte på 100 watt, har man:

$$100 = 3{,}37 \cdot M^{0{,}721} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{100}{3{,}37} = M^{0{,}721} \quad \Leftrightarrow$$

$$M = \sqrt[0{,}721]{\frac{100}{3{,}37}} = 110{,}1849$$

Dvs. at ifølge modellen er dyrets masse $\underline{\underline{110 kg}}$

<u>TI n'spire:</u> Du udtrykket er gemt under f1, indtaster man:

```
solve(f1(x)=100,x)                x=110.124347375
```

Dvs. at ifølge modellen er dyrets masse $\underline{\underline{110 kg}}$

5.011: a) Da kuglen har radius 0,5 meter, er dens rumfang: $V = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r_{kugle}^3 = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\cdot\pi$

Da keglen skal have samme rumfang som kuglen, har man:

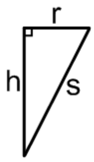
$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h \quad\Leftrightarrow\quad h = \frac{1}{2\cdot r^2}$$

Keglen består af en bund og den krumme, spidse overflade, så overfladearealet bliver:

$$O(r) = O_{bund} + O_{spids} = O_{cirkel} + O_{spids} = \pi\cdot r^2 + \pi\cdot r\cdot s =$$

$$\pi\cdot r^2 + \pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+h^2} = \pi\cdot r^2 + \pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+\left(\frac{1}{2\cdot r^2}\right)^2} = \underline{\underline{\pi\cdot r^2 + \pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+\frac{1}{4\cdot r^4}}}}$$

Det er undervejs udnyttet, at radius, højden og sidelinjen danner en retvinklet trekant med sidelinjen som hypotenuse:



b) Man kan f.eks. bestemme den radius, der gør overfladearealet mindst muligt, ved på lommeregneren at tegne en graf og finde minimumsstedet, men man kan også som her på TI n'spire benytte den første og anden afledede:

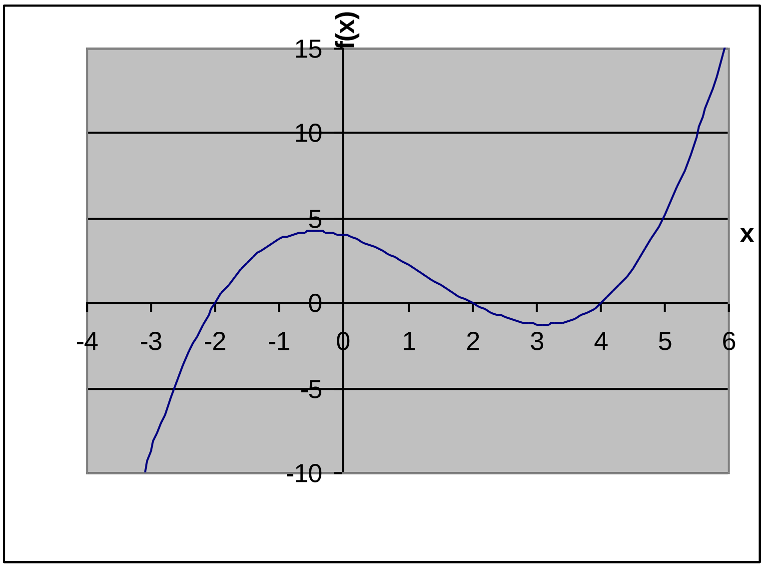
$o(r):=\pi\cdot r^2+\pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+\frac{1}{4\cdot r^4}}$	*Udført*
$\text{solve}\left(\frac{d}{dr}(o(r))=0,r\right)$	$r=0.561231024155$
$\frac{d^2}{dr^2}(o(r))\mid r=0.56123102415469$	33.5103216383

Det bemærkes, at den anden afledede er positiv det sted, hvor den første afledede er 0, dvs. man har et lokalt minimum, og dermed er det $\underline{\underline{r = 0,561m}}$, der giver det mindste overfladeareal.

Den tilsvarende højde er: $h = \frac{1}{2\cdot r^2} = \frac{1}{2\cdot 0,56123102415469^2} = 1,58740105197$, dvs $\underline{\underline{h = 1,587m}}$

6.001: $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2-x+4$

a) Grafen tegnes i et almindeligt koordinatsystem:



Grafens skæringspunkter med førsteaksen kan enten aflæses på grafen og kontrolleres ved indsættelse eller findes ved hjælp af grafregnerens ”solve”:

Metode 1: Skæringspunkterne aflæses til (-2,0) , (2,0) og (4,0). De kontrolleres:

$$f(-2)=\frac{1}{4}(-2)^3-(-2)^2-(-2)+4=-2-4+2+4=0$$

$$f(2)=\frac{1}{4}\cdot 2^3-2^2-2+4=2-4-2+4=0$$

$$f(4)=\frac{1}{4}\cdot 4^3-4^2-4+4=16-16-4+4=0$$

Så de aflæste punkter ER altså skæringspunkterne med førsteaksen.

Metode 2: På grafregneren udregnes $solve(\frac{1}{4}x^3-x^2-x+4=0,x)$, der giver

$$x=-2 \quad eller \quad x=2 \quad eller \quad x=4$$

Da funktionen er et tredjegradspolynomium, kan der højst være 3 skæringer med x-aksen, og grafregneren har altså fundet alle 3, der er $\underline{\underline{(-2{,}0),\ (2{,}0)\ og\ (4{,}0)}}$

b) Det skæringspunkt *P*, der har den mindste førstekoordinat, er *P(-2,0)*.
En ligning for tangenten i dette punkt skal bestemmes, så der mangler en hældning:

$$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-2x-1$$

$$f'(-2)=\frac{3}{4}\cdot(-2)^2-2\cdot(-2)-1=3+4-1=6$$

Hermed er tangentens ligning:

$$y-0=6\cdot(x-(-2)) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y=6x+12}}$$

c) Lad $Q(x_0,y_0)$ være røringspunktet for tangenten t_2. Der er 2 måder at bestemme tangentens hældning på.
Første måde: Da tangenten går gennem både P(-2,0) og $Q(x_0,y_0)$, er dens hældning:

$$a=\frac{y_0-0}{x_0-(-2)}=\frac{y_0}{x_0+2}$$

Og da Q ligger på grafen for f(x), kan y_0 erstattes med: $a=\dfrac{\frac{1}{4}x_0^3-x_0^2-x_0+4}{x_0+2}$

Anden måde: Den afledede funktions værdi i røringspunktets førstekoordinat er pr. definition tangentens hældning, så: $a=f'(x_0)=\frac{3}{4}x_0^2-2\cdot x_0-1$

Da tangentens hældning (selvfølgelig) skal være den samme uanset fremgangsmåde, kan de 2 udtryk sættes lig hinanden og løses med ”solve” på grafregneren:
$solve\left(\dfrac{\frac{1}{4}x^3-x^2-x+4}{x+2}=\frac{3}{4}x^2-2\cdot x-1,x\right)$, der giver x = 3 eller x = -2, selvom x = -2 ikke kan være en løsning, da den ikke er med i grundmængden, da nævneren i brøken bliver 0. Denne løsning ville dog også bare svare til den tangent, der allerede kendes.
Så det er den anden løsning, der kan bruges, og for at finde koordinatsættet indsættes:

$$f(3)=\frac{1}{4}\cdot 3^3-3^2-3+4=\frac{27}{4}-\frac{36}{4}+\frac{4}{4}=-\frac{5}{4}$$

Hermed er røringspunktets koordinatsæt $\underline{\underline{\left(3;-\frac{5}{4}\right)}}$

6.002: $O(x) = \frac{13}{3}\pi \cdot x^2 + \frac{40}{x}$

a) $O(2) = \frac{13}{3}\pi \cdot 2^2 + \frac{40}{2} = \frac{52\pi}{3} + 20 \approx 74{,}4543$

Dvs. at en radius på 2dm vil give en overflade på $\underline{\underline{74{,}5dm^2}}$

For at finde den radius, der giver den mindste overflade, ses på den afledede funktion:

$$O'(x) = \frac{26\pi}{3}x - \frac{40}{x^2}$$

$$O'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{26\pi}{3}x - \frac{40}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{26\pi}{3}x = \frac{40}{x^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$x^3 = \frac{120}{26\pi} \quad \Leftrightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{60}{13\pi}} \approx 1{,}1368$$

$$O'(1) = -12{,}8 < 0$$

$$O'(2) = 44{,}5 > 0$$

Hermed bliver fortegnsskemaet:

x	0		1,1368	
O'(x)	*i.d*	-	0	+
O(x)	*i.d*	↘		↗

Det ses altså, at der er globalt minimum i x = 1,1368, dvs. beholderen har den mindste overflade for $\underline{\underline{radiusen\ 1{,}14\ dm}}$

Opgaven kunne også være løst grafisk ved at tegne grafen i et passende vindue og finde minimum.

<u>*6.003:*</u> $O(x) = x^3 - 30x^2 + 500x + 30$

a) Først opstilles et udtryk for fortjenesten F, der er salgsindtægter S fratrukket omkostninger (Definitionsmængden er alle ikke-negative tal):

$$F(x) = S(x) - O(x) = 308 \cdot x - \left(x^3 - 30x^2 + 500x + 30\right) = -x^3 + 30x^2 - 192x - 30$$

For at finde et maksimum for fortjenesten arbejdes med den afledede funktion:

$$F'(x) = -3x^2 + 60x - 192$$

$$F'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$0 = -3x^2 + 60x - 192 \quad \Leftrightarrow$$

$$0 = x^2 - 20x + 64$$

$$d = (-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 64 = 400 - 256 = 144$$

$$x = \frac{-(-20) \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{20 \pm 12}{2} = \begin{cases} 16 \\ 4 \end{cases}$$

$$F'(1) = -135 < 0$$

$$F'(10) = 108 > 0$$

$$F'(20) = -192 < 0$$

Der kan mindst produceres 0 tons, og fortjenesten findes så få de relevante x-værdier:

$$F(0) = -30$$

$$F(4) = -382$$

$$F(16) = 482$$

Ud fra disse informationer kan et fortegnsskema tegnes:

x	0		4		16	
$F'(x)$		-	0	+	0	-
$F(x)$	-30	↘	-382	↗	482	↘

Der kunne ud fra analysen af den afledede funktion have været størst fortjeneste for x = 0 eller x = 16, men x = 0 ville have været lidt underligt, da det svarer til ingen produktion og dermed intet salg, og det ses også i ovenstående skema, at den produktion, der giver den største fortjeneste, er $\underline{\underline{16\ tons}}$

6.004: $f(t) = 97{,}5 \cdot t \cdot e^{-0{,}39t} \quad ; \quad t \geq 0$

For at finde det tidspunkt, hvor iltunderskudet er størst, ses på den afledede funktion, hvor det bemærkes, at der både skal bruges regneregel for differentiation af produkt af funktioner og sammensat funktion (eller også differentieres på lommeregneren):

$$f'(t) = 97{,}5 \cdot \left(1 \cdot e^{-0{,}39t} + t \cdot (-0{,}39) \cdot e^{-0{,}39t}\right) = 97{,}5 \cdot e^{-0{,}39t} \cdot (1 - 0{,}39t)$$

For at finde nulpunkter for den afledede funktion bruges nulreglen, og da en eksponentialfunktion kun giver positive værdier, har man altså:

$$f'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$1 - 0{,}39t = 0 \quad \Leftrightarrow$$

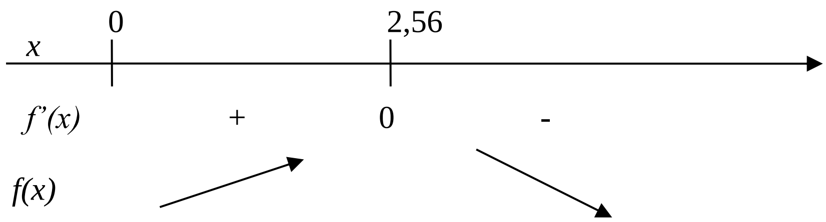
$$t = \frac{1}{0{,}39} = 2{,}564103$$

For at eftervise at dette svarer til et lokalt (og globalt) maksimum findes konkrete værdier:

$$f'(1) = 40{,}3 > 0$$

$$f'(3) = -5{,}1 < 0$$

Man har altså fortegnsskemaet:



Iltunderskudet er altså størst efter $\underline{\underline{2{,}6 \text{ døgn}}}$

6.005: a) $s(t) = 5 \cdot t^{\frac{1}{2}}$

Hastighedsfunktionen er den afledede af stedfunktionen:

$$v(t) = s'(t) = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot t^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{2\sqrt{t}}$$

Hvis hastigheden skal være 2 m/s, skal:

$$2 = \frac{5}{2\sqrt{t}} \quad \Leftrightarrow \quad 4\sqrt{t} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{t} = \frac{5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad t = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{25}{16} = 1{,}5625$$

Dvs. at partiklen har hastigheden 2 m/s efter $\underline{\underline{1{,}56s}}$

6.006: *a)* Arealet af de fire sider er: $A_{sider} = 4 \cdot (x \cdot h) = 4xh$

Arealet af bund og låg er: $A_{bund+låg} = 2 \cdot (x \cdot x) = 2x^2$

Arealet er opgivet i cm^2 og prisen i $kr.\ pr.\ cm^2$, så enhederne passer sammen og udgiften kommer ud i kroner.

$U(x,h) = 2 \cdot A_{sider} + 3 \cdot A_{bund+låg} = \underline{\underline{8xh + 6x^2}}$

b) Når udgiften er 100 kr. har man:

$$100 = 8xh + 6x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 100 - 6x^2 = 8xh \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{100 - 6x^2}{8x} = \underline{\underline{\frac{25}{2x} - \frac{3x}{4}}}$$

Og hermed er rumfanget:

$$V(x) = x \cdot x \cdot h = x^2 \cdot \left(\frac{25}{2x} - \frac{3x}{4} \right) = \underline{\underline{12{,}5x - 0{,}75 \cdot x^3}}$$

c) For at finde den værdi af *x*, der giver det størst mulige rumfang, kan man indtegne en graf på grafregneren eller lave funktionsanalyse. Her foretages sidstnævnte:

$$V'(x) = 12{,}5 - 2{,}25x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$12{,}5 = 2{,}25x^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 = \frac{50}{9} \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{\frac{50}{9}} \approx 2{,}3570$$

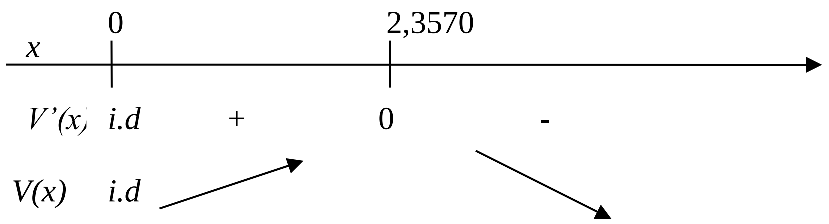
(Ved sidste biimplikation er det udnyttet, at sidelængden *x* er positiv).

Det skal så vises, at det pågældende sted er et maksimumssted:

$V'(1) = 10{,}25 > 0$

$V'(3) = -7{,}75 < 0$

Så fortegnsskemaet bliver:



Det er altså et maksimumssted, og dermed er den søgte værdi: $\underline{\underline{x = 2{,}4cm}}$

6.007: $p(h) = 226 \cdot e^{-0{,}157 \cdot (h-11)}$

a) Først findes den afledede af den sammensatte funktion:

$$p'(h) = 226 \cdot (-0{,}157) \cdot e^{-0{,}157 \cdot (h-11)} = -35{,}482 \cdot e^{-0{,}157 \cdot (h-11)}$$

Og hermed bliver differentialkvotienten i højden 15km.:

$$p'(15) = -35{,}482 \cdot e^{-0{,}157 \cdot (15-11)} = -18{,}935255 = \underline{\underline{-18{,}935}}$$

Dvs. at trykket i 15km højde falder med $\underline{\underline{knap\ 19\ mb\ \ pr.\ km.}}$

6.008: $f(t) = 20 + 150 \cdot \ln(8t+1)$

a) $f(10) = 20 + 150 \cdot \ln(8 \cdot 10 + 1) = 679{,}16737$

Dvs. at 10 minutter efter at ovnen er tændt er temperaturen $\underline{\underline{679^0 C}}$

$$f(t) = 500 \quad \Leftrightarrow$$
$$500 = 20 + 150 \cdot \ln(8t+1) \quad \Leftrightarrow$$
$$\ln(8t+1) = \frac{500-20}{150} \quad \Leftrightarrow$$
$$8t + 1 = e^{\frac{480}{150}} \quad \Leftrightarrow$$
$$t = \frac{e^{\frac{480}{150}} - 1}{8} = 2{,}941567$$

Dvs. at efter $\underline{\underline{3\ minutter}}$ når ovnen op på 500^{0}C.

b) Hastigheden hvormed temperaturen ændrer sig til tiden t = 10 er differentialkvotienten i t=10. Derfor findes først den afledede funktion:

$$f'(t) = 150 \cdot 8 \cdot \frac{1}{8t+1} = \frac{1200}{8t+1}$$
$$f'(10) = \frac{1200}{8 \cdot 10 + 1} = \frac{1200}{81} = 14{,}8148$$

Dvs. at temperaturen ændrer sig med $\underline{\underline{14{,}8^0 C\ i\ minuttet}}$ efter 10 minutter.

6.009: $f(x) = 2x + \sin(x)$

a) Ligningen $f(x) = 1$ løses på 'solve' på lommeregneren:

$solve(1 = 2x + \sin(x), x)$, der giver $\underline{\underline{x = 0{,}335}}$.

Lommeregneren advarer om, at der kan være flere løsninger, men som det vises i næste spørgsmål, er der kun denne ene løsning.

b) Den afledede funktion bestemmes:

$f'(x) = 2 + \cos(x)$

Da cosinusfunktionen ikke kan give under -1, har man: $f'(x) > 0 \quad \forall\ x \in R$.

Dermed er *f* en voksende funktion, og der kan derfor <u>højst</u> være én løsning til ligningen $f(x) = c$.

Men da:

$f(x) \to \infty$ for $x \to \infty$

$f(x) \to -\infty$ for $x \to -\infty$

, og da *f* er kontinuert, vil der være $\underline{\underline{\text{netop én løsning}}}$ for alle *c*.

7.001: a) $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$

Den punktmængde, der ligger i 1. og 2. kvadrant og afgrænses af grafen for *f* og førsteaksen, begynder ved *x=-2* og slutter ved *x=2* ifølge de opgivne skæringspunkter. Så man har:

$$A = \int_{-2}^{2} f(x)dx$$

Dette udregnes på Maple ved indtastningen:

$$\int_{-2}^{2} \left(x^4 - 13 \cdot x^2 + 36\right) dx = \frac{1312}{15}$$

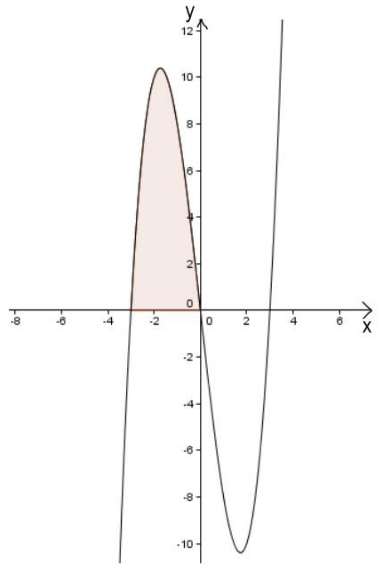
Dvs. at arealet af punktmængden er $\underline{\underline{\frac{1312}{15}}}$.

7.002: $f(x) = x^3 - 9x$

a) Først skal det identificeres, hvordan punktmængden ligger, så skæringerne med x-aksen bestemmes:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$x^3 - 9x = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$x \cdot \left(x^2 - 9\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$x \cdot (x+3) \cdot (x-3) \quad \Leftrightarrow$$
$$x = -3 \vee x = 0 \vee x = 3$$

Da det er et tredjegradspolynomium med en positiv koefficient i tredjegradsleddet, der skærer x-aksen 3 steder, vil grafen ligge under x-aksen indtil x=-3, ligge over x-aksen mellem x=-3 og x=0, ligge under x-aksen mellem x=0 og x=3, hvorefter den vil ligge over x-aksen resten af vejen.
Dette kan også illustreres med en skitse på lommeregneren, hvilket vil være nemmere end en forklaring, men da skal der lige argumenteres for, at alle vendinger af grafen er med, hvilket kan gøres ved at henvise til, at tredjegradspolynomier netop har én vendetangent og at den er med på skitsen.



Så kan arealet af punktmængden bestemmes:

$$A = \int_{-3}^{0} \left(x^3 - 9x\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right]_{-3}^{0} = 0 - 0 - \left(\frac{1}{4} \cdot (-3)^4 - \frac{9}{2} \cdot (-3)^2\right) = -\frac{81}{4} + \frac{81}{2} = \underline{\underline{\frac{81}{4}}}$$

7.003: a) $y = 9 - x^2 \qquad y = x + 3$

Inden, der kan tegnes en skitse, bestemmes evt. skæringspunkter mellem graferne for de 2 ligninger:

$9 - x^2 = x + 3 \quad \Leftrightarrow$

$0 = x^2 + x - 6 \quad \Leftrightarrow$

$0 = (x+3)\cdot(x-2) \quad \Leftrightarrow$

$x = -3 \quad \vee \quad x = 2$

Skæringspunkterne kunne også være fundet ved diskriminantmetoden.

Parablen vender benene nedad, så mellem de 2 skæringspunkter må den ligge øverst:
En skitse skal så vise skæringspunkterne samt at parablen ligger øverst mellem disse.

Punktmængden areal er så:

$$A = \int_{-3}^{2} \left(9 - x^2 - (x+3)\right)dx = \int_{-3}^{2} \left(-x^2 - x + 6\right)dx =$$

$$\left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x\right]_{-3}^{2} = \left(-\frac{1}{3}\cdot 2^3 - \frac{1}{2}\cdot 2^2 + 6\cdot 2\right) - \left(-\frac{1}{3}\cdot(-3)^3 - \frac{1}{2}\cdot(-3)^2 + 6\cdot(-3)\right) =$$

$$-\frac{8}{3} - 2 + 12 - 9 + \frac{9}{2} + 18 = 19 + \frac{9}{2} - \frac{8}{3} = \frac{114}{6} + \frac{27}{6} - \frac{16}{6} = \underline{\underline{\frac{125}{6}}}$$

7.004: a) Gavlen indtegnes i et koordinatsystem, så dens højeste punkt ligger på *y*-aksen og fodpunkterne ligger på *x*-aksen.

Lad forskriften være $f(x) = ax^2 + bx + c$

Med det pågældende valg af koordinatsystem bliver skæringen med *y*-aksen og dermed *c*-værdien:
$c = 4{,}8$

Toppunktets førstekoordinat er $-\frac{b}{2a}$, og da den er 0, har man:

$b = 0$

Et af fodpunkterne har koordinatsættet (2,5 ; 0), hvilket bruges til at bestemme *a*-værdien:

$0 = a\cdot 2{,}5^2 + 4{,}8 \quad \Leftrightarrow \quad -4{,}8 = 6{,}25a \quad \Leftrightarrow \quad a = -0{,}768$

$\underline{\underline{f(x) = -0{,}768x^2 + 4{,}8}}$

b) Koordinatsættene til skæringspunkterne med x-aksen kendes, så arealet kan bestemmes:

$$A = \int_{-2,5}^{2,5} \left(-0{,}768x^2 + 4{,}8\right)dx = \left[\frac{-0{,}768}{3}x^3 + 4{,}8x\right]_{-2,5}^{2,5} =$$

$$\left(\frac{-0{,}768}{3}\cdot 2{,}5^3 + 4{,}8\cdot 2{,}5\right) - \left(\frac{-0{,}768}{3}\cdot(-2{,}5)^3 + 4{,}8\cdot(-2{,}5)\right) = \underline{\underline{16}}$$

7.005: a) Integralet bestemmes ved indtastning på grafregneren: $\int\left(e^{-\frac{x^2}{2}}, x, -1, 1\right)$, der giver resultatet: 1,71124878.

Dvs. $\int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \underline{\underline{1{,}711}}$

Da eksponentialfunktioner giver positive værdier, vil grafen for integranden ligge over x-aksen, og det udregnede bestemte integral angiver altså arealet mellem førsteaksen, grafen og linierne med ligningerne x = -1 og x = 1.

7.006: a) $f(x)=e^x\cdot\sin x$

Stamfunktionen kan findes med n'spire eller Maple, men den kan også udregnes ved partiel integration:

$$\int\left(e^x\cdot\sin x\right)dx=e^x\cdot\sin x-\int\left(e^x\cdot\cos x\right)dx=e^x\cdot\sin x-e^x\cdot\cos x-\int\left(e^x\cdot\sin x\right)dx$$

Sidste led på højresiden rykkes over på venstresiden af lighedstegnet, så man har:

$$2\cdot\int\left(e^x\cdot\sin x\right)dx=e^x\cdot\sin x-e^x\cdot\cos x\quad\Leftrightarrow$$

$$\int\left(e^x\cdot\sin x\right)dx=\underline{\underline{\frac{e^x\cdot\sin x-e^x\cdot\cos x}{2}}}$$

Der kunne evt. tilføjes en konstant til sidst, men det er ikke nødvendigt, da der blot efterspørges "en" stamfunktion.

7.007: $f(x)=x^2-5x-6\qquad g(x)=2x-6$

a) Først findes skæringspunkternes mellem grafernes førstekoordinater:

$$f(x)=g(x)\quad\Leftrightarrow$$

$$x^2-5x-6=2x-6\quad\Leftrightarrow$$

$$x^2-7x=0\quad\Leftrightarrow$$

$$x\cdot(x-7)=0\quad\Leftrightarrow$$

$$x=0\quad\vee\quad x=7$$

Da parablen vender benene opad (positiv a-værdi), må grafen for *g* ligge øverst i området mellem skæringspunkterne, dvs. at arealet af punktmængden mellem graferne er:

$$A=\int_0^7\left(g(x)-f(x)\right)dx=\int_0^7\left(2x-6-\left(x^2-5x-6\right)\right)dx=\int_0^7\left(-x^2+7x\right)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2\right]_0^7=$$

$$\left(-\frac{1}{3}\cdot7^3+\frac{7}{2}\cdot7^2\right)-0=\underline{\underline{\frac{343}{6}}}$$

7.008: $f(x)=e^x-4x$

a) Man kan bruge grafregneren til at tegne en skitse og finde skæringspunkter med *x-aksen*. Men man kan også lave en lille analyse af funktionen:

$$f'(x)=e^x-4$$

$$f''(x)=e^x>0$$

Nulpunkterne bestemmes for funktionen og den afledede funktion:

Funktionen *f*:

$solve(e^x-4x=0,x)$ hvor grafregneren giver to løsninger (og advarer om flere):

x = 0,35740 eller *x* = 2,15329

Den afledede funktion *f'*:

$$0=e^x-4$$

$$e^x=4$$

$$x=\ln 4$$

Den afledede funktion har altså ét nulpunkt, og da den dobbelt afledede funktion er positiv, må funktionen have minimum her.

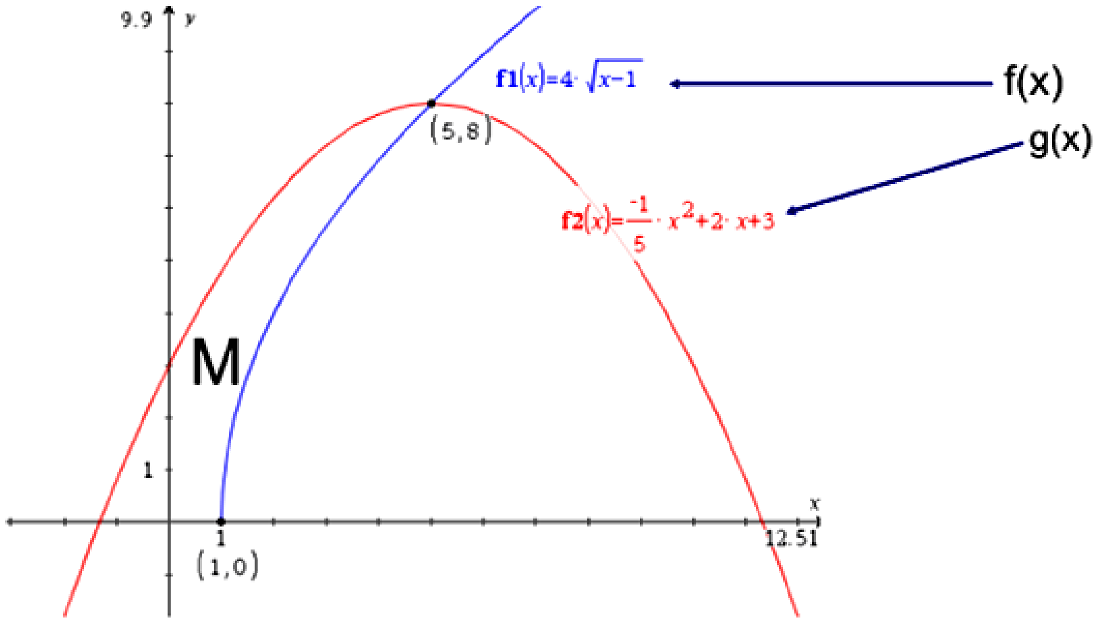
Med kun ét nulpunkt for den afledede funktion kan der ikke være mere end 2 løsninger til ligningen, der blev 'solvet', og desuden må de 2 løsninger angive begyndelsen og slutningen på det område, der ligger under x-aksen, og det er rigtignok i 4. kvadrant.

Arealet kan så findes:

$$A=-\int_{0,35740}^{2,15329}\left(e^x-4x\right)dx=1,83430463278=\underline{\underline{1,8343}}$$

<u>7.009:</u> $f(x) = 4 \cdot \sqrt{x-1} \quad g(x) = -\frac{1}{5} \cdot x^2 + 2x + 3$

På TI-nspire indtegnes graferne, og skæringspunktet bestemmes ved 'Menu'→'Analyser graf'→'Skæringspunkter', mens nulpunktet for g bestemmes ved 'Menu'→'Analyser graf'→'Nul'. Den punktmængde M, der afgrænses af de to grafer samt koordinatakserne, ligger dermed som angivet på figuren.



Rumfanget af det omdrejningslegeme, der dannes, når M drejes 360° omkring x-aksen, bestemmes ved at opdele integrationen i to, hvor der først ses på intervallet [0;1], hvor det kun er grafen for g, der bidrager til omdrejningslegemet, og derefter på intervallet [1,5], hvor man først skal finde rumfanget for delen dannet af grafen for g, hvorefter delen dannet af grafen for f skal trækkes fra:

$$V = \pi \cdot \int_0^1 g(x)^2 dx + \pi \cdot \int_1^5 g(x)^2 dx - \pi \cdot \int_1^5 f(x)^2 dx =$$

$$\pi \cdot \int_0^5 g(x)^2 dx - \pi \cdot \int_1^5 f(x)^2 dx$$

Dette beregnes på TI-nspire ved indtastningen:

$$\pi \cdot \int_0^5 \left(\frac{-1}{5} \cdot x^2 + 2 \cdot x + 3\right)^2 dx - \pi \cdot \int_1^5 \left(4 \cdot \sqrt{x-1}\right)^2 dx \qquad \frac{251 \cdot \pi}{3}$$

$$\pi \cdot \int_0^5 \left(\frac{-1}{5} \cdot x^2 + 2 \cdot x + 3\right)^2 dx - \pi \cdot \int_1^5 \left(4 \cdot \sqrt{x-1}\right)^2 dx \qquad 262.84658535$$

Dvs. at skålens trærumfang er: $V = \underline{\underline{\frac{251}{3}}} \cdot \pi = 262{,}85$

$\underline{7.010:}$ $f(x) = x + \sin(x)$

a) Funktionen differentieres ledvist:

$\underline{\underline{f'(x) = 1 + \cos(x)}}$

b) Da cosinusfunktionen mindst antager værdien -1, vil den afledede funktion være positiv bortset fra enkelte steder, hvor den antager værdien 0 (stederne er $x = \pi + p \cdot 2\pi$, men det er irrelevant).

Funktionen er dermed voksende, og der kan altså højst være en løsning til ligninger af typen *f(x)=c*.

Nu mangler det at blive vist, at der altid er løsninger til denne type ligninger. Dette ses ved at undersøge, om *f* antager alle værdier (dvs. om Vm(*f*)=R):

$f(x) \to -\infty \quad for \quad x \to -\infty$, da sin($x$) ligger mellem -1 og 1, hvorfor leddet x dominerer.

$f(x) \to \infty \quad for \quad x \to \infty$

Hermed er det vist, at alle værdier antages, og altså har ligninger af typen $\underline{\underline{f(x) = c \; netop \; én \; løsning}}$.

c) *f(0)=0*, så den nedre grænse ved beregning af arealet er *x=0*.

a-værdien bestemmes på grafregneren ved:

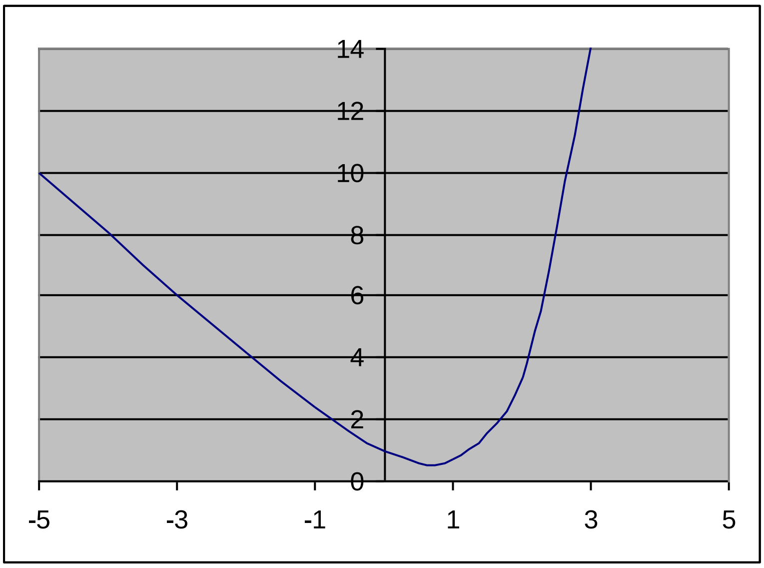
$solve\left(\int (x + \sin(x), x, 0, a) = 2, a\right)$

Grafregneren giver to løsninger: *a = 1,47817027* eller *a = -1,47817027*

Den negative løsning kan ikke bruges, da man arbejder i 1. kvadrant, så $\underline{\underline{a = 1{,}4782}}$

$\underline{7.011:}$ $f(x) = e^x - 2x$

a) "Skitse":



For at bestemme grafens forløb findes først den afledede funktion:

$f'(x) = e^x - 2$

Monotoniforholdene bestemmes:

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$e^x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$e^x = 2 \quad \Leftrightarrow$

$x = \ln 2$

$f'(0) - 1 < 0$

$f'(1) = 0{,}7 > 0$

$f(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2 \cdot \ln 2 = 2 \cdot (1 - \ln 2) > 0$

Et fortegnsskema for den afledede funktion er altså:

x		$\ln 2$	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Man har altså, at:

$\underline{\underline{f \quad er \quad aftagende \quad i \quad]-\infty;\ln 2]}}$

$\underline{\underline{f \quad har \quad lokalt \quad minimumssted \quad i \quad x = \ln 2}}$

$\underline{\underline{f \quad er \quad voksende \quad i \quad [\ln 2;\infty[}}$

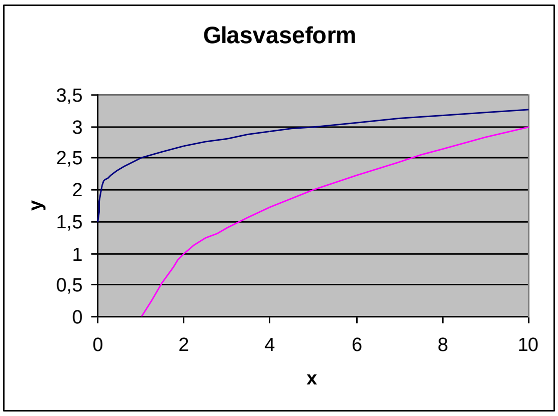
b) Som vist ovenfor (og som det ses af skitsen) ligger grafen over førsteaksen i hele sin definitionsmængde, så arealet kan bestemmes ved hjælp at det bestemte integral.
Den ene grænse skal være $x = 0$, da andenaksen er med i afgrænsningen, men det vides ikke, om det skal være den øvre eller den nedre grænse. Så man skal foretage beregninger i 2 mulige tilfælde:
Tilfælde $k > 0$:
Grafregneren benyttes: $solve(\int \left(e^x - 2x, x, 0, k\right) = 4, k)$.
Den giver $\underline{\underline{k = 2{,}3564}}$.
Grafregneren advarer om, at der kan være flere løsninger, men da grafen som nævnt ligger over førsteaksen, ved man, at det ikke er tilfældet. Den fundne løsning er altså den eneste mulige i det pågældende tilfælde.

Tilfælde $k < 0$:
Grafregneren benyttes: $solve(\int \left(e^x - 2x, x, k, 0\right) = 4, k)$. Den giver $\underline{\underline{k = -1{,}7801}}$.
Igen advarer grafregneren, men med samme argument som ovenfor vides det, at den fundne løsning er den eneste mulige i dette tilfælde. Der er altså 2 mulige værdier for k i alt.

7.012: $f(x) = 1{,}5 + \sqrt[4]{x}$

$g(x) = \sqrt{x-1}$

Først tegnes funktionernes grafer på grafregneren (som her dog er Excel):



Det er grafen for *g*, der ligger nederst, og den begynder først i *x* = 1, da argumentet under kvadratroden ikke må være under 0.

a) Det er grafen for *g*, der danner det legeme, hvor vandet kan være, så voluminet af vandet bestemmes ved:

$$V = \pi \cdot \int_1^{10} (g(x))^2\,dx = \pi \cdot \int_1^{10} \left(\sqrt{x-1}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_1^{10} (x-1)dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^{10} =$$

$$\pi \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\cdot 10^2 - 10\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 - 1\right)\right) = \pi \cdot \left(40 + \frac{1}{2}\right) = 127{,}2345$$

Dvs. der kan være $\underline{\underline{127{,}2 cm^3}}$ vand i vasen.

b) Mængden af glas findes ved at tage omdrejningslegemet, der dannes ved drejning af grafen for *f*, og derefter trække ovenstående rumfang fra:

$$V_f = \pi \cdot \int_0^{10} \left(1{,}5 + \sqrt[4]{x}\right)^2 dx$$

Dette beregnes på lommeregneren:

$\int\left(\pi \cdot \left(1{,}5 + \sqrt[4]{x}\right)^2, x, 0, 10\right)$, der giver 270,995532

Dvs. at vasen består af 270,9955cm^3-127,2345cm^3 = $\underline{\underline{143{,}8 cm^3}}$ glas.

7.013: $f(x) = x^{0,2} + a \quad ; \quad x \in [0;1] \quad ; \quad a \in R_+$

a) Det er værdien af *a*, der bestemmer skålens bundfladeareal, men det er ikke nødvendigt at vide for at kunne løse opgaven.

Hvis skålens rumfang skal være 4, har man:

$$4 = \pi \cdot \int_0^1 (f(x))^2\,dx = \pi \cdot \int_0^1 \left(x^{0,2} + a\right)^2 dx$$

Dette løses på grafregneren med:

$solve\left(\int\left(\pi\left(x^{0,2} + a\right)^2, x, 0, 1\right) = 4, a\right)$, der giver *a=0,286219* eller *a=-1,952886*

Da *a* er et positivt tal, har man altså: $\underline{\underline{a = 0{,}2862}}$

7.014: $f(x)=\sqrt{10-2x}$ $\qquad g(x)=-x$

Det bemærkes, at $Dm(f)=\left]-\infty;5\right]$, da man ikke kan tage kvadratroden af noget negativt.

a) Først skal det afgøres, hvad det er for en punktmængde M, hvis areal skal bestemmes. Dvs. man skal finde ud af, hvordan graferne for de to funktioner ligger i forhold til hinanden og i forhold til den lodrette linje med ligningen x = -3 samt førsteaksen.

