UENDELIGHEDER

No one shall expel us from the paradise that Cantor has created for us.
David Hilbert

x-klasserne

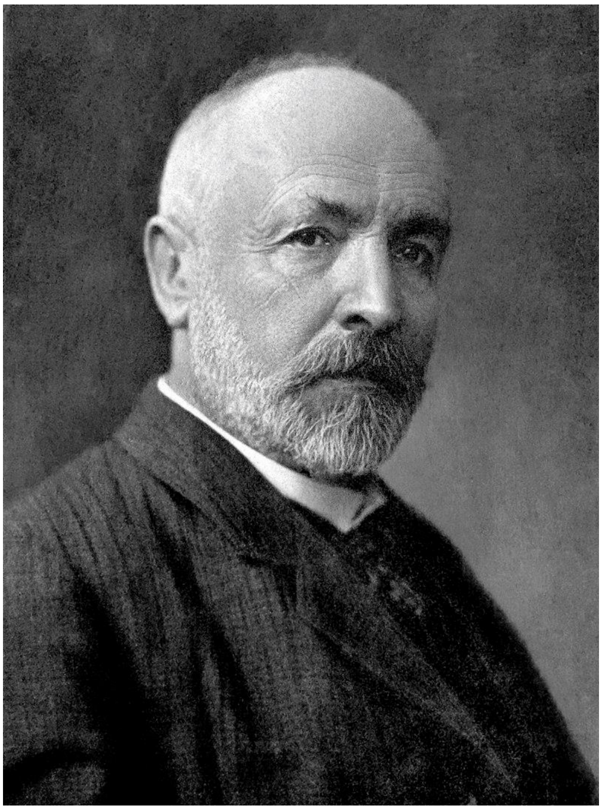
Gammel Hellerup Gymnasium

Januar 2024 ; Michael Szymanski ; mz@ghg.dk

If one person can see it as a paradise for mathematicians, why should not another see it as a joke?
Ludwig Wittgenstein

INDHOLDSFORTEGNELSE

Georg Cantor (1845-1918)



David Hilbert (1862-1943)

UENDELIGHEDSBEGREBET

Vi skal i dette forløb trænge dybere ned i *uendelighedsbegrebet* og her opdage, hvordan matematikken pludselig bliver kontra-intuitiv, dvs. du vil møde resultater, der er i klar modstrid med, hvad du umiddelbart ville forvente.

Vi skal se på, hvordan man inden for matematik angriber forskellige problemstillinger med henblik på at gøre resultaterne klare og modsigelsesfrie (men altså ikke nødvendigvis intuitive).

Ordet "uendelig" anvendes i daglig tale på uendelig mange måder. F.eks. "Der er uendelig mange muligheder for ...", "Der er uendelig mange sandkorn på stranden", "Der er uendelig mange stjerner i Universet", "Man kan i teorien folde et stykke papir uendelig mange gange", "Det tager uendelig lang tid at løse denne opgave" og "En linje består af uendeligt mange punkter" (Det sidste er nok mest daglig tale i en matematiktime).

Nogle af anvendelserne er det rene vrøvl, mens andre kan være helt eller delvist (matematisk set) korrekte anvendelser. Det er der egentlig ikke noget galt i, for sproget skal kunne nogle andre ting end matematikken og er ikke underlagt de samme regler som denne.

1. POTENTIEL OG AKTUEL UENDELIGHED -

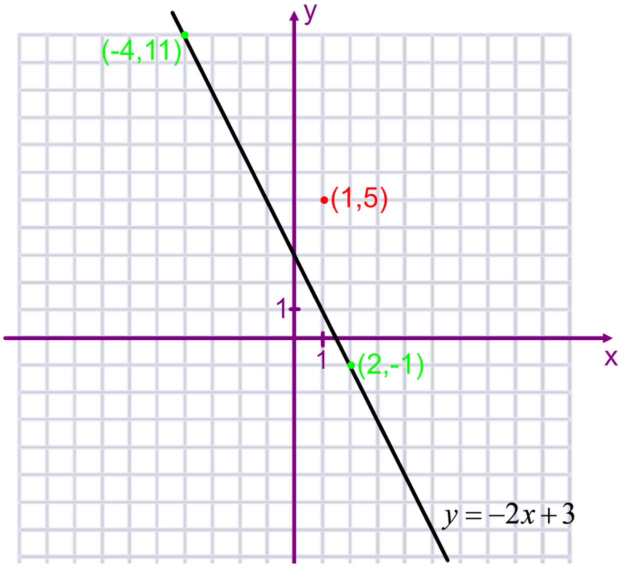
Vi begynder med at betragte en ret linje. Den kan beskrives ved en ligning på formen

$$y = ax + b \quad ; \quad G = \mathbb{R}^2 ,$$

hvor a og b er konstanter, og x og y er variable.

F.eks. kunne en konkret ret linje beskrives ved ligningen $y = -2x + 3$, hvor $a = -2$ og $b = 3$, og linjen er så det geometriske sted for alle de punkter (x, y), der opfylder ligningen.