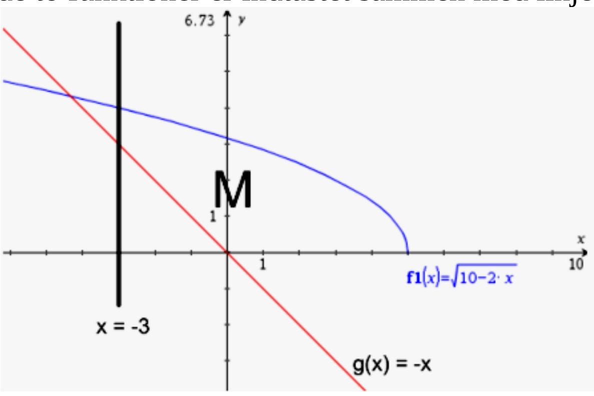
Eventuelle skæringspunkter mellem de to grafer bestemmes, da det kan have betydning for, hvilke grænser der skal anvendes på de bestemte integraler:

På TI-nspire indtastes: $solve(\sqrt{10-2x}=-x,x)$, der giver $x=-4,32$ (og hermed y = 4,32)

Det er for tidligt at sige, om dette tal skal bruges til noget, da man endnu ikke ved, om det relevante område ligger til venstre eller til højre for linjen med ligningen x = -3.

Grafen for f skærer førsteaksen i x=5 (da funktionsværdien her er kvadratroden af 0), mens grafen for g skærer førsteaksen i x = 0 (hvilket ses af funktionsudtrykket, da -0 = 0).

Vi kender nu de præcise værdier for de væsentlige punkter i nedenstående figur, hvor graferne for de to funktioner er indtastet sammen med linjen med ligningen x = -3.



Arealet af punktmængden M bestemmes altså ved at opdele integrationen i to intervaller:

$$A_M=\int_{-3}^{0}\left(f(x)-g(x)\right)dx+\int_{0}^{5}f(x)dx$$

Dette udregnes på TI-nspire ved indtastningen:

$$\int_{-3}^{0}\left(\sqrt{10-2\cdot x}--x\right)dx+\int_{0}^{5}\sqrt{10-2\cdot x}\;dx \qquad \frac{101}{6}$$

Dvs. at arealet af det søgte område er: $A_M=\underline{\underline{\frac{101}{6}}}$

b) Når punktmængden M drejes 360° omkring førsteaksen fremkommer et omdrejningslegeme, hvis rumfang lige som arealet kan opdeles i to dele. Toppen (fra x = 0 til x=5) er ligetil, da omdrejningslegemet her alene er dannet af grafen for f(x).

Rumfanget af bunden (fra x=-3 til x=0) bestemmes ved først at tage rumfanget af det omdrejningslegeme, der frembringes af grafen for f(x), og **derefter** fratrække rumfanget af omdrejningslegemet frembragt af grafen for g(x).

Hvis man trækker g(x) fra f(x), inden man bestemmer rumfanget, er det ikke den rigtige punktmængde, der drejes.

Man har altså:

$$V=\pi\cdot\int_{-3}^{0}f(x)^2dx-\pi\cdot\int_{-3}^{0}g(x)^2dx+\pi\cdot\int_{0}^{5}f(x)^2dx=$$

$$\pi\cdot\left(\int_{-3}^{5}f(x)^2dx-\int_{-3}^{0}g(x)^2dx\right)=\pi\cdot\left(\int_{-3}^{5}(10-2x)dx-\int_{-3}^{0}x^2dx\right)=$$

$$\pi\cdot\left(\left[10x-x^2\right]_{-3}^{5}-\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-3}^{0}\right)=\pi\cdot(50-25+30+9-0-9)=\underline{\underline{55\pi}}\approx172,79$$

<u>*7.015:*</u> $f(x) = x^3 - 3x^2$

For at få en idé om grafens forløb bestemmes først nulpunkterne:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$x^3 - 3x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$x^2 \cdot (x-3) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$x = 0 \quad \vee \quad x = 3$$

En funktionsværdi i intervallet bestemt af ovenstående 2 steder beregnes for at se, om grafen ligger over eller under førsteaksen i dette interval:

$$f(1) = 1 - 3 = -2 < 0$$

Grafen ligger altså under førsteaksen i dette interval.

a) Rumfanget af omdrejningslegemet kan bestemmes, når de 2 grænser kendes:

$$V = \pi \cdot \int_0^3 \left(x^3 - 3x^2\right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^3 \left(x^6 - 6x^5 + 9x^4\right) dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{7}x^7 - x^6 + \frac{9}{5}x^5\right]_0^3 =$$

$$\pi \cdot \left(\frac{1}{7} \cdot 3^7 - 3^6 + \frac{9}{5} \cdot 3^5\right) = \underline{\underline{\pi \cdot \frac{729}{35}}} \approx 65{,}4349$$

b) Der må gælde 0 < t < 3.

Da grafen ligger under førsteaksen, skal der tilføjes et minus til de bestemte integraler (det er egentlig ikke nødvendigt for udregningerne, da de to integraler, der beregnes, skal sammenlignes, hvorfor evt. negative fortegn på begge arealer ville gå ud i udregningen):

$$-\int_0^t \left(x^3 - 3x^2\right) dx = -\int_t^3 \left(x^3 - 3x^2\right) dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4 - x^3\right]_0^t = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3\right]_t^3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4}t^4 - t^3 = \frac{1}{4} \cdot 3^4 - 3^3 - \left(\frac{1}{4}t^4 - t^3\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{t^4}{2} - 2t^3 + \frac{27}{4} = 0$$

Denne fjerdegradsligning løses på grafregneren:

$solve(\frac{t^4}{2} - 2t^3 + \frac{27}{4} = 0, t)$, der giver løsningerne *t = 3,742447* eller *t = 1,842817*

Da *t*-værdien skal ligge mellem 0 og 3, har man altså $\underline{\underline{t = 1{,}8428}}$

<u>*7.016:*</u> $f(x) = 6 \cdot e^{-6x}$

a) Da eksponentialfunktioner altid giver positive værdier, vil den pågældende punktmængde ligge over førsteaksen, og dermed kan areal – og således sandsynligheden – bestemmes som det bestemte integral:

$$A = \int_1^3 6 \cdot e^{-6x} dx = \left[-e^{-6x}\right]_1^3 = -e^{-6 \cdot 3} - \left(-e^{-6 \cdot 1}\right) = e^{-6} - e^{-18} \approx 0{,}0024787$$

Dvs. at sandsynligheden er $\underline{\underline{0{,}25\%}}$

8.001: a) Differentialligningen $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2}{y}$ er givet, og det er oplyst, at *f(x)* er en løsning til den.

Da *f* er en løsning, og punktet *P(2,-2)* ligger på grafen for *f*, kan hældningen for tangenten til grafen i dette punkt findes ved indsættelse i differentialligningen. Det udnyttes nemlig, at $\frac{dy}{dx}$ netop angiver tangenthældningen i det pågældende punkt.

$$f'(2) = \frac{dy}{dx} = \frac{2+2}{-2} = -2$$

Og så bliver tangentens ligning: $y-(-2) = -2\cdot(x-2) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = -2x+2}}$

8.002: $\frac{dy}{dx} = -2x \cdot y$

Differentialligningen bruges til at bestemme tangenthældningerne ved indsættelse af punkterne:

I punktet (1,e) er: $a_1 = -2\cdot 1\cdot e = -2e$

I punktet (-1,e) er: $a_2 = -2\cdot(-1)\cdot e = 2e$

Vinklen mellem de to tangenter kan bestemmes med og eller uden anvendelse af vektorregning. Først metoden uden vektorer:

Metode 1: Den vinkel, som den første tangent danner med førsteaksen, bestemmes:

$$\tan(v_1) = a_1$$

$$v_1 = \tan^{-1}(a_1) = \tan^{-1}(-2e) = -79{,}5775°$$

Den anden tangent har samme størrelse hældning med modsat fortegn, så dens vinkel med førsteaksen er:

$$v_2 = 79{,}5775°$$

Den stumpe vinkel, som de to tangenter danner, er så:

$$w_{stump} = v_2 - v_1 = 159{,}1551°$$

Og dermed er den spidse vinkel:

$$v_{spids} = 180° - 159{,}1551° = \underline{\underline{20{,}8449°}}$$

Metode 2: Da man kender hældningerne for de to tangenter, kan man bestemme retningsvektorer for de to linjer:

$$\vec{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2e \end{pmatrix} \qquad \vec{r_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2e \end{pmatrix}$$

Vinklen mellem de to vektorer bestemmes:

$$\vec{r_1}\cdot\vec{r_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2e \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2e \end{pmatrix} = 1-4e^2$$

$$|\vec{r_1}| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2e \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+(-2e)^2} = \sqrt{1+4e^2}$$

$$|\vec{r_2}| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2e \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+(2e)^2} = \sqrt{1+4e^2}$$

$$\cos(v) = \frac{\vec{r_1}\cdot\vec{r_2}}{|\vec{r_1}|\cdot|\vec{r_2}|} \quad \Leftrightarrow \quad v = \cos^{-1}\left(\frac{1-4e^2}{\sqrt{1+4e^2}\cdot\sqrt{1+4e^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1-4e^2}{1+4e^2}\right) = 159{,}15506°$$

Og dermed er den spidse vinkel: $v_{spids} = 180° - 159{,}1551° = \underline{\underline{20{,}8449°}}$

8.003: $y' = 5y \quad ; \quad P(0,4)$

Metode 1: Løst på lommeregner:

Først findes den fuldstændige løsning ved på lommeregneren at indtaste:

$desolve(y' = 5y, x, y)$, der fortæller, at den fuldstændige løsning er: $y = c \cdot e^{5x}$.

Punktet P's koordinater bruges til at bestemme værdien af konstanten: $4 = c \cdot e^{5 \cdot 0} \Leftrightarrow c = 4$

Altså er den søgte løsning: $\underline{\underline{y = 4 \cdot e^{5x} \quad ; \quad x \in R}}$

Metode 2: Løst med kendskab til differentialligninger:

Dette er en differentialligning af formen $y' = k \cdot y$, der har den fuldstændige løsning $y = c \cdot e^{k \cdot x}$, hvor c er en arbitrær konstant.

Altså er den fuldstændige løsning: $y = c \cdot e^{5x}$

Punktet P's koordinater bruges til at bestemme værdien af konstanten: $4 = c \cdot e^{5 \cdot 0} \Leftrightarrow c = 4$

Altså er den søgte løsning: $\underline{\underline{y = 4 \cdot e^{5x} \quad ; \quad x \in R}}$

Metode 3: Løst med Maple:

$$[y' = 5 \cdot y, y(0) = 4] \xrightarrow{\text{solve DE}} y(x) = 4\,e^{5x}$$

8.004: $\dfrac{dy}{dx} + 3y = 20 \qquad P(1,4)$

Metode 1: Løsning med kendskab til differentialligningstypen.

Denne differentialligning er en lineær 1. ordens differentialligning, men den kan løses hurtigere ved omskrivningen $\dfrac{dy}{dx} = 20 - 3y$, da den så er på standardformen $\dfrac{dy}{dx} = b - ay$, der har den fuldstændige løsning $y = \dfrac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$, hvor c er en arbitrær konstant.

Så den fuldstændige løsning er: $y = \dfrac{20}{3} + c \cdot e^{-3x}$

Punktet P's koordinater indsættes for at bestemme konstanten:

$$4 = \frac{20}{3} + c \cdot e^{-3 \cdot 1} \Leftrightarrow$$

$$c = -\frac{8}{3} \cdot e^{3}$$

Og hermed er den søgte løsning: $y = \dfrac{20}{3} - \dfrac{8}{3} \cdot e^{3} \cdot e^{-3x} = \underline{\underline{\dfrac{20}{3} - \dfrac{8}{3} \cdot e^{-3x+3} \quad ; \quad x \in R}}$

Metode 2: Løsning ved hjælp af n'spires differentialligningsløser:

Differentialligningen løses ved indtastningen:

$$\text{deSolve}(y'+3 \cdot y=20,x,y) \qquad y=c1 \cdot e^{-3 \cdot x}+\frac{20}{3}$$

Så den fuldstændige løsning er: $y = \dfrac{20}{3} + c \cdot e^{-3x}$

Punktet P's koordinater indsættes for at bestemme konstanten:

$$4 = \frac{20}{3} + c \cdot e^{-3 \cdot 1} \Leftrightarrow$$

$$c = -\frac{8}{3} \cdot e^{3}$$

Og hermed er den søgte løsning: $y = \dfrac{20}{3} - \dfrac{8}{3} \cdot e^{3} \cdot e^{-3x} = \underline{\underline{\dfrac{20}{3} - \dfrac{8}{3} \cdot e^{-3x+3} \quad ; \quad x \in R}}$

Metode 3: Løsning med Maple:

$$\left[y'+3\cdot y=20,\ y(1)=4\right]\xrightarrow{\text{solve DE}} y(x)=\frac{20}{3}-\frac{8}{3}\frac{e^{-3x}}{e^{-3}}$$

<u>8.005:</u> (*) $y'+y=20x+3 \qquad P(1,4)$

Dette er en lineær 1. ordens differentialligning. Den løses her på fire måder:

1) Metode hvor der gættes en partikulær løsning.

Da højresiden af (*) er et førstegradspolynomium, ses på en løsning af denne type:

$p(x)=ax+b$

$p'(x)=a$

Dette indsættes for om muligt at finde brugbare værdier for *a* og *b*.

$a+ax+b=20x+3 \quad \Leftrightarrow$

$(a-20)x+(a+b-3)=0$

Da dette udsagn skal være sandt for alle værdier af *x*, skal man have leddet med *x* til at forsvinde, og dermed skal *a = 20.c*

Det andet led skal så være nul for at udsagnet er sandt, og dermed har man: *b* = -17

Den partikulære løsning er altså:

$p(x)=20x-17$

Den fuldstændige løsning til $y'+h(x)\cdot y=g(x)$ er mængden af løsninger, der kan skrives på formen $y=c\cdot e^{-H(x)}+p(x)$, hvor *H(x)* er en stamfunktion til *h(x)*, *p(x)* en vilkårlig partikulær løsning til differentialligningen og *c* en arbitrær konstant.

Da den partikulære løsning er fundet, og da *h(x)=1*, har man altså den fuldstændige løsning:

$y=c\cdot e^{-x}+20x-17$

Konstanten *c* bestemmes ved indsættelse af punktet P's koordinater:

$4=c\cdot e^{-1}+20\cdot 1-17 \quad \Leftrightarrow$

$1=c\cdot e^{-1} \quad \Leftrightarrow$

$c=e$

Og hermed bliver den søgte løsning:

$y=e\cdot e^{-x}+20x-17=\underline{\underline{e^{-x+1}+20x-17}} \quad ; \quad x\in R$

2) Metoden med direkte udregning.

Den fuldstændige løsning til $y'+h(x)\cdot y=g(x)$ er funktioner af formen:

$y=e^{-H(x)}\cdot\int g(x)\cdot e^{H(x)}dx$, hvor *H(x)* igen er en stamfunktion til *h(x).*

Man får altså:

$$y=e^{-x}\cdot\int e^{x}\cdot(20x+3)dx=e^{-x}\cdot\left(e^{x}\cdot(20x+3)-\int e^{x}\cdot 20dx\right)=20x+3-e^{-x}\cdot\left(20\cdot e^{x}+c_1\right)=$$

$$20x+3-20-c_1\cdot e^{-x}=c\cdot e^{-x}+20x-17$$

Og herfra foregår resten lige som i 1. metode med indsættelse af punktet.

3) Løsning med n'spire: Der indtastes:

$\text{deSolve}(y'+y=20\cdot x+3,x,y)$

$y=\mathbf{c2}\cdot e^{-x}+20\cdot x-17$

Dvs. den fuldstændige løsning er: $y=c\cdot e^{-x}+20x-17$

Konstanten *c* bestemmes ved indsættelse af punktet P's koordinater:

$4=c\cdot e^{-1}+20\cdot 1-17 \quad \Leftrightarrow$

$1=c\cdot e^{-1} \quad \Leftrightarrow$

$c=e$

Og hermed bliver den søgte løsning: $y=e\cdot e^{-x}+20x-17=\underline{\underline{e^{-x+1}+20x-17}} \quad ; \quad x\in R$

4) Løsning med Maple:

Differentialligningen løses med begyndelsesbetingelsen $y(1)=4$.

$$\left[y'+y=20\cdot x+3,\ y(1)=4\right]\xrightarrow{\text{solve DE}} y(x)=20\,x-17+\frac{e^{-x}}{e^{-1}}$$

Sidste led kan skrives pænere, så man har:

$$\underline{\underline{f(x)=20\cdot x-17+e^{1-x}\ ;\ x\in\mathbb{R}}}$$

<u>8.006:</u> $y'=2x+5-y$

Den fuldstændige løsning kan bestemmes på 3 måder:

1) På TI N'spire indtastes:

deSolve$(y'=2\cdot x+5-y,x,y)$	$y=c1\cdot e^{-x}+2\cdot x+3$

Dvs. at den fuldstændige løsning er: $f(x)=c\cdot e^{-x}+2x+3\quad;\quad x\in R$

Så skal konstanten *c* bestemmes.

Normalt har man fået et punkt opgivet, så man kender sammenhørende værdier for *x* og *y*, hvorefter disse indsættes for at bestemme c-værdien. Men det har man ikke her, og det gælder derfor om ud fra oplysningen om tangenten at kunne bestemme x-værdien.

Da den <u>vandrette linje</u> med ligningen *y* = 1 er tangent til grafen for *f*, ved man, at når *y* = 1, er *y'* = 0.

Hermed kan differentialligningen give den pågældende x-værdi:

$$0=2x+5-1\quad\Leftrightarrow\quad x=-2$$

Og så kan c-værdien bestemmes ved at indsætte punktet (-2,1) i den fuldstændige løsning:

$$1=c\cdot e^{-(-2)}+2\cdot(-2)+3\quad\Leftrightarrow\quad 2=c\cdot e^{2}\quad\Leftrightarrow\quad c=\frac{2}{e^{2}}$$

Og hermed bliver den søgte løsning: $g(x)=\frac{2}{e^{2}}\cdot e^{-x}+2x+3=\underline{\underline{2\cdot e^{-x-2}+2x+3\quad;\quad x\in R}}$

2) Ved omskrivning ses ovenstående at være en lineær 1. ordens differentialligning:

$$y'+y=2x+5$$

Der gættes en partikulær løsning til differentialligning. Der gættes på et førstegradspolynomium:

$p(x)=ax+b\qquad p'(x)=a$

Koefficienterne findes ved indsættelse i differentialligningen:

$$a+ax+b=2x+5$$

Dvs. $a=2$, og dermed $b=3$

Så $p(x)=2x+3$ er en partikulær løsning.

En stamfunktion til funktionen foran *y* (der er $h(x)=1$) er $H(x)=x$

Så den fuldstændige løsning til differentialligningen er:

$f(x)=c\cdot e^{-x}+2x+3\quad;\quad x\in R$ og *c* er en arbitrær konstant.

3) Den fuldstændige løsning findes som:

$$f(x)=e^{-H(x)}\cdot\int e^{H(x)}\cdot(2x+5)dx=e^{-x}\cdot\int e^{x}\cdot(2x+5)dx=e^{-x}\cdot\left(e^{x}\cdot(2x+5)-\int e^{x}\cdot 2dx\right)=$$

$$2x+5-e^{-x}\cdot\left(2\cdot e^{x}+c_1\right)=2x+5-2-c_1\cdot e^{-x}=\underline{c\cdot e^{-x}+2x+3}$$

Så skal konstanten *c* bestemmes.

Da den <u>vandrette linie</u> med ligningen *y* = 1 er tangent til grafen for *f*, ved man, at når *y* = 1, er *y'* = 0.

Hermed kan differentialligningen give den pågældende x-værdi:

$$0=2x+5-1\quad\Leftrightarrow\quad x=-2$$

Og så kan c-værdien bestemmes ved at indsætte punktet (-2,1) i den fuldstændige løsning:

$$1=c\cdot e^{-(-2)}+2\cdot(-2)+3\quad\Leftrightarrow\quad 2=c\cdot e^{2}\quad\Leftrightarrow\quad c=\frac{2}{e^{2}}$$

Og hermed bliver den søgte løsning:

$$g(x)=\frac{2}{e^{2}}\cdot e^{-x}+2x+3=\underline{\underline{2\cdot e^{-x-2}+2x+3\quad;\quad x\in R}}$$

8.007: $\frac{dy}{dx} - 3y = e^x \qquad P\left(1, f\left(1\right)\right) \qquad l: y = x - 5$

Da tangenten skal være parallel med *l*, skal den have hældningen 1.
Dette kan bruges til at bestemme andenkoordinaten for tangentens røringspunkt *P*.
Hældningen og punktets førstekoordinat indsættes i differentialligningen:

$$1 - 3y = e^1 \quad \Leftrightarrow \quad 3y = 1 - e \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1-e}{3}$$

Så nu kendes et punkt på integralkurven.
Der er tale om en lineær 1. ordens differentialligning, der kan løses på TI-89 med "deSolve", men det kan også gøres i hånden:
Lad $h(x) = -3 \quad og \quad H(x)$ en stamfunktion til $h(x)$ Den fuldstændige løsning er:

$$y = e^{-H(x)} \cdot \int e^x \cdot e^{H(x)} dx = e^{3x} \cdot \int e^x \cdot e^{-3x} dx = e^{3x} \cdot \int e^{-2x} dx = e^{3x} \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} + c \right) = -\frac{1}{2} e^x + c \cdot e^{3x}$$

Punktet indsættes:

$$\frac{1-e}{3} = -\frac{1}{2} \cdot e^1 + c \cdot e^{3 \cdot 1} \quad \Leftrightarrow \quad c \cdot e^3 = \frac{2 - 2e + 3e}{6} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{2+e}{6 \cdot e^3}$$

Så den søgte løsning er:

$$\underline{\underline{y = -\frac{1}{2} e^x + \frac{2+e}{6 \cdot e^3} \cdot e^{3x} \quad ; \quad x \in R}}$$

8.008: a) Rumfanget af omdrejningslegemet findes med grænserne 0 og *h*:

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left(f\left(x\right) \right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^h \sqrt{x}^2 dx = \pi \cdot \int_0^h x dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^h = \underline{\underline{\frac{\pi \cdot h^2}{2}}}$$

b) Da hastigheden er konstant (med hastigheden *c*) er $\underline{\underline{\frac{dV}{dt} = c}}$

c) Den fuldstændige løsning til differentialligningen findes ved at tage det ubestemte integral (integrere med hensyn til *t*):

$V(t) = c \cdot t + k$

Konstanten bestemmes ud fra oplysningen om, at skålen er tom til *t = 0*:

$0 = c \cdot 0 + k \quad \Leftrightarrow \quad k = 0$

Dvs. at $\underline{\underline{V(t) = c \cdot t}}$

d) Udtrykkene fra a) og c) sammenholdes for at finde et udtryk for dybden *h* som funktion af *t*:

$$c \cdot t = \frac{\pi \cdot h^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{h = \sqrt{\frac{2 \cdot c \cdot t}{\pi}}}}$$

8.009: a) Populationens størrelse betegnes med y.

Så er populationens væksthastighed $\frac{dy}{dt}$.

Dermed bliver den søgte differentialligning: $\frac{dy}{dt} = 0,084 \cdot y$

b) Den generelle løsning til denne type 1. ordens differentialligninger er eksponentielle udviklinger: $y(t) = y_0 \cdot e^{0,084 \cdot t}$.

Da der er 10 individer til at begynde med, har man: $y(t) = 10 \cdot e^{0,084 \cdot t}$

Så efter 7 døgn har man: $y(7) = 10 \cdot e^{0,084 \cdot 7} = 18,0038$

Dvs. at der efter 7 døgn er $\underline{\underline{18\, individer}}$

c) $\frac{dy}{dt} = 0,0022 y(100 - y)$

Den generelle løsning til ovenstående differentialligning er:

$y = \frac{100}{1 + c \cdot e^{-0,0022 \cdot 100 \cdot t}} = \frac{100}{1 + c \cdot e^{-0,22 \cdot t}}$, hvor 100 er populationens maksimum.

Fra b) kendes punktet (7,18), der kan bruges til at bestemme *c* TI N'spire-indtastningen:

$solve\left(18 = \frac{100}{1 + x \cdot e^{-0,22 \cdot 7}}, x\right) \quad x = 21,249800$

Så $c = 21,25$

Dermed kan antallet af døgn for at nå 90 individer bestemmes:

$solve\left(90 = \frac{100}{1 + 21,25 \cdot e^{-0,22 \cdot x}}, x\right) \quad x = 23,87987$

Dvs. at der skal gå ca. $\underline{\underline{24\, døgn}}$

8.010: Den opgivne differentialligning er: $\frac{dS_t}{dt} = \frac{K \cdot S_t \cdot (S_{\max} - S_t)}{S_{\max}}$.

K=0,069 $\qquad$ $S_{max} = 12$ $\qquad$ $S_0 = 0,5$

a) Med disse oplysninger bliver differentialligningen:

$\frac{dS_t}{dt} = \frac{0,069 \cdot S_t \cdot (12 - S_t)}{12} = 0,00575 \cdot S_t \cdot (12 - S_t)$

Dvs. det er en logistisk ligning med det generelle løsningsudtryk:

$S_t(t) = \frac{12}{1 + c \cdot e^{-0,00575 \cdot 12 \cdot t}} \quad \Leftrightarrow \quad S_t(t) = \frac{12}{1 + c \cdot e^{-0,069 \cdot t}}$

Startbetingelsen bruges til at finde konstanten *c*:

$0,5 = \frac{12}{1 + c \cdot e^{-0,069 \cdot 0}} \quad \Leftrightarrow \quad 0,5 = \frac{12}{1 + c} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + c = 24 \quad \Leftrightarrow \quad c = 23$

Man har altså løsningen $\underline{\underline{S_t(t) = \frac{12}{1 + 23 \cdot e^{-0,069 \cdot t}} \; ; t \geq 0}}$

Og så er: $S_t(20) = \frac{12}{1 + 23 \cdot e^{-0,069 \cdot 20}} = 1,76826667$

Dvs. når løgfrøhaletudsen er 20 døgn gammel, er den $\underline{\underline{1,77 cm}}$ lang.

b) For en logistisk ligning fås den største væksthastighed, når halvdelen af maksimum er nået, dvs. her 6 cm. Så det pågældende tidspunkt findes ved solve:

$solve\left(6 = \frac{12}{1 + 23 \cdot e^{-0,069 \cdot x}}, x\right)$, der giver *x* = 45,4419

Dvs. den største væksthastighed er i det $\underline{\underline{45.\ døgn}}$.

8.011: Haletudsernes længde kan beskrives ved den logistiske ligning: $\frac{dS_t}{dt} = 0{,}00575 \cdot S_t \cdot (12 - S_t)$

Desuden oplyses, at $S_t(0) = 0{,}5$.

a) For $S_t = 4$ har man:

$$\frac{dS_t}{dt} = 0{,}00575 \cdot 4 \cdot (12 - 4) = 0{,}184$$

Dvs. at løgfrøhaletudserne vokser med $\underline{\underline{0{,}184\ cm\ pr.\ døgn}}$, når de er 4 *cm* lange.

b) Den maksimale længde er 12 cm, og det er oplyst, at længden begynder ved 0,5cm.

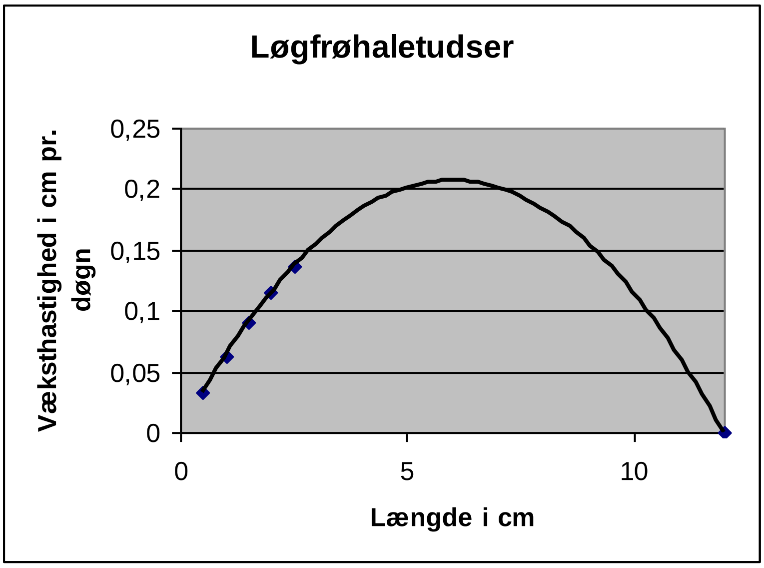
Da det er en logistisk ligning, er grafen en parabel med benene nedad (ses på udtrykket, hvis der ganges ind i parentesen), og den maksimale væksthastighed fås ved halvdelen af den maksimale længde (der ifølge ligningen aldrig nås), dvs. ved 6 cm.

$$S_t = 0{,}5 : \frac{dS_t}{dt} = 0{,}03306$$

$$S_t = 6 : \frac{dS_t}{dt} = 0{,}207 \qquad \text{Toppunktet}$$

$$S_t = 12 : \frac{dS_t}{dt} = 0$$

Ud fra disse tre punkter kan en skitse tegnes:



8.012: $Dm(f) = R \quad og \; f \; er \; løsning \; til \; \frac{dy}{dx} = y \cdot (x^2 - 9), \; y > 0 \quad og \; P(2,2)$ ligger på grafen for *f*.

a) For at bestemme tangentligningen skal man kende et punkt (og P's koordinater er allerede opgivet) og hældningen, der findes ved at indsætte punktets koordinater i differentialligningen:

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot (2^2 - 9) = -10$$

Hermed er tangentligningen:

$$y - 2 = -10(x-2) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = -10x + 22}}$$

b) Da *y* > *0* gælder:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 3$$

Desuden afhænger fortegnet for den afledede funktion $\left(f'(x) \; eller \; \frac{dy}{dx} \right)$ også kun af *x*-værdien. Grafen for $g(x) = x^2 - 9$ er en parabel med benene opad, så mellem nulpunkterne er fortegnet for funktionsværdierne negativt. Dermed fås:

x		-3		3	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	↗		↘		↗

Så man har:

$$\underline{\underline{f \; er \; voksende \; i \;]-\infty, -3] \; og \; i \; [3, \infty[}}$$

$$\underline{\underline{f \; er \; aftagende \; i \; [-3, 3]}}$$

8.013: a) Hastigheden hvormed *N(t)* vokser til tiden *t* er $\frac{dN}{dt}$.

Forskellen mellem 10^6 og antallet af individer til tiden *t* er $\left(10^6 - N(t)\right)$

Hermed bliver differentialligningen:

$$\underline{\underline{\frac{dN(t)}{dt} = 2\cdot 10^{-8}\cdot N(t)\cdot\left(10^6 - N(t)\right)}}$$

b) $N(0) = 200000$

Den generelle løsning til differentialligningen er:

$$N(t) = \frac{10^6}{1+c\cdot e^{-2\cdot 10^{-8}\cdot 10^6\cdot t}} = \frac{10^6}{1+c\cdot e^{-0{,}02\cdot t}}$$

Ved indsættelse af det kendte punkt bestemmes værdien af *c*:

$$200000 = \frac{10^6}{1+c} \quad\Leftrightarrow\quad 1+c=5 \quad\Leftrightarrow\quad c=4$$

Dvs. at den søgte løsning er: $\underline{\underline{N(t) = \frac{10^6}{1+4\cdot e^{-0{,}02\cdot t}}\ ; t\geq 0}}$

Hvor definitionsmængden ikke kan angives med sikkerhed, da opgaveteksten er for sparsom. Alle reelle tal er en anden mulighed for Dm.

c) Væksthastigheden for logistisk vækst er størst, når populationen er på det halve af sit maksimum, der er tallet i tælleren, dvs. i dette tilfælde 1.000.000.

Så der er altså $\underline{\underline{500.000\ \text{individer}}}$ i populationen, hvor væksthastigheden er størst.

8.014: a) Den hastighed, hvormed antallet af individer vokser, er $\frac{dN}{dt}$.

Produktet af antallet af individer til tiden *t* og forskellen mellem 10^6 og antallet af individer til tiden *t* er: $N\cdot\left(10^6 - N\right)$.

Hermed bliver differentialligningen: $\underline{\underline{\frac{dN}{dt} = 2\cdot 10^{-8}\cdot N\cdot\left(10^6 - N\right)}}$

b) Den generelle løsning til denne logistiske ligning er:

$$N(t) = \frac{10^6}{1+c\cdot e^{-2\cdot 10^{-8}\cdot 10^6\cdot t}} = \frac{10^6}{1+c\cdot e^{-0{,}02\cdot t}}$$

Betingelsen $N(0) = 2{,}0\cdot 10^5$ bruges til at finde konstanten *c*:

$$2{,}0\cdot 10^5 = \frac{10^6}{1+c\cdot e^{-0{,}02\cdot 0}} \quad\Leftrightarrow\quad 2{,}0 = \frac{10}{1+c} \quad\Leftrightarrow\quad c=4$$

Den største væksthastighed er der, hvor populationen er halvdelen af sit maksimum (på 1000000), og her findes så tidspunktet med solve:

$$solve\left(500000 = \frac{10^6}{1+4\cdot e^{-0{,}02\cdot x}}, x\right)$$, der giver $x = 69{,}3147$

Så væksthastigheden er størst i det $\underline{\underline{69.\ \textit{døgn}}}$

8.015: Den opgivne differentialligning er en logistisk ligning: $N'(t) = 2\cdot 10^{-8}\cdot N(t)\cdot\left(10^6 - N(t)\right)$.

a) Lad t_1 være det tidspunkt, hvor antallet af individer i populationen er 500.000.

Så er: $N'(t_1) = 2\cdot 10^{-8}\cdot 500.000\cdot\left(10^6 - 500.000\right) = \underline{\underline{5000}}$

Dvs. at til dette tidspunkt vokser populationen altså med $\underline{\underline{5000 \text{ individer i døgnet}}}$.

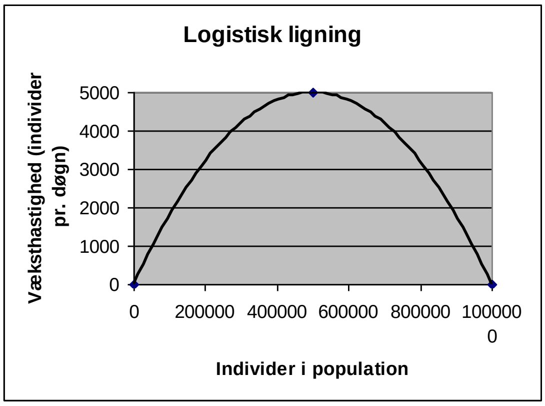
b) Da det er en logistisk ligning, er grafen en parabel med benene nedad (ses på udtrykket, hvis der ganges ind i parentesen), og den maksimale væksthastighed fås ved halvdelen af den maksimale population (der ifølge ligningen aldrig nås), hvilket blev behandlet i a)

$$N = 0 : \frac{dN}{dt} = 0$$

$$N = 500000 : \frac{dN}{dt} = 5000 \text{ Toppunktet}$$

$$N = 1000000 : \frac{dN}{dt} = 0$$

Ud fra disse tre punkter kan en skitse tegnes (bemærk at populationen ikke kan følge modellen ude i enderne, da der nødvendigvis må være et antal individer til at begynde med, og da antallet ifølge modellen ikke når 1000000).



8.016: Den opgivne differentialligning er en logistisk ligning: $N'(t) = 2\cdot 10^{-8}\cdot N(t)\cdot\left(10^6 - N(t)\right)$.

Opgaveteksten giver: $N(t_1) = 500.000$.

a) Så man har: $N'(t_1) = 2\cdot 10^{-8}\cdot 500.000\cdot\left(10^6 - 500.000\right) = \underline{\underline{5000}}$

Dvs. at til dette tidspunkt vokser populationen altså med $\underline{\underline{5000 \text{ individer i døgnet}}}$.

Den største væksthastighed for logistiske ligninger fås, når populationen er oppe på halvdelen af maksimum (der her er 10^6=1.000.000), dvs. 500.000, hvilket netop er det, der er regnet på. Den fundne væksthastighed er dermed også den maksimale væksthastighed, som populationen vil opnå.

8.017: a) g er en lineær funktion af N, så man har: $g(N) = a\cdot N + b$

To punkter $\left(0{,}1\cdot 10^5; 1{,}8\cdot 10^4\right)$ og $\left(10^5; 3{,}0\cdot 10^3\right)$ er opgivet, så forskriften kan findes:

$$a = \frac{g(N_2) - g(N_1)}{N_2 - N_1} = \frac{3{,}0\cdot 10^3 - 1{,}8\cdot 10^4}{10^5 - 0{,}1\cdot 10^5} = \frac{-1{,}5\cdot 10^4}{0{,}9\cdot 10^5} = -\frac{1{,}5}{9} = -\frac{3}{18} = -0{,}1666667$$

Indsættes for at finde b-værdien: $b = g(N_2) - a\cdot N_2 = 3{,}0\cdot 10^3 - \left(-\frac{3}{18}\right)\cdot 10^5 = 19667$

Så man har: $g(N) = -0{,}16667\cdot N + 19667$

Da væksthastigheden er lig med $g(N)$ har man differentialligningen:

$$\underline{\underline{\frac{dN}{dt} = -0{,}16667\cdot N + 19667}}$$, hvilket er svaret på spørgsmål b).

Når væksthastigheden er 1300 individer pr. døgn, har man:

$1300 = -0{,}16667\cdot N + 19667 \quad \Leftrightarrow$

$$N = \frac{1300 - 19667}{-0{,}16667} = 110199{,}79 = 110200$$

Dvs. at der er godt $\underline{\underline{1{,}10 \cdot 10^5}}$ individer på det tidspunkt.

8.018: a) Forskriften for *f* bestemmes ved at indtaste tabellens værdier i stats/list-editoren med tiden som list1 og den relative væksthastighed som list2, hvorefter der laves lineær regression (LinReg) med list2 som funktion af list1. Det giver forskriften:

$f(t) = -0{,}0126 \cdot t + 0{,}2771$

b) Da *f(t)* netop er den relative væksthastighed $\frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dt}$, har man differentialligningen:

$$\underline{\underline{\frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dt} = -0{,}0126 \cdot t + 0{,}2771}}$$

c) Denne differentialligning kan løses ved separation af de variable, hvor man arbejder i intervallet *N > 0.*

$$\int \frac{1}{N} dN = \int \left(-0{,}0126t + 0{,}2771\right) dt \quad \Leftrightarrow$$

$$\ln|N| = -0{,}0063t^2 + 0{,}2771t + k \quad \Leftrightarrow \quad \left(numerisktegnet\ kan\ fjernes,\ da\ N > 0\right)$$

$$N = e^{-0{,}0063t^2 + 0{,}2771t + k} \quad \Leftrightarrow$$

$$N = c \cdot e^{-0{,}0063t^2 + 0{,}2771t}$$

Punktet (7,780) bruges til at bestemme værdien af *c*:

$$solve\left(780 = x \cdot e^{-0{,}0063 \cdot 7^2 + 0{,}2771 \cdot 7}, x\right) \quad x = 152{,}6723$$

Så *c = 152,67*, og forskriften er:

$$\underline{\underline{N(t) = 152{,}67 \cdot e^{-0{,}0063t^2 + 0{,}2771t} \quad ; \quad t \geq 0}}$$

8.019: Vandhøjden i beholderen betegnes *h*.
Tiden betegnes med *t*.

Så bliver den hastighed, hvormed vandhøjden ændrer sig $\frac{dh}{dt}$.

Når denne skal være proportional med kvadratroden af vandhøjden, får man:

$\underline{\underline{\frac{dh}{dt} = k \cdot \sqrt{h}}}$, hvor konstanten *k* er negativ, da vandhøjden falder.

8.020: Trykforskellen mellem beholderen og dækket er (*1000 – p*)

Hastigheden, hvormed dæktrykket vokser, udtrykkes ved $\frac{dp}{dt}$.

Og med en proportionalitetsfaktor på 0,02 får man differentialligningen:

$$\underline{\underline{\frac{dp}{dt} = 0{,}02 \cdot \left(1000 - p\right)}}$$

8.021: Følgende størrelser er angivet:
y: Metalstykkets temperatur målt i grader celsius.
t: Tiden målt i sekunder.
y_0: Omgivelsernes konstante temperatur målt i grader celsius.

a) Hermed er hastigheden, hvormed metalstykkets temperatur **aftager,** altså $-\frac{dy}{dt}$.

Og så er: $-\frac{dy}{dt} = k \cdot \left(y - y_0\right)$, hvor den første faktor er proportionalitetskonstanten og den anden forskellen mellem metalstykkets og omgivelsernes temperatur.
Differentialligningen bliver altså:

$$\underline{\underline{\frac{dy}{dt} = k \cdot \left(y_0 - y\right)}}$$

8.022: y er antallet af personer i gruppen på 500, der har hørt rygtet.

t er tiden.

Antallet af personer, der ikke har hørt rygtet er så $500 - y$.

Den hastighed, hvormed y vokser, er $\dfrac{dy}{dt}$.

Produktet af det antal personer, der har hørt rygtet (y) og dem, der ikke har (500-y) er $y \cdot (500 - y)$.

Da de to ovenstående udtryk er opgivet at være proportionale med hinanden med proportionalitetsfaktoren 0,0014, har man altså differentialligningen:

$$\underline{\underline{\frac{dy}{dt} = 0{,}0014 \cdot y(500 - y)}}$$

8.023: $\dfrac{dh}{dt} = -20 \cdot h^{-\frac{3}{2}}$ $\qquad$ $h(t) = (-50 \cdot t + 3125)^{\frac{2}{5}}$

Opgaveteksten er muligvis ikke formuleret efter hensigten. Man bliver ”kun” bedt om at vise, at den angivne funktion er en løsning til den angivne differentialligning, men med informationen om, at væskehøjden i tragten fra start er 25cm, lægges der op til, at man skal vise, at den angivne funktion er den løsning til differentialligningen, der opfylder begyndelsesbetingelsen.

Her gennemgås løsningen, som om man søger den partikulære løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen.

Metode 1: Det tjekkes, om funktionen opfylder begyndelsesbetingelsen:

$$h(0) = (-50 \cdot 0 + 3125)^{\frac{2}{5}} = 3125^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3125}^{\,2} = 5^2 = 25$$

Dvs. funktionen passer med, at væskehøjden fra start er 25cm.

Så undersøges det, om funktionen er en løsning til differentialligningen. Dette gøres ved at differentiere funktionen, der er en sammensat funktion, hvorefter det undersøges, om højre- og venstresiden i differentialligningen er identiske, dvs. om der fremkommer en identitet:

$$h'(t) = -50 \cdot \frac{2}{5} \cdot (-50t + 3125)^{\frac{2}{5}-1} = -20 \cdot (-50t + 3125)^{-\frac{3}{5}}$$

$$-20 \cdot h(t)^{-\frac{3}{2}} = -20 \cdot \left((-50t + 3125)^{\frac{2}{5}} \right)^{-\frac{3}{2}} = -20 \cdot (-50t + 3125)^{\frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} = -20 \cdot (-50t + 3125)^{-\frac{3}{5}}$$

<u>De to udtryk er identiske, dvs. funktionen er løsning til differentialligningen.</u>

Metode 2: Det tjekkes, om funktionen opfylder begyndelsesbetingelsen:

$$h(0) = (-50 \cdot 0 + 3125)^{\frac{2}{5}} = 3125^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3125}^{\,2} = 5^2 = 25$$

Dvs. funktionen passer med, at væskehøjden fra start er 25cm.

Så undersøges det, om funktionen er en løsning til differentialligningen. Dette gøres på TI n'spire ved først at definere funktionen og derefter undersøge om man ved indsættelse i differentialligningen får en identitet:

$h(t) := (-50 \cdot t + 3125)^{\frac{2}{5}}$	*Udført*
$\text{solve}\left(\frac{d}{dt}(h(t)) = -20 \cdot (h(t))^{\frac{-3}{2}}, t\right)$	$t \le \frac{125}{2}$

Normalt skal man få resultatet ”Sandt” ved indtastningen af solve(…), da udsagnet skal være sandt for alle t-værdier for at være en identitet. Men resultatet $t \le \dfrac{125}{2}$ viser, at udsagnet er sandt for alle t-værdier mindre end eller lig 62,5 sekunder, og dermed passer løsningen i det pågældende interval (0 til 62,5 sekunder), da den øvre grænse netop er det tidspunkt, hvor den sidste væske ifølge funktionsudtrykket forlader tragten.

Da funktionsudtrykket for h(t) både opfylder begyndelsesbetingelsen og differentialligningen i det relevante interval, er det den søgte løsning.

Metode 3:

Løses ved separation af de variable. Der er to mulige intervaller for *h*, men da det er en højde, vælges *h* > *0*:

$$\int h^{\frac{3}{2}}dh = \int -20dt \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}} = -20 \cdot t + k$$

Konstanten *k* bestemmes ud fra oplysningen om, at væskehøjden er 25 fra start:

$$\frac{2}{5} \cdot 25^{\frac{5}{2}} = -20 \cdot 0 + k \quad \Leftrightarrow \quad k = 1250$$

Og så kan *h* isoleres:

$$\frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}} = -20 \cdot t + 1250 \quad \Leftrightarrow$$

$$h^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} \cdot (-20t) + \frac{5}{2} \cdot 1250 \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{h = (-50t + 3125)^{\frac{2}{5}}}} \quad ; \quad 0 \le t \le 62{,}5$$

Hvor den nedre grænse for definitionsmængden er starttiden og den øvre er det tidspunkt, hvor højden er 0.

<u>*8.024:*</u> $\frac{dN}{dt} = (0{,}025 - 0{,}0004t) \cdot N$; *N* er folketallet som funktion af tiden *t* i år.

Differentialligningen fortæller, at befolkningstallet fra start (*t* = 0) vil vokse med 2,5% om året, da parentesen i differentialligningen bliver 0,025 for *t* = 0.

Befolkningstallet vil så vedblive med at vokse – men med færre og færre procent om året – indtil:

$$0{,}025 - 0{,}0004t = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{0{,}025}{0{,}0004} = 62{,}5$$

Dvs. 62,5 år fra start vil befolkningstallet toppe, hvorefter det begynder at aftage, da væksthastigheden bliver negativ. Aftagningen vil ske med flere og flere procent om året, men en model af befolkningstallet vil ikke kunne forudsige udviklingen så langt ude i fremtiden, så modellen vil alligevel ikke holde til det punkt, hvor befolkningstallet skulle falde med mere end 100% om året.

Maj 2008: Delprøven UDEN hjælpemidler

9.001: De to opgivne vektorer er: $\vec{a} = \begin{pmatrix} t-2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Begge vektorerne er egentlige vektorer (uanset værdien af t kan $\vec{a}$ ikke blive nul-vektoren), så man har:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} t-2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(t-2) \cdot 3 + 5 \cdot (-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3t - 6 - 15 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3t = 21 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{t = 7}}$$

9.002: Når $m = 1 \; og \; n = 2$ har man:

$$\frac{5m}{2m^2 + 3mn} = \frac{5 \cdot 1}{2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{5}{2+6} = \underline{\underline{\frac{5}{8}}}$$

Udtrykket kan reduceres ved først at faktorisere nævneren:

$$\frac{5m}{2m^2 + 3mn} = \frac{5m}{m(2m+3n)} = \underline{\underline{\frac{5}{2m+3n}}}$$

9.003: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

$$f'(x) = 3x^{3-1} - 3 \cdot 2x^{2-1} + 0 = \underline{\underline{3x^2 - 6x}}$$

For at bestemme monotoniforhold bestemmes først nulpunkter for den afledede funktion.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$3x^2 - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \qquad (\mathit{faktorisering})$$

$$3x \cdot (x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\mathit{nulreglen})$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = 2$$

De relevante værdier til fortegnsskemaet for *f'* bestemmes:

$$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 3 + 6 = 9 > 0$$

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = 3 - 6 = -3 < 0$$

$$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 = 27 - 18 = 9 > 0$$

Dette giver fortegnsskemaet:

x		0		2	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	↗		↘		↗

Man har altså:

$$\underline{\underline{f \;\; er \;\; voksende \;\; i \;\;]-\infty; 0] \; og \; i \; [2; \infty[}}$$

$$\underline{\underline{f \; er \; aftagende \; i \; [0; 2]}}$$

9.004: $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

Det bemærkes, at tælleren svarer til den afledede funktion til nævneren, så man benytter integration ved substitution og substituerer nævneren med t:

$t = x^2 + 1$

$\frac{dt}{dx} = 2x$

$dt = 2x \cdot dx$

$x = 0: \; t = 0^2 + 1 = 1$

$x = 1: \; t = 1^2 + 1 = 2$

Dette indsættes, så der integreres med hensyn til t i stedet for x og dermed også med nye grænser:

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt = \left[\ln|t|\right]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2) - 0 = \underline{\underline{\ln(2)}}$$

9.005: Da de to trekanter er retvinklede og har ens vinkler ved B, er trekanterne ensvinklede, dvs. man har:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|CL|}$$

$$\frac{x}{200cm - x} = \frac{30cm}{90cm} \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 200cm - x \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 200cm \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 50cm}}$$

Maj 2008: Delprøven MED hjælpemidler

9.006: a) Trekant *CDH* er retvinklet, og når $\angle D$ skal findes, kender man den modstående katete og hypotenusen, så det er sinus, der skal bruges:

$$\sin \angle D = \frac{5}{6}$$

$$\angle D = \sin^{-1}\left(\frac{5}{6}\right) = \underline{\underline{56{,}4427^0}}$$

b) I firkant *ABCD* tegnes linjestykket BD, så man kan regne på den retvinklede trekant *ABD*, hvor Pythagoras kan bruges:

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 \quad \Leftrightarrow \quad |BD| = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{25+49} = \underline{\underline{\sqrt{74}}} \approx 8{,}602$$

$\angle D$ er firkant *ABCD* er lige så stor som $\angle D$ i trekant *CDH*, da trekant *CDH* fremkommer inde i firkant *ABCD*, når man nedfælder den vinkelrette fra *C* på linjestykket *AD* og kalder det *H*.

Linjestykket *AC* kan så bestemmes ved cosinusrelationen:

$$|AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2 - 2\cdot|AD|\cdot|CD|\cdot\cos\angle D \quad \Leftrightarrow$$

$$|AC| = \sqrt{7^2 + 6^2 - 2\cdot 7\cdot 6\cdot \cos 56{,}4427^0} = \underline{\underline{6{,}2103}}$$

9.007: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad P(1,3,-6)$

a) For at bestemme en ligning for planen har man brug for en normalvektor, og derfor bestemmes først krydsproduktet mellem ovenstående to vektorer, der udspænder planen:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot(-2) - 5\cdot(-3) \\ 5\cdot 1 - (-2)\cdot(-2) \\ (-2)\cdot(-3) - 4\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{n_\alpha}$$

Med denne normalvektor og punktet *P* fås planens ligning:

$$\alpha:\ 7\cdot(x-1) + 1\cdot(y-3) + 2\cdot(z-(-6)) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{7x + y + 2z + 2 = 0}}$$

b) Først bestemmes en af vinklerne mellem en normalvektor for planen og en retningsvektor for linjen.

Disse er $\vec{r_l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{n_\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Så bliver vinklen:

$$\cos(w) = \frac{\vec{r_l}\cdot\overrightarrow{n_\beta}}{|\vec{r_l}|\cdot|\overrightarrow{n_\beta}|} = \frac{1\cdot 2 + 1\cdot(-3) + 3\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{14}} \quad \Leftrightarrow$$

$$w = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{14}}\right) = 80{,}7255^\circ$$

Dvs. at den spidse vinkel mellem planen og linjen er: $v = 90^\circ - w = 90^\circ - 80{,}7255^\circ = \underline{\underline{9{,}2745^\circ}}$

9.008: $f(x)=10\cdot x^4+\frac{1}{x} \quad ; \quad x>0$

Først findes funktionsudtrykket for en stamfunktion ved at integrere funktionsudtrykket.

$$\int f(x)dx=\int\left(10x^4+\frac{1}{x}\right)dx=2x^5+\ln|x|+k=2x^5+\ln(x)+k$$

Numerisktegnet kan fjernes, da det er oplyst, at x > 0.

Oplysningen $F(1)=25$ benyttes til at bestemme værdien af *k*:

$$25=2\cdot 1^5+\ln(1)+k \quad \Leftrightarrow \quad k=25-2=23$$

Altså er:

$$\underline{\underline{F(x)=2x^5+\ln(x)+23}}$$

9.009: Det er oplyst, at man skal regne tiden i antal år EFTER 1900, mens levealderen måles i år. De to punkter, som grafen skal gå gennem er derfor $(0,46)$ og $(75,70)$.

a) Det er oplyst, at man skal arbejde med en lineær funktion, dvs. forskriften er $f(x)=a\cdot x+b$, og da *b*-værdien angiver begyndelsesværdien, fortæller det første punkt os, at $b=46$.
Man mangler altså kun at bestemme hældningen, hvilket gøres ved:

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{70-46}{75-0}=\frac{24}{75}=0,32$$

Hermed er forskriften for *f*: $\underline{\underline{f(x)=0,32\cdot x+46}}$

b) $g(x)=0,053\cdot x+76$

Man skal finde den *x*-værdi, hvor de to funktioner giver samme funktionsværdi, dvs. man løser:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow 0,32\cdot x+46=0,053\cdot x+76 \Leftrightarrow 0,32\cdot x-0,053\cdot x=30 \Leftrightarrow$$

$$0,267x=30 \Leftrightarrow x=\frac{30}{0,267}=112,3595506$$

x = 112 svarer til år 1900 + 112 = 2012.

<u>Dvs. i år 2012 er den forventede levealder for nyfødte den samme som den forventede levealder for 65-årige.</u>

9.010: Da man har en fast årlig rentefod, kan man anvende kapitalfremskrivningsformlen:

$$K_n=K_0\cdot(1+r)^n$$

$$60=20\cdot(1+r)^{15} \Leftrightarrow \frac{60}{20}=(1+r)^{15} \Leftrightarrow \sqrt[15]{\frac{60}{20}}=1+r \Leftrightarrow r=\sqrt[15]{3}-1=0,0759896247253=\underline{\underline{7,60\%}}$$

9.011: $f(x) = x^2 - x + 2 \qquad g(x) = -x^2 + 5x - \frac{5}{2} \qquad P(2, f(2))$

a) For at bestemme en ligning til en tangent, skal man kende røringspunktet og tangentens hældning.
Tangentens hældning bestemmes:

$f'(x) = 2x - 1$

$a_t = f'(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$

Røringspunktets andenkoordinat bestemmes: $f(2) = 2^2 - 2 + 2 = 4$

Hermed bliver tangentligningen: $y - 4 = 3 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 3x - 2}}$

Det kunne også have været bestemt på TI n'spire ved:

$\text{tangentLine}(x^2 - x + 2, x, 2)$	$3 \cdot x - 2$

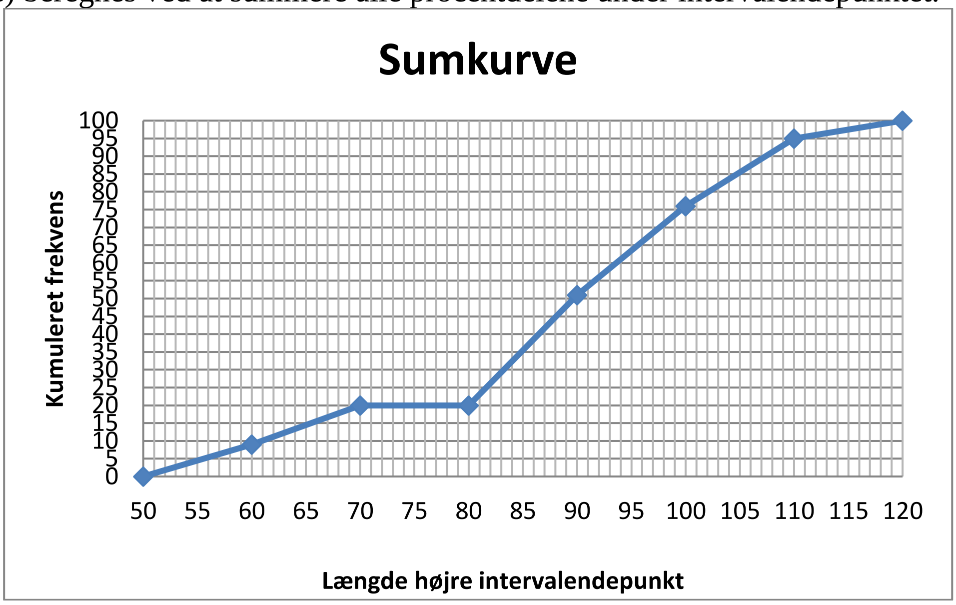
b) Koordinatsættet for det fælles punkt bestemmes ved først at finde den *x*-værdi, der giver samme funktionsværdi, og derefter indsætte denne i en af forskrifterne for at finde *y*-værdien.
Man skal altså løse ligningen $f(x) = g(x)$ og derefter indsætte løsningen. Dette gøres ved:

$f(x) := x^2 - x + 2$	*Udført*
$g(x) := -x^2 + 5 \cdot x - \frac{5}{2}$	*Udført*
$\text{solve}(f(x) = g(x), x)$	$x = \frac{3}{2}$
$f\left(\frac{3}{2}\right)$	$\frac{11}{4}$

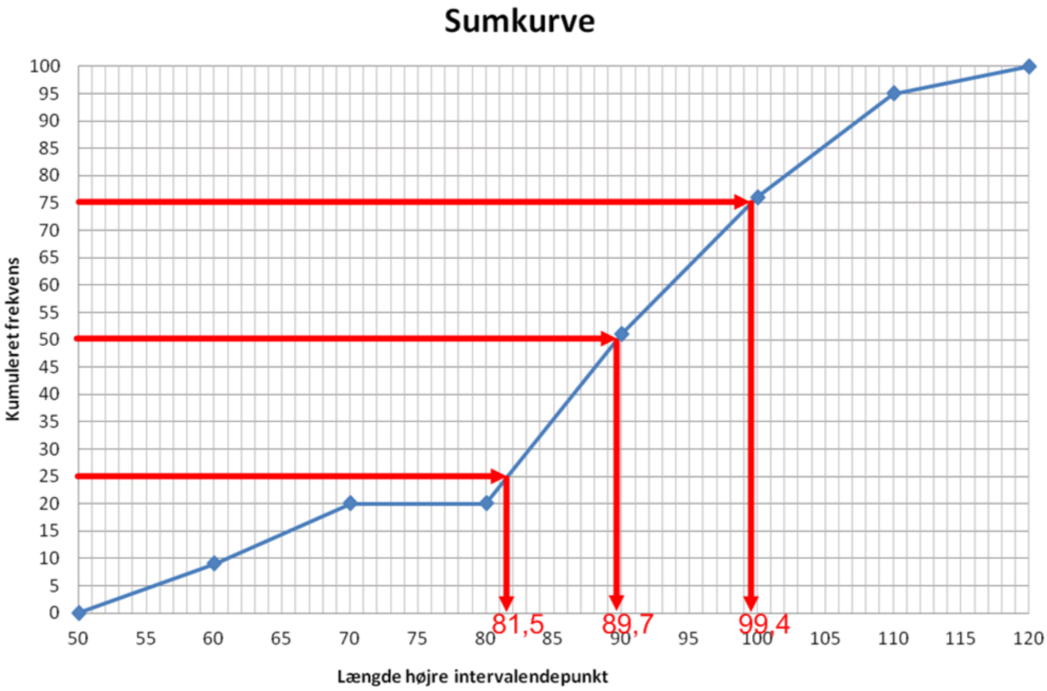
Hermed er Q's koordinatsæt: $\underline{\underline{Q\left(\frac{3}{2}; \frac{11}{4}\right)}}$

9.012: a) I Excel indtastes procentdelen ud for det højre intervalendepunkt, og en tabel over kumulerede frekvenser (procentdele) beregnes ved at summere alle procentdelene under intervalendepunktet.

Længde	Procentdel	Kum. Procent
50	0	0
60	9	9
70	11	20
80	0	20
90	31	51
100	25	76
110	19	95
120	5	100



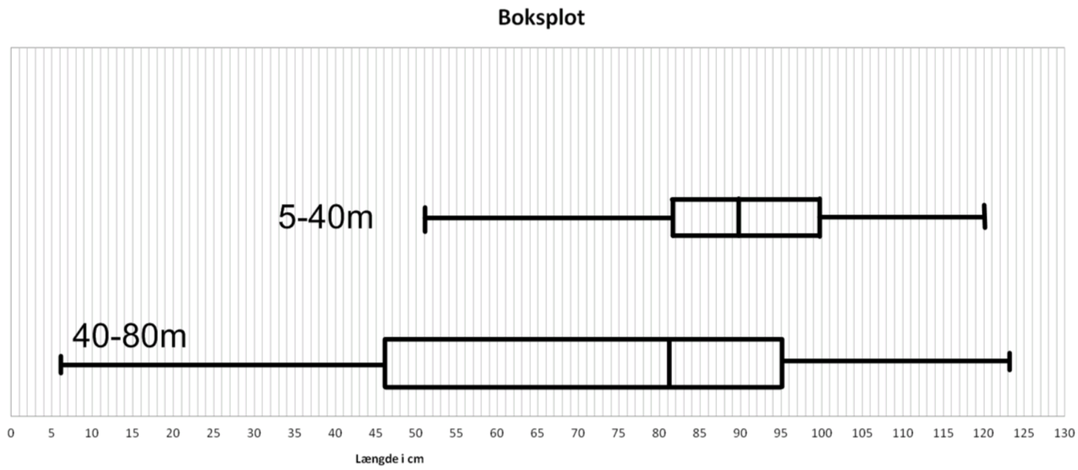
Kvartilsættet bestemmes ved at gå ind fra 25%, 50% og 75% og aflæse de tilsvarende længder:



Kvartilsættet aflæses altså til:
Nedre kvartil: 81,5 cm
Median: 89,7cm
Øvre kvartil: 99,4 cm

Desuden er det oplyst, at den korteste havkat er 51cm og den længste 120 cm.

b) For havkatte fanget i dybden 40-80 har man de fem værdier, der skal anvendes i boksplottet:
(Kortest, nedre kvartil, median, øvre kvartil, længste) : (6cm, 46cm, 81cm, 95cm, 123cm)



Havkattene i dybden 5-40m afviger markant mindre i længden. Halvdelen ligger mellem 81,5cm og 99,4cm, dvs. inden for et interval på 18cm.
For havkattene i dybden 40-80m ligger de 50%-midterste mellem 46cm og 95cm, dvs. inden for et interval på 49cm.
Desuden er der ingen helt små havkatte i dybden 5-40m, og mere end 25% af havkattene i dybden 40-80 er kortere end den korteste af de fangede havkatte i dybden 5-40m. Det kunne altså se ud til, at havkattene enten fødes eller kort efter fødslen søger ned i dybden, hvorefter de vokser sig store og svømmer op mod overfladen, hvor der muligvis er mere føde?

<u>9.013:</u> $f(x)=\sqrt{3x+9} \quad g(x)=x+3$

a) På figuren er det angivet, at graferne for både *f* og *g* går gennem punktet (-3,0), og at de to grafer skærer hinanden i x = 0. Rigtigheden af dette tjekkes ved indsættelse:

$$f(-3)=\sqrt{3\cdot(-3)+9}=\sqrt{0}=0$$

$$g(-3)=-3+3=0$$

$$f(0)=\sqrt{3\cdot 0+9}=\sqrt{9}=3=0+3=g(0)$$

Dvs. at arealet bestemmes ved at integrere med den nedre grænse -3 og den øvre grænse 0.
På figuren er det desuden angivet, at grafen for *f* ligger over *g* i det interval, hvor punktmængden M er placeret. Dermed kan arealet bestemmes ved:

$$A_M=\int_{-3}^{0}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_{-3}^{0}\left(\sqrt{3x+9}-x-3\right)dx$$

Dette bestemmes på TI-nspire med indtastningen:

$$\int_{-3}^{0}\left(\sqrt{3x+9}-x-3\right)dx \quad \text{der giver } \frac{3}{2}$$

Dvs. at arealet af punktmængden er: $A_M=\underline{\underline{\frac{3}{2}}}$

b) For at bestemme arealet af punktmængden N, skal der integreres med den nedre grænse 0 og den øvre grænse k, og i dette interval ligger grafen for *g* over grafen for *f*.

Når arealerne skal være lige store (dvs. have værdien $\frac{3}{2}$), skal man altså løse ligningen:

$$\frac{3}{2}=\int_{0}^{k}\left(g(x)-f(x)\right)dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}=\int_{0}^{k}\left(x+3-\sqrt{3x+9}\right)dx$$

Denne ligning løses på TI-nspire ved indtastningen:

$$\text{solve}\left(\frac{3}{2}=\int_{0}^{k}\left(x+3-\sqrt{3\cdot x+9}\right)dx,k\right) \qquad k=-3 \text{ or } k=\frac{7}{3}$$

Ligningen har to løsninger, men k = -3 svarer jo til, at man (igen) bestemmer arealet af punktmængden M (man får samme resultat som i spørgsmål a, da man både har byttet om på grænserne og funktionerne, og dermed skiftet fortegn to gange).

Dermed er den søgte løsning: $\underline{\underline{k=\frac{7}{3}}}$

9.014: $\frac{dN}{dt} = 0{,}0004 \cdot N \cdot (315 - N)$

Dette er en logistisk differentialligning, og den fuldstændige løsning (i det relevante interval for *N*) er:

$$N(t) = \frac{315}{1 + c \cdot e^{-0{,}0004 \cdot 315 \cdot t}} = \frac{315}{1 + c \cdot e^{-0{,}126 \cdot t}}$$

Da biltætheden i 1968 var 198, har man altså punktet (0,198), og dette bruges til at bestemme *c*.

$$198 = \frac{315}{1+c} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{315}{198} - 1 = 0{,}591$$

Så man har: $\underline{\underline{N(t) = \frac{315}{1 + 0{,}591 \cdot e^{-0{,}126 \cdot t}} \quad ; \quad t \geq 0}}$

År 2008 svarer til *t = 40*. Så man har: $N(40) = \frac{315}{1 + 0{,}591 \cdot e^{-0{,}126 \cdot 40}} = 313{,}799 \approx 314$

Dvs. at der i 2008 ifølge modellen er $\underline{\underline{314\ biler\ \ pr.1000\ indbyggere}}$

Modellen har et max. på 315, så i 2008 er man tæt på det maksimale antal.

9.015: $\ln(M) = 1{,}6524 - 4{,}612 \cdot e^{-0{,}0423 \cdot t}$

M er vægten målt i kg og *t* er alderen målt i døgn efter udklækning.

a) Det er nemmest at besvare spørgsmålene i omvendt rækkefølge, for hvis man først finder en forskrift, skal man bagefter bare sætte ind i den.

Forskriften for *M* som funktion af *t* bestemmes ved at opløfte begge sider af ligningen:

$$e^{\ln(M)} = e^{1{,}6524 - 4{,}612 \cdot e^{-0{,}0423 \cdot t}} \quad \Leftrightarrow$$

$$M(t) = \frac{e^{1{,}6524}}{e^{4{,}612 \cdot e^{-0{,}0423 \cdot t}}} = \frac{e^{1{,}6524}}{\left(e^{4{,}612}\right)^{e^{-0{,}0423 \cdot t}}} = \underline{\underline{\frac{e^{1{,}6524}}{\left(e^{4{,}612}\right)^{\left(e^{-0{,}0423}\right)^{t}}}}} = \frac{5{,}2194915868711}{100{,}68531903801^{0.95858216278314^{t}}}$$

For en 30 døgn gammel kylling er *t* = 30: $M(30) = \frac{e^{1{,}6524}}{\left(e^{4{,}612}\right)^{\left(e^{-0{,}0423}\right)^{30}}} = 1{,}4274772380612$

Dvs. at en 30 døgn gammel kylling vejer $\underline{1{,}427kg}$

9.016: a) Da antallet af individer *P* er en funktion af tiden *t* skrives *P(t).*

Den hastighed hvormed antallet af individer vokser til et givet tidspunkt er *P'(t).*

Forskellen mellem 2600 og antallet af individer skrives: 2600 – *P(t).*

Da hastighed er proportional med produktet af individer og ovenstående forskel, har man:

$P'(t) = k \cdot P(t) \cdot (2600 - P(t))$, hvor *k* er proportionalitetskonstanten.

Proportionalitetskonstanten kan bestemmes, da det oplyses, at når $P(t) = 100$ er $P'(t) = 10$:

$$10 = k \cdot 100 \cdot (2600 - 100) \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{10}{250000} = \frac{1}{25000}$$

Altså er den søgte differentialligning: $\underline{\underline{P'(t) = \frac{1}{25000} \cdot P(t) \cdot (2600 - P(t))}}$

9.017: $\frac{1}{3}x^3 + h \cdot x^2 = 100$ og $S = \left(1+\sqrt{5}\right) \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot h$

a) For at kunne bestemme *S* udtrykt ved *x*, skal man isolere *h* i den første ligning og indsætte dette i den anden:

$h \cdot x^2 = 100 - \frac{1}{3} \cdot x^3 \Leftrightarrow h = \frac{100}{x^2} - \frac{x}{3}$ Indsættes:

$$S(x) = \left(1+\sqrt{5}\right) \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot \left(\frac{100}{x^2} - \frac{x}{3}\right) = \left(1+\sqrt{5}\right) \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot \left(\frac{100}{x^2} - \frac{x}{3}\right) = \underline{\underline{\left(1+\sqrt{5} - \frac{4}{3}\right) \cdot x^2 + \frac{400}{x}}}$$

For at finde den *x*-værdi, hvor beholderens overfladeareal er mindst muligt, findes det eller de steder, hvor den første afledede er nul, og fortegnet/fortegnene for den anden afledede funktion bestemmes disse steder for at undersøge, om der er tale om minimum, maksimum eller vandret vendetangent:

$s(x) := \left(1+\sqrt{5} - \frac{4}{3}\right) \cdot x^2 + \frac{400}{x}$ — *Udført*

$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(s(x)) = 0, x\right)$ — $x = 4.719368868$

$\frac{d^2}{dx^2}(s(x))|x = 4.7193688680028$ — 11.416407865

Da den anden afledede er negativ det sted, hvor den første afledede er nul, er der tale om et minimumssted, så $\underline{\underline{x = 4,72cm}}$ giver det mindste overfladeareal.

9.018: $K : x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 - 2z = 36$ $\quad l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad t \in R.$

For at undersøge, om *K* er tangent til *l*, indsættes linjens koordinatsæt i kuglens ligning, hvorved det afgøres, hvor mange værdier af parameteren *t*, der giver fællespunkter mellem linje og kugle. Hvis det netop er én værdi, er *l* en tangent til *K*.

$$(-8-5t)^2 - 4 \cdot (-8-5t) + (2+7t)^2 + 2 \cdot (2+7t) + (-3-3t)^2 - 2 \cdot (-3-3t) = 36 \quad \Leftrightarrow$$

$$64 + 25t^2 + 80t + 32 + 20t + 4 + 49t^2 + 28t + 4 + 14t + 9 + 9t^2 + 18t + 6 + 6t - 36 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$83t^2 + 166t + 83 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$t^2 + 2t + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(t+1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$\underline{\underline{t = -1}}$ da der netop er én løsning, er $\underline{\underline{l \text{ tangent til } K}}$.

August 2008: Delprøven UDEN hjælpemidler

9.019:

$$(a-b)^2+2b(a-b)=a^2+b^2-2ab+2ab-2b^2=\underline{\underline{a^2-b^2}}$$

$$\frac{3x-3y}{x^2-2xy+y^2}=\frac{3(x-y)}{(x-y)^2}=\underline{\underline{\frac{3}{x-y}}}$$

9.020:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}t+1\\2t\end{pmatrix}\qquad \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

Det bemærkes, at der ikke er værdier af t, der gør $\vec{a}$ til nulvektoren. Hermed gælder:

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}t+1\\2t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow 3t+3+8t=0\Leftrightarrow 11t=-3\Leftrightarrow \underline{\underline{t=-\frac{3}{11}}}$$

$$\vec{a}\,||\,\vec{b}\Leftrightarrow\det(\vec{a},\vec{b})=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}t+1 & 3\\2t & 4\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(t+1)\cdot4-2t\cdot3=0\Leftrightarrow -2t=-4\Leftrightarrow\underline{\underline{t=2}}$$

9.021:

$$f(x)=b\cdot x^a\qquad f(2)=2\quad f(4)=16$$

De to kendte punkter indsættes i funktionsudtrykket:

$$\left.\begin{array}{r}2=b\cdot 2^a\\16=b\cdot4^a\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{16}{2}=\frac{b\cdot4^a}{b\cdot2^a}\quad\Rightarrow\quad 8=\left(\frac{4}{2}\right)^a\quad\Rightarrow\quad 8=2^a\quad\Rightarrow\quad\underline{\underline{a=3}}$$

Denne værdi indsættes sammen med det ene punkt for at finde b-værdien:

$$2=b\cdot2^3\quad\Leftrightarrow\quad b=\frac{2}{8}=\underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

9.022:

$$P(2,3,-1)\quad \alpha:4x-2y+4z-5=0$$

$$dist(P,\alpha)=\frac{|a\cdot x_0+b\cdot y_0+c\cdot z_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|4\cdot2-2\cdot3+4\cdot(-1)-5|}{\sqrt{4^2+(-2)^2+4^2}}=\frac{|-7|}{\sqrt{36}}=\underline{\underline{\frac{7}{6}}}$$

9.023:

$$f(x)=e^{2x}+3\qquad \frac{dy}{dx}=2y-6$$

Det eftervises at funktionen er en løsning til differentialligningen ved indsættelse i sidstnævnte, så der er brug for den afledede funktion:

$$f'(x)=2\cdot e^{2x}$$

Hermed fås ved indsættelse:

$$\frac{dy}{dx}=2y-6$$

$$2\cdot e^{2x}=2\cdot(e^{2x}+3)-6\quad\Leftrightarrow$$

$$2\cdot e^{2x}=2\cdot e^{2x}+6-6\quad\Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{2\cdot e^{2x}=2\cdot e^{2x}}}$$

Hvilket er et sandt udsagn for alle x-værdier (dvs. det er en identitet), og dermed er f en løsning til differentialligningen.

9.024: I Maple:

a) Forskriftet for modellen er angivet til at være $P(t) = P_o \cdot a^t$, og da den uafhængige variabel t står som eksponent i potensen, skal der anvendes eksponentiel regression (det bemærkes, at tiden måles i antal år EFTER 1999):

$with(Gym):$

$År := [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]:$

$Solenergi := [7, 11.7, 15.6, 22.6, 32.8, 49.4, 68.9, 116.4]:$

$P(t) := ExpReg(År, Solenergi, t):$

$P(t) = 7.26046464758385\ 1.47020421913947^t$

Dvs. at $\underline{\underline{P_0 = 7,26046}}$ og $\underline{\underline{a = 1,470204}}$

b) År 2008 svarer til $t = 9$, så man udregner:

$P(9) = 233.004011316709$

Dvs. at i 2008 udvindes $\underline{\underline{233\ MW}}$

Hvis udvindingen af solenergi skal overstige 400MW, skal $P(t) > 400$, og det løses ved:

$solve(P(t) > 400) = RealRange(Open(10.40219780), \infty)$

Dette betyder, at $t > 10,40$, dvs. at udvindingen af solenergi overstiger 400MW i år $\underline{\underline{2010}}$,

da $1999 + 10.40 = 2009.40.$

a) For at bestemme værdien af de to konstanter bruges TI-89's Stats/List-editor.

Tabellens værdier lægges ind, så antallet af år efter 1999 (dvs. 0, 1, 2, 3, …) lægges som List1, og solenergien målt i MW som List2, hvorefter der laves eksponentiel regression (ExpReg) med List2 som funktion af List1. Resultatet lægges ind som Y1. Det giver: $y1 = 7,2604646 \cdot 1,470204^x$

Så man har: $\underline{\underline{P_0 = 7,3MW \ og \ a = 1,470}}$

b) Mængden af udvundet solenergi i 2008 ($x = 9$):

Grafregneren giver: y1(9)=233,004011

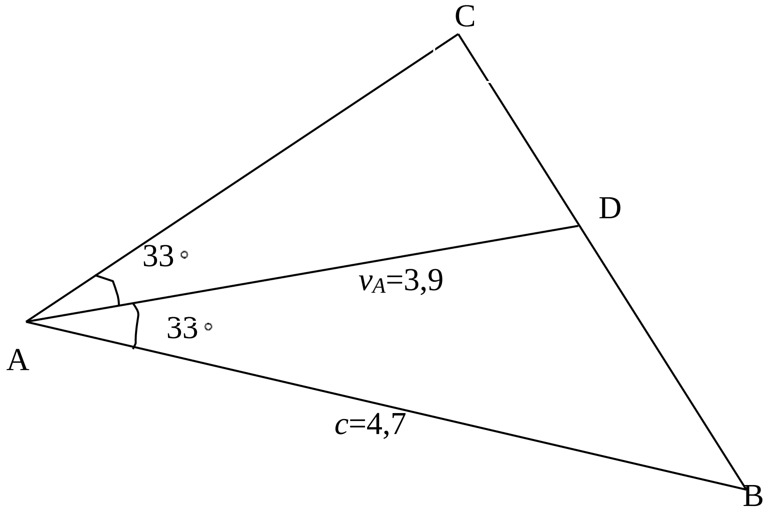
Dvs. at modellen forudsiger, at der i år 2008 vil blive udvundet $\underline{\underline{233MW}}$

For at finde ud af, hvornår udvindingen overstiger 400MW, indtastes:

Solve(y1(x)=400,x), der giver x = 10,402

Da den udvundne energi er angivet som en effekt (og ikke som den årlige mængde), vil de 400MW overstiges i $\underline{\underline{år\ 2009}}$ (1999 + 10)

9.025: a) En model af trekanten med de opgivne værdier tegnes:



$$|BD|^2 = |AD|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |AD| \cdot |AB| \cdot \cos \angle BAD$$

$$|BD| = \sqrt{3,9^2 + 4,7^2 - 2 \cdot 3,9 \cdot 4,7 \cdot \cos 33°} = 2,5601439 = \underline{\underline{2,6}}$$

b) $\angle B$ kan nu bestemmes både ved sinus- og cosinusrelationer anvendt på $\triangle ABD$. For at undgå overvejelser omkring et valg mellem en stump og en spids vinkel bruges cosinusrelationen:

$$\cos B = \frac{|AB|^2 + |BD|^2 - |AD|^2}{2 \cdot |AB| \cdot |BD|}$$

$$B = \cos^{-1}\left(\frac{4,7^2 + 2,56^2 - 3,9^2}{2 \cdot 4,7 \cdot 2,56}\right) = 56,06556° = \underline{\underline{56°}}$$

Og hermed er: $C = 180° - A - B = 180° - 66° - 56,06556° = 57,9344398° = \underline{\underline{58°}}$

9.026: $x^2+y^2+z^2+4x-6y-8z+4=0 \qquad P(1,-1,4)$

a) For at finde centrum og radius omskrives kuglens ligning:

$x^2+y^2+z^2+4x-6y-8z+4=0 \quad \Leftrightarrow$

$(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=-4+2^2+3^2+4^2=25=5^2$

Dvs. at $\underline{\underline{C(-2,3,4) \quad r=5}}$

b) For at opskrive en ligning for tangentplanen har man brug for en normalvektor og et punkt i planen. P ligger i planen, så der mangler bare en normalvektor, og hertil bruges $\overrightarrow{CP}=\begin{pmatrix}1-(-2)\\-1-3\\4-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}$.