Punktet $(2,-1)$ er altså en del af linjen, da $-1 = -2 \cdot 2 + 3$ er et SANDT udsagn, mens punktet $(1,5)$ IKKE er en del af linjen, da $5 = -2 \cdot 1 + 3$ er et FALSK udsagn. Punktet $(2,-1)$ er ikke det eneste punkt, der ligger på linjen. Punktet $(-4,11)$ er også en del af linjen, da $11 = -2 \cdot (-4) + 3$ er et SANDT udsagn. Se nedenstående Figur 1 for en illustration af ovenstående.



Figur 1: Den sorte streg er den rette linje angivet ved ligningen $y = -2x + 3$.
De to grønne punkter ligger på linjen, mens det røde punkt ikke ligger på linjen.

Vi siger altså, at en linje består af punkter, og da man frit kan vælge en x-værdi blandt uendeligt mange tal, hvorefter man kan udregne den y-værdi, der gør, at (x, y) opfylder ligningen, **består linjen af uendeligt mange punkter**.

Og nu kommer så første pointe i forbindelse med begrebet 'uendelighed':

Hvordan forestiller du dig de uendeligt mange punkter, som linjen består af?
1) Jeg forestiller mig alle punkterne på én gang.
eller
2) Jeg forestiller mig, at jeg kan blive ved med at pege på nye punkter på linjen.

Tænk grundigt over ovenstående. Afprøv begge muligheder.

1. måde (dvs. "Jeg forestiller mig alle punkterne på én gang") kaldes ***aktuel uendelighed***. Denne 'slags' uendelighed har historisk set ikke været accepteret som mulig.
2. måde ("Jeg forestiller mig, at jeg kan blive ved med at pege på nye punkter på linjen") kaldes ***potentiel uendelighed***, og når man tidligere snakkede om 'uendelig', var det dette, man mente.

Dvs. hvis f.eks. en gammel græker (hermed menes ofte en ikke nødvendigvis gammel græker, men en græker, der levede nogle hundrede år fvt.) hævdede, at der var uendeligt mange primtal - og det gjorde Euklid (ca. 325 – ca. 265 fvt.) - så skal det forstås på den måde, at primtallene ikke kan være et bestemt antal, men at man altid kan finde et primtal mere uanset hvor mange primtal, man har fundet.
Og endnu en gammel græker ville hævde, at en linje ikke "består" af uendeligt mange punkter, men at man kan blive ved med at finde nye punkter på en linje.

Den arketypiske "gamle græker" Aristoteles (384 – 322 fvt.) skriver bl.a. om det uendelige:

Vor fremstilling berøver ikke matematikerne deres lære, fordi den benægter, at det uendelige eksisterer som en virkelighed i den forstand, at der findes noget der kan forøges ubegrænset, så at man ikke kan komme igennem det. De behøver jo heller ikke nu det uendelige eller gør brug af det, men kan nøjes med den begrænsede linje, når blot de kan gøre den så lang som de ønsker. En hvilken som helst størrelse lader sig dele på samme måde som den største størrelse. Men hensyn til deres bevisførelser er sagen uden forskel, men eksistensspørgsmålet må høre hjemme hos de reale størrelser.

Og: *Men det uendelige viser sig på forskellig måde, i tiden og i menneskerækken og i delingen af størrelser. Overhovedet er det uendelige således, at man stadig kan tage det ene led efter det andet, og det led, der gribes, er nok altid begrænset, men der følger stadig et nyt efter i fortsat rækkefølge. Det uendelige kan altså ikke opfattes som dette bestemte givne, som et menneske eller et hus, men som vi taler om dagen og kamplegen, hvis væren ikke udtrykker en substans, men altid består i tilblivelse og ophør, og som ganske vist er begrænset, men stadig kommer igen med et nyt led.*

Og: *For ikke det som der intet er uden for, men det som der altid er noget uden for, det er det uendelige.*

Bemærk, hvordan Aristoteles ovenfor - udover at omtale begrebet *uendelig*'s eksistens - behandler det uendelige som noget "potentielt uendeligt".

Det var ikke kun de gamle grækere, der havde dette forhold til uendelighedsbegrebet. Det har været alment udbredt, og f.eks. mente en af de notorisk allerstørste matematikere gennem tiden, Carl Friedrich Gauss (1777-1855), at uendelighedsbegrebet ikke var andet end en udtryksform, der var nyttig til at udtale sig om grænseværdier, og at aktuel uendelighed slet ikke hører hjemme inden for matematikken.

Vi skal også til at begynde med – og ikke kun for at gøre Gauss tilfreds – benytte uendelighedsbegrebet i forbindelse med grænseværdier. Dette er dog kun som en introduktion. For derefter tager vi fat på den moderne behandling af uendelighedsbegrebet, der blev grundlagt af Georg Cantor i 1874 (med publiceringen af den samme artikel, der også grundlægger mængdelæren).