Så man har tangentplanligningen: $3(x-1)-4(y-(-1))+0(z-4)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{3x-4y-7=0}}$

c) $\alpha: 3x+4y-z=2 \qquad l: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}; t\in R$

Vinklen v mellem linjen og planen kan findes ved først at bestemme vinklen w mellem en normalvektor for planen og en retningsvektor for linjen:

$$\cos(w)=\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{r}|}$$

$$w=\cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}}{\sqrt{3^2+4^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{0^2+3^2+(-2)^2}}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$w=\cos^{-1}\left(\frac{0+12+2}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{13}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{14}{\sqrt{2}\cdot 13}\right)=40,403421°$$

Og så er den søgte vinkel:

$v=90°-w=90°-40,40°=\underline{\underline{49,60°}}$

9.027: $f(t)=297\cdot 1,0679^t, \quad 0\le t\le 20$

a) $T_2=\dfrac{\ln 2}{\ln a}=\dfrac{\ln 2}{\ln 1,0679}=10,551132$

Dvs. at fordoblingstiden er $\underline{\underline{10,6\,år}}$.

b) Tallene fortæller, at der i 1980 var 297 retspsykiatriske patienter under opsyn, og at antallet af patienter vokser med 6,79% om året.

9.028: $I(t)=200\left(1-0,9\cdot e^{-0,0091\cdot t}\right)$

Temperaturen i stegens indre efter 20 minutter bestemmes:

$I(20)=200\left(1-0,9\cdot e^{-0,0091\cdot 20}\right)=49,9517587$

Dvs. at temperaturen i stegens indre er $\underline{\underline{50°C}}$ efter 20 minutter.

Tiden som funktion af temperaturen bliver:

$$I(t)=200\left(1-0,9\cdot e^{-0,0091\cdot t}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{I(t)}{200}=1-0,9\cdot e^{-0,0091\cdot t} \quad \Leftrightarrow$$

$$0,9\cdot e^{-0,0091\cdot t}=1-\frac{I(t)}{200} \quad \Leftrightarrow$$

$$e^{-0,0091\cdot t}=\frac{200-I(t)}{200\cdot 0,9} \quad \Leftrightarrow$$

$$-0,0091\cdot t=\ln\left(\frac{200-I(t)}{180}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{t=\frac{\ln\left(\frac{180}{200-I(t)}\right)}{0,0091}}}$$

9.029: Elev A har generelt de længste samtaler.

Elev A har kun ¼ af sine samtaler til at vare under 110s, mens ¼ af samtalerne er over 350s. Den midterste halvdel af elev A's samtaler ligger altså mellem 110s og 350s med en median på 220s.
Elev B har mindre end ¼ af sine samtaler til at vare over 110s, og halvdelen af elev B's samtaler er på 90s eller mindre.
Det er også elev B, der har haft den korteste samtale på ca. 10s, mens elev A ikke har nogen samtaler under 50s.
Elev B kan dog godt i enkelte tilfælde føre "lange" samtaler, da elev B har haft den længste samtale på 390s, hvor elev A kun har været oppe på 370s.

Så elev B har generelt de korteste samtaler og samtidig de mest ekstreme.

9.030: $O(x)=0,0024x^2+10^6 \quad a(x)=-0,008x+1300$

a) $F(x)=x\cdot a(x)-O(x)=x\cdot\left(-0,008x+1300\right)-\left(0,0024x^2+10^6\right)=\underline{\underline{-0,0104x^2+1300x-10^6}}$

Der laves funktionsundersøgelse:

$F'(x)=-0,0208x+1300$

$F'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 0,0208x=1300 \quad \Leftrightarrow \quad x=62500$

$F'(0)=1300>0$

$F'(100000)=-780<0$

Det ses altså, at fortjenesten vokser i intervallet $\left[0,62500\right]$, mens den aftager i $\left[62500;\infty\right[$.

Dermed er der lokalt maksimumssted i x = 62500, så for at virksomheden skal tjene mest muligt, skal der produceres $\underline{\underline{62500\ enheder}}$

$\underline{\textit{9.031:}}\quad f(x) = 4\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 \quad ; \quad x \geq 0$

a) For at bestemme monotoniforholdene skal den afledede funktion benyttes:

$$f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\cdot 2x = \frac{2}{\sqrt{x}} - x$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{x}} = x \quad \Leftrightarrow \quad 2 = x^{\frac{3}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2^{\frac{2}{3}} \approx 1,587401$$

$$f'(1) = \frac{2}{\sqrt{1}} - 1 = 1 > 0$$

$$f'(4) = \frac{2}{\sqrt{4}} - 4 = -3 < 0$$

Hermed bliver fortegnsskemaet:

x	0		1,5874	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

Så man har:

$$\underline{\underline{f \text{ er voksende i intervallet } \left[0; 2^{\frac{2}{3}}\right]}}$$

$$\underline{\underline{f \text{ er aftagende i intervallet } \left[2^{\frac{2}{3}}; \infty\right[}}$$

b) For at finde grænserne for området M skal nulpunkterne for f bestemmes:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\sqrt{x} = \frac{1}{2}x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 8 = x^{\frac{3}{2}} \quad \vee \quad x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x = 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8}^2 = 2^2 = 4 \quad \vee \quad x = 0$$

Da funktionen er voksende i intervallet begyndende ved 0, og da grafen skærer 1. aksen i (0,0) og (4,0), må grafen ligge over førsteaksen mellem disse to punkter.
Så rumfanget af omdrejningslegemet findes ved på TI-89 at indtaste:

$$\int\left(\pi\cdot\left(4\sqrt{x} - 0,5\cdot x^2\right)^2, x, 0, 4\right) \quad \textit{der} \quad \textit{giver} \quad 103,403278$$

Dvs. man har:

$$V = \pi\cdot\int_0^4 \left(f(x)\right)^2 dx = \underline{\underline{103,4}}$$

9.032: $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\cdot y+1 \qquad P(1,4)$

a) Dette er en lineær 1. ordens differentialligning, der kan løses på flere forskellige måder.

1) På TI-89 indtastes $deSolve\left(y'=\frac{y}{x}+1, x, y\right)$ der giver $y=x\cdot\ln(x)+@1\cdot x$

På TI n'spire tastes det samme, og resultatet bliver $y=x\cdot\ln(x)+c1\cdot x$.

I Maple indtastes: > $dsolve\left(y'(x)=\frac{1}{x}\cdot y(x)+1\right)$

$$y(x)=(\ln(x)+\_C1)\,x$$

Dvs. at den fuldstændige løsning er $y=x\cdot\ln(x)+k\cdot x$, hvor k er en konstant.

Konstanten bestemmes ved indsættelse af punktet:

$4=1\cdot\ln(1)+k\cdot 1 \quad\Leftrightarrow\quad k=4$

Dvs. at den søgte løsning er $\underline{\underline{y=x\cdot\ln(x)+4x \quad ; \quad x>0}}$

2) Ligningen omformes: $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\cdot y+1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}\cdot y=1$

Heraf aflæses $h(x)=-\frac{1}{x} \quad g(x)=1$, og man ser på intervallet $x > 0$, hvor punktet ligger.

Den fuldstændige løsning kan så bestemmes:

$$y=e^{-H(x)}\cdot\int g(x)\cdot e^{H(x)}dx=e^{\ln|x|}\cdot\int e^{-\ln|x|}dx=e^{\ln(x)}\cdot\int e^{-\ln(x)}dx=x\cdot\int\left(e^{\ln(x)}\right)^{-1}dx=$$

$$x\cdot\int\frac{1}{x}dx=x\cdot\left(\ln|x|+k\right)=x\cdot\ln x+k\cdot x$$

Herefter kan konstanten bestemmes som vist ovenfor.

3) Man kan også prøve at gætte en partikulær løsning, men i dette tilfælde er det ikke den nemmeste metode. Man skulle så gætte den partikulære løsning $p(x)=x\cdot\ln(x)$.

9.033: $\frac{dN}{dt} = \frac{0,08t-1}{t} N \; ; t > 0,5$ $\qquad N(1) = 1,2 \cdot 10^6$

a) Opgaven kan besvares ved at løse differentialligningen med separation af de variable eller ved at bruge deSolve på lommeregneren, hvorefter man kan arbejde med løsningen. Men det ville være en omvej at bruge disse metoder. Opgaven kan besvares direkte ved at se på differentialligningen: Væksthastigheden til *t = 1* kan bestemmes, da man også kender populationens størrelse til dette tidspunkt. Så man har:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{0,08t-1}{t} N$$

$$\left.\frac{dN}{dt}\right|_{t=1} = \frac{0,08 \cdot 1 - 1}{1} \cdot 1,2 \cdot 10^6 = -1,104 \cdot 10^6$$

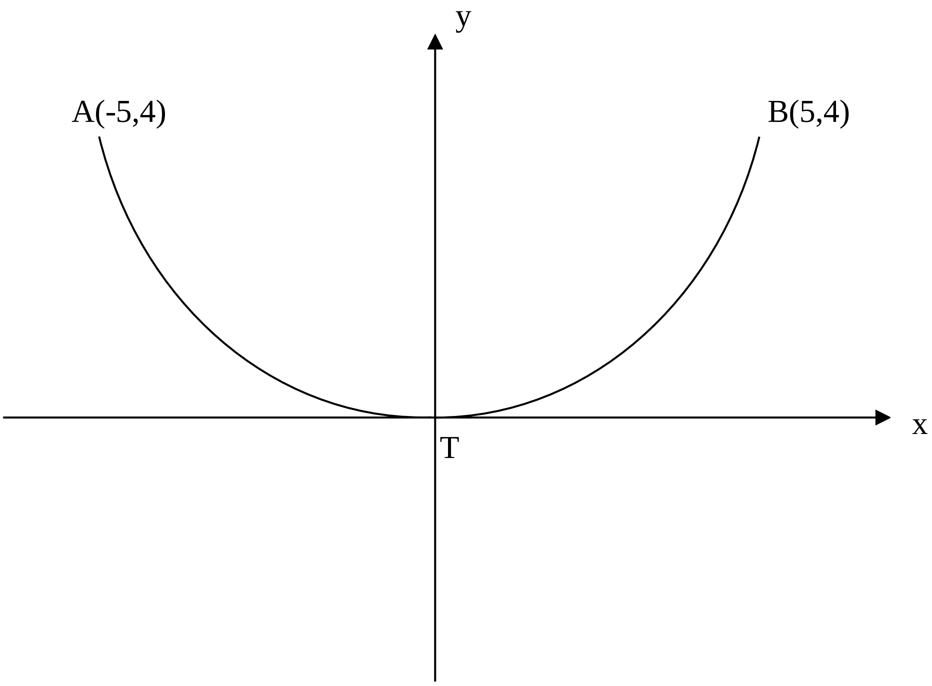
Dvs. at populationen $\underline{\underline{\text{falder med } 1,1 \cdot 10^6 \text{ individer pr. døgn}}}$ efter 1 døgn.

Det tidspunkt, hvor der er færrest individer i populationen bestemmes ved at kigge på højresiden af differentialligningen. Her er både *t* og *N* positive, så væksthastighedens fortegn bestemmes af brøkens tæller. Her har man:

$$0,08t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{0,08} = 12,5 \qquad \frac{dN}{dt} < 0 \;\; for \; t < 12,5 \qquad \frac{dN}{dt} > 0 \;\; for \; t > 12,5$$

Så populationen falder indtil midt i det 13. døgn, hvorefter den begynder at vokse igen. Populationen er altså mindst efter $\underline{\underline{12,5 \; døgn}}$.

9.034: Det nemmeste er at lægge parablen ind, så den har toppunkt i (0,0). Hermed bliver *b=c=0*, så parablens ligning kommer på formen: $y = a \cdot x^2$



Værdien af *a* bestemmes ved at indsætte et af punkterne *A* og *B*. Her vælges *B*:

$$4 = a \cdot 5^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{4}{25}$$

Så ligningen bliver: $\underline{\underline{y = \frac{4}{25} \cdot x^2}}$

9.035: Fodpunktet for den indtegnede højde tegnet fra B kaldes B_h.

$\triangle ABB_h$ er retvinklet, så man har:

$$\sin A = \frac{h}{|AB|} \quad \Leftrightarrow \quad |AB| = \frac{h}{\sin 45°} = \frac{h}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \underline{\underline{\sqrt{2} \cdot h}}$$

Da arealet er 10, har man:

$$10 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \left(|BC| + |AD|\right) \quad \Leftrightarrow \quad |BC| + |AD| = \frac{20}{h}$$

Dette kan bruges til at finde omkredsen som funktion af h:

$$\begin{aligned} O(h) &= |AB| + |BC| + |CD| + |DA| = \\ &|AB| + |BC| + |AB| + |AD| = \\ &2 \cdot |AB| + |BC| + |AD| = \\ &\underline{\underline{2 \cdot \sqrt{2} \cdot h + \frac{20}{h}}} \end{aligned}$$

9.036: $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 5 \qquad P(5, f(5))$

a) For at bestemme en ligning for tangenten m, skal man have hældningen og et punkts koordinatsæt, så de bestemmes:

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24$$

$$f(5) = 2 \cdot 5^3 - 15 \cdot 5^2 + 24 \cdot 5 + 5 = 0$$

$$f'(5) = 6 \cdot 5^2 - 30 \cdot 5 + 24 = 24$$

Hermed bliver tangentligningen:

$$y - 0 = 24(x - 5) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = 24x - 120}}$$

Når røringspunktet for l kaldes , og hældningen for l kaldes a_l har man:

$$a_l = f'(x_l)$$

$$a_l = \frac{f(x_l) - f(5)}{x_l - 5} = \frac{f(x_l)}{x_l - 5}$$

Dette giver sammen med funktionsudtrykkene fundet ovenfor:

$$f'(x_l) = \frac{f(x_l)}{x_l - 5} \quad \Leftrightarrow \quad f'(x_l) \cdot (x_l - 5) = f(x_l) \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(6x_l^2 - 30x_l + 24\right)(x_l - 5) = 2x_l^3 - 15x_l^2 + 24x_l + 5$$

Denne ligning løses med solve på TI-89:

$solve\left(\left(6x^2 - 30x + 24\right)(x - 5) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 5, x\right)$, der giver $x = 5 \vee x = \frac{5}{4}$

Den første løsning svarer til tangenten m, så det er den anden løsning, der skal bruges. Man har altså:

$$\underline{\underline{x_l = \frac{5}{4}}}$$

December 2008: Delprøven UDEN hjælpemidler

9.037: $f(x)=x^2-4x-5$

Punkterne på førsteaksen har alle *y*-værdien 0, og *x*-værdierne (der er polynomiets rødder) bestemmes altså ved:

$0=x^2-4x-5 \Leftrightarrow \quad 0=(x-5)(x+1) \Leftrightarrow \quad x=5 \vee x=-1$

Altså er koordinatsættene: $\underline{\underline{(-1,0)\text{og}(5,0)}}$

9.038: $f(x)=x^3+e^x+1 \qquad P(0,f(0))$

For at bestemme en ligning for tangenten, skal man kende dens hældning og røringspunktets koordinater.
Andenkoordinaten til røringspunktet bestemmes ved indsættelse i funktionsforskriften:

$f(0)=0^3+e^0+1=0+1+1=2$

Tangentens hældning er givet ved differentialkvotienten i punktet, så først bestemmes den afledede funktion for derefter at indsætte *P*'s *x*-værdi og finde differentialkvotienten:

$f'(x)=3x^2+e^x$

$f'(0)=3\cdot 0^2+e^0=0+1=1$

Så er tangentens ligning:

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$y-2=1(x-0) \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y=x+2}}$

9.039: $p=\dfrac{4}{r+s} \Leftrightarrow \quad (r+s)\cdot p=4 \Leftrightarrow \quad r+s=\dfrac{4}{p} \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{s=\dfrac{4}{p}-r}}$

9.040: Det ubestemte integral bestemmes ved integration ved substitution:

Metode 1:

$\int(2x-1)^6\,dx=\int\frac{1}{2}\cdot t^6 dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot t^7+k=\underline{\underline{\frac{1}{14}\cdot(2x-1)^7+k}}$

Her er benyttet substitutionen:

$t=2x-1$

$\frac{dt}{dx}=2$

$\frac{1}{2}\cdot dt=dx$

Metode 2:

$\int(2x-1)^6\,dx=\int(2x-1)^6\,\frac{d(2x-1)}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot(2x-1)^7+k=\underline{\underline{\frac{1}{14}\cdot(2x-1)^7+k}}$

9.041: Cirklen er angivet ved ligningen: $x^2+2x+y^2-4y=0$. Punktet P(1,1) ligger på cirklen.

Metode 1:

For at bestemme ligningen for tangenten, skal man kende et punkt på den og en normalvektor til den. Punktet P kender man, så det er kun normalvektoren, man mangler. For at bestemme en normalvektor til tangenten, skal man først finde cirklens centrum:

$(x+1)^2+(y-2)^2=0+1^2+2^2=5$, dvs. cirklen har centrum i C(-1,2)

Da en tangent står vinkelret på den radius, der går fra centrum til røringspunktet, er $\overrightarrow{CP}=\begin{pmatrix}1-(-1)\\1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ en normalvektor til tangenten.

Da man nu både kender et punkt og en normalvektor, kan man bestemme tangentligningen ved:

$$2\cdot(x-1)-1(y-1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x-2-y+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y=2x-1}}$$

Metode 2:

For at bestemme ligningen for tangenten, skal man kende et punkt på tangenten og hældningen for tangenten. Punktet P kender man, så det er kun hældningen, man mangler. Da radius ud til et punkt på cirklen står vinkelret på tangenten til cirklen i punktet, ved man, at produktet af tangentens hældning *a* og hældningen *c* af linjen gennem cirklens centrum og punktet *P* er: $a\cdot c=-1$.

Man skal altså i første omgang kende cirklens centrum, og det findes ved omskrivning af cirklens ligning:

$(x+1)^2+(y-2)^2=0+1^2+2^2=5$, dvs. cirklen har centrum i C(-1,2)

Hældningen *c* af linjen gennem *C* og *P* er: $c=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{1-2}{1-(-1)}=\dfrac{-1}{2}$.

Dvs. at tangentens hældning er: $a\cdot c=-1 \Leftrightarrow a\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1 \Leftrightarrow a=2$

Dette indsættes i udtrykket for den rette linjes ligning ud fra punkt og hældning:

$$y-y_0=a\cdot(x-x_0)$$

$$y-1=2\cdot(x-1) \Leftrightarrow \underline{\underline{y=2x-1}}$$

December 2008: Delprøven MED hjælpemidler

9.042: Opgivne vektorer: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) To egentlige vektorer er ortogonale netop hvis deres prikprodukt er 0:

$$\left(\vec{a} + s \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{v} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-s \\ 3+2s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$(2-s) \cdot 1 + (3+2s) \cdot (-1) = 2 - s - 3 - 2s = -3s - 1$$

$$\left(\vec{a} + s \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$-3s - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{s = -\frac{1}{3}}}$$

Inden der kan sættes to streger under facit, skal det tjekkes, om den fundne værdi for s gør $\left(\vec{a} + s \cdot \vec{b}\right)$ til nulvektoren (da de to vektorer i så fald ikke ville være ortogonale):

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{3} \\ 3 - 2 \cdot \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

Dermed er den fundne s-værdi et rigtigt facit.

b) Først bestemmes den anden af de to vektorer, der udspænder parallelogrammet:

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Arealet af det udspændte parallelogram bestemmes ved at finde den numeriske værdi af determinanten af vektorparret:

$$A = \left|\det(\vec{a}, \vec{a} - \vec{b})\right| = \left\|\begin{matrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{matrix}\right\| = |2 \cdot 1 - 3 \cdot 3| = |2 - 9| = |-7| = \underline{\underline{7}}$$

c) Projektionsformlen benyttes:

$$\overrightarrow{a_{\vec{b}}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2}{(-1)^2 + 2^2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{4}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}}}$$

9.043: I trekant ABC er $a=10$; $b=15$; $c=21$

a) Da alle tre sider kendes, kan man bestemme vinkler ved hjælp af cosinusrelationerne:

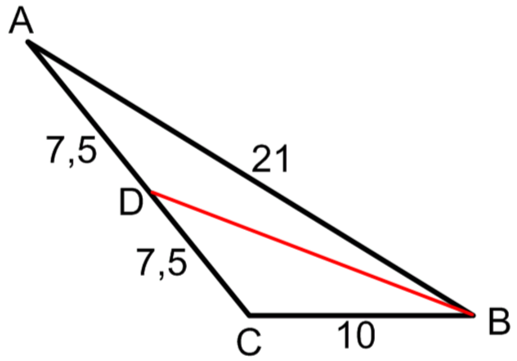
$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c}$$

$$A=\cos^{-1}\left(\frac{15^2+21^2-10^2}{2\cdot 15\cdot 21}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{283}{315}\right)=\underline{\underline{26,0497983877^\circ}}$$

Arealet af trekanten kan så bestemmes med ½-appelsin-formlen:

$$T=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin A=\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 21\cdot\sin\left(26,0497983877^\circ\right)=\underline{\underline{69,1664658632}}$$

b) Medianen indtegnes på nedenstående skitse, og det angives, at den deler siden AC i to lige store stykker:



Da vi i trekant ABD kender vinkel A og de to hosliggende sider, kan den modstående side bestemmes ved hjælp af en cosinusrelation:

$$m_b^2=|BD|^2=|AB|^2+|AD|^2-2\cdot|AB|\cdot|AD|\cdot\cos(A)$$

$$m_b=\sqrt{21^2+7,5^2-2\cdot 21\cdot 7,5\cdot\cos\left(26,0497983877^\circ\right)}=\underline{\underline{14,6372811683}}$$

9.044:

restart

with(*Gym*) :

a) Det er oplyst, at modellen er en lineær funktion, så der skal laves lineær regression. Det bemærkes, at "år" angiver antal år EFTER 1963, så man har:

$år := [0, 4, 7, 11, 14]$:

$testtal := [502, 492, 488, 480, 470]$:

$f(t) := LinReg(år, testtal, t)$:

$f(t) = -2.16938110749186\, t + 502.019543973941$

Dvs. funktionsforskriften er $\underline{\underline{f(t) = -2.17\cdot t + 502}}$

b) Tallet 502 er begyndelsesværdien, der fortæller, at

$\underline{\underline{\textit{i 1963 var testtallet ifølge modellen 502.}}}$

Tallet -2,17 er hældningen, der fortæller, at

$\underline{\underline{\textit{hvert år siden 1963 er testtallet faldet med 2.2}}}$

År 1980 svarer til $t = 17$, så modellen giver testtallet:

$f(17) = 465.140065146580$

Dvs. ifølge modellen skulle testtallet være 465, hvilket stemmer godt med det faktiske resultat på 466.

9.045: a) Da man kan regne med konstant vækstrate, kan man anvende kapitalfremskrivningsformlen. Det indskrives i Maple, og man benytter, at der er 17 år mellem 2003 og 2020:

$$K_n = K_o \cdot (1+r)^n =$$

$$5003 \cdot (1+0.085)^{17} = 20023.31834$$

Dvs. at i 2020 vil bruttonationalproduktet pr. indbygger i Kina være $\underline{\underline{20023\ US\$}}$

b) Forskrifterne for de to landes bruttonationalprodukter pr. indbygger indtastes, og det undersøges, hvornår de giver ens funktionsværdier:

$$B_{USA}(t) := 37562 \cdot 1.021^t :$$

$$B_{Kina}(t) := 5003 \cdot 1.085^t :$$

$$solve\left(B_{USA}(t) = B_{Kina}(t)\right) = 33.15854927$$

Dvs. at 33 år efter 2003, altså i år $\underline{\underline{2036}}$ vil bruttonationalproduktet pr. indbygger være ens i USA og Kina.

9.046: a) Vinklerne (den spidse og den stumpe) mellem planerne bestemmes som vinklerne mellem planernes normalvektorer, der er:

$$\overrightarrow{n_\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{n_\beta} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Den ene vinkel findes:

$$\cos(v) = \frac{\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta}}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_\beta}\right|} = \frac{2 \cdot 5 + (-3) \cdot 1 + 6 \cdot (-3)}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} \cdot \sqrt{5^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{-11}{\sqrt{49} \cdot \sqrt{35}} \quad \Leftrightarrow$$

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{-11}{\sqrt{49} \cdot \sqrt{35}}\right) = 105{,}4038°$$

Da den er stump, er den søgte vinkel: $w_{spids} = 180° - 105{,}4038 = \underline{\underline{74{,}5962°}}$

b) Det kan undersøges om linjen l er parallel med planen α ved at se, om planens normalvektor og linjens retningsvektor er ortogonale, hvilket undersøges ved prikprodukt:

$$\overrightarrow{n_\alpha} \perp \vec{r_l} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{n_\alpha} \cdot \vec{r_l} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 + 6 \cdot 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0$ $\underline{\underline{\text{dvs. at linien } l \text{ er parallel med planen } \alpha}}$

Skæringspunktet mellem l og β bestemmes ved at sætte koordinaterne til linjen ind i planens ligning og isolere parameteren t:

$$5 \cdot (10 + 3t) + (16 + 4t) - 3(3 + t) = 9 \quad \Leftrightarrow$$

$$15t + 4t - 3t + 50 + 16 - 9 = 9 \quad \Leftrightarrow$$

$$16t = -48 \quad \Leftrightarrow \quad t = -3$$

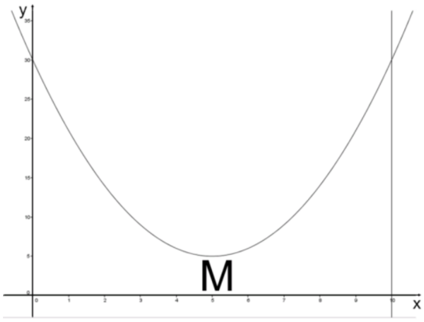
Indsættes i liniens parameterfremstilling:

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dvs. at skæringspunktet er $\underline{\underline{P(1,4,0)}}$

9.047: $f(x)=x^2-10x+30$

I Geogebra indtegnes grafen for *f* og linjen med ligningen *x=10*, så man kan se punktmængden *M*:



a) Da grafen ligger over *x*-aksen, kan arealet af *M* bestemmes som det bestemte integral med nedre grænse 0 og øvre grænse 10:

$f(x) := x^2 - 10\cdot x + 30$:

$\int_0^{10} f(x)\, dx = \frac{400}{3}$

Dvs. at $\underline{\underline{A_M = \frac{400}{3}}}$

b) Rumfanget af omdrejningslegemet kan derefter bestemmes ved:

$V=\pi\cdot\int_0^{10} f(x)^2 dx$

$evalf\left(\pi\cdot\int_0^{10.} (f(x))^2\, dx\right) = 7330.382858$

Dvs. at rumfanget af omdrejningslegemet er $\underline{\underline{V = 7330,382858}}$

9.048: $f(x)=x+2\cdot\sin(x)$; $x\in[0;2\pi]$

a) Maple regner i radianer, så man har:

$f(x) := x + 2\cdot\sin(x)$:

Den afledede funktions nulpunkter bestemmes i definitionsmængden, og man sikrer sig at få alle løsninger med:

$solve([f'(x) = 0, 0 \le x \le 2\cdot\pi], allsolutions, explicit)$

$\left\{x = \frac{2}{3}\pi\right\}, \left\{x = \frac{4}{3}\pi\right\}$

Dvs. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{2}{3}\cdot\pi \vee x = \frac{4}{3}\cdot\pi}}$

Desuden bestemmes den dobbeltafledededes fortegn disse steder:

$f''\left(\frac{2}{3}\cdot\pi\right) = -\sqrt{3}$

$f''\left(\frac{4}{3}\cdot\pi\right) = \sqrt{3}$

Da den anden afledede er negativ i $\frac{2}{3}\cdot\pi$, er der lokalt maksimum her, og da den er positiv i $\frac{4}{3}\cdot\pi$, er der lokalt minimum her.

Dvs. at $\underline{\underline{f \textit{ er voksende i } \left[0; \frac{2}{3}\cdot\pi\right] \textit{ og i } \left[\frac{4}{3}\cdot\pi; 2\cdot\pi\right]}}$ og $\underline{\underline{f \textit{ er aftagende i } \left[\frac{2}{3}\cdot\pi; \frac{4}{3}\cdot\pi\right]}}$

9.049: $\frac{dL}{dt} = 0,619 \cdot e^{-0,22 \cdot t} \cdot L$ L er længden af havkattene målt i cm og t er deres alder målt i år.

a) Den fuldstændige løsning bestemmes på TI n'spire ved den øverste af følgende indtastninger:

deSolve$\left(l'=0.619\cdot \boldsymbol{e}^{-0.22\cdot t}\cdot l,t,l\right)$	$l=\boldsymbol{c6}\cdot (0.059986)^{(0.802519)^t}$
solve$\left(72=c\cdot (0.059986462714805)^{(0.80251879796248)^{10}},c\right)$	$c=98.3395$
$98.3395\cdot (0.059986462714805)^{(0.80251879796248)^{16}}$	90.4813
solve$\left(40=98.3395\cdot (0.059986462714805)^{(0.80251879796248)^{t}},t\right)$	$t=5.18337$

Den fuldstændige løsning ses altså som resultatet af den første indtastning, og konstanten bestemmes ved at udnytte punktet (10,72). Dermed er forskriften for L(t):

$$\underline{\underline{L(t) = 98,3395 \cdot 0,059986^{\left(0,802519^t\right)}}}$$

b) Ved den næst sidste indtastning bestemmes længden af en 16 år gammel havkat til 90,5cm.

Ved den sidste indtastning bestemmes alderen af en 40cm havkat til 5,2år

9.050: Rumfanget af en kasse er $V = h \cdot l \cdot b$, så når man regner i dm har man:

a) $125 = h \cdot (x+3) \cdot x \Leftrightarrow \underline{\underline{h = \frac{125}{x \cdot (x+3)}}}$

Kassen er uden låg, så overfladearealet bliver:

$$O = 2 \cdot h \cdot l + 2 \cdot h \cdot b + l \cdot b = 2 \cdot h \cdot (l+b) + l \cdot b =$$

$$2 \cdot \frac{125}{x \cdot (x+3)} \cdot (x+3+x) + (x+3) \cdot x = \underline{\underline{\frac{250 \cdot (2x+3)}{x \cdot (x+3)} + (x+3) \cdot x}}$$

9.051: Populationen er i princippet alle mennesker (den kunne afgrænses til Danmarks befolkning) og stikprøven er så de mennesker, der kommer ind på hjemmesiden og efterfølgende vælger at deltage i undersøgelsen.

Denne udvælgelse af stikprøven er biased, da det for det første kun er de mennesker, der besøger siden, der har mulighed for at deltage, og disse er nok ikke repræsentative for befolkningen (tager 75% af danskerne kosttilskud?), og da det for det andet efterfølgende kun er nogle af disse – sandsynligvis de mest interesserede i kosttilskud - der deltager i undersøgelsen. Der opstår dermed den systematiske fejl, at de deltagende overvejende er interesseret i kosttilskud og dermed også kan forventes at tro på virkningen af sådanne. Den skjulte variabel er hermed en forudindtaget holdning til kosttilskud.

Så er der en væsentlig forskel på at "mene" og at "mærke" en positiv virkning på helbredet. Deltagerne har svaret på det første, mens firmaet hævder det sidste.

9.052: $\log(H) = 0,227 + 0,922 \cdot \log(S)$

H er husradonkoncentrationen målt i Bq/m^3. S er stueradonkoncentrationen målt i Bq/m^3.
Da man tager titalslogaritmen af H, kan H isoleres ved at anvende 10^x på begge sider:

$$\log(H) = 0,227 + 0,922 \cdot \log(S) \Leftrightarrow$$

$$10^{\log(H)} = 10^{0,227+0,922\cdot\log(S)} \Leftrightarrow$$

$$H = 10^{0,227} \cdot 10^{0,922\cdot\log(S)} \Leftrightarrow$$

$$H = 10^{0,227} \cdot 10^{\log(S)\cdot 0,922} \Leftrightarrow$$

$$H = 10^{0,227} \cdot \left(10^{\log(S)}\right)^{0,922} \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{H = 1,68655302539 \cdot S^{0,922}}}$$

Det bemærkes altså, at der var tale om en "skjult" potensfunktion (ganget med en konstant).

Da det er en potensfunktion, kan man anvende sammenhængen $(1+r_H) = (1+r_s)^a$ til at løse det følgende problem, men det kan også regnes uden anvendelse af formlen på denne måde:
Når stueradonkoncentrationen stiger med 20%, finder man den nye koncentration ved at multiplicere den oprindelige med 1,2.
Så man får:

$$H = 1,68655302539 \cdot S^{0,922}$$

$$H_{ny} = 1,68655302539 \cdot (1,2 \cdot S)^{0,922} \Leftrightarrow$$

$$H_{ny} = 1,68655302539 \cdot 1,2^{0,922} \cdot S^{0,922} \Leftrightarrow$$

$$H_{ny} = 1,68655302539 \cdot S^{0,922} \cdot 1,2^{0,922} \Leftrightarrow$$

$$H_{ny} = H \cdot 1,2^{0,922} \Leftrightarrow$$

$$H_{ny} = H \cdot 1,18305547261$$

Da husradonkoncentrationen skal multipliceres med 1,183, stiger den altså med <u>18,3%.</u>

9.053: $f(x) = x^3 + 6x^2 + k$

$$f'(x) = 3x^2 + 12x$$
$$f''(x) = 6x + 12$$

Først bestemmes de steder, hvor den afledede funktion har nulpunkter:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 + 12x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x(x+4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = -4$$

Så bestemmes fortegnene for den anden afledede af f de pågældende steder:

$$f''(0) = 6 \cdot 0 + 12 = 12 > 0$$

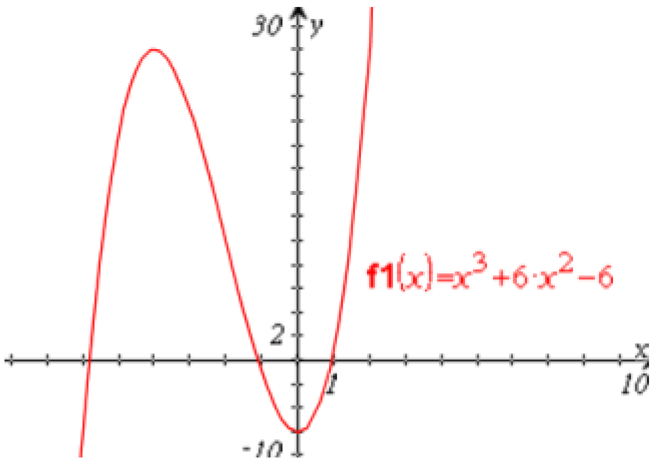
Dvs. funktionen har lokalt minimum i stedet x=0 med værdien $f(0) = 0^3 + 6 \cdot 0^2 + k = k$

$$f''(-4) = 6 \cdot (-4) + 12 = -12 < 0$$

Dvs. *f* har lokalt maksimum i stedet x = -4 med værdien $f(-4) = (-4)^3 + 6 \cdot (-4)^2 + k = 32 + k$

Uanset værdien af *k* er der tale om et tredjegradspolynomium, og ovenstående analyse har vist, at der – igen uanset værdien af *k*, der jo kun fungerer som en lodret parallelforskydning af grafen – vil være både et lokalt minimum og et lokalt maksimum, dvs. grafen vender to steder.

Et eksempel på en graf (hvor k = -6) ses her:



Der er nu følgende muligheder:

Hvis det lokale maksimum er placeret under x-aksen eller hvis det lokale minimum er placeret over x-aksen, så vil grafen have netop ét skæringspunkt med førsteaksen.

Hvis det (som på grafen ovenfor) gælder, at det lokale maksimum er placeret over x-aksen og det lokale minimum er placeret under x-aksen, så vil grafen have netop tre skæringspunkter med x-aksen.

Sidste mulighed: Hvis det lokale maksimum eller det lokale minimum ligger på x-aksen, vil grafen have netop to skæringspunkter med x-aksen.

Og sidstnævnte tilfælde er netop det, der spørges om i opgaven.
Ovenfor blev det vist, at det lokale minimum har værdien *k*, dvs. hvis det skal ligge på x-aksen, så skal $\underline{\underline{k = 0}}$.

Desuden har det lokale maksimum værdien 32 + k, så hvis det skal ligge på x-aksen, skal $\underline{\underline{k = -32}}$

Maj 2009: Delprøven UDEN hjælpemidler

9.054: $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\t\end{pmatrix}$

a) Det bemærkes, at begge vektorer er egentlige vektorer. Dermed har man:

$$\vec{a}\perp\vec{b} \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\t\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 3\cdot 2+4\cdot t=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{t=-\frac{3}{2}}}$$

9.055: I første led anvendes den anden kvadratsætning og i sidste led den tredje kvadratsætning:

$$(p-2q)^2+4pq-(p-q)(p+q)=p^2+4q^2-4pq+4pq-\left(p^2-q^2\right)=p^2+4q^2-p^2+q^2=\underline{\underline{5q^2}}$$

9.056: $f(4)=3\quad f(6)=27\quad f$ er en eksponentielt voksende funktion.

Da f er en eksponentielt voksende funktion, er den på formen: $f(x)=b\cdot a^x$

De to opgivne punkters koordinater indsættes i forskriften:

$$\left.\begin{aligned}27&=b\cdot a^6\\3&=b\cdot a^4\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{27}{3}=\frac{b\cdot a^6}{b\cdot a^4} \quad\Leftrightarrow\quad 9=a^{6-4}=a^2 \quad\Leftrightarrow\quad a=3$$

I sidste skridt er det benyttet, at a-værdien i en eksponentiel udvikling skal være positiv.
Så kan b-værdien bestemmes ved at indsætte den fundne a-værdi i forskriften sammen med det første punkt:

$$3=b\cdot 3^4 \quad\Leftrightarrow\quad b=\frac{3}{3^4}=\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}$$

Så er forskriften: $\underline{\underline{f(x)=\frac{1}{27}\cdot 3^x}}$

9.057: $f(x)=ax^2+bx+c \qquad d=b^2-4ac$

For parablen P gælder:
$\underline{\underline{a>0}}$, da benene vender opad.
$\underline{\underline{c>0}}$, da c-værdien angiver skæringen med y-aksen.
$\underline{\underline{d<0}}$, da parablen ikke skærer x-aksen, dvs. polynomiet har ingen rødder.

For parablen Q gælder:
$\underline{\underline{a<0}}$, da benene vender nedad.
$\underline{\underline{c<0}}$, da c-værdien angiver skæringen med y-aksen.
$\underline{\underline{d>0}}$, da parablen skærer x-aksen to steder, dvs. polynomiet har to rødder.

9.058: Det ubestemte integral bestemmes ved ledvis integration:

$$\int\left(6x^2+2x\right)dx=\underline{\underline{2\cdot x^3+x^2+k}}$$

Det bestemte integral bestemmes ved integration ved substitution:

$$\int_0^1 5x^4\cdot e^{x^5+1}dx$$

$$t=x^5+1$$

$$\frac{dt}{dx}=5x^4$$

$$dt=5x^4\cdot dx$$

$$x=0: t=0^5+1=1$$

$$x=1: t=1^5+1=2$$

Ovenstående indsættes, så variablen – inkl. grænserne – udskiftes fra x til t:

$$\int_0^1 5x^4\cdot e^{x^5+1}dx=\int_1^2 e^t dt=\left[e^t\right]_1^2=e^2-e^1=\underline{\underline{e(e-1)}}$$

Maj 2009: Delprøven MED hjælpemidler

9.059: Kuglen har centrum i C(0,0,5) og punktet P(2,-1,7) ligger på kuglen.

a) Man kender allerede kuglens centrum, så for at kunne bestemme ligningen, mangler man kun radius. Radius er afstanden fra centrum til et vilkårligt punkt på kuglen, så da P ligger på kuglen, har man:

$$r = |CP| = \sqrt{(2-0)^2 + (-1-0)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

Og hermed er kuglens ligning:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-5)^2 = 3^2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x^2 + y^2 + (z-5)^2 = 9}}$$

Ligning for en tangentplan α til kuglen: $x + 2y - 2z + 1 = 0$

b) For at bestemme den spidse vinkel mellem en plan og en linje, skal man først bestemme vinklen mellem en normalvektor for planen og en retningsvektor for linjen. En retningsvektor for linjen gennem C og P er:

$$\vec{r} = \overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ -1-0 \\ 7-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

En normalvektor for planen aflæses ud fra planens ligning: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Vinklen mellem retningsvektoren og normalvektoren bestemmes:

$$\cos w = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{2-2-4}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{9}} = -\frac{4}{9}$$

$$w = \cos^{-1}\left(-\frac{4}{9}\right) = 116{,}387799961°$$

Dvs. den søgte spidse vinkel er: $v = w - 90° = 116{,}387799961° - 90° = \underline{\underline{26{,}3878°}}$

c) Da α er en tangentplan, er centrums projektion på planen netop røringspunktet R med kuglen. Så man skal bestemme projektionen af punktet C på planen α. Dette gøres ved først at opskrive en parameterfremstilling for linjen gennem C med planens normalvektor som en retningsvektor for linjen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Røringspunktet R er så skæringen mellem denne linje og planen. Den findes ved at indsætte koordinaterne for linjen i planens ligning:

$$t + 2 \cdot (2t) - 2 \cdot (5 - 2t) + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t + 4t - 10 + 4t + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9t = 9 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1$$

Denne værdi indsættes i linjens parameterfremstilling for at bestemme røringspunktet:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$ Dvs. at røringspunktet er $\underline{\underline{R(1,2,3)}}$

$\underline{9.060:}$ $f(x) = x \cdot e^{2\cdot x}$; $P(1, f(1))$

a) En ligning for tangenten til grafen i punktet P bestemmes på TI n'spire ved:

$\text{tangentLine}(x\cdot e^{2\cdot x}, x, 1)$	$3\cdot e^2\cdot x - 2\cdot e^2$
$\text{tangentLine}(x\cdot e^{2\cdot x}, x, 1)$	$22.1671682968\cdot x - 14.7781121979$

Dvs. en ligning for tangenten er $\underline{\underline{y = 3\cdot e^2 \cdot x - 2\cdot e^2}}$

b) Monotoniforholdene bestemmes ved på TI n'spire at bestemme den afledede funktion og den anden afledede og derefter bestemme værdien af den anden afledede funktion de steder (i dette tilfælde "det sted"), hvor den afledede funktion har nulpunkter:

$f(x):=x\cdot e^{2\cdot x}$	*Udført*
$f1(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$	*Udført*
$f2(x):=\frac{d^2}{dx^2}(f(x))$	*Udført*
$\text{solve}(f1(x)=0, x)$	$x=\frac{-1}{2}$
$f2\left(\frac{-1}{2}\right)$	0.73575888234:

Da den anden afledede er positiv (0,735…), når x=-0,5, hvor den afledede funktion giver 0, har man altså et lokalt (og globalt) minimum her, og derfor gælder:

<u>*f* er aftagende i intervallet]-∞;-0,5]</u>

<u>*f* er voksende i intervallet [-0,5;∞[</u>

$\underline{9.061:}$ $m = b \cdot l^a$, hvor *l* er længden målt i mm og *m* er tørvægten målt i mg. Opgaven løses i Maple.

with(*Gym*) :

Tabellens værdier lægges ind i to lister:

længde := [5.1, 5.5, 6.0, 6.2, 6.4, 6.7, 7.2] :

tørvægt := [0.14, 0.18, 0.24, 0.27, 0.30, 0.35, 0.45] :

Det er potensvækst, da den uafhængige variabel står som rod i potensen:

$m(l)$:= *PowReg*(*længde*, *tørvægt*, *l*) :

$m(l) = 0.000564378091848758\, l^{3.38165813781519}$

Dvs. man har: $\underline{\underline{a = 3,381658}}$ og $\underline{\underline{b = 0,000564378}}$

b) Når længden af torskelarven er 7,5mm, har man:

$m(7.5) = 0.513722029153428$

Dvs. tørvægten er $\underline{\underline{0,514\ mg}}$

Når tørvægten er 0,60mg har man (der anvendes fsolve, da det er en potensfunktion):

$fsolve(m(l) = 0.6) = 7.852340681$

Dvs. længden er $\underline{\underline{7,85\ mm}}$

$\underline{9.062:}$ $|AB| = 5 \quad |AC| = 7 \quad \angle A = 114°$

a) Da man kender en vinkel og de to hosliggende sider, kan den modsatte side ($|BC|$) bestemmes ved at anvende en cosinusrelation:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos A$$

$$|BC| = \sqrt{5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos(114°)} = 10{,}1228239645 = \underline{\underline{10{,}1}}$$

Vinkel B kan bestemmes ved både cosinus- og sinusrelationer. Det er hurtigst med sinusrelationerne, men så skal man være opmærksom på, at man skal vurdere, om B er spids eller stump, da det jo er en vinkel, der er den ukendte. Cosinusrelationen giver ikke problemer med dette, da den altid entydigt giver vinklen, når man arbejder med trekanter.

Metode 1: Sinusrelationer.

$$\frac{\sin B}{|AC|} = \frac{\sin A}{|BC|} \quad \Leftrightarrow \quad \sin B = \frac{\sin A}{|BC|} \cdot |AC| \quad \Leftarrow \quad B = \sin^{-1}\left(\frac{\sin A}{|BC|} \cdot |AC|\right)$$

$$B = \sin^{-1}\left(\frac{\sin 114°}{10{,}122824} \cdot 7\right) = 39{,}17733866° = 39{,}2°$$

Da vinkel A er stump, kan B ikke også være stump, så den fundne vinkel er den rigtige: $\underline{\underline{\angle B = 39{,}2°}}$

Metode 2: Cosinusrelationer.

$$\cos B = \frac{|AB|^2 + |BC|^2 - |AC|^2}{2 \cdot |AB| \cdot |BC|}$$

$$B = \cos^{-1}\left(\frac{5^2 + 10{,}122824^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 10{,}122824}\right) = 39{,}1773386604° = \underline{\underline{39{,}2°}}$$

b) Man kan finde de to søgte størrelser i vilkårlig rækkefølge.

Metode 1: Først areal, så højde:

Da man kender en vinkel og de to hosliggende sider, kan arealet af trekanten bestemmes med ½-appelsin-formlen:

$$T = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sin(114°) = 15{,}9870455 = \underline{\underline{16{,}0}}$$

Arealet af en trekant kan også bestemmes som det halve af produktet mellem en grundlinje og højden på denne. Dvs. man har:

$$T = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot h_b \quad \Leftrightarrow \quad h_b = \frac{2 \cdot T}{|AC|} = \frac{2 \cdot 15{,}9870455}{7} = 4{,}56772728821 = \underline{\underline{4{,}6}}$$

Metode 2: Først højde, så areal:

Lad den rette vinkel på figuren (højdens fodpunkt) være D. Trekant ABD er retvinklet, og i denne trekant er: $\angle BAD = 180° - 114° = 66°$

Højden er den modstående katete til denne vinkel, så man har:

$$\sin(\angle BAD) = \frac{h_b}{|AB|} \quad \Leftrightarrow \quad h_b = \sin(\angle BAD) \cdot |AB|$$

$$h_b = \sin(66°) \cdot 5 = 4{,}56772728821 = \underline{\underline{4{,}6}}$$

Arealet kan så bestemmes ved: $T = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot 4{,}56772728821 \cdot 7 = \underline{\underline{16{,}0}}$

9.063: a) Frekvenserne beregnes ved at tage antallet af personer i det enkelte interval og dividere det med det samlede antal:

Eksempel: 5-10 : $frekvens = \dfrac{74}{531} = 0{,}139 = 13{,}9\%$

De kumulerede frekvenser beregnes som summen af frekvenserne op til og med det højeste antal cigaretter.

Antal cigaretter pr. dag	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
Antal personer	74	119	127	129	32	50
Frekvens	13,9%	22,4%	23,9%	24,3%	6,0%	9,4%
Kumuleret frekvens	13,9%	36,3%	60,2%	84,5%	90,5%	99,9%

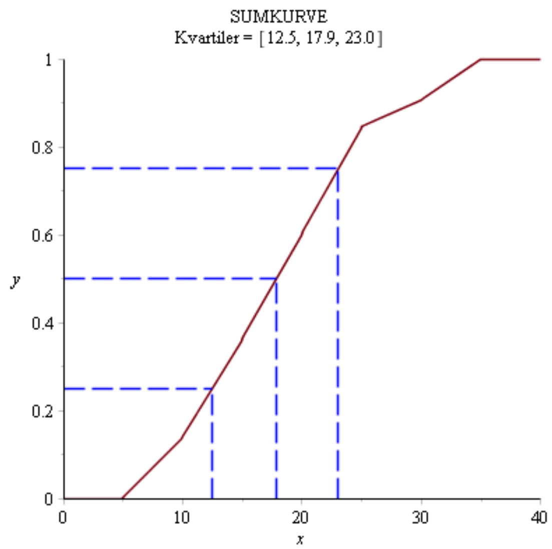
Den kumulerede frekvens skal give 100% i sidste interval, men afrundinger giver en afvigelse på 0,1%.

I Maple tegnes sumkurven ved:

$with(Gym):$

$$M := \begin{bmatrix} 5..10 & 74 \\ 10..15 & 119 \\ 15..20 & 127 \\ 20..25 & 129 \\ 25..30 & 32 \\ 30..35 & 50 \end{bmatrix}$$

$plotSumkurve(M)$



b) Maple har tegnet en sumkurve, og den har også beregnet kvartilsættet, der er (13,18,23)

For at finde den procentdel af rygerne, der ryger mindst 21 cigaretter om dagen, defineres sumkurven som funktion, og funktionsværdien beregnes:

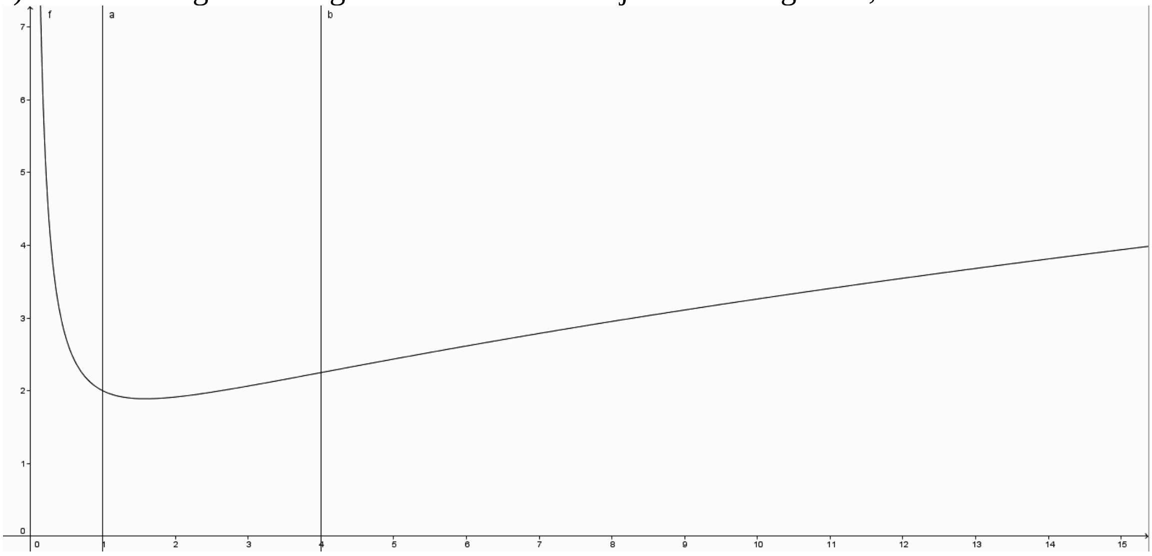
$m(x) := sumkurve(M, x):$

$m(21) = 0.651224105461394$

Dette tal fortæller, at 65% af rygerne ryger højst 21 cigaretter om dagen.
Dvs. 35% af rygerne ryger mindst 21 cigaretter om dagen.

9.064: $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$

a) Grafen indtegnes i Geogebra sammen med linjerne $x = 1$ og $x = 4$, så man kan se området:



Grafen ligger over 1.aksen, og man får derfor et simpelt omdrejningslegeme, med rumfanget:

$m(x) := sumkurve(M, x)$:

$m(21) = 0.651224105461394$

restart

$f(x) := \frac{1}{x} + \sqrt{x}$:

$$V = evalf\left(\pi \cdot \int_1^4 (f(x))^2 \, dx\right) = 38.48451001$$

Dvs. rumfanget er $\underline{\underline{V = 38,4845}}$

9.065: $\frac{dN}{dt} = 0,00013 \cdot N \cdot (1000 - N)$

a) Det er oplyst, at der er 50 individer i populationen fra start, dvs. når t = 0 er N = 50.
Dermed kan væksthastigheden fra start bestemmes ved indsættelse i differentialligningen:

$$\frac{dN}{dt} = 0,00013 \cdot 50 \cdot (1000 - 50) = 6,175$$

Dvs. at fra start vokser populationen med 6 individer pr. døgn.

Når væksthastigheden er 31 individer pr. døgn, har man:

$$31 = 0,00013 \cdot N \cdot (1000 - N).$$

Denne ligning (der kan omskrives til en andengradsligning), løses på TI n'spire ved:

```
solve(31=1.3E-4·n·(1000-n),n)
                    n=392.583 or n=607.417
```

Dvs. at væksthastigheden er 31 individer pr. døgn, når der er 393 eller 607 individer.

9.066: a) Da radius af halvcirklen er *r*, er længden af rektanglet *2r*, så omkredsen bliver:

$$O_{blomsterbed} = O_{halvcirkel} + O_{rektangel\,uden\,side} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\pi\cdot r + 2\cdot h + 2r = \underline{\underline{2h + (\pi+2)\cdot r}}$$

b) Når omkredsen er 16, har man:

$$16 = 2\cdot h + (\pi+2)\cdot r \iff 16 - (\pi+2)\cdot r = 2h \iff h = \frac{16-(\pi+2)\cdot r}{2} = 8 - \frac{(\pi+2)\cdot r}{2}$$

Arealet svarer til summen af arealet af halvcirklen og arealet af rektanglet:

$$A(r) = A_{rektangel} + A_{halvcirkel} = h\cdot 2r + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r^2 =$$

$$\left(8 - \frac{(\pi+2)\cdot r}{2}\right)\cdot 2r + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r^2 = 16r - \pi\cdot r^2 - 2\cdot r^2 + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r^2 = \underline{\underline{16r - \left(\frac{\pi}{2}+2\right)\cdot r^2}}$$

9.067: a) Der er tale om to retviklede trekanter, hvor vejstrækningerne AP og PB udgør hypotenuserne i trekanterne. Dermed kan de udtrykkes ved *x* ved at bruge Pythagoras, og ved at udnytte, at når kateten i den ene trekant har længden *x*, så er længden af det resterende stykke af grænsen (svarende til en katete i den anden trekant) lig med 46km - x:
(Der regnes uden enheder. Længderne opgives i km)

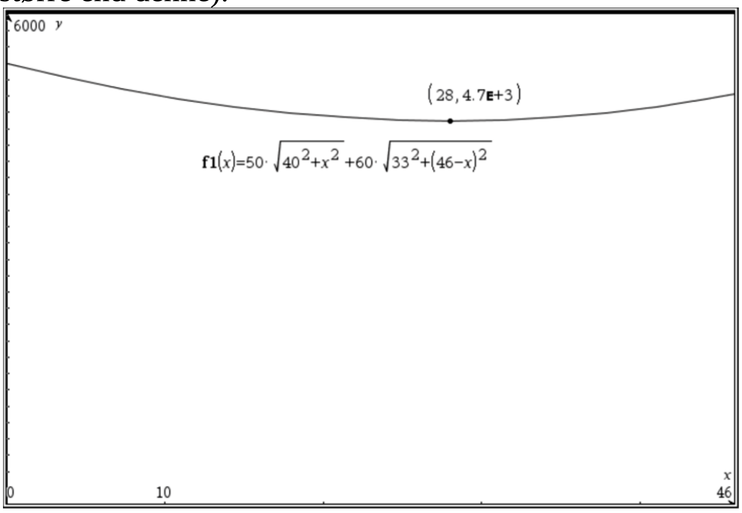
$$|AP|^2 = 40^2 + x^2 \iff \underline{\underline{|AP| = \sqrt{40^2+x^2}}} \quad ; \quad 0 \le x \le 46$$

$$|PB|^2 = 33^2 + (46-x)^2 \iff \underline{\underline{|AP| = \sqrt{33^2+(46-x)^2}}} \quad ; \quad 0 \le x \le 46$$

b) Lad f(x) være prisen for vejen udtrykt i millioner kr. Prisen for hver af de to dele af vejen findes ved at multiplicere *længden af stykket* med *prisen pr. længde*. Så man har:

$$f(x) = 50\cdot|AP| + 60\cdot|PB| = \underline{\underline{50\cdot\sqrt{40^2+x^2} + 60\cdot\sqrt{33^2+(46-x)^2}}} \quad ; \quad 0 \le x \le 46$$

For at finde den værdi for x, der gør vejen billigst mulig, kunne man foretage en funktionsanalyse og finde et minimumssted, men i dette tilfælde er det et funktionsudtryk, der ikke er så nemt at arbejde med, og vigtigst af alt kender man det område [0;46], som x-værdierne ligger inden for, så i dette tilfælde løses opgaven ved på TI n'spire at tegne en graf:
(For at finde ud af den øvre grænse på y-aksen, kan man finde en funktionsværdi for en x-værdi i området [0;46]. F.eks. giver f(20) = 4757, så den øvre grænse for y-værdierne skal i hvert fald være større end denne).



Minimumspunktet for grafen er fundet ved "Undersøg grafer"→"Minimum" og valg af grænser på hver side af det område, der ses at indeholde de mindste y-værdier.
Det er kun x-værdien, der skal bruges, dvs. man ser at <u>når x = 28km bliver vejen billigst mulig.</u>

9.068: $f(x) = -x^3 + x^2 + kx + 3 \qquad g(x) = x^2 + 3 \qquad k > 0$

a) Først bestemmes skæringsstederne mellem graferne for de to funktioner:

$$f(x) = g(x) \iff -x^3 + x^2 + kx + 3 = x^2 + 3 \iff x^3 - kx = 0 \iff x\left(x^2 - k\right) = 0 \iff$$

$$x = 0 \vee x^2 - k = 0 \iff x = -\sqrt{k} \vee x = 0 \vee x = \sqrt{k}$$

Det er angivet på figuren, at grafen for *g* ligger over grafen for *f* i området M, mens det er omvendt for området N. Skæringsstederne giver nedre og øvre grænse for de bestemte integraler, så man har:

$$A_M = \int_{-\sqrt{k}}^{0} \left(g(x) - f(x)\right) dx = \int_{-\sqrt{k}}^{0} \left(x^3 - kx\right) dx = \left[\frac{1}{4} \cdot x^4 - \frac{k}{2} x^2\right]_{-\sqrt{k}}^{0} =$$

$$0 - 0 - \left(\frac{1}{4} \cdot \left(-\sqrt{k}\right)^4 - \frac{k}{2} \cdot \left(-\sqrt{k}\right)^2\right) = \frac{-k^2}{4} + \frac{k^2}{2} = \frac{k^2}{4}$$

$$A_N = \int_{0}^{\sqrt{k}} \left(f(x) - g(x)\right) dx = \int_{0}^{\sqrt{k}} \left(-x^3 + kx\right) dx = \left[-\frac{1}{4} \cdot x^4 + \frac{k}{2} x^2\right]_{0}^{\sqrt{k}} =$$

$$\left(-\frac{1}{4} \cdot \left(-\sqrt{k}\right)^4 + \frac{k}{2} \cdot \left(-\sqrt{k}\right)^2\right) - (0 + 0) = \frac{-k^2}{4} + \frac{k^2}{2} = \frac{k^2}{4}$$

Det er hermed vist, at $\underline{\underline{A_M = A_N}}$ for alle værdier af *k*.

9.069: $y' = 0{,}03 \cdot \left(g(t) - y\right) \qquad g(t) = 20 + 0{,}25 \cdot t \qquad 0 \leq t \leq 320$

t er tiden målt i sekunder, g(t) er vandbadets temperatur mål i grader celsius.
f(t) er objektets indre temperatur målt i grader celsius og opfylder differentialligningen.

a) Først bestemmes, hvor lang tid der går, før vandbadets temperatur bliver 100°C:

$$100 = 20 + 0{,}25 \cdot t \iff 80 = 0{,}25 \cdot t \iff t = \frac{80}{0{,}25} = 320$$

Dette passer med den øvre grænse for modellens gyldighed:
På TI n'spire bestemmes den fuldstændige løsning til differentialligningen, hvor g(t) er indsat:

deSolve$(y'=0.03 \cdot (20+0.25 \cdot t-y),t,y)$	$y=c8 \cdot (0.970446)^t+0.25 \cdot t+11.6667$
solve$(10=c \cdot (0.97044553354851)^0+0.25 \cdot 0+11.666666666667,c)$	$c=-1.66667$
$y=-1.66667 \cdot (0.97044553354851)^{320}+0.25 \cdot 320+11.666666666667$	$y=91.6666$

Med den anden indtastning bestemmes værdien af konstanten ud fra oplysningen om, at fra start (t = 0) er objektets indre temperatur 10°C.

Til sidst er det udnyttet, at man oven for har fundet ud af, at temperaturen er 100°C efter 320 sekunder til at bestemme den indre temperatur af objektet:
Dvs. objektets indre temperatur er 91,7°C, når vandbadet er 100°C

August 2009: Delprøven UDEN hjælpemidler

9.070: *P(1,-6)   Q(-2,3)*

Hældningen for den rette linje *l* gennem P og Q bestemmes:

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3-(-6)}{-2-1}=\frac{9}{-3}=-3$$

Med P som udgangspunkt og den fundne hældning bliver ligningen for *l*:

$$y-(-6)=-3\cdot(x-1) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{y=-3x-3}}$$

Skæringen med y-aksen findes ved at sætte x-værdien til 0, dvs: $y_{skæring}=-3\cdot 0-3=-3$

Dvs. koordinatsættet er $\underline{\underline{(0,-3)}}$

Skæringen med x-aksen findes ved at sætte y-værdien til 0, dvs: $0=-3\cdot x_{skæring}-3 \quad\Leftrightarrow\quad x_{skæring}=-1$

Dvs. koordinatsættet er $\underline{\underline{(-1,0)}}$

9.071: $x^2+6x+y^2-14y+z^2+2z+23=0$

Kuglens ligning omskrives til formen, hvor man direkte kan aflæse centrum og radius:

$$(x+3)^2+(y-7)^2+(z+1)^2=-23+3^2+7^2+1^1=-23+59=36=6^2$$

Dvs. at:

$\underline{\underline{r=6}}$ $\quad$ $\underline{\underline{C(-3,7,-1)}}$

9.072: Kateterne i den retvinklede trekant har længder *a* og *a+1*.

Når $a=3$ er længderne af kateterne 3 og 4, så hypotenusen *c* bestemmes med Pythagoras ved:

$$c=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=\underline{\underline{5}}$$

Hvis længden af hypotenusen *c* skal være $\sqrt{13}$, har man:

$$c^2=a^2+(a+1)^2$$

$$\sqrt{13}^2=a^2+a^2+2a+1 \;\Leftrightarrow\; 13=2a^2+2a+1 \;\Leftrightarrow\; 0=2a^2+2a-12 \;\Leftrightarrow\; 0=a^2+a-6$$

I sidste skridt er ligningen forkortet med 2.

Dette er en andengradsligning, der kan løses ved diskriminantmetoden, eller man kan som vist her benytte faktorisering ved at finde to tal, hvis produkt er -6 og sum 1:

$$0=a^2+a-6 \;\Leftrightarrow\; 0=(a+3)(a-2) \;\Leftrightarrow\; a=-3 \vee a=2$$

Da *a* angiver længden af den ene katete, skal den være positiv, så kun den ene løsning kan bruges, og dermed er $\underline{\underline{a=2}}$

9.073: $f(x)=-4x^2+20x \qquad g(x)=8x$

Førstekoordinaten til skæringspunkterne mellem de to grafer bestemmes ved at sætte funktionsudtrykkene sammen og dermed bestemme de x-værdier, der giver samme funktionsværdier i de to funktioner:

$$f(x)=g(x) \;\Leftrightarrow$$

$$-4x^2+20x=8x \;\Leftrightarrow\; 0=4x^2-12x \;\Leftrightarrow\; 0=x^2-3x \;\Leftrightarrow\; 0=x(x-3) \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{x=0 \vee x=3}}$$

Da *f* ligger over *g* i området, har man:

$$A_M=\int_0^3\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_0^3\left(-4x^2+20x-8x\right)dx=4\cdot\int_0^3\left(-x^2+3x\right)dx=$$

$$4\cdot\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=4\left(-\frac{1}{3}\cdot 3^3+\frac{3}{2}\cdot 3^2-\left(-\frac{1}{3}\cdot 0^3+\frac{3}{2}\cdot 0^2\right)\right)=4\cdot\left(-9+\frac{27}{2}\right)=-36+54=\underline{\underline{18}}$$

_9.074:_ $f(x)=e^{4x}-2x^2-x-\frac{1}{4}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=4y+8x^2$

Det undersøges om *f* er en løsning til differentialligningen ved at indsætte i differentialligningen og se, om man får en identitet (et udsagn sandt for alle x-værdier). For at kunne gøre dette, skal funktionen dog først differentieres (der differentieres ledvist og til første led benyttes reglen for differentiation af sammensat funktion):

$$f'(x)=4\cdot e^{4x}-2\cdot 2x^{2-1}-1-0=4\cdot e^{4x}-4x-1$$

Indsættelse i differentialligningen:

$$4e^{4x}-4x-1=4\cdot\left(e^{4x}-2x^2-x-\frac{1}{4}\right)+8x^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$4e^{4x}-4x-1=4e^{4x}-8x^2-4x-1+8x^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$4e^{4x}-4x-1=4e^{4x}-4x-1$$

De to størrelser på hver sin side af lighedstegnet er ens, dvs. ligningen er en identitet, og dermed er f en løsning til differentiallligningen.

August 2009: Delprøven MED hjælpemidler

9.075: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) Vinklen mellem vektorerne bestemmes:

$$\cos v = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{-3+4}{\sqrt{1^2+2^2} \cdot \sqrt{(-3)^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 13}} = \frac{1}{\sqrt{65}}$$

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{65}}\right) = \underline{\underline{82{,}875°}}$$

b) $A = \left|\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right| = \left\|\begin{matrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{matrix}\right\| = |1 \cdot 2 - 2 \cdot (-3)| = |8| = \underline{\underline{8}}$

c) $\overrightarrow{b_a} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}}}$

9.076: $a = 7 \;\; ; \;\; b = 12 \;\; ; \;\; c = 17$

a) Da man kender alle tre sider i trekanten, skal man anvende cosinusrelationerne til at bestemme vinkler:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$$

$$C = \cos^{-1}\left(\frac{7^2 + 12^2 - 17^2}{2 \cdot 7 \cdot 12}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{4}{7}\right) = \underline{\underline{124{,}8499046°}}$$

b) Da man netop har udregnet vinkel C, kender man i trekant ACD de to vinkler C og D, og man kender siden d. Dermed kan sinusrelationerne anvendes til at bestemme den søgte side:

$$\frac{|AD|}{\sin C} = \frac{|AC|}{\sin \angle ACD} \quad \Leftrightarrow \quad |AD| = \frac{|AC|}{\sin \angle ACD} \cdot \sin C$$

$$|AD| = \frac{12}{\sin(45°)} \cdot \sin(124{,}8499046°) = \underline{\underline{13{,}92692298}}$$

9.077:

a) Det er oplyst, at modellen er en eksponentiel udvikling $N(t) = N_0 \cdot a^t$, og da man har en tabel med observationer, skal der laves regression.

Dette gøres med Maple-pakken: Gym

with(*Gym*)

[*ChiKvadratGOFtest, ChiKvadratUtest, Cos, ExpReg, LinReg, LogistReg, PolyReg, PowReg, PropReg, Sin, Tan, antalobs, antalstabel, arealP, arealT*
chicdf, chipdf, det, dotP, ev, forventet, fraktil, frekvens, frekvensTabel, gennemsnit, grupperData, hat, hyppighed, invCos, invSin, invTan, invbin
median, middel, normalcdf, normalpdf, pindediagramBIN, plotHistogram, plotPindediagram, plotResidualer, plotSumkurve, plotTrappekurve, pc
tabelsum, tcdf, testLin, tpdf, trappekurve, trappekurveBIN, typeinterval, typetal, varians, vinkel, visMatrix, vsolve, zInterval, zInterval1Andel, zTe

Årene skal angives som antal år EFTER 1997, så de to oprettede lister bliver:

år := [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]

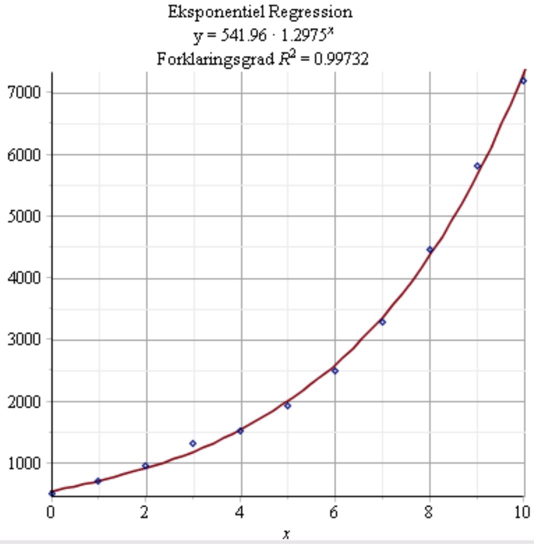
[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]

antal := [511, 697, 954, 1305, 1525, 1921, 2490, 3284, 4452, 5804, 7180]

[511, 697, 954, 1305, 1525, 1921, 2490, 3284, 4452, 5804, 7180]

Så foretages regressionen ved:

ExpReg(*år*, *antal*)



Ud fra ligningen kan man altså aflæse, at:

$\underline{\underline{N_0 = 542}}$ og $\underline{\underline{a = 1,2975}}$

b) Tallet a er fremskrivningsfaktoren, og da den er 1,2975, er antallet af børn, der er i behandling for ADHD, <u>*vokset med* 30 % *om året siden* 1997</u>.

År 2010 svarer til $t = 13$, så modellen giver:

$541.96 \cdot 1.2975^{13}$

16008.95555

Dvs. at ifølge modellen kan det forventes, at <u>16009 *børn*</u> vil være i behandling for ADHD i 2010.

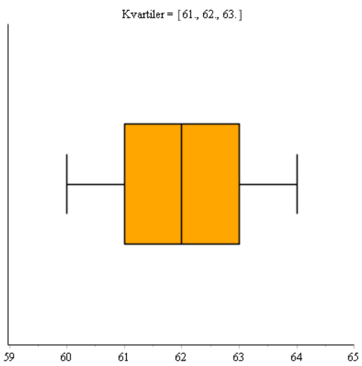
9.078: a) Middelværdien beregnes ved at vægte de enkelte aldre med deres antal (vægtet gennemsnit):

$$\mu = \frac{60 \cdot 2 + 61 \cdot 8 + 62 \cdot 4 + 63 \cdot 10 + 64 \cdot 3}{27} = 62{,}14814815 \approx \underline{\underline{62{,}1}}$$

b) For at lave et boksplot i Maple, skal man anvende en matrix, så man kan angive frekvenserne for de enkelte aldre:

$$alder := \begin{bmatrix} 60 & 2 \\ 61 & 8 \\ 62 & 4 \\ 63 & 10 \\ 64 & 3 \end{bmatrix}:$$

boksplot(*alder*)



9.079: $N' = 4\cdot 10^{-6}\cdot N\cdot(K-N)$ $\quad N(0)=10000 \quad N'(0)=2000$

a) Fra start kender man både væksthastigheden N'(0) og populationens størrelse N(0). Da disse to størrelser kendes til samme tidspunkt (t=0), kan man bruge dem til at finde K ved at indsætte i differentialligningen:

$$2000 = 4\cdot 10^{-6}\cdot 10000\cdot(K-10000) \quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{2000}{4\cdot 10^{-2}} = K-10000 \quad\Leftrightarrow$$

$$K = 50000+10000 = \underline{\underline{60000}}$$

b) Når N = 35000 bliver væksthastigheden:

$$N' = 4\cdot 10^{-6}\cdot 35000\cdot(60000-35000) = \underline{\underline{3500}}$$

Dvs. at væksthastigheden er 3500 individer pr. år.

9.080: $f(x) = b\cdot x^{0,25}$, $1000 \le x \le 64000$ $\quad f$ er antallet af fuglearter ved søen, og x er søens overfladeareal

a) Tallet b kan bestemmes, når man kender en x-værdi (1650) og den tilsvarende y-værdi (3):

$$3 = b\cdot 1650^{0,25} \quad\Leftrightarrow\quad b = \frac{3}{1650^{0,25}} = \underline{\underline{0,4707065793}}$$

For en sø med 6 fuglearter har man:

$$6 = b\cdot x^{0,25} \quad\Leftrightarrow\quad x^{0,25} = \frac{6}{b} \quad\Leftrightarrow\quad x = \left(\frac{6}{b}\right)^4 \quad , \; da \left(x^{0,25}\right)^4 = x^{0,25\cdot 4} = x^1 = x$$

$$dvs. \;\; x = \left(\frac{6}{0,4707065793}\right)^4 = 26399,99997$$

Altså er søens overfladeareal $\underline{\underline{26400\text{m}^2.}}$

b) Da $x_2 = 10\cdot x_1$ *og* $f(x_2) = k\cdot f(x_1)$ har man:

$$f(x_2) = k\cdot f(x_1) \;\Leftrightarrow\; b\cdot x_2^{0,25} = k\cdot b\cdot x_1^{0,25} \;\Leftrightarrow\; x_2^{0,25} = k\cdot x_1^{0,25} \;\Leftrightarrow\; (10\cdot x_1)^{0,25} = k\cdot x_1^{0,25} \;\Leftrightarrow$$

$$10^{0,25}\cdot x_1^{0,25} = k\cdot x_1^{0,25} \quad\Leftrightarrow\quad k = 10^{0,25} = \underline{\underline{1,778279410}}$$

Tallet k svarer til en fremskrivningsfaktor (1+r), så det fortæller, at
antallet af fuglearter ved søen S_2 er 77,8% højere end antallet af fuglearter ved søen S_1.

<u>*9.081:*</u> $f(x) = e^{-x^2+2x+1}$

a) Da ordet 'maksimum' indgår i spørgsmålet, kan man være (næsten) sikker på, at man skal anvende den afledede funktion til at besvare spørgsmålet.
Det er ikke alle funktioner, der har et maksimum. F.eks. har et andengradspolynomium, hvis graf er en parabel med grenene pegende opad, ikke et maksimum, da der ikke er et tal, der angiver den største *y*-værdi (man kan altid finde en *y*-værdi, der er større , ved at gå tilpas langt ud ad *x*-aksen). Logistisk vækst har heller ikke et maksimum, selvom grafen er begrænset opad til, da der ikke er et bestemt tal, der angiver den største *y*-værdi.
Man kan formulere det kort ved at sige, at en funktion har et maksimum, når dens værdimængde er lukket opad til, dvs. slutter med ...;a].

Først bestemmes den afledede funktion ved at bemærke, at der er tale om en sammensat funktion, hvorfor man først skal differentiere den inderste og derefter den yderste med hensyn til den inderste:

$$f'(x) = (-2x+2) \cdot e^{-x^2+2x+1}$$

Så bestemmes nulpunkter for den afledede funktion, hvor man anvender nulreglen:

$$f'(x) = 0 \iff -2x+2=0 \vee e^{-x^2+2x+1} = 0 \iff -2x+2=0 \iff x=1$$

(det er her benyttet, at den naturlige eksponentialfunktion aldrig giver 0).

Herfra kan man benytte to veje:

<u>1.vej:</u>
Værdien af den anden afledede bestemmes det pågældende sted (Maple anvendes):

$$f(x) := e^{-x^2+2x+1}:$$

$$f''(1.) = -14.77811220 < 0$$

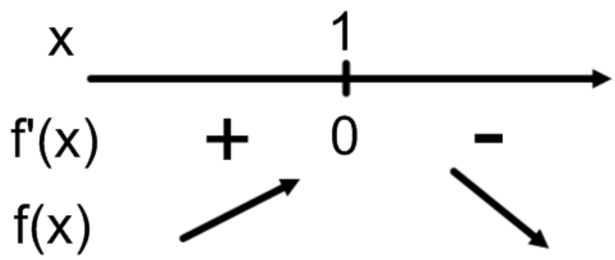
Da den anden afledede er negativ det sted, hvor den første afledede er 0, er der tale om et lokalt maksimumssted. Da det desuden er det eneste ekstremumssted, må funktionen være voksende i intervallet]-∞,1] og aftagende i [1,∞[.
<u>Dermed er stedet også et globalt maksimumssted, og funktionen har dermed et maksimum.</u>

<u>2.vej:</u>
Fortegnet for den første afledede bestemmes på hver sin side af 1. Dette kan gøres ved at se på fortegnet for faktoren $(-2x+2)$, da den naturlige eksponentialfunktion altid giver et positivt tal:

$$x = 0: -2 \cdot 0 + 2 = 2 > 0$$

$$x = 2: -2 \cdot 2 + 2 = -2 < 0$$

Dermed bliver fortegnsskemaet:



Dvs. at funktionen er voksende i intervallet]-∞,1] og aftagende i [1,∞[.
<u>Dermed er 1 et globalt maksimumssted, og funktionen har dermed et maksimum.</u>

9.082: Et rektangulært skråplan med hjørnerne A, B, C og D.

A(10,-10,0)
B(10,10,0)
C(-10,10,4)
D(-10,-10,4)
Mast med endepunkterne F og T.
F(0,0,2)
T(0,0,22)

Wire parallel med $\vec{r} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -19 \end{pmatrix}$

a) Det er oplyst, at wiren, der løber mellem punkterne T og S, er parallel med $\vec{r}$, der derfor kan fungere som en retningsvektor for den linje, der går gennem T og S. Da man kender koordinaterne til T (som ligger på linjen), kan man bruge dette som udgangspunkt, og dermed bliver en parameterfremstilling for linjen gennem T og S:

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 22 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -19 \end{pmatrix}}}$$

For at bestemme en ligning for den plan, som skråplanet ligger i, skal man kende en normalvektor for planen og et punkt i planen. Som punkt i planen kan man bruge et hvilket som helst af punkterne A, B, C og D.

En normalvektor til findes ved at tage krydsproduktet mellem to vektorer, der udspænder planen (dvs. man skal sikre sig, at man ikke får valgt to parallelle vektorer i planen, da krydsproduktet så vil give nul).

To vektorer, der udspænder planen, er: $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -10-10 \\ -10-(-10) \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10-10 \\ 10-(-10) \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$

Krydsproduktet bestemmes:

$$\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB} = \left(0 \cdot 0 - 4 \cdot 20, 4 \cdot 0 - (-20) \cdot 0, (-20) \cdot 20 - 0 \cdot 0\right) = (-80, 0, -400)$$

Denne vektor kunne godt bruges som normalvektor for planen, men det vil være nemmere at benytte en kortere vektor, der er parallel med krydsproduktet. Så her vælges en vektor, hvor hver af koordinaterne i krydsproduktet er divideret med -80:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Som punkt i planen vælges A, og hermed bliver ligningen:

$$1 \cdot (x-10) + 0 \cdot \left(y-(-10)\right) + 5 \cdot (z-0) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{x + 5z - 10 = 0}}$$

b) Koordinatsættet til S er skæringen mellem linjen og planen fra spørgsmål a). Dette findes ved først at indsætte linjens koordinater i planens ligning:

$$-5s+5\cdot(22-19s)-10=0 \quad \Leftrightarrow \quad -100s+100=0 \quad \Leftrightarrow \quad s=1$$

Denne parameterværdi indsættes i linjens parameterfremstilling for at finde skæringspunktet:

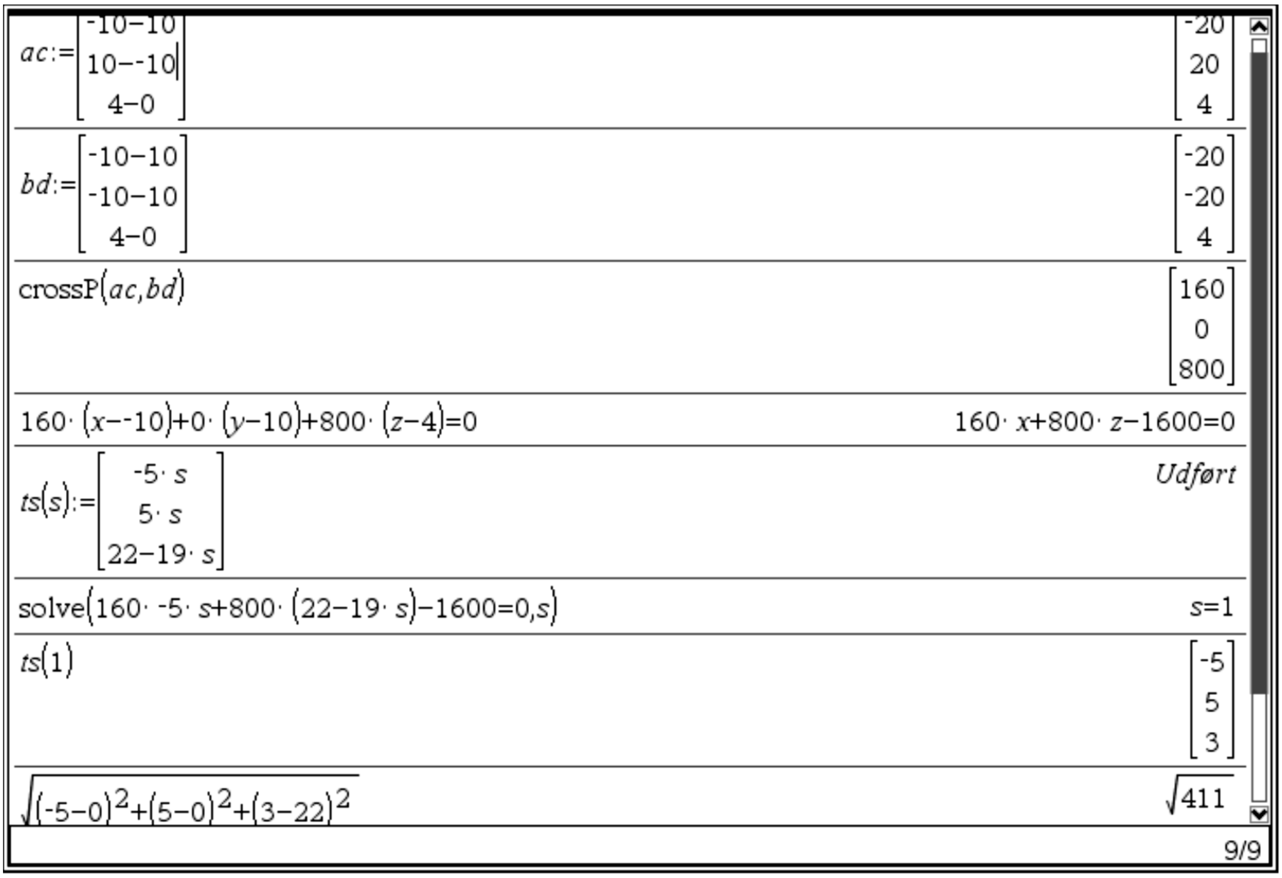
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 22 \end{pmatrix} + 1\cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Og da det var et punkt og ikke en vektor, der skulle findes, har man: $\underline{\underline{S=(-5,5,3)}}$

Længden af wiren TS er afstanden mellem punkterne T og S, dvs:

$$l_{wire} = |TS| = \sqrt{(-5-0)^2+(5-0)^2+(3-22)^2} = \sqrt{25+25+361} = \underline{\underline{\sqrt{411}}} \approx 20,3$$

På TI n'spire kunne man have foretaget ovenstående udregninger ved følgende indtastninger, hvor der er taget udgangspunkt i punktet C og diagonalerne AC og BD:



<u>9.083:</u> $f(x) = -x^3 + 3x$

Da F er en stamfunktion til f har man: $F(x) = \int f(x)dx = \int(-x^3+3x)dx = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + k$

Da linjen t med ligningen $y = -2x+8$ skal være tangent til F, skal den røre et sted x_0, hvor differentialkvotienten $F'(x_0) = f(x_0) = -2$, da tangentens hældning netop er defineret som differentialkvotienten det pågældende sted.

Det pågældende sted kan derfor bestemmes i Maple ved:

$f(x) := -x^3 + 3x:$

$solve(f(x) = -2) = 2, -1, -1$

Der er altså to mulige steder (det ene sted er angivet to gange), men da det i opgaven er oplyst, at førstekoordinaten skal være negativ, har man altså $x_0 = -1$.

Dette sted rører tangenten altså grafen for F, og dermed kan funktionsværdien dette sted bestemmes ved at indsætte i ligningen for tangenten:

$y = -2\cdot(-1)+8 = 10$

Da funktionsværdien er 10, bliver k:

$F(-1) = 10 \Leftrightarrow$

$10 = -\frac{1}{4}\cdot(-1)^4 + \frac{3}{2}\cdot(-1)^2 + k \Leftrightarrow 10 = -\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+k \Leftrightarrow 10 = \frac{5}{4}+k \Leftrightarrow k = \frac{35}{4}$

Hermed er forskriften for F: $\underline{\underline{F(x) = -\frac{1}{4}\cdot x^4 + \frac{3}{2}\cdot x^2 + \frac{35}{4}}}$

<u>9.084:</u> $f(x) = 80x - 10x^2$

Opgaven løses i Maple:

Først defineres funktionen:

$f(x) := 80\cdot x - 10\cdot x^2:$

Når omdrejningslegemets rumfang skal bestemmes, skal man kende den nedre grænse for det bestemte integral, der skal anvendes til M, og man skal kende den største mulige værdi for k, så man kan tjekke, at man ikke får en for stor k-værdi. Derfor findes funktionens nulpunkter.

$solve(f(x) = 0) = 0, 8$

Dvs. at nulpunkterne er $x = 0$ og $x = 8$.

Rumfanget for et omdrejningslegeme er: $V = \pi\cdot\int_a^b f(x)^2\,dx$, så man har:

$V = \pi\cdot\int_0^4 f(x)^2\,dx = \frac{163840}{3}\pi \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 1.715728468\ 10^5$

Dvs. at rumfanget er $\underline{\underline{V = 1,715728468\cdot 10^5}}$

Ligningen $V_k = \frac{1}{2}\cdot V$ løses ved:

$fsolve\left(\pi\cdot\int_4^k f(x)^2\,dx = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\int_0^4 f(x)^2\,dx, k\right) = 5.124510689$

Dette tal ligger mellem 4 og 8, så det kan bruges, dvs. $\underline{\underline{k = 5,124510689}}$

9.085: $\frac{dM}{dt} = p - 0{,}03 \cdot M \qquad M(0) = 0$

Denne differentialligning kan på TI n'spire løses ved "desolve":

$$\text{deSolve}(m' = p - 0.03 \cdot m, t, m)$$
$$m = \mathbf{c5} \cdot (0.970446)^{t} + 33.3333 \cdot p$$

Eller man kan genkende den som en ligning af typen $\frac{dy}{dx} = b - ay$ med den fuldstændige løsning $y = \frac{b}{a} - c \cdot e^{-a \cdot x}$, hvorfor den fuldstændige løsning bliver: $M(t) = \frac{p}{0{,}03} + c \cdot e^{-0{,}03 \cdot t}$

Begyndelsesværdien benyttes til at bestemme værdien af c: $0 = \frac{p}{0{,}03} + c \cdot e^{-0{,}03 \cdot 0} \quad \Leftrightarrow \quad c = -\frac{p}{0{,}03}$

Dermed er den søgte løsning:

$$M(t) = \frac{p}{0{,}03} - \frac{p}{0{,}03} \cdot e^{-0{,}03 \cdot t} \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{M(t) = \frac{p}{0{,}03} \cdot \left(1 - e^{-0{,}03 \cdot t}\right)}}$$

Den mængde *p*, der skal til for at kurere sygdommen (og man må gå ud fra, at det er den mængde, der spørges til, selvom det ikke skrives eksplicit), kan bestemmes ud fra det opgivne punkt (3,100):

$$\text{solve}\left(100 = \frac{p}{0.03} \cdot \left(1 - e^{-0.03 \cdot 3}\right), p\right)$$
$$p = 34.8558$$

Dvs. der skal tilsættes 34,9 μg medicin pr. time for at kurere sygdommen.

9.086: a) Lad *h* være højden af kanalen, og lad *x* være længden af hvert af de vandrette stykker fra A og D ud til det brune område. Tværsnitsarealet af kanalen svarer til arealet af rektanglet mellem de brune områder fratrukket arealerne af de to retvinklede gule trekanter, så man har:

$$T = h \cdot (4 + 2 \cdot x) - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot h \cdot x = 4h + 2hx - hx = 4h + hx$$

Da de gule trekanter er retvinklede, kan højden udtrykkes ved vinklen *v* med følgende udtryk:

$$\sin(v) = \frac{\text{mod}}{hyp} = \frac{h}{2} \Leftrightarrow h = 2 \cdot \sin(v)$$

Og længden *x* er: $\cos(v) = \frac{hos}{hyp} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2 \cdot \cos(v)$

Hermed bliver kanalens areal udtrykt ved vinklen:

$$T(v) = 4 \cdot 2 \cdot \sin(v) + 2 \cdot \sin(v) \cdot 2 \cdot \cos(v) = \underline{\underline{8 \cdot \sin(v) + 4 \cdot \sin(v) \cdot \cos(v)}}$$

For at finde den værdi af *v*, der giver det største areal, findes det eller de steder, hvor den afledede funktion er 0, og det undersøges efterfølgende ved hjælp af fortegnet for den anden afledede, om det er et maksimumssted, minimumssted eller vandret vendetangentsted.

$t(v) := 8 \cdot \sin(v) + 4 \cdot \sin(v) \cdot \cos(v) \mid 0 < v \leq \frac{\pi}{2}$	*Udført*
$\text{solve}\left(\frac{d}{dv}(t(v)) = 0, v\right)$	$v = 1.19606189409$
$\frac{d^2}{dv^2}(t(v)) \mid v = 1.1960618940862$	-12.8948391819

Da den anden afledede er negativ det sted, hvor den første afledede er nul, er der tale om et lokalt maksimum, og dermed bliver kanalens tværsnit størst muligt, når $\underline{\underline{x = 1{,}19606189409}}$

December 2009: Delprøven UDEN hjælpemidler

9.087: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad P(3,8)$

Da linjen l er parallel med den angivne vektor, vil en normalvektor til linjen være: $\overrightarrow{n_l} = a = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Man kender nu både et punkt på linjen og en normalvektor, og dermed bliver linjens ligning:

$$-5\cdot(x-3)+1\cdot(y-8)=0 \quad \Leftrightarrow \quad -5x+15+y-8=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y=5x-7}}$$

Alternativ metode: Da linjen er parallel med den angive vektor, hvis retning er 1 til højre og 5 op, vil hældningen for linjen altså være 5. Da man kender både punkt og hældning får man ligningen:

$$y-8=5\cdot(x-3) \quad \Leftrightarrow \quad y=5x-15+8 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y=5x-7}}$$

9.088: $f(x)=x^2\cdot e^x \qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y}{x}+y$

Det undersøges ved indsættelse, om funktionen er en løsning til differentialligningen. Hvis man får et udsagn, der er sandt for alle x-værdier (en "identitet"), er funktionen en løsning. Hvis man får et udsagn, der er falsk eller kun sandt for nogle x-værdier, er funktionen IKKE en løsning.

For at kunne indsætte skal man have fundet den afledede funktion $\left(f'(x)=\dfrac{dy}{dx}\right)$:

Funktionen er en produktfunktion, og den afledede funktion bestemmes:

$$f'(x)=2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x$$

Nu kan der indsættes i differentialligningen:

$$2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x=\frac{2\cdot\left(x^2\cdot e^x\right)}{x}+\left(x^2\cdot e^x\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x=2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x$$

Det ses, at der står det samme på begge sider af lighedstegnet, så man har altså et udsagn, der er sandt for alle x-værdier (en identitet), og dermed er $\underline{\underline{f \text{ en løsning til } \mathit{differentialligningen}}}$

9.089: $f(x)=4x^3-8x \quad ; \quad P(1,5)$

Ved at integrere ledvist findes den form samtlige stamfunktioner må være på:

$$\int\left(4x^3-8x\right)dx=x^4-4x^2+k$$

Den stamfunktion, hvis graf går gennem P bestemmes ved at indsætte punktets koordinater og dermed bestemme k-værdien:

$$F(x)=x^4-4x^2+k$$

$$5=1^4-4\cdot1^2+k \Leftrightarrow 5=1-4+k \Leftrightarrow 8=k$$

Dvs. at den søgte stamfunktion er:

$$\underline{\underline{F(x)=x^4-4x^2+8}}$$

9.090: $m(t) = -3t + 85$ Forskriften beskriver vandmængden i en beholder.

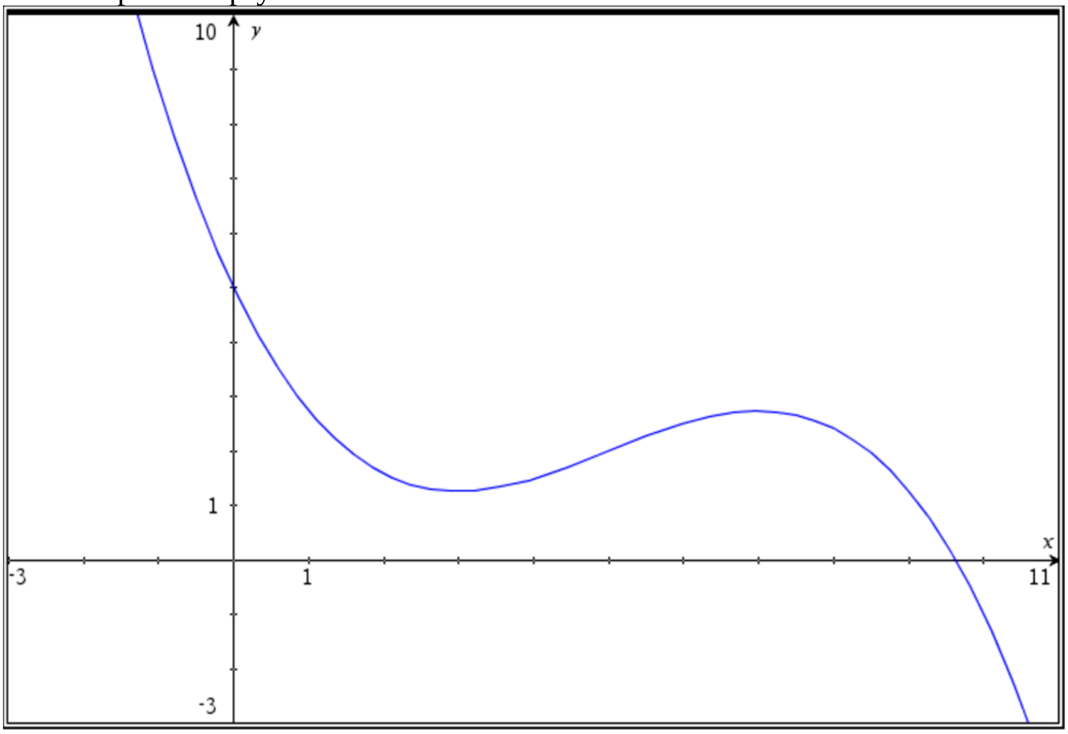
m er vandmængden målt i liter og *t* er tiden målt i minutter.

Tallet 85 er begyndelsesværdien, og det fortæller, at fra start er der 85 liter vand i beholderen.
Tallet -3 er hældningen, og det fortæller, at hvert minut forsvinder der 3 liter vand fra beholderen.

9.091: Grafen/funktionen skal opfylde følgende:

1) Funktionen har $Dm = \mathbb{R}$
2) Grafen skal gå gennem punkterne (0,5) og (10,-1).
3) Funktionen skal være voksende i intervallet [3,7].
4) Funktionen skal være aftagende i intervallerne]-∞,3] og [7,∞[.

Et eksempel der opfylder dette er:



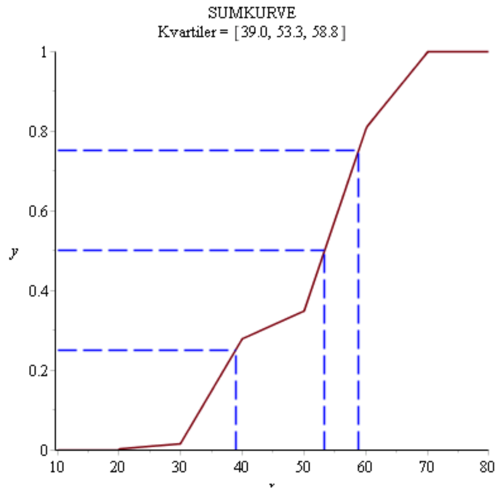
<u>*9.092:*</u> Med Gym-pakken kan man i Maple få tegnet en sumkurve og bestemt kvartilsættet.

a) Man skal have angivet aldrene i intervaller:

$with(Gym):$

$$alder := \begin{bmatrix} 20..30 & 1 \\ 30..40 & 19 \\ 40..50 & 5 \\ 50..60 & 33 \\ 60..70 & 14 \end{bmatrix}:$$

$plotSumkurve(alder)$



Dvs. at <u>kvartilsættet er (39,0 ; 53,3 ; 58,8)</u>

<u>*9.093:*</u> $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

a) Projektionen bestemmes ud fra projektionsformlen:

$$\overrightarrow{a_b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\cdot\vec{b} = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right|^2}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{6\cdot 3+2\cdot 4}{3^2+4^2}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{26}{25}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{78}{25} \\ \frac{104}{25} \end{pmatrix}}}$$

Hvis det skulle være udregnet på TI n'spire, kunne det gøres ved:

$a := \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$
$b := \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$
$\frac{\text{dotP}(a,b)}{\text{dotP}(b,b)}\cdot b$	$\begin{bmatrix} \frac{78}{25} \\ \frac{104}{25} \end{bmatrix}$

b) Arealet af parallelogrammet udspændt af de to vektorer er den numeriske værdi af determinanten for vektorparret:

$$A_p = \left|\det\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right| = \left\|\begin{matrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{matrix}\right\| = |6\cdot 4 - 2\cdot 3| = |18| = \underline{\underline{18}}$$

På TI n'spire indtastes:

$\det\left(\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right)$	18

9.094: a) Tiden t er målt i år efter 2006, og den som eksponent i $P = P_0 \cdot a^t$, så det er en eksponentiel udvikling, og derfor skal der udføres eksponentiel regression (i Maple):

$with(Gym):$
$år := [0, 1, 2]:$
$IP := [50808, 78924, 128964]:$
$P(t) := ExpReg(år, IP, t):$
$P(t) = 50381.1831928991\ 1.59319229319189^t$
Dvs. at $\underline{\underline{P_0 = 50381}}$ og $\underline{\underline{a = 1,5932}}$

b) Når væksten pr. år er 49%, dvs. der er fast rentefod, er der tale om en eksponentiel udvikling, og fremskrivningsfaktoren a er $a = 1 + r = 1 + 0,49 = 1,49$.
Da begyndelsesværdien (årlige IP-trafik i 2006 målt i pentabytes) er 31692, får man funktionen
$\underline{\underline{f(t) = 31692 \cdot 1,49^t}}$, hvor f er den årlige IP-trafik målt i pentabytes og t er tiden målt i år efter 2006.

Fordoblingskonstanten kan beregnes ud fra fremskrivningsfaktoren:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1,49)} = 1,738186280$$

Dvs. at fordoblingstiden er $\underline{\underline{\text{1,7 år}}}$

9.095: $w = 20 \cdot \left(1 - 0,89 \cdot e^{-0,17 \cdot t}\right)^3$ w er vægten målt i kg og t er alderen målt i år.

a) Funktionen defineres i Maple:
$w(t) := 20 \cdot \left(1 - 0.89 \cdot e^{-0.17 \cdot t}\right)^3:$
Når fisken er 3 år, er $t = 3$, så man bestemmer:
$w(3) = 2.018152562$
Dvs. at en 3 år gammel fisk vejer $\underline{\underline{2,02\ kg}}$

b) Når vægten er 13 kg, skal man løse ligningen $w(t) = 13$:

$fsolve(w(t) = 13) = 11.14804485$
Dvs. at en 13kg tung fisk er $\underline{\underline{11,1\ år}}$

9.096: $\Delta ABC:$ $\angle A = 58°$ $|AB| = 10m$ $\angle ABC = 80°$

a) Da man kun kender én sidelængde, kan man ikke bruge cosinusrelationerne.
For at kunne bruge sinusrelationerne, skal man kende et par bestående af en vinkel og dens modstående side, så man har brug for at kende vinkel C. Denne kan bestemmes ud fra vinkelsummen i en trekant:
$\angle C = 180° - \angle A - \angle B = 180° - 58° - 80° = 42°$
Så kan den søgte længde bestemmes med en sinusrelation:

$$\frac{|BC|}{\sin A} = \frac{|AB|}{\sin C} \quad \Leftrightarrow \quad |BC| = \frac{|AB|}{\sin C} \cdot \sin A$$

$$|BC| = \frac{10m}{\sin 42°} \cdot \sin 58° = \underline{\underline{12,6738799286m}}$$

b) Det er oplyst, at $|AD| = 3m$

I trekant ABD kender man derfor en vinkel (A) og dens to hosliggende siders længder, og dermed kan den sidste sidelængde bestemmes ved en cosinusrelation:

$$|BD|^2 = |AD|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |AD| \cdot |AB| \cdot \cos(A)$$

$$|BD| = \sqrt{(3m)^2 + (10m)^2 - 2 \cdot 3m \cdot 10m \cdot \cos(58°)} = \underline{\underline{8,78662871334m}}$$

9.097: Trekanten har hjørnerne A(2,0,0), B(0,6,0) og C(0,0,4).

a) En ligning for den plan α, der indeholder trekanten, kan bestemmes, når man kender et punkt i planen og en normalvektor for planen. Man kan benytte et hvilket som helst af trekantens punkter som punkt i planen, og en normalvektor kan bestemmes, hvis man først krydser to af de vektorer, der udspænder trekanten.

$$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0-2\\0-0\\4-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0-2\\6-0\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\6\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\cdot 0-4\cdot 6\\4\cdot(-2)-(-2)\cdot 0\\-2\cdot 6-0\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-24\\-8\\-12\end{pmatrix}$$

En normalvektor skal være parallel med det udregnede krydsprodukt, så man kan bruge $\vec{n}=\begin{pmatrix}6\\2\\3\end{pmatrix}$ som normalvektor for planen. Med punktet A som et punkt i planen bliver dens ligning:

$$6\cdot(x-2)+2\cdot(y-0)+3\cdot(z-0)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{6x+2y+3z-12=0}}$$

$$l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\quad;\quad t\in\mathbb{R}$$

b) Vinklen v mellem en linje og en plan kan bestemmes ved først at bestemme vinklen w mellem en retningsvektor for linjen og en normalvektor for planen:

$$\cos w=\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{|\vec{r}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\3\end{pmatrix}}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{6^2+2^2+3^2}}=\frac{6-2+6}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{49}}=\frac{10}{\sqrt{6}\cdot 7}$$

$$w=\cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{6}\cdot 7}\right)=54{,}3232348492°$$

Dvs. den søgte spidse vinkel er: $v=90°-w=90°-54{,}3232348492°=\underline{\underline{35{,}6767651508°}}$

c) For at bestemme ligningen for en kugle, skal man kende radius og centrum. Man kender allerede centrum, så kun radius mangler. Hvis α skal være en tangentplan, skal radius i kuglen netop svare til afstanden fra centrum til planen, så denne beregnes:

$$r=dist(O,\alpha)=\frac{|6\cdot 0+2\cdot 0+3\cdot 0-12|}{\sqrt{6^2+2^2+3^2}}=\frac{|-12|}{\sqrt{49}}=\frac{12}{7}$$

Dvs. at kuglens ligning er:

$$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=\left(\frac{12}{7}\right)^2 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x^2+y^2+z^2=\frac{144}{49}}}$$

9.098: $f(x) = x^2 \cdot \ln(x) - 3x - 1 \;;\; x > 0 \quad ; \quad P(1, f(1))$

a) For at bestemme en ligning for tangenten til grafen for *f* i punktet *P*, skal man kende røringspunktets *y*-værdi samt tangentens hældning.
Røringspunktets *y*-værdi bestemmes:

$$f(1) = 1^2 \cdot \ln(1) - 3 \cdot 1 - 1 = 1 \cdot 0 - 3 - 1 = -4$$

Hældningen svarer til differentialkvotienten i 1, så først bestemmes den afledede funktion:

$$f'(x) = 2 \cdot x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} - 3 = 2x \cdot \ln(x) + x - 3$$

$$f'(1) = 2 \cdot 1 \cdot \ln(1) + 1 - 3 = -2$$

Dvs. at tangentens hældning er -2, og dermed bliver dens ligning:

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

$$y - (-4) = -2 \cdot (x - 1) \iff \underline{\underline{y = -2x - 2}}$$

b) Formuleringen er en anden måde at sige, at man skal bestemme monotoniforholdene for *f*.
For at bestemme monotoniforholdene findes først de steder, hvor den afledede funktion giver 0, og derefter bestemmes fortegnet for den afledede funktion i de intervaller, der adskilles af de fundne steder (dette gøres i Maple):

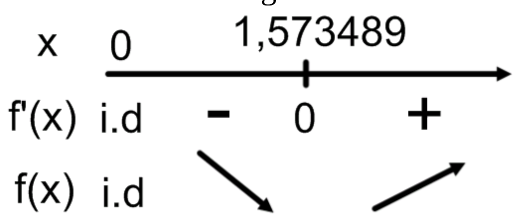
$$f(x) := x^2 \cdot \ln(x) - 3 \cdot x - 1 :$$

$$fsolve(f'(x) = 0) = 1.573489052$$

$$f'(1) = -2$$

$$f'(2.) = 1.772588722$$

Man får dermed fortegnsskemaet:



Dvs. at *f* er aftagende i intervallet]0;1,573489], og *f* er voksende i [1,573489 ; ∞[

9.099: $f(x)=\frac{1}{64}\cdot x^2 \qquad g(x)=\sqrt{x}$

I Maple defineres funktionerne, og skæringerne mellem deres grafer bestemmes:

$f(x) := \frac{1}{64}\cdot x^2 :$

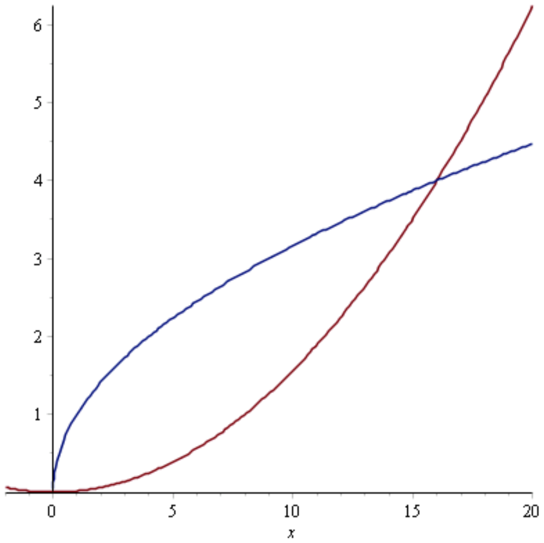
$g(x) := \sqrt{x} :$

$solve(f(x)=g(x)) = 0, 16$

Dvs. at de to grafer skærer hinanden, hvor $x=0$ og hvor $x=16$.

Funktionerne afbildes, så man kan se, hvor punktmængden M ligger:

$plot([f(x), g(x)], x=-2..20)$



Det er $g(x)$, der ligger øverst i det pågældende interval (den blå graf), så arealet af punktmængden M er:

$$A_M=\int_0^{16}(g(x)-f(x))\,dx=\frac{64}{3}$$

Dvs. $A_M=\frac{64}{3}$

9.100: $\frac{dB}{dt}=1{,}55\cdot 10^{-4}\cdot B\cdot(2000-B)$ B(t) er antallet af bakterier til tiden t målt i døgn.

a) Differentialligningen identificeres som en logistisk ligning med den fuldstændige løsning:

$$B(t)=\frac{2000}{1+c\cdot e^{-1{,}55\cdot 10^{-4}\cdot 2000\cdot t}}=\frac{2000}{1+c\cdot e^{-0{,}31\cdot t}}$$

Da der fra start (t=0) er 50 bakterier, kan man bestemme konstanten c:

$$50=\frac{2000}{1+c\cdot e^{-0{,}31\cdot 0}} \quad\Leftrightarrow\quad 1+c=\frac{2000}{50} \quad\Leftrightarrow\quad c=40-1=39$$

Og hermed kan antallet af bakterier efter 15 døgn bestemmes:

$$B(15)=\frac{2000}{1+39\cdot e^{-0{,}31\cdot 15}}=1456{,}7677$$

Dvs. at efter 15 døgn er der ifølge modellen 1457 bakterier.

$\underline{9.101:}$ $A(v) = \dfrac{200 \cdot v}{(v+2)^2}$

Man skal finde det sted (den værdi af v), der gør arealet størst muligt.
Dette findes i Maple ved at definere funktionen og benytte de afledede funktioner (1. og 2.) til at finde maksimumssteder:

$$A(v) := \frac{200 \cdot v}{(v+2)^2}:$$

$$solve(A'(v) = 0) = 2$$

Dvs. at der er lokalt minimum, lokalt maksimum eller vandret vendetangent dette sted. Den anden afledes fortegn undersøges dette sted:

$$A''(2) = -\frac{25}{8} < 0$$

Da den anden afledede er negativ, er der lokalt maksimum dette sted, og da der ikke er nogen minimumssteder, er det også et globalt maksimumssted.
Blomsterbedets areal bliver altså størst muligt, når $\underline{\underline{v = 2}}$

$\underline{9.102:}$ $f(x) = 5 - x^4$

Højden svarer til funktionsværdien, mens bredden af rektanglet er $2 \cdot x$, hvor x er den positive værdi (til højre for 2. aksen).
Da bredden skal udtrykkes ved h, skal man have isoleret x i udtrykket:

$h = 5 - x^4 \Leftrightarrow x^4 = 5 - h \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{5-h}$ (da $x > 0$). Dvs. man har bredden:

$$\underline{\underline{b = 2 \cdot \sqrt[4]{5-h}}}$$

Og hermed bliver arealet: $A = b \cdot h = \underline{\underline{2 \cdot h \cdot \sqrt[4]{5-h}}}$

$\underline{9.103:}$ Vandmængden betegnes med V og angiver mængden målt i liter.
Tiden betegnes med t og angiver tiden målt i sekunder.

Ændringen af vandmængden i badekarret med tiden bliver så $\dfrac{dV}{dt}$ eller $V'(t)$.

Fra vandhanen kommer et positivt bidrag på 0,4 til $\dfrac{dV}{dt}$.

Den utætte bundprop giver – ifølge opgaveteksten - et (negativt) bidrag på $-0{,}001 \cdot V$ til $\dfrac{dV}{dt}$.

Dermed kan differentialligningen opskrives:

$$\underline{\underline{\frac{dV}{dt} = 0{,}4 - 0{,}001 \cdot V}}$$

Maj 2010: Delprøven UDEN hjælpemidler

9.104: Udtrykket reduceres ved at anvende den første kvadratsætning på første led, mens to parenteser ganges sammen i andet led:

$$(a+2b)^2-(a+2b)(a+b)=\left(a^2+4b^2+2\cdot a\cdot 2b\right)-\left(a^2+ab+2ab+2b^2\right)=$$

$$a^2+4b^2+4ab-a^2-3ab-2b^2=\underline{\underline{2b^2+ab}}=b(2b+a)$$

En alternativ måde kan anvendes, hvis man bemærker, at begge led indeholder parentesen $(a+2b)$. Så kan man faktorisere på følgende måde:

$$(a+2b)^2-(a+2b)(a+b)=(a+2b)\big((a+2b)-(a+b)\big)=(a+2b)(a+2b-a-b)=\underline{\underline{(a+2b)\cdot b}}$$

9.105: Ligningssystemet kan løses på flere måder. Her vises to:

1. metode (lige store koefficienters metode):

Den nederste ligning ganges igennem med 2, så der kommer lige store koefficienter foran y:

$$\left.\begin{matrix}x-2y=-2\\3x-y=9\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x-2y=-2\\6x-2y=18\end{matrix}\right\}\Rightarrow 6x-x=18-(-2)\quad\Leftrightarrow\quad 5x=20\quad\Leftrightarrow\quad\underline{x=4}$$

Dette indsættes i den nederste ligning for at bestemme y-værdien: $3\cdot 4-y=9\quad\Leftrightarrow\quad y=12-9=\underline{3}$

Dvs. at ligningssystemet har løsningen $\underline{\underline{(x,y)=(4,3)}}$

2. metode (substitutionsmetoden):

y isoleres i den nederste ligning og indsættes i den øverste:

$y=3x-9$ indsættes i den øverste ligning:

$$x-2\cdot(3x-9)=-2\quad\Leftrightarrow\quad x-6x+18=-2\quad\Leftrightarrow\quad -5x=-20\quad\Leftrightarrow\quad\underline{x=4}$$

Dette indsættes i den nederste ligning for at bestemme y-værdien: $3\cdot 4-y=9\quad\Leftrightarrow\quad y=12-9=\underline{3}$

Dvs. at ligningssystemet har løsningen $\underline{\underline{(x,y)=(4,3)}}$

9.106: $f(x)=2\cdot\ln(x)+5\cdot x^3$

Der differentieres ledvist, hvorefter differentialkvotienten i 2 bestemmes:

$$f'(x)=2\cdot\frac{1}{x}+5\cdot 3x^2=\frac{2}{x}+15x^2$$

$$f'(2)=\frac{2}{2}+15\cdot 2^2=1+15\cdot 4=\underline{\underline{61}}$$

9.107: $x^2-6x+y^2+2y+z^2=6$

Ligningen omskrives så centrum og radius kan aflæses:

$$(x-3)^2+(y+1)^2+(z-0)^2=6+3^2+1^2+0^2=16=4^2$$

Dvs. at $\underline{\underline{C(3,-1,0)\text{ og } r=4}}$

9.108: $f(x)=x\cdot e^x+3x\qquad y'=y+\dfrac{y}{x}-3x$

Det undersøges om *f* er en løsning til differentialligningen ved at indsætte i differentialligningen og se, om man får en identitet (et udsagn sandt for alle x-værdier). For at kunne gøre dette, skal funktionen dog først differentieres (der differentieres ledvist og til første led benyttes produktreglen):

$$f'(x)=1\cdot e^x+x\cdot e^x+3=e^x(1+x)+3$$

Indsættelse i differentialligningen:

$$e^x(1+x)+3=x\cdot e^x+3x+\frac{x\cdot e^x+3x}{x}-3x\quad\Leftrightarrow$$

$$e^x(1+x)+3=x\cdot e^x+e^x+3\quad\Leftrightarrow$$

$$e^x(1+x)=e^x(x+1)$$

De to størrelser på hver sin side af lighedstegnet er ens, dvs. ligningen er en identitet, og <u>dermed er f en løsning til differentialligningen.</u>

9.109: $2x^2-3x+k=0$

Hvis andengradsligningen skal have netop én løsning, skal diskriminanten være 0:

$$d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 - 4ac = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9 - 8k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{k = \frac{9}{8}}}$$

Maj 2010: Delprøven MED hjælpemidler

9.110: $\vec{a} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ t \end{pmatrix}$

a) Når t = 4 har man: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Vinklen mellem de to vektorer bestemmes:

$$\cos(v) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2+2^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3\cdot 3+2\cdot 4}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{25}} = \frac{17}{\sqrt{13}\cdot 5} \quad \Leftrightarrow$$

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{17}{\sqrt{13}\cdot 5}\right) = \underline{\underline{19,4400348282^\circ}}$$

b) Da begge vektorer indeholder en koordinat, der ikke er nul, er det egentlige vektorer uanset

værdien af t. Der gælder derfor:

$$\vec{a}\,||\,\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \det\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} t-1 & 3 \\ 2 & t \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(t-1)\cdot t - 2\cdot 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - t - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t-3)\cdot(t+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{t=-2 \ \vee \ t=3}}$$

9.111: I trekant ABC er: $a = 13$; $c = 10$; $\angle C = 23^\circ$; $\angle A < 90^\circ$

a) Da man kender siden c og længden af dens modstående side, kan man anvende sinusrelationerne til at bestemme vinkel A:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \Leftrightarrow \sin A = \frac{\sin C}{c}\cdot a$$

Da vinkel A er spids gælder:

$$A = \sin^{-1}\left(\frac{\sin C}{c}\cdot a\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\sin 23^\circ}{10}\cdot 13\right) = \underline{\underline{30,5274075591^\circ}}$$

b) For at kunne bestemme *b*, skal man kende vinkel B, og den bestemmes ud fra vinkelsummen i en trekant:

$$B = 180^\circ - A - C = 180^\circ - 30,5274075591^\circ - 23^\circ = \underline{\underline{126,472592441^\circ}}$$

Og så er:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow b = \frac{c}{\sin C}\cdot \sin B$$

$$b = \frac{10}{\sin 23^\circ}\cdot \sin 126,472592441^\circ = \underline{\underline{20,5804258929}}$$

9.112: Hjørnerne i en glasbygning: O(0,0,0) A(4,5,0) B(0,7,0) T(0,0,5)

En ligning for den plan α, der indeholder sidefladen ABT, kan bestemmes, når man kender et punkt i planen og en normalvektor for planen. Som punkt kan benyttes enten A, B eller T. For at finde en normalvektor findes først krydsproduktet mellem to vektorer, der udspænder planen:

$$\overrightarrow{TA} = \begin{pmatrix} 4-0 \\ 5-0 \\ 0-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{TB} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 7-0 \\ 0-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{TA} \times \overrightarrow{TB} = \left(5\cdot(-5)-(-5)\cdot 7, -5\cdot 0 - 4\cdot(-5), 4\cdot 7 - 5\cdot 0\right) = (10, 20, 28)$$

Krydsproduktet kunne godt anvendes som normalvektor, men man kan også bruge en vektor med samme retning, der er halvt så lang:

$$\overrightarrow{n_\alpha} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Med punktet T fås nu en ligning for planen:

$$5\cdot(x-0)+10\cdot(y-0)+14\cdot(z-5)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{5x+10y+14z-70=0}}$$

b) Da metalstangen, der går fra O til D, skal stå vinkelret på sidefladen ABT, kan man bruge en normalvektor for planen α som retningsvektor for den linje, der indeholder metalstangen. Med udgangspunkt i punktet O bliver en parameterfremstilling for denne linje så:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t \\ 10t \\ 14t \end{pmatrix}$$

Punktet D er så skæringspunktet mellem denne linje og planen α. Det bestemmes ved at indsætte linjens koordinater i planens ligning:

$$5\cdot 5t + 10\cdot 10t + 14\cdot 14t - 70 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 321t - 70 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{70}{321}$$

Denne værdi indsættes i parameterfremstillingen for linjen for at finde skæringspunktet D:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot\frac{70}{321} \\ 10\cdot\frac{70}{321} \\ 14\cdot\frac{70}{321} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{350}{321} \\ \frac{700}{321} \\ \frac{980}{321} \end{pmatrix}$$ Og da det er et punkt, har man: $\underline{\underline{D\left(\frac{350}{321}, \frac{700}{321}, \frac{980}{321}\right)}}$

9.113: a) Løses i Maple:

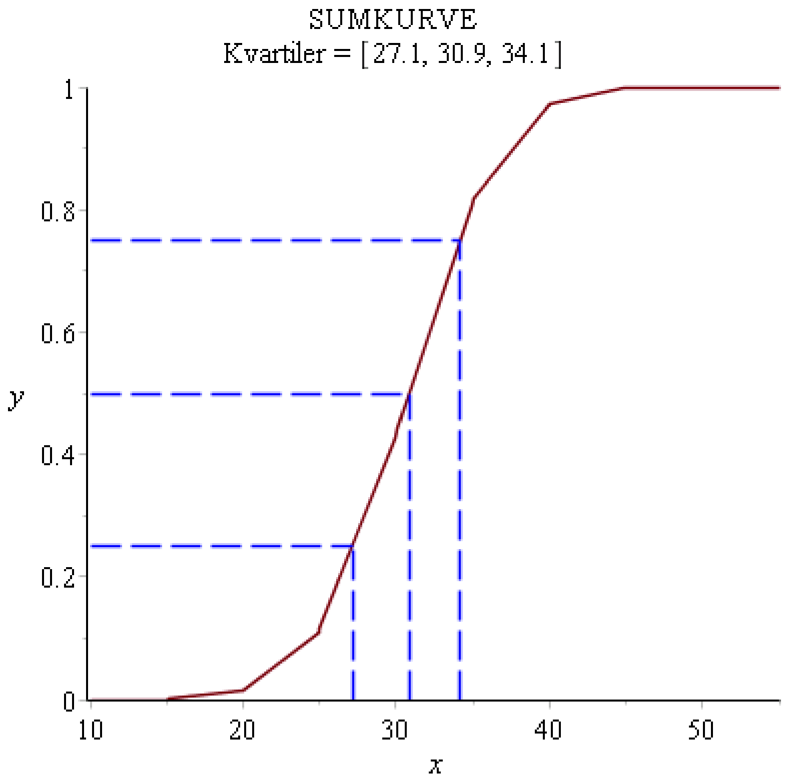
$with(Gym):$

En matrix med "Mors alder på fødselstidspunktet" og "Procentdel" gemmes i Maple:

$$M := \begin{bmatrix} 15..20 & 1.4 \\ 20..25 & 9.8 \\ 25..30 & 32.2 \\ 30..35 & 38.2 \\ 35..40 & 15.6 \\ 40..45 & 2.7 \\ 45..50 & 0.1 \end{bmatrix}:$$

Så kan sumkurven tegnes:

$plotSumkurve(M)$



Der defineres nu en funktion, hvis graf er sumkurven:

$f(x) := sumkurve(M, x):$

Så kan man finde den procentdel, der svarer til 37 år:

$f(37) = 0.878400000000000$

Dvs. at $\underline{\underline{87,8\ \%}}$ af mødrene på fødselstidspunktet var mindst 37 år.

9.114: $\log V = -1,64 - 0,27 \cdot \log M$

V er maksimal relativ væksthastighed målt i enheden "pr. døgn".
M er kropsmasse målt i gram.

a) Når M =3000 er:

$\log V = -1,64 - 0,27 \cdot \log 3000$

$\log V = -1,64 - 0,27 \cdot 3,47712125472$

$\log V = -2,57882273877$

$V = 10^{-2,57882273877} = \underline{\underline{0,002637407648}}$

b) Da man tager titalslogaritmen af V, kan V isoleres ved at anvende 10^x på begge sider:

$\log V = -1,64 - 0,27 \cdot \log M \iff$

$10^{\log V} = 10^{-1,64-0,27\cdot\log M} \iff$

$V = 10^{-1,64} \cdot 10^{-0,27\cdot\log M} \iff$

$V = 10^{-1,64} \cdot 10^{\log M\cdot(-0,27)} \iff$

$V = 10^{-1,64} \cdot \left(10^{\log M}\right)^{-0,27} \iff$

$\underline{\underline{V = 0,022908676528 \cdot M^{-0,27}}}$

9.115: $f(x) = e^{x-0,8\cdot x^2}$ $\quad P(1, f(1))$

a) Metode 1 (uden lommeregner): For at finde en ligning for tangenten til grafen i punktet P mangler man røringspunktets (P's) andenkoordinat samt tangentens hældning.

Først bestemmes røringspunktets andenkoordinat:

$f(1) = e^{1-0,8\cdot1^2} = e^{0,2}$

Tangenthældningen svarer til differentialkvotienten i punktet:

$f'(x) = (1-1,6x)\cdot e^{x-0,8\cdot x^2}$

$f'(1) = (1-1,6\cdot1)\cdot e^{1-0,8\cdot1^2} = -0,6\cdot e^{0,2}$

Hermed bliver tangentligningen:

$y - e^{0,2} = -0,6\cdot e^{0,2}\cdot(x-1) \iff \underline{\underline{y = -0,6\cdot e^{0,2}\cdot x + 1,6\cdot e^{0,2}}}$

Metode 2 (med lommeregner):

På TI n'spire indtastes:

$\text{tangentLine}\left(e^{x-0.8\cdot x^2}, x, 1\right)$

Lommeregneren giver:

$1.95424441306 - 0.732841654896\cdot x$

Dvs. at tangentens ligning er: $\underline{\underline{y = -0,733\cdot x + 1,954}}$

b) <u>Metode 1 (fortegnsskema):</u> For at bestemme monotoniforholdene for f bestemmes først nulpunkterne for den afledede funktion:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(1-1,6x\right)\cdot e^{x-0,8\cdot x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$1-1,6x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{1}{1,6} = \frac{5}{8}$$

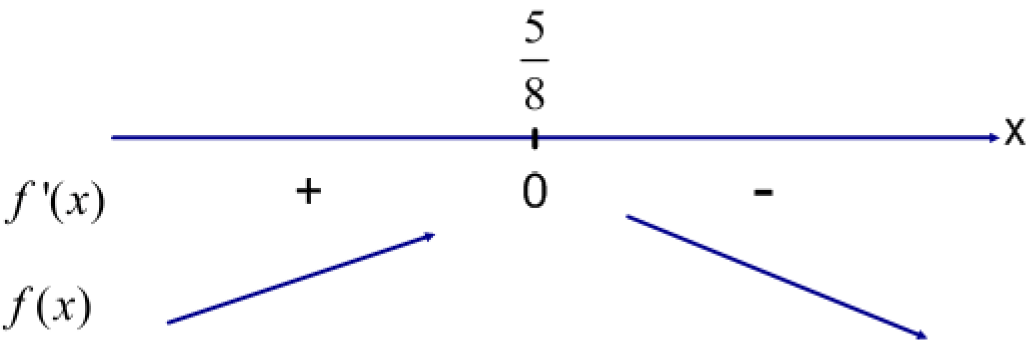
Ved den anden biimplikation blev nulreglen benyttet, samt at eksponentialfunktioner altid giver positive værdier (dvs. at de aldrig kan være nul uanset værdien af eksponenten).

Da eksponentialfunktionen giver positive værdier, bestemmes den afledede funktions fortegn af den første faktor, så man har:

$$\left(1-1,6\cdot 0\right) = 1 > 0 \quad dvs. \quad f'(0) > 0$$

$$\left(1-1,6\cdot 1\right) = -0,6 < 0 \quad dvs. \quad f'(1) < 0$$

Dette giver fortegnsskemaet:



Altså er <u>f voksende i intervallet</u> $\left]-\infty, \frac{5}{8}\right]$ <u>og aftagende i intervallet</u> $\left[\frac{5}{8}, \infty\right[$

f har globalt maksimum i stedet $x = \frac{5}{8}$

<u>Metode 2 (anden afledede):</u>

På lommeregneren findes de/det steder/sted, hvor den afledede funktion giver nul, og disse/dette steder/sted bestemmes værdien af den anden afledede:

$$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}\left(e^{x-0.8\cdot x^2}\right)=0,x\right) \qquad x=0.625$$

$$\left.\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{x-0.8\cdot x^2}\right)\right|x=0.625 \qquad -2.18694070588$$

Da den anden afledede er negativ i x = 0,625, er der lokalt maksimum på dette sted, dvs. man har:

<u>f voksende i intervallet</u> $\left]-\infty; 0,625\right]$ <u>og aftagende i intervallet</u> $\left[0,625; \infty\right[$

$\underline{9.116:}$ $f(x)=x^2-4x+7$; $g(x)=-x^2+6x-1$

a) Det er angivet, at graferne skærer hinanden i $x = 1$ og $x = 4$, og man kan se, at grafen for g ligger over grafen for f i det pågældende område. Arealet af M kan derfor bestemmes ved:

$$A_M=\int_1^4 \left(g(x)-f(x)\right)dx$$

Dette beregnes i Maple ved:

$f(x) := x^2 - 4x + 7 :$

$g(x) := -x^2 + 6x - 1 :$

$$A_M = \int_1^4 (g(x) - f(x))\,dx = 9$$

Dvs. $\underline{\underline{A_M = 9}}$

b) Man finder først rumfanget af omdrejningslegemet, der kommer fra g, og derefter fratrækkes rumfanget af omdrejningslegemet, der kommer fra f:

$$V=\pi\cdot\int_1^4 \left(g(x)^2\right)dx-\pi\cdot\int_1^4 \left(f(x)^2\right)dx$$

Dette beregnes i Maple ved:

$f(x) := x^2 - 4x + 7 :$

$g(x) := -x^2 + 6x - 1 :$

$$A_M = \int_1^4 (g(x) - f(x))\,dx = 9$$

Dvs. $\underline{\underline{A_M = 9}}$

$$V = \pi\cdot\int_1^4 g(x)^2\,dx - \pi\cdot\int_1^4 f(x)^2\,dx = 99\,\pi \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 311.0176727$$

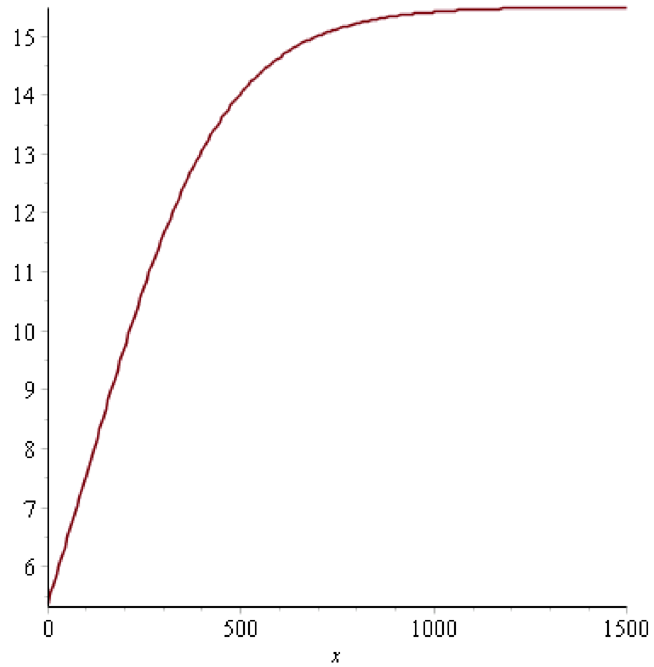
Dvs. at rumfanget er: $\underline{\underline{V = 311,02}}$

9.117: a) Det er angivet, at sammenhængen er af formen $y = b \cdot a^x$, så der er tale om en eksponentialfunktion, og da man har en hel tabel med værdier, skal der laves regression (I Maple):

$with(Gym):$
$X := [0, 56, 112, 224, 448, 896]:$
$Y := [1.91, 1.36, 0.94, 0.47, 0.17, 0.01]:$
$g(x) := ExpReg(X, Y, x):$
$g(x) = 1.87819682541145\ 0.994243985593418^x$
Dvs. $\underline{\underline{b = 1,8781968}}$ og $\underline{\underline{a = 0,994244}}$

b) I Maple defineres funktionen $U(x) = \dfrac{15,5}{1 + g(x)}$; $0 \le x \le 1500$, hvorefter grafen tegnes:

$$U(x) := \frac{15.5}{1 + g(x)}:$$
$plot(U(x), x = 0..1500)$



Det ses på grafen, at $U(x) \to 15,5$ for $x \to \infty$

Man kan også ses det ud fra funktionsudtrykket. Da *g(x)* er en aftagende eksponentiel udvikling, vil $g(x) \to 0$ for $x \to \infty$, dvs. nævneren i brøken vil nærme sig 1, hvorfor *U(x)* netop vil komme tættere og tættere på 15,5.

Dvs. det maksimale tørstofudbytte på marken er 15,5 tons (Man kan ikke komme over dette uanset hvor meget kunstgødning, man bruger)

9.118: $\frac{dr}{dt} = -0,025 \cdot r \qquad r(0) = 0,017$

a) Differentialligningen kan løses på flere måder, hvoraf to vises her:
Metode 1:
På TI n'spire indtastes:

```
deSolve(r'=-0.025·r,t,r)
                              r=c1·(0.975309912028)^t
```

Dvs. at den fuldstændige løsning er:
$r(t) = c \cdot 0,9753099^{t}$, hvor c er en konstant.
Da man kender funktionens begyndelsesværdi, kan konstanten bestemmes:
$0,017 = c \cdot 0,9753099^{0} \Leftrightarrow \quad c = 0,017$
Dvs. at den søgte partikulære løsning er:
$\underline{\underline{r(t) = 0,017 \cdot 0,9753099^{t}}}$

Metode 2: Differentialligningen genkendes som en ligning af typen $\frac{dy}{dx} = k \cdot y$ med den fuldstændige løsning $y = c \cdot e^{k \cdot x}$, så den fuldstændige løsning til differentialligningen er:
$r(t) = c \cdot e^{-0,025 \cdot t}$.
Konstantens værdi bestemmes som ovenfor, og man får altså:
$\underline{\underline{r(t) = 0,017 \cdot e^{-0,025 \cdot t}}}$

b) $\frac{dN}{dt} = r(t) \cdot N = 0,017 \cdot e^{-0,025 \cdot t} \cdot N \qquad$ N(0) = 106,5
Denne differentialligning ville kunne løses ved separation af de variable, men det kan også gøres på TI n'spire ved indtastningen:

```
deSolve(n'=0.017·e^(-0.025·t),n,t,n)        n=c2·(0.506616992366)^((0.975309912028)^t)
solve(106.5=c·(0.50661699236559)^((0.97530991202833)^0),c)        c=210.217978483
solve(200=210.217978483·(0.50661699236559)^((0.97530991202833)^t),t)        t=104.540935097
```

Den første indtastning giver den fuldstændige løsning til differentialligningen, men man ved den anden indtastning udnytter kendskabet til begyndelsesværdien til at bestemme værdien af konstanten, således at den søgte løsning er:
$\underline{\underline{N(t) = 210,22 \cdot 0,506617^{0,975310^{t}}}}$

Den sidste indtastning er benyttet til at finde ud af, hvornår befolkningstallet når 200 millioner. Det ses altså, at <u>befolkningstallet ifølge modellen når 200 millioner mennesker 104,5 år efter 2007.</u>

Den lange tid skyldes, at vækstraten er eksponentielt aftagende.

9.119: a) Postkassens 2 endeflader består af 2 halvcirkler og et rektangel. Sidefladen består af 2 halve cylindre og 2 rektangler. Dermed bliver overfladearealet:

$$A = 2 \cdot A_{endeflade} + A_{sideflade} = 2 \cdot \left(h \cdot 2r + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 \right) + \left(2 \cdot h \cdot 10r + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10r \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \right) =$$

$$4hr + 2\pi r^2 + 20hr + 20\pi r^2 = 24hr + 22\pi r^2 = \underline{\underline{2r\left(12h + 11\pi r\right)}}$$

b) Man har $V(r) = \dfrac{25r\left(599 - \pi r^2\right)}{3} \quad ; \quad 0 < r < 12$

For at bestemme den værdi af *r*, der giver det største rumfang, bestemmes først det eller de steder, hvor den afledede funktion er 0, og derefter bestemmes fortegnet for den anden afledede de pågældende steder, så det afgøres, om der er tale om maksimum, minimum eller vandret vendetangent.

$$V(r) := \frac{25 \cdot r \cdot \left(500 - \pi \cdot r^2\right)}{3}:$$

$fsolve(V'(r) = 0) = -7.283656204, 7.283656204$

Kun den positive af disse løsninger ligger inden for definitionsmængden:

$V''(7.283656204) = -364.1828102\,\pi \xrightarrow{\text{at 10 digits}} -1144.114041$

Da den anden afledede er negativ det pågældende sted, er det et lokalt maksimumssted, så rumfanget bliver størst muligt, når $\underline{\underline{r = 7,283656204}}$

Juni 2010: Delprøven UDEN hjælpemidler

9.120: I tredje led anvendes den første kvadratsætning:

$$a^2-b^2-(a+b)^2+2ab=a^2-b^2-\left(a^2+b^2+2ab\right)+2ab=a^2-b^2-a^2-b^2-2ab+2ab=\underline{\underline{-2b^2}}$$

9.121: $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-2t\end{pmatrix}\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}5t-1\\3\end{pmatrix}$

a) Det bemærkes, at begge vektorer er egentlige vektorer. Dermed har man:

$$\vec{a}\perp\vec{b}\quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=0\quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}1\\-2t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5t-1\\3\end{pmatrix}=0\quad\Leftrightarrow$$

$$1\cdot(5t-1)+(-2t)\cdot 3=0\quad\Leftrightarrow\quad 5t-1-6t=0\quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{t=-1}}$$

9.122: Da trekant ABC er retvinklet, kan man bestemme længden af siden BC ved hjælp af Pythagoras:

$$|AC|^2+|BC|^2=|AB|^2$$

$$4^2+|BC|^2=5^2\quad\Leftrightarrow\quad |BC|^2=25-16=9\quad\Leftrightarrow\quad |BC|=3$$

(Det er ved den sidste biimplikation benyttet, at sidelængden er positiv).

Da de to trekanter desuden er ensvinklede, er forholdene mellem ensliggende sider det samme for alle sidepar, og dermed er:

$$\frac{|EF|}{|BC|}=\frac{|DF|}{|AC|}\quad\Leftrightarrow\quad |EF|=\frac{|DF|}{|AC|}\cdot|BC|$$

$$|EF|=\frac{5}{4}\cdot 3=\underline{\underline{\frac{15}{4}}}$$

9.123: $f(x)=x^4+\ln(2x+1)$

Først bestemmes den afledede funktion, hvor der differentieres ledvist, og hvor sidste led differentieres som en sammensat funktion:

$$f'(x)=4x^3+2\cdot\frac{1}{2x+1}=4x^3+\frac{2}{2x+1}$$

Så kan differentialkvotienten i 1 bestemmes:

$$f'(1)=4\cdot 1^3+\frac{2}{2\cdot 1+1}=4+\frac{2}{3}=\frac{12}{3}+\frac{2}{3}=\underline{\underline{\frac{14}{3}}}$$

9.124: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^3+1}{y}\quad ;\quad P(2,4)$

For at bestemme ligningen for tangenten til grafen for *f* (der er en løsning til differentialligningen) i punktet P, mangler man at kende tangentens hældning. Denne bestemmes ud fra differentialligningen ved at indsætte punktets koordinater:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2^3+1}{4}=\frac{9}{4}$$

Hermed kan tangentens ligning bestemmes ud fra hældningen og P's koordinater:

$$y-4=\frac{9}{4}\cdot(x-2)\quad\Leftrightarrow\quad y=\frac{9}{4}\cdot x-\frac{9}{2}+4\quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{y=\frac{9}{4}\cdot x-\frac{1}{2}}}$$

9.125: $\int 2x\cdot\left(x^2+1\right)^5\,dx$

Dette integral udregnes ved metoden 'Integration ved substitution'.

Det bemærkes, at den afledede funktion af parentesens indhold svarer til de 2x, der står foran parentesen, og derfor benyttes substitutionen:

$$t=x^2+1$$

$$\frac{dt}{dx}=2x$$

$$dt=2x\cdot dx$$

Dette indsættes i ovenstående ubestemte integral, og man får:

$$\int 2x \cdot \left(x^2 + 1\right)^5 dx = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + k = \underline{\underline{\frac{\left(x^2 + 1\right)^6}{6} + k}}$$

Juni 2010: Delprøven MED hjælpemidler

9.126: $P(3,1) \quad Q(20,7) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

a) Da linjen står vinkelret på $\vec{a}$, er $\vec{a}$ en normalvektor for linjen, og da man desuden kender punktet P på linjen, kan man bestemme en ligning for linjen:

$$4\cdot(x-3)-3\cdot(y-1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x-12-3y+3=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{4x-3y-9=0}}$$

b) $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 20-3 \\ 7-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix}$

Arealet af det parallelogram, der udspændes af de to vektorer er:

$$A = \left|\det\left(\overrightarrow{PQ},\vec{a}\right)\right| = \left\|\begin{matrix} 17 & 4 \\ 6 & -3 \end{matrix}\right\| = \left|17\cdot(-3)-6\cdot 4\right| = \left|-51-24\right| = \left|-75\right| = \underline{\underline{75}}$$

c) Projektionen bestemmes:

$$\overrightarrow{PQ}_{\vec{a}} = \frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a} = \frac{\begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}}{\sqrt{4^2+(-3)^2}^{\,2}}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{17\cdot 4+6\cdot(-3)}{25}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{50}{25}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}}}$$

9.127: $f(x) = b\cdot x^a \quad ; \quad f(32)=402 \quad ; \quad f(243)=603$

a) For at bestemme de to konstanter indsættes de angivne værdier, så man får ligningerne:

$$402 = b\cdot 32^a$$

$$603 = b\cdot 243^a$$

Disse to ligninger løses i Maple ved:

$solve\left(\left[402 = b\cdot 32^a, 603. = b\cdot 243^a\right]\right)$

$\{a = 0.2000000000, b = 201.0000000\}$

Dvs. man har $\underline{\underline{a = 0,2 \ og \ b = 201}}$

9.128: a) Den uafhængige variabel d indgår som eksponent i forskriften, så der er tale om en eksponentiel udvikling. Da der er mere end to målepunkter, skal der laves eksponentiel regression. Maple anvendes:

```
restart
with(Gym) :
væskedybde := [1.0, 3.0, 4.0, 5.0, 7.0, 10.0, 15.0] :
lysintensitet := [95.1, 86.0, 81.9, 77.9, 70.5, 60.7, 47.2] :
```

Da "I" er en beskyttet variabel i Maple, skal den "frigives":

local I

$I(d) := ExpReg(væskedybde, lysintensitet, d) :$

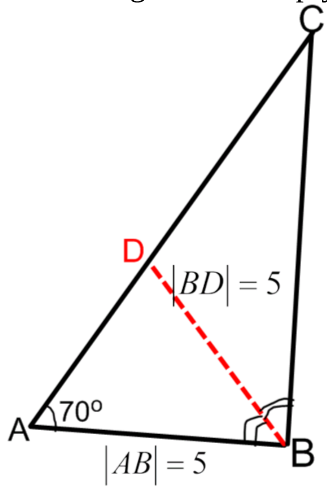
$I(d) = 100.002613039014\ 0.951224716957043^d$

Dvs. $\underline{\underline{I_0 = 100}}$ og $\underline{\underline{a = 0.951225}}$

b) Da $0 < a < 1$ giver det mening at snakke om en halveringskonstant, og den kan bestemmes ved:

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(a)} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(0,9512)} = 13,8544 = \underline{\underline{13,9}}$$

9.129: En skitse tegnes ud fra oplysningerne. Den røde linje halverer vinkel B.



a) Da siderne AB og BD er lige lange, er trekant ABD en ligebenet trekant. Og da $\angle A$ og $\angle ADB$ ligger over for de to lige lange sider, har man $\angle ADB = \angle A = \underline{\underline{70^\circ}}$

Længden af siden AD kan bestemmes, når man kender den modstående vinkel, og den kan beregnes ud fra vinkelsummen i en trekant:

$\angle ABD = 180^\circ - \angle A - \angle ADB = 180^\circ - 70^\circ - 70^\circ = 40^\circ$

Så kan sinusrelationerne anvendes:

$$\frac{|AD|}{\sin(\angle ABD)} = \frac{|BD|}{\sin A} \Leftrightarrow |AD| = \frac{|BD|}{\sin A} \cdot \sin(\angle ABD)$$

$$|AD| = \frac{5}{\sin(70^\circ)} \cdot \sin(40^\circ) = \underline{\underline{3,4202014332567}}$$

b) Længden af BC bestemmes ved at regne på trekant ABC. Man har brug for at kende vinkel C for at kunne benytte sinusrelationerne, og den bestemmes ved vinkelsummen i en trekant:

$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - \angle A - 2 \cdot \angle ABD = 180^\circ - 70^\circ - 2 \cdot 40^\circ = 30^\circ$

Så er:

$$\frac{|BC|}{\sin A} = \frac{|AB|}{\sin C} \Leftrightarrow |BC| = \frac{|AB|}{\sin C} \cdot \sin A$$

$$|BC| = \frac{5}{\sin(30^\circ)} \cdot \sin(70^\circ) = \underline{\underline{9,3969262078591}}$$

9.130:

a) $f(x)=(x+1)\cdot e^{-x}$

$f(x) := (x+1)\cdot e^{-x}$:

Monotoniforholdene bestemmes ved først at finde lokale ekstremumssteder ved hjælp af den første og den anden afledede funktion:

$solve(f'(x)=0) = 0$

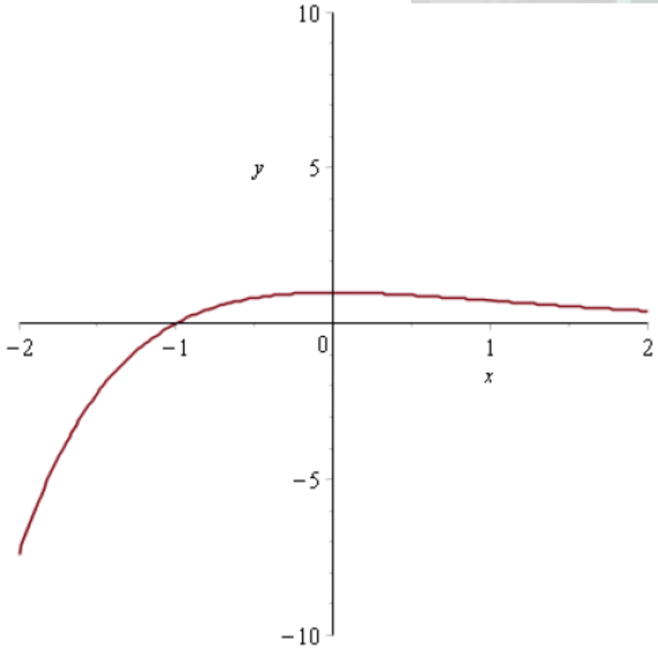
$f''(0) = -1 < 0$

Da den anden afledede er negativ det sted, hvor den første afledede er 0, er det et lokalt maksimumssted, og dermed gælder:

$\underline{\underline{f \text{ er voksende i intervallet }]-\infty;0] \text{ og aftagende i intervallet } [0,\infty[}}$

b) For at få et overblik over situationen tegnes grafen:

$plot(f(x), x=-2..2, y=-10..10)$



Man skal kende den nedre og den øvre grænse for det bestemte integral, der angiver arealet af punktmængden M. Den øvre grænse er 0, og den nedre grænse beregnes ved:

$solve(f(x)=0) = -1$

Dvs. så kan arealet beregnes ved:

$$A_M = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = A_M = e - 2 \xrightarrow{\text{at 10 digits}} A_M = 0.718281828$$

Dvs. at arealet af punktmængden M er $\underline{\underline{A_M = 0,718281828}}$

c) Rumfanget af omdrejningslegemet beregnes ved:

$$V = \pi\cdot\int_{-1}^{0} f(x)^2 dx = V = \pi\left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{5}{4}\right) \xrightarrow{\text{at 10 digits}} V = 1.876360273$$

Dvs. at rumfanget er $\underline{\underline{V = 1,876360273}}$

9.131: Planen α har ligningen $2x-y-2z-6=0$.
Linjen *l* går gennem O(0,0,0) og P(7,3,-2).

a) For at finde den spidse vinkel mellem planen og linjen skal man først bestemme vinklen mellem en normalvektor for planen og en retningsvektor for linjen.

En normalvektor for planen aflæses ud fra dens ligning til: $\overrightarrow{n_\alpha}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$

En retningsvektor for linjen bestemmes ud fra de oplyste punkter: $\vec{r}=\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}7\\3\\-2\end{pmatrix}$

Vinklen mellem disse to vektorer bestemmes ved:

$$\cos w=\frac{\overrightarrow{n_\alpha}\cdot\vec{r}}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|\cdot\left|\vec{r}\right|}\quad\Leftrightarrow\quad w=\cos^{-1}\left(\frac{2\cdot7+(-1)\cdot3-2\cdot(-2)}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{7^2+3^2+2^2}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{15}{3\cdot\sqrt{62}}\right)=50,579968°$$

Dette er vinklen mellem den valgte normalvektor og retningsvektor, så den spidse vinkel mellem planen og linjen er:

$v=90°-w=90°-50,579968°=\underline{\underline{39,420032°}}$

b) For at bestemme en ligning for en kugle, skal man kende centrums koordinater og cirklens radius. Kuglen har centrum i P, så man mangler kun at finde dens radius.
Da kuglen skal tangeres af α, svarer radius til afstanden mellem punktet P og planen α:

$$r=dist(P,\alpha)=\frac{\left|a\cdot x_1+b\cdot y_1+c\cdot z_1+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\left|2\cdot7-3-2\cdot(-2)-6\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{|9|}{\sqrt{9}}=\frac{9}{3}=3$$

Hermed bliver cirklens ligning:

$\underline{\underline{(x-7)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=9}}$

c) Projektionen af P på planen er skæringen mellem planen og den linje, der går gennem P og står vinkelret på planen.
Som retningsvektor for den pågældende linje skal man derfor benytte en normalvektor for planen (der kendes fra spørgsmål a)). En parameterfremstilling for linjen er dermed:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\3\\-2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

Koordinaterne fra parameterfremstillingen indsættes nu i planens ligning for at finde skæringen mellem linjen og planen:

$$2\cdot(7+2t)-(3-t)-2\cdot(-2-2t)-6=0\quad\Leftrightarrow\quad 9t+9=0\quad\Leftrightarrow\quad t=-1$$

Denne værdi indsættes i linjens parameterfremstilling:

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\3\\-2\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\\0\end{pmatrix}$. Dvs. projektionen er $\underline{\underline{Q(5,4,0)}}$

9.132: $\frac{dV}{dt} = 0{,}000193 \cdot V \cdot (139{,}6 - V)$; V er vægten af en gris målt i kg og t er tiden i døgn efter grisen begynder at indtage fast føde.
Da grisen vejer 7,3kg, når den begynder at indtage fast føde, har man punktet (0;7,3).

a) Differentialligningen beskriver logistisk vækst, og den fuldstændige løsning er:

$$V(t) = \frac{139{,}6}{1 + c \cdot e^{-0{,}000193 \cdot 139{,}6 \cdot t}} = \frac{139{,}6}{1 + c \cdot e^{-0{,}0269428 \cdot t}}$$

Punktet benyttes til at bestemme værdien af c:

$$7{,}3 = \frac{139{,}6}{1 + c \cdot e^{-0{,}0269428 \cdot 0}} \Leftrightarrow 7{,}3 = \frac{139{,}6}{1 + c \cdot 1} \Leftrightarrow 1 + c = \frac{139{,}6}{7{,}3} \Leftrightarrow c = \frac{139{,}6}{7{,}3} - 1 = 18{,}1233$$

Dvs. forskriften for V er:

$$\underline{\underline{V(t) = \frac{139{,}6}{1 + 18{,}1233 \cdot e^{-0{,}0269428 \cdot t}} \quad ; \quad t \geq 0}}$$

b) Da det er logistisk vækst vides det, at væksthastigheden er størst, når funktionsværdien er halvdelen af maksimum, der er tallet i tælleren, dvs. grisens vægt er i denne situation:

$$V = \frac{139{,}6kg}{2} = \underline{\underline{69{,}8kg}}$$

9.133:

$l: y = -2x + 1$; $f(x) = x^2 + bx + c$; $P(1, f(1))$

a) Da det er oplyst, at linjen l er tangent til grafen for f i punktet P, og da den har hældningen -2, så gælder $\underline{\underline{f'(1) = -2}}$, da differentialkvotienten et sted netop svarer til tangenthældningen.

Desuden ved man, at linjen l rører grafen for f i punktet P, så *f(1)* kan bestemmes ved at indsætte i linjens ligning:

$f(1) = -2 \cdot 1 + 1 = -2 + 1 = \underline{\underline{-1}}$

Nu kan tallene b og c bestemmes ved at indsætte i funktionen og den afledede funktion:

$f'(x) = 2x + b$

$f'(1) = -2$ indsættes i ovenstående:

$-2 = 2 \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = -2 - 2 = \underline{\underline{-4}}$

$f(x) = x^2 - 4x + c$

$f(1) = -1$ indsættes:

$-1 = 1^2 - 4 \cdot 1 + c \Leftrightarrow c = -1 - 1 + 4 = \underline{\underline{2}}$

9.134:

a) Der regnes i dm. Tragten består af en kegle og en cylinder. Så rumfanget af tragten er:

$$V = V_{kegle} + V_{cylinder} = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot 2r + s\cdot\pi\cdot r^2 = \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^3 + s\cdot\pi\cdot r^2$$

Da rumfanget er 40, har man:

$$40 = \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^3 + s\cdot\pi\cdot r^2 \Leftrightarrow 40 - \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^3 = s\cdot\pi\cdot r^2 \Leftrightarrow s = \frac{40 - \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^3}{\pi\cdot r^2} \Leftrightarrow \underline{\underline{s = \frac{40}{\pi\cdot r^2} - \frac{2}{3}\cdot r}}$$

Tragtens overflade består også af en kegles og en cylinders overflade:

$$O = O_{kegle} + O_{cylinder} = \pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2 + (2r)^2} + s\cdot 2\cdot\pi\cdot r = \pi\cdot r\cdot\sqrt{5r^2} + s\cdot 2\cdot\pi\cdot r = \pi\cdot r\cdot\left(\sqrt{5}\cdot r + 2s\right)$$

Og da man kender sammenhængen mellem s og r, har man:

$$O(r) = \pi\cdot r\cdot\left(\sqrt{5}\cdot r + 2\cdot\left(\frac{40}{\pi\cdot r^2} - \frac{2}{3}\cdot r\right)\right) = \sqrt{5}\cdot\pi\cdot r^2 + \frac{80}{r} - \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^2 = \underline{\underline{\pi\cdot\left(\sqrt{5} - \frac{4}{3}\right)\cdot r^2 + \frac{80}{r}}}$$

b) For at bestemme den værdi af r, der giver tragten den mindst mulige overflade, når r ligger mellem 0 og 4, findes det eller de steder, hvor den afledede giver 0, hvorefter fortegnet for den anden afledede de pågældende steder bruges til at afgøre, om der er tale om maksimum, minimum eller vandret vendetangent.

local O

$$O(r) := \pi\cdot\left(\sqrt{5} - \frac{4}{3}\right)\cdot r^2 + \frac{80}{r}:$$

$$fsolve(O'(r) = 0) = 2.416109815$$

$$O''(2.416109815) = 2\pi\left(\sqrt{5} - \frac{4}{3}\right) + 11.34409811 \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 17.016$$

Da den anden afledede er postiv, er der tale om et minimumssted, dvs. at tragtens overflade bliver mindst mulig, når $\underline{\underline{r = 2,42\ dm}}$

August 2010: Delprøven UDEN hjælpemidler

9.135: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2t-3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7t-5 \end{pmatrix}$

Det bemærkes, at begge vektorer uanset t-værdien er egentlige vektorer. Dermed har man:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \det\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2t-3 & 7t-5 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$2(7t-5) - (2t-3)\cdot 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 14t - 10 - 8t + 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6t + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{t = -\frac{1}{3}}}$$

9.136: $y = x^2 - 6x + 19$

Hvis man kan huske udtrykket for parablens toppunkt, kan man bruge dette:

$$T\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right) = T\left(\frac{-(-6)}{2\cdot 1}, \frac{-\left((-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 19\right)}{4\cdot 1}\right) = T\left(\frac{6}{2}, \frac{40}{4}\right) = \underline{\underline{T(3,10)}}$$

Hvis man ikke kan huske udtrykket, kan man udnytte, at tangenthældningen i toppunktet er 0:

$y' = 2x - 6$

$0 = 2x - 6 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$

Dette indsættes i parablens ligning for at finde toppunktets y-værdi:

$y_{toppunkt} = 3^2 - 6\cdot 3 + 19 = 9 - 18 + 19 = 10$

9.137: $R = \frac{4\cdot p}{\pi\cdot d^2}\cdot l$

d isoleres i udtrykket ved følgende omskrivninger:

$$R = \frac{4\cdot p}{\pi\cdot d^2}\cdot l \quad \Leftrightarrow \quad d^2 = \frac{4\cdot p\cdot l}{\pi\cdot R} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{d = \pm\sqrt{\frac{4\cdot p\cdot l}{\pi\cdot R}}}}$$

Det ligner et fysisk udtryk, hvor d ikke kan være negativ, men da der ikke er oplyst noget om dette, skal man huske plus-minus ved den sidste biimplikation.

9.138: $\int_0^2 \left(3x^2 - 10x\right)dx = \left[x^3 - 5x^2\right]_0^2 = 2^3 - 5\cdot 2^2 - \left(0^3 - 5\cdot 0^2\right) = 8 - 20 = \underline{\underline{-12}}$

9.139: $f(x) = x\cdot\ln(x) \qquad y' = \frac{y}{x} + 1$

Det vises, at *f* er en løsning til differentialligningen ved at indsætte i denne og vise, at man får en identitet (et udsagn der er sandt for alle x-værdier). Ved differentiationen af *f* benyttes produktreglen:

$$1\cdot\ln(x) + x\cdot\frac{1}{x} = \frac{x\cdot\ln(x)}{x} + 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{\ln(x) + 1 = \ln(x) + 1}}$$

Da udtrykket er en identitet, er *f* en løsning til differentialligningen.

9.140: Kuglens ligning. $K: \quad (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 36$

Planens ligning. $\alpha: \quad 2x - y + 2z - 13 = 0$

Det undersøges, om planen tangerer kuglen ved at undersøge, om afstanden fra kuglens centrum til planen netop svarer til kuglens radius.

Kuglens centrum aflæses ud fra ligningen til C(1,3,-2), og radius aflæses til r = 6.

Afstanden fra kuglens centrum til planen bestemmes:

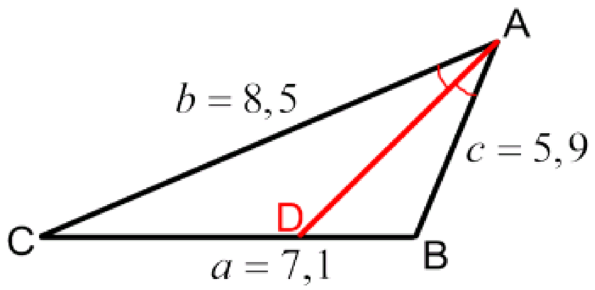
$$dist(C,\alpha) = \frac{\left|2\cdot 1 - 3 + 2\cdot(-2) - 13\right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|-18|}{\sqrt{9}} = \frac{18}{3} = 6 = r$$

<u>Da afstanden fra centrum til planen netop svarer til radius, er α tangentplan til kuglen</u>

August 2010: Delprøven MED hjælpemidler

9.141: Der anvendes Maple til løsningen:

I trekant ABC er $a := 7.1$ $b := 8.5$ og $c := 5.9$.



a) Da man kender alle tre sider, kan vinklerne bestemmes med cosinusrelationerne:

with(*Gym*)

$$\angle A = invCos\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c}\right)$$

$$\angle(A) = 55.61120824$$

$$\angle B = invCos\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c}\right)$$

$$\angle(B) = 81.09421033$$

Dvs. at $\underline{\underline{\angle A = 55,61^\circ}}$ og $\underline{\underline{\angle B = 81,09^\circ}}$

b) I trekant ABD kender man vinkel B, og da AD er en vinkelhalveringslinje, er ∠BAD det halve af ∠BAC.
Da man kender siden c, kan man anvende sinusrelationerne, hvis man først finder ∠ADB:

$$\angle ADB := 180 - \frac{\angle(A)}{2} - \angle(B)$$

$$71.10018557$$

Så har man:

$$\frac{|AD|}{Sin(\angle B)} = \frac{c}{Sin(\angle ADB)}$$

$$AD := \frac{c}{Sin(\angle ADB)}\cdot Sin(\angle B)$$

$$6.161034440$$

Dvs. at længden af vinkelhalveringslinjen v_a er $\underline{\underline{|AD| = 6,16103}}$

9.142: $f(3) = 864$ $f(6) = 1493$ f er eksponentielt voksende

a) Da funktionen er eksponentielt voksende, er den på formen: $f(x) = b\cdot a^x$

Punkternes koordinater indsættes i forskriften:

$$\left.\begin{array}{r} 864 = b\cdot a^3 \\ 1493 = b\cdot a^6 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1493}{864} = \frac{b\cdot a^6}{b\cdot a^3} \Leftrightarrow \frac{1493}{864} = a^{6-3} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{\frac{1493}{864}} = 1,20000214334$$

a-værdien indsættes i den øverste ligning for at finde b:

$$864 = b\cdot 1,20000214334^3 \Leftrightarrow b = \frac{864}{1,20000214334^3} = 499,997320831$$

Dvs. at forskriften er:

$$\underline{\underline{f(x) = 500\cdot 1,2^x}}$$

b) Fordoblingskonstanten kan så beregnes ved:

$$T_2 = \frac{\ln 2}{\ln a} = \frac{\ln 2}{\ln(1,20000214334)} = \underline{\underline{3,80174677302}}$$

$\underline{9.143:}$ $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ De to linjer skærer i punktet P.

a) De spidse vinkel mellem de to linjer er den spidse vinkel mellem deres retningsvektorer:

$$\cos v = \frac{\vec{r_1} \cdot \vec{r_2}}{|\vec{r_1}| \cdot |\vec{r_2}|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2 + 5^2}} = \frac{-9+2+10}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{38}} = \frac{3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{38}}$$

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{38}}\right) = \underline{\underline{82{,}5265651517°}}$$

b) Koordinatsættet til P bestemmes ved at sætte koordinaterne for de to linjer lig hinanden:

$$-3t = 9 + 3s$$
$$1 + t = 1 + 2s$$
$$6 + 2t = 7 + 5s$$

Dette ligningssystem kan enten løses på TI n'spire ved:

```
solve(-3· t=9+3· s and 1+t=1+2· s and 6+2· t=7+5· s,s,▸          s=-1 and t=-2
```

Eller man kan isolere t i den anden ligning og indsætte den i den første:

$$-3 \cdot (2s) = 9 + 3s \quad \Leftrightarrow \quad -9s = 9 \quad \Leftrightarrow \quad s = -1$$

Da det er oplyst, at der ER et skæringspunkt mellem de to linjer, har man ikke brug for også at finde t-værdien, men kan blot indsætte i den anden linjes parameterfremstilling for at finde P:

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{Dvs. at } \underline{\underline{P(6,-1,2)}}$$

c) En normalvektor for den plan, som de to linjer udspænder, bestemmes ved at tage krydsproduktet af de to linjers retningsvektorer:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 - (-3) \cdot 5 \\ -3 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 21 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Man kan enten tage punktet P eller et punkt fra en af de to linjer, når man skal bruge et punkt i planen for at bestemme en ligning. Her benyttes punktet (0,1,6) fra den første linje:

$$1 \cdot (x-0) + 21 \cdot (y-1) - 9 \cdot (z-6) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 21y - 21 - 9z + 54 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x + 21y - 9z + 33 = 0}}$$

$\underline{9.144:}$ Der anvendes Maple:

a) En årlig vækstrate på 24,6% svarer til en fremskrivningsfaktor på $a = 1,246$. Da det antages at være en fast rentefod, kan man anvende kapitalfremskrivningsformlen:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n = K_0 \cdot a^n$$

Da der er 7 år mellem 2000 og 2007 får man:

$$K_7 = 10.4 \cdot 1.246^7$$

$$K_7 = 48.49083198$$

Dvs. at den udvundne vindenergi i år 2007 vil ifølge antagelsen være $\underline{\underline{48,5\ GW}}$

b) Da det igen antages at være en konstant vækstrate, kan man igen anvende kapitalfremskrivningsformlen.
Det er vækstraten, der er ukendt, mens man kender slutværdien, så man kan anvende 'solve':

$solve(94.1 = 10.4 \cdot (1 + r)^7)$

0.3697802425, −0.1459559880 + 1.070937318 I, −1.304804779 + 1.335436992 I, −2.234129354 + 0.5943253734 I, −2.234129354 −

Maple giver 7 resultater, men kun det første er et reelt tal (de andre er komplekse løsninger), så den årlige vækstrate er:
$\underline{\underline{r = 36,98\ \%}}$

9.145: $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4 \qquad P(2, f(2))$

a) For at kunne bestemme en ligning for en tangent til en graf i et punkt, skal man kende punktets koordinater og tangentens hældning.

Først bestemmes røringspunktets y-koordinat: $f(2) = 2^4 - 3 \cdot 2^2 - 4 = 16 - 12 - 4 = 0$

Tangentens hældning svarer til differentialkvotienten i 2:

$f'(x) = 4 \cdot x^3 - 3 \cdot 2x = 4x^3 - 6x$

$f'(2) = 4 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2 = 4 \cdot 8 - 12 = 32 - 12 = 20$

Dvs. tangentens ligning er: $y - 0 = 20 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 20x - 40}}$

b) For at kunne bestemme monotoniforholdene for *f*, skal man først bestemme de steder, hvor den afledede funktion giver 0, og derefter undersøges den anden afledede funktions fortegn for at tjekke, om det er maksimum, minimum eller vandret vendetangent.
Dette gøres på n'spire ved først at definere funktionen, finde nulpunkter for den afledede funktion og udregne værdier for den anden afledede funktion disse steder:

$f(x):=x^4-3\cdot x^2-4$	*Udført*
$f1(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$	*Udført*
$f2(x):=\frac{d^2}{dx^2}(f(x))$	*Udført*
solve$(f1(x)=0,x)$	$x=\frac{-\sqrt{6}}{2}$ or $x=0$ or $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$
$f2\left(\frac{-\sqrt{6}}{2}\right)$	12.
$f2(0)$	-6
$f2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$	12.

Da den anden afledede er positiv i $\frac{-\sqrt{6}}{2}$ *og* $\frac{\sqrt{6}}{2}$, er der lokalt minimum disse steder, og i 0 er der lokalt maksimum.

Dermed er *f* aftagende i intervallerne $\underline{\underline{\left]-\infty; \frac{-\sqrt{6}}{2}\right] \text{ og } \left[0; \frac{\sqrt{6}}{2}\right]}}$

Og *f* er voksende i intervallerne $\underline{\underline{\left[\frac{-\sqrt{6}}{2}; 0\right] \text{ og } \left[\frac{\sqrt{6}}{2}, \infty\right[}}$

9.146:

På skole 1 er drengene markant tungere end på skole 2. Medianen for skole 1 er 71 kg, mens den øvre kvartil for skole 2 er 70 kg. Dvs. at 50% af drengene fra skole 1 vejer mere end alle de 75% letteste af drengene fra skole 2. Desuden falder den nedre kvartil fra skole 1 sammen med medianen fra skole 2, dvs. at 75% af eleverne fra skole 1 vejer mere end eller lige så meget som alle de 50% letteste af drengene fra skole 2. Eleverne på skole 2 har en mere ekstrem fordeling af vægtene, da afstanden ud til største- og mindsteværdierne er længere end boksens bredde, og på skole 2 findes også den tungeste elev.

9.147: Cirkel: $x^2+2x+y^2-6y=15$ Linje: $x-2y+2=0$

a) For at bestemme koordinatsættene til skæringspunkterne mellem linjen og cirklen, kan man f.eks. på TI-n'spire indtaste:

$solve(x^2+2x+y^2-6y=15\,and\;x-2y+2=0,x,y)$, der giver: $x=-4\,and\;y=-1\;or\;x=4\,and\;y=3$

Dvs. skæringspunkterne er $\underline{\underline{(-4,-1)\text{og }(4,3)}}$

Dette kunne også være fundet ved beregning, hvor x-koordinaten isoleres i linjens ligning, så den udtrykkes ved y-koordinaten, hvorefter den indsættes i cirklens ligning:

$x=2y-2$

Indsat:

$$(2y-2)^2+2(2y-2)+y^2-6y=15 \Leftrightarrow 4y^2+4-8y+4y-4+y^2-6y=15 \Leftrightarrow$$

$$5y^2-10y-15=0 \Leftrightarrow y^2-2y-3=0 \Leftrightarrow (y-3)\cdot(y+1)=0 \Leftrightarrow y=3 \vee y=-1$$

y-værdierne indsættes i linjens ligning:

$y=-1:\; x=2\cdot(-1)-2=-2-2=-4 \quad dvs.\; \underline{\underline{(-4,-1)}}$

$y=3:\; x=2\cdot 3-2=4 \quad dvs.\; \underline{\underline{(4,3)}}$

b) $Q(-4,-1)$, da førstekoordinaten -4 er mindre end 4, der er førstekoordinat i det andet punkt.

For at kunne bestemme en ligning for tangenten, skal man kende en normalvektor og et punkt. Punktet er Q, så man mangler kun normalvektoren.

Som normalvektor kan man bruge vektoren fra Q til cirklens centrum, og dermed skal cirklens centrum bestemmes, hvilket gøres ved omskrivning af cirklens ligning:

$$x^2+2x+y^2-6y=15 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=15+1^2+(-3)^2=25$$

Så centrum aflæses til: $C(-1,3)$

En normalvektor er dermed:

$$\vec{n_t}=\overrightarrow{QC}=\begin{pmatrix}-1-(-4)\\3-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

Med denne normalvektor og punktet Q fås hermed tangentens ligning:

$$3\cdot(x-(-4))+4\cdot(y-(-1))=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{3x+4y+16=0}}$$

Hvis man vil tjekke, at dette er den søgte tangent (dvs. at man ikke har lavet regnefejl), kan man på TI n'spire indtaste:

$solve(3x+4y+16=0\,and\;x^2+2x+y^2-6y=15,x,y)$, der giver $x=-4\,and\;y=-1$, dvs punktet Q.

9.148:

$f(x)=x^2-k\cdot x \quad ; \quad g(x)=k\cdot x \quad ; \quad k>0$

a) Først findes skæringspunkterne mellem de to grafer:

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2-k\cdot x=k\cdot x \Leftrightarrow x^2-2kx=0 \Leftrightarrow x\cdot(x-2k)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2k$

Da k er positiv, vil stedet $x = 2k$ ligge til højre for $x = 0$.

Da grafen for f er et polynomium, hvor grenene vender opad, og grafen for g er en ret linje, vil grafen for g ligge over f i området mellem de to skæringspunkter.

Dette kan man også se ved at indsætte $x = k$, der ligger i området:

$f(k)=k^2-k\cdot k=k^2-k^2=0$

$g(k)=k\cdot k=k^2>0$

Hermed ses det, at grafen for g ligger over grafen for f i dette område.

Når arealet af området mellem graferne skal være 36, har man:

$$36=\int_0^{2k}\left(g(x)-f(x)\right)dx \Leftrightarrow 36=\int_0^{2k}\left(kx-\left(x^2-kx\right)\right)dx \Leftrightarrow 36=\int_0^{2k}\left(-x^2+2kx\right)dx \Leftrightarrow$$

$$36=\left[-\frac{1}{3}x^3+kx^2\right]_0^{2k} \Leftrightarrow 36=\left(-\frac{1}{3}\cdot(2k)^3+k\cdot(2k)^2\right)-(0+0) \Leftrightarrow$$

$$36=-\frac{8}{3}\cdot k^3+4\cdot k^3 \Leftrightarrow 36=\frac{4}{3}\cdot k^3 \Leftrightarrow \frac{108}{4}=k^3 \Leftrightarrow k^3=27 \Leftrightarrow \underline{\underline{k=3}}$$

Dette kunne også have været beregnet ved:

$f(x) := x^2 - k\cdot x :$

$g(x) := k\cdot x :$

$$fsolve\left(36=\int_0^{2k}\left(g(x)-f(x)\right)dx,\ k\right)=3.$$

9.149:

a) Drivhusets rumfang kan beregnes som trekantens areal multipliceret med sidelængden, og da rumfanget er 40 (målt i m^3), får man:

$$V=T_{trekant}\cdot 5b=\frac{1}{2}\cdot h\cdot b\cdot 5b=\frac{5}{2}\cdot h\cdot b^2$$

$$40=\frac{5}{2}\cdot h\cdot b^2 \Leftrightarrow h=\frac{40\cdot 2}{5\cdot b^2} \Leftrightarrow \underline{\underline{h=\frac{16}{b^2}}}$$

Med "glasoverfladen" menes nok "arealet af glasoverfladen", og den beregnes ved:

$$A=A_{rektangel}+2\cdot T_{trekant}=\sqrt{h^2+b^2}\cdot 5b+2\cdot\frac{1}{2}\cdot h\cdot b$$

$$A(b)=\sqrt{\left(\frac{16}{b^2}\right)^2+b^2}\cdot 5b+\frac{16}{b^2}\cdot b=\underline{\underline{\sqrt{\frac{6400}{b^2}+25\cdot b^4}+\frac{16}{b}}}$$

Det er undervejs benyttet, at trekanten er retvinklet, så længden af hypotenusen kan bestemmes ved Pythagoras.

<u>*9.150:*</u> $g'(t) = 675000 \cdot t \cdot e^{-3 \cdot t} \quad ; \quad 0 \leq t \leq 4 \quad ; \quad g(0) = 0$

g(t) angiver mængden af optaget glukose målt i mg.
t er tiden efter indtagelsen målt i timer.

Den mængde glukose, der er absorberet 4 timer efter indtagelsen, svarer til g(4).

Det er en differentialligning på den simplest mulige form, hvor den afledede af en funktion, men ikke funktionen selv indgår. Derfor kan funktionen bestemmes ved integration (på TI n'spire):

$$\int \left(675000 \cdot t \cdot e^{-3 \cdot t}\right) dt \qquad -75000 \cdot (3 \cdot t+1) \cdot e^{-3 \cdot t}$$

Og når man husker konstanten har man altså:

$$g(t) = \int g'(t)dt = -75000 \cdot (3t+1) \cdot e^{-3 \cdot t} + k$$

Da g(0) = 0 har man:

$$0 = -75000 \cdot (3 \cdot 0 + 1) \cdot e^{-3 \cdot 0} + k \quad \Leftrightarrow \quad k = 75000$$

Og så er:

$$g(4) = -75000 \cdot (3 \cdot 4 + 1) \cdot e^{-3 \cdot 4} + 75000 = 74994$$

Dvs. at <u>4 timer efter indtagelsen er der ifølge modellen optaget 74994mg glukose.</u>

Dette kunne også være beregnet ved hjælp af det bestemte integral, da man har:

$$g(4) - g(0) = \left[g(t)\right]_0^4 = \int_0^4 g'(t)dt$$

$$g(4) = \int_0^4 g'(t)dt + g(0) = \int_0^4 g'(t)dt + 0 = \int_0^4 g'(t)dt$$

Dvs. man kunne på TI n'spire have indtastet:

$$\int_0^4 \left(675000 \cdot t \cdot e^{-3 \cdot t}\right) dt \qquad 74994.009393$$

9.151: $\frac{dM}{dx} = 0{,}000369 \cdot M \cdot (15{,}50 - M) \quad ; \quad 0 \le x \le 1000$

Dette er en differentialligning for logistisk vækst, og den fuldstændige løsning er dermed:

$$M(x) = \frac{15{,}50}{1 + c \cdot e^{-0{,}000369 \cdot 15{,}50 \cdot x}} = \frac{15{,}50}{1 + c \cdot e^{-0{,}0057195 \cdot x}}$$

Løsningskurven skal gå gennem (400;13,1), og på TI n'spire kan konstanten så bestemmes:

$$\text{solve}\left(13.1 = \frac{15.5}{1 + c \cdot e^{-0.0057195 \cdot 400}}, c\right)$$

$$c = 1.80517$$

Dvs. at den søgte løsning er:

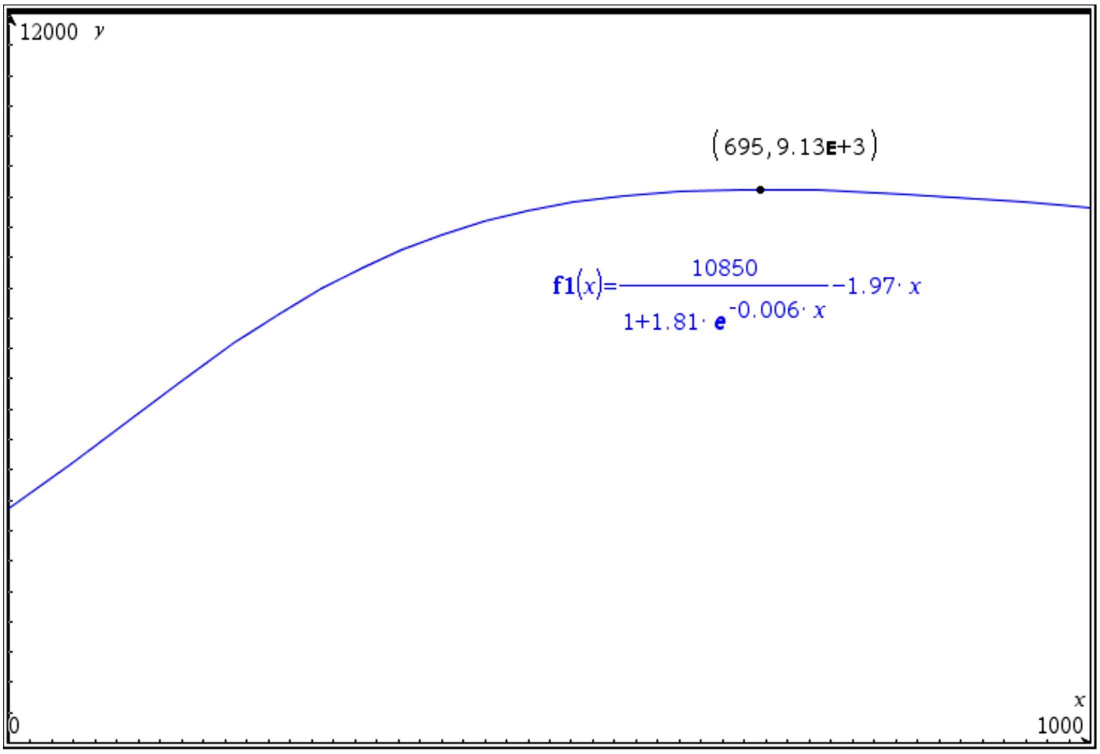
$$M(x) = \frac{15{,}50}{1 + 1{,}80517 \cdot e^{-0{,}0057195 \cdot x}} \quad ; \quad 0 \le x \le 1000$$

b) Fortjenesten F(x) er givet ved:

$$F(x) = M(x) \cdot 700 - 1{,}97 \cdot x$$

$$F(x) = \frac{10850}{1 + 1{,}80517 \cdot e^{-0{,}0057195 \cdot x}} - 1{,}97 \cdot x$$

Denne graf tegnes på TI n'spire med x-værdierne i intervallet [0,1000] og y-værdierne mellem 0 og 12000:



Den største fortjeneste er fundet ved at benytte "Undersøg grafer"→"Maksimum" og vælge grænserne på hver side af det område, hvor maksimum ses at ligge.

Dvs. fortjenesten er størst for x = 695kg

December 2010: Delprøven UDEN hjælpemidler

9.152: Udtrykket reduceres ved først at anvende første kvadratsætning på første led og gange ind i parentesen i andet led:

$$(a+3b)^2 + b(a-9b) - 7ab = a^2 + 9b^2 + 6ab + ab - 9b^2 - 7ab = \underline{\underline{a^2}}$$

9.153: $2x^2 - 5x - 3 = 0$

Andengradsligningen løses ved diskriminantmetoden:

$d = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4\cdot 2\cdot(-3) = 25 + 24 = 49 > 0$ dvs. 2 løsninger:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2\cdot a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2\cdot 2} = \frac{5 \pm 7}{4} = \underline{\underline{\begin{cases} 3 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}}} \quad \text{eller} \quad \underline{\underline{x = -\frac{1}{2} \vee x = 3}}$$

9.154: $\int_0^1 \left(8x^3 + e^x\right) dx$

Dette bestemte integral beregnes ved først at integrere ledvist og efterfølgende indsætte grænserne:

$$\int_0^1 \left(8x^3 + e^x\right) dx = \left[2x^4 + e^x\right]_0^1 = \left(2\cdot 1^4 + e^1\right) - \left(2\cdot 0^4 + e^0\right) = 2 + e - 1 = \underline{\underline{1+e}}$$

9.155: P(2,1) Q(6,27) $f(x) = b\cdot x^a$

For at finde konstanterne a og b i funktionsforskriften indsættes punkternes koordinater i denne, så man får to ligninger med to ubekendte:

$$\left.\begin{matrix} 27 = b\cdot 6^a \\ 1 = b\cdot 2^a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{27}{1} = \frac{b\cdot 6^a}{b\cdot 2^a} \quad \Leftrightarrow \quad 27 = \left(\frac{6}{2}\right)^a \quad \Leftrightarrow \quad 27 = 3^a \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{a = 3}}$$

Denne værdi indsættes i den nederste ligning for at finde b-værdien:

$$1 = b\cdot 2^3 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{b = \frac{1}{8}}}$$

9.156: Da de to trekanter er ensvinklede, er forholdet mellem korresponderende sider ens. Man har derfor:

$$\frac{|AC|}{|A_1C|} = \frac{|AB|}{|A_1B_1|} \quad \Leftrightarrow \quad |AC| = \frac{|AB|}{|A_1B_1|}\cdot|A_1C| = \frac{3}{2}\cdot 4 = \frac{12}{2} = \underline{\underline{6}}$$

9.157: $f(x) = x\cdot\ln(x) - x + 1 \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y + x - 1}{x}$

Det undersøges om *f* er en løsning til differentialligningen ved at indsætte i differentialligningen og se, om man får en identitet (et udsagn sandt for alle x-værdier). For at kunne gøre dette, skal funktionen dog først differentieres (der differentieres ledvist og til første led benyttes produktreglen):

$$f'(x) = 1\cdot\ln(x) + x\cdot\frac{1}{x} - 1 + 0 = \ln(x)$$

Indsættelse i differentialligningen:

$$\ln(x) = \frac{\left(x\cdot\ln(x) - x + 1\right) + x - 1}{x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\ln(x) = \frac{x\cdot\ln(x)}{x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\ln(x) = \ln(x)$$

De to størrelser på hver sin side af lighedstegnet er ens, dvs. ligningen er en identitet, og <u>dermed er f en løsning til differentialligningen.</u>

9.158: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

For at bestemme vinkel og projektion skal man anvende prikprodukt og længderne af vektorerne, så de udregnes først:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = -2 + 3 = 1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

a) Vinklen mellem de to vektorer bestemmes:

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{50}}\right) = \underline{\underline{81{,}869897645844°}}$$

b) Projektionen bestemmes: $\overrightarrow{a_{\vec{b}}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{5}^2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}}}$

9.159: Planen α indeholder punkterne $A(6,0,0)\quad B(0,2,0)\quad C(0,0,3)$

a) For at kunne bestemme en ligning for planen, skal man kende et punkt og en normalvektor. Som punkt kan man anvende et hvilket som helst af de 3 opgivne punkter, så man mangler kun en normalvektor.

For at bestemme en normalvektor finder man først to ikke-parallelle vektorer, der udspænder planen, og finder deres krydsprodukt:

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0-6\\2-0\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\2\\0\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0-6\\0-0\\3-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\cdot 3-0\cdot 0\\0\cdot(-6)-(-6)\cdot 3\\-6\cdot 0-2\cdot(-6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\18\\12\end{pmatrix}$$

Som normalvektor vælges nu er vektor, der har samme retning som krydsproduktet, men som kun er en sjettedel så lang:

$$\overrightarrow{n_\alpha}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}6\\18\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

Punktet A benyttes, og planens ligning bliver så:

$$1\cdot(x-6)+3\cdot(y-0)+2\cdot(z-0)=0\quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x+3y+2z-6=0}}$$

b) Trekant *ABC* har et areal, der er halvt så stort, som det parallelogram, der udspændes af vektorerne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$, så det kan bestemmes ud fra længden af krydsproduktet fra spørgsmål a):

$$T_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{pmatrix}6\\18\\12\end{pmatrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6^2+18^2+12^2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{504}=\underline{\underline{11,2249721603}}$$

c) Planen α er tangentplan til kuglen, hvis afstanden fra planen til kuglens centrum netop er lig kuglens radius. Derfor bestemmes afstanden fra planen til kuglens centrum $D(0,10,5)$:

$$dist(D,\alpha)=\frac{|0+3\cdot 10+2\cdot 5-6|}{\sqrt{1^2+3^2+2^2}}=\frac{|34|}{\sqrt{14}}=9,086882\neq 11=r$$

Dvs. <u>planen α er IKKE tangentplan til kuglen.</u>

9.160: I ΔABC er $\angle A = 54°$; $|AC| = 10,2$; $|BC| = 9,1$ $\angle B < 90°$

a) I ΔABC kender man vinkel A og længden af dens modstående side BC, så sinusrelationerne kan anvendes til at bestemme vinkel B:

$$\frac{\sin B}{|AC|} = \frac{\sin A}{|BC|} \Leftrightarrow \sin B = \frac{\sin A}{|BC|} \cdot |AC|$$

Da B er spids gælder:

$$B = \sin^{-1}\left(\frac{\sin A}{|BC|} \cdot |AC|\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\sin 54°}{9,1} \cdot 10,2\right) = \underline{\underline{65,068208685°}}$$

b) Vinkelsummen i trekant ABC er 180°, så vinkel C kan bestemmes:

$$C = 180° - A - B = 180° - 54° - 65,068208685° = 60,931791315°$$

Så kan længden af AD bestemmes ved en cosinusrelation:

$$|AD|^2 = |AC|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |CD| \cdot \cos C$$

$$|AD| = \sqrt{10,2^2 + 6,0^2 - 2 \cdot 10,2 \cdot 6,0 \cdot \cos(60,931791315°)} = \underline{\underline{8,97618521711}}$$

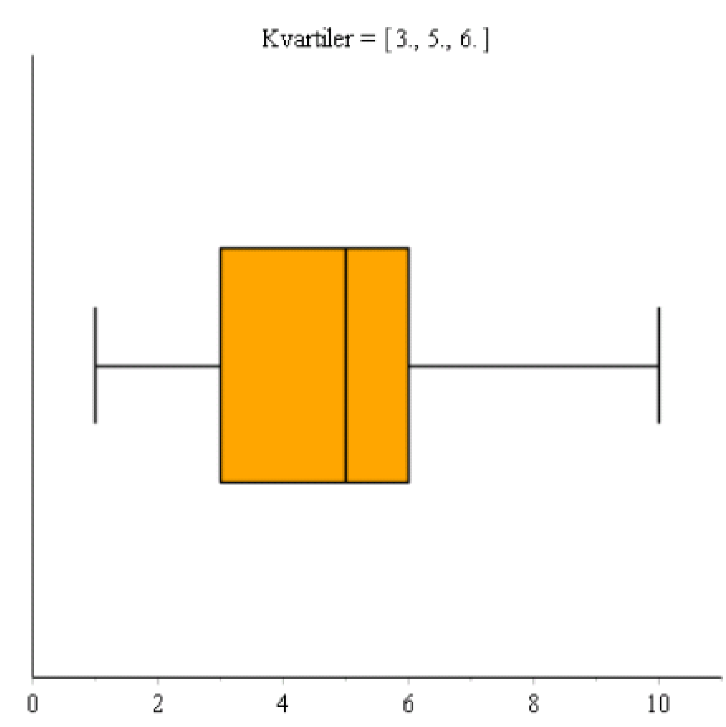
9.161:

with(*Gym*) :

Man kender hyppighederne, så der laves en tabel:

$$klassetrin := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 0 \\ 8 & 2 \\ 9 & 1 \\ 10 & 2 \end{bmatrix} :$$

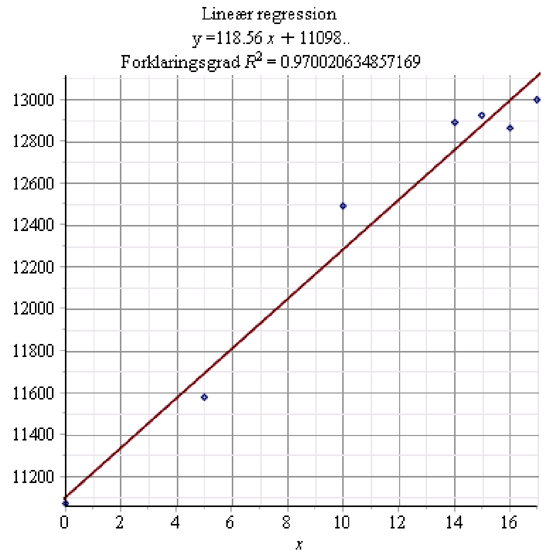
boksplot(*klassetrin*)



Dvs. at kvartilsættet er <u>(3,5,6)</u>

9.162: Opgaven løses i Maple:

a) Det er oplyst, at man skal finde en lineær model, og da man har mere end to målinger, skal der anvendes regression.
Derfor hentes pakken Gym:
$with(Gym)$
Det årlige udslip af CO_2 måles i millioner ton, og årene angives i antal år EFTER 1990. Derfor gemmes listerne:
$år := [0, 5, 10, 14, 15, 16, 17]$
$CO2 := [11073, 11575, 12492, 12887, 12922, 12865, 13000]$
Der laves lineær regression med:
$LinReg(år, CO2)$



Regressionen giver forskriften $\underline{\underline{f(x) = 118,56 \cdot x + 11098}}$.

b) Da udslippet i Kina er vokset med en fast procentdel om året, er der tale om eksponentiel vækst.
Det er oplyst, at begyndelsesværdien er 2244 (da man måler i millioner tons), og da vækstraten er 6,0%, er fremskrivningsfaktoren $a = 1,06$.
Dermed er en forskrift for g:
$\underline{\underline{g(x) = 2244 \cdot 1,06^x}}$

Da antallet af år måles med start i 1990, svarer 2030 til $x = 40$. Forskriften giver så:
$g(40) = 2244 \cdot 1.06^{40}$

$g(40) = 23081.15106$

Dvs. at ifølge modellen vil det årlige CO_2-udslip fra Kina i 2030 være $\underline{\underline{23081 \; mio.\ tons}}$.

c) Først defineres de to funktioner:
$f(x) := LinReg(år, CO2, x)$
$g(x) := 2244 \cdot 1.06^x$
Så kan det afgøres, hvornår udslippet fra Kina overstiger udslippet fra OECD-landede ved:
$solve(\{g(x) > f(x), x > 0\})$

$\{32.55529291 < x\}$

Dvs. at Kinas udledning overstiger OECD-landenes i $\underline{\underline{år\ 2023}}$

9.163: $N(t) = \dfrac{4200}{1+10 \cdot e^{-0,1 \cdot t}}$ N(t) angiver antal individer i en population til tiden t målt i døgn.

Først defineres funktionen:

$$N(t) := \frac{4200}{1 + 10 \cdot e^{-0.1 \cdot t}}:$$

Så kan Maple bestemme differentialkvotienten i 20:

$N'(20) = 102.6328141$

Dvs. at N'(20) = 102,633, og dermed vokser populationen efter 20 døgn med 103 individer pr. døgn.

N'(20) bestemmes på TI n'spire ved:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{4200}{1+10 \cdot e^{-0.1 \cdot t}}\right)\Big|t=20 \qquad 102.633$$

Dvs. at N'(20) = 102,633, og dermed vokser populationen efter 20 døgn med 103 individer pr. døgn.

9.164: $f(x)=x^2-6x+9$

a) Arealet af M beregnes som det bestemte integral med nedre grænse 0 og øvre grænse 3, da det er angivet, at grafen rører førsteaksen dette sted:

$$A_M=\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^3\left(x^2-6x+9\right)dx=\left[\frac{1}{3}\cdot x^3-3x^2+9x\right]_0^3=\left(\frac{1}{3}\cdot 3^3-3\cdot 3^2+9\cdot 3\right)-0=9-27+27=\underline{\underline{9}}$$

b) $P(0,f(0))$ For at bestemme tangentens ligning, skal man kende hældningen og røringspunktet:

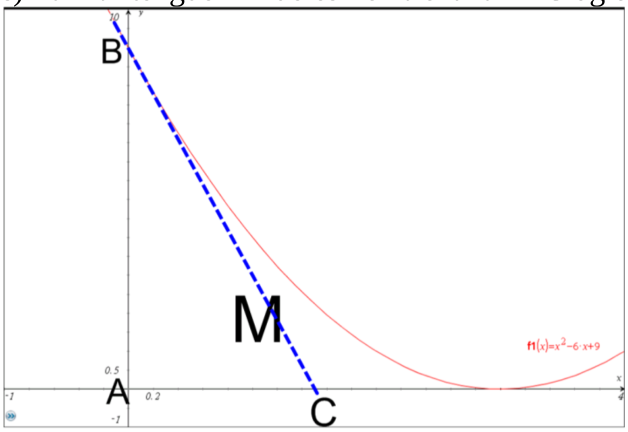
Hældningen bestemmes: $f'(x)=2x-6$

$a_t=f'(0)=2\cdot 0-6=-6$

Røringspunktets andenkoordinat bestemmes: $f(0)=0^2-6\cdot 0+9=9$

Så er tangentens ligning: $y-9=-6\cdot(x-0)\Leftrightarrow \underline{\underline{y=-6x+9}}$

c) Punktmængden M deles i en trekant ABC og en anden figur:



For at kunne bestemme arealet af trekant ABC, skal man kende skæringen med x-aksen (C).

Her er $y=0$, så $0=-6x+9\Leftrightarrow 6x=9\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

Arealet af trekant ABC er så: $T_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot h\cdot g=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot\frac{3}{2}=\underline{\underline{\frac{27}{4}}}$

Arealet af det andet område er så: $A=A_M-T_{ABC}=9-\frac{27}{4}=\frac{36}{4}-\frac{27}{4}=\underline{\underline{\frac{9}{4}}}$

9.165: $\frac{dL}{dt} = k \cdot (100 - L)$; k er en konstant. L er længden af kulleren målt i cm. t er kullerens alder i år.
Løsningskurven skal ifølge opgaveteksten gå gennem punkterne (0;0,4) og (1;11).

1. metode: Den fuldstændige løsning bestemmes på TI n'spire ved indtastningen:

deSolve$(l'=k\cdot(100-l),t,l)$ $\qquad l=c1\cdot e^{-k\cdot t}+100$

Dvs. den fuldstændige løsning er:

$$L(t) = c \cdot e^{-k \cdot t} + 100$$

2. metode: Konstanten ganges ind i parentesen, så differentialligningen kommer på formen $\frac{dy}{dx} = b - a \cdot y$, hvor den fuldstændige løsning er $y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$:

$\frac{dL}{dt} = k \cdot (100 - L) = 100 \cdot k - k \cdot L$ Dvs. at konstanten 100k svarer til b og konstanten k svarer til a.

Den fuldstændige løsning er så:

$$L(t) = \frac{100 \cdot k}{k} + c \cdot e^{-k \cdot t} = 100 + c \cdot e^{-k \cdot t}$$

a) De to punkter anvendes nu til at bestemme værdierne for konstanterne.
Først startpunktet:

$$0,4 = 100 + c \cdot e^{-k \cdot 0} \quad \Leftrightarrow \quad 0,4 - 100 = c \cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad c = \underline{-99,6}$$

Så det andet punkt:

$$11 = 100 - 99,6 \cdot e^{-k \cdot 1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{11 - 100}{-99,6} = e^{-k} \quad \Leftrightarrow \quad k = -\ln\left(\frac{89}{99,6}\right) = \underline{0,1125258}$$

Dvs. at funktionsudtrykket bliver:

$$\underline{\underline{L(t) = 100 - 99,6 \cdot e^{-0,1125258 \cdot t}}}$$

Konstanterne kunne også være bestemt på TI n'spire ved:

solve$(0.4=100+c\cdot e^{-k\cdot 0}$ and $11=100+c\cdot e^{-k\cdot 1},c,k)$ $\qquad c=-99.6$ and $k=0.112525794858$

b) Aldrene for kullerne med længderne 40cm og 60cm bestemmes på TI n'spire ved:

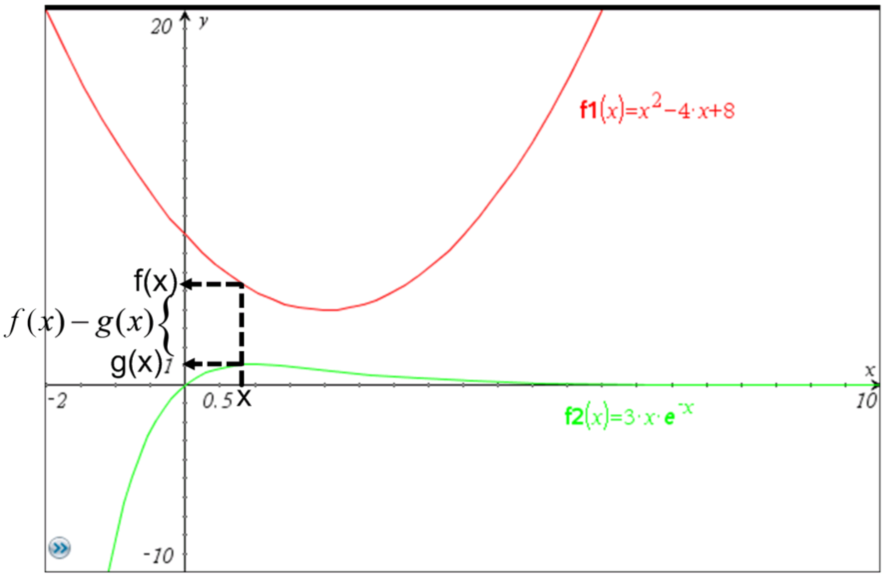
solve$(40=100-99.6\cdot e^{-0.112525794858\cdot t},t)$ $\qquad t=4.50401264002$

solve$(60=100-99.6\cdot e^{-0.112525794858\cdot t},t)$ $\qquad t=8.10732074035$

Dvs. der fanges normalt kullere mellem 4,5 og 8,1 år i Nordsøen.

9.166: $f(x) = x^2 - 4x + 8 \qquad g(x) = 3x \cdot e^{-x}$

a) Graferne indtegnes på n'spire, så man kan se, hvordan de ligger i forhold til hinanden:



Som illustreret på grafen kan den lodrette afstand mellem graferne beregnes ved at trække *g*'s funktionsværdi fra *f*'s. Differensfunktionen betegnes *h*:

$f(x):=x^2-4\cdot x+8$	Udført
$g(x):=3\cdot x\cdot \mathbf{e}^{-x}$	Udført
$h(x):=f(x)-g(x)$	Udført
$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(h(x))=0,x\right)$	$x=1.80156413292$
$\frac{d^2}{dx^2}(h(x))\mid x=1.8015641329216$	2.0982498885

Man finder det sted, hvor den afledede af *h* er nul, og dette sted undersøges fortegnet for den anden afledede. Da den anden afledede er positiv, er det et minimumssted.

Dvs. den lodrette afstand mellem graferne er mindst, når $\underline{\underline{x = 1{,}801564}}$

9.167: Kassens højde kaldes *h*, og da bund og låg er kvadratisk, kaldes længde og bredde *x*.

Alle længder måles i meter.

Da rumfanget er 1m^3 har man: $x \cdot x \cdot h = 1 \Leftrightarrow h = \frac{1}{x^2}$

Kassens overfladeareal er: $A = 4 \cdot A_{side} + A_{bund} + A_{låg}$

Da materialeprisen for låget er 10 kr./m^2 og for sider og bund 8 kr./m^2, får man materialeprisen:

$$p(x) = 8 \cdot 4 \cdot A_{side} + 8 \cdot A_{bund} + 10 \cdot A_{låg} = 32 \cdot h \cdot x + 8 \cdot x \cdot x + 10 \cdot x \cdot x = 32 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot x + 18x^2 = \underline{\underline{\frac{32}{x} + 18x^2}}$$

$f(x):=\left(8-\frac{\pi}{3}\right)\cdot x^2+\frac{10}{x}$	Udført
$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(f(x))=0,x\right)$	$x=0.895921663788$
$\frac{d^2}{dx^2}(f(x))\mid x=0.89592166378836$	41.7168146928

Da den anden afledede er positiv det sted, hvor den første afledede har nulpunkt, er det et minimumssted.