Man kan så overveje, om ikke denne skelnen mellem *potentiel* og *aktuel* uendelighed egentlig er temmelig ligegyldig, da de to måder i bund og grund kommer ud på det samme. Men sådan er det på ingen måde. I de fleste situationer kan man klare sig med potentiel uendelighed, men nogle matematiske problemstillinger kræver umiddelbart en accept af aktuel uendelighed, og det er disse problemstillinger, der kan føre til vantro, modvilje eller sågar vrede hos nogle mennesker – herunder nogle matematikere.

Så du skal være forberedt: Måske vil du i forbindelse med den matematiske gennemgang af emnet opleve følelser, der normalt ikke forbindes med matematik. David Hilbert (1862-1943), der har lagt navn til den matematiske fortælling "Hilberts Hotel" og regnes som en af de sidste store matematikere, der beskæftigede sig med mange områder inden for matematik, blev i The World of Mathematics fra 1956 citeret for at skulle have sagt, at det uendelige har bevæget menneskets ånd dybere end noget andet spørgsmål (*”The infinite! No other question has ever moved so profoundly the spirit of man.*”).

Georg Cantor fik selv lov at mærke den store modstand mod sit arbejde med uendelighedsbegrebet, og fra 1884 til sin død i 1918 led han i mange perioder af depression og opholdt sig på psykiatriske hospitaler. Det er selvfølgelig ikke muligt at sige, om – og i så fald i hvor høj grad – Cantors psykiske lidelse skyldtes kritikken af hans arbejde, men man ved med sikkerhed fra hans breve, at han blev meget stærkt påvirket af kritikken.

Og den var også usædvanlig hård fra flere matematikere, bl.a. Leopold Kronecker (1823-1891), der beskyldte Cantor for at være en frafalden, en videnskabelig charlatan og en fordærver af ungdommen. Kronecker forhindrede også Cantor i at få en stilling på universitetet i Berlin.

Cantors arbejde blev beskyldt for at høre ind under filosofi eller religion – i hvert fald ikke matematik. Og filosoffen Ludwig Wittgenstein havde også masser af negative ting at sige om Cantors arbejde.

I 1904 holdt Julius König ved den tredje internationale kongres for matematikere en forelæsning, hvor han modbeviste Cantors *kontinuumshypotese* (som vi skal høre mere om senere). Allerede dagen efter havde Ernst Zermelo dog fundet en fejl i Königs modbevis.

Og dette illustrerer nok meget godt situationen. Cantor havde masser af modstandere, men også støtter, og i sidste ende – mange år efter Cantors død – blev hans arbejde (næsten) generelt accepteret. F.eks. brugte Bourbaki-gruppen, der blev grundlagt i 1934, mængdelæren som fundamentet for al matematik.

Vi skal nu se på begrebet *række*, der intet har med ovenstående kontroverser at gøre. Vi får kun brug for potentiel uendelighed, så der er kun udsigt til overraskelser – ikke konflikter.

2. RÆKKER

Definition 1: Lad A være en mængde.

- En *følge* er en opstilling af elementer fra A i rækkefølge, hvor hvert element fra A må optræde vilkårligt mange gange. De enkelte elementer i følgen adskilles af kommaer, og hvis antallet af elementer i følgen er endeligt, kaldes det en *endelig følge*, og antallet af elementer i følgen kaldes følgens *længde*. Hvis antallet af elementer i følgen ikke er endeligt, kaldes det en *uendelig følge*.
- Hvis alle elementerne i følgen er tal, kaldes følgen en *talfølge*.

Bemærk forskellene på følger og mængder. I følger må de enkelte elementer gerne optræde flere gange, og de stilles op i en rækkefølge. En mellemting mellem en følge og en mængde er en *ordnet* mængde, hvor elementerne er stillet op i rækkefølge, og hvor hvert element optræder netop én gang.

Eksempel 1: Lad følgende mængder være givet:

$$A = \{a, b, c, d, e, f\}$$
$$B = \mathbb{N}$$
$$C = \mathbb{Q}$$
$$D = \{\square, \triangle, \bigcirc, \mho, \because\}$$
$$E = \{x, x^2, x^3, x^4, x^5, \ldots\}$$

Ud fra disse mængder kan man **f.eks.** danne følgerne (man kan også danne andre):

$$F_A = (b, a, f, f, c, d)$$
$$F_{B1} = (1,3,5,7,9,11,\ldots) \qquad F_{B2} = (7,12,1,7,6)$$
$$F_C = \left(\frac{5}{17}, -\frac{2}{9}, 0, \frac{5}{17}, \frac{13}{19}, \frac{1}{4}, 42, -1729\right)$$
$$F_D = (\mho, \mho, \triangle)$$
$$F_E = (x, x^2, x^3, x^4, x^5, \ldots)$$

F_A er en endelig følge med længden 6. Bemærk, at elementet f optræder to gange.

F_{B1} er en uendelig talfølge. Det femte element i følgen er 9, og det niende element er 17.

F_{B2} er en endelig talfølge med længden 5.

F_C er en endelig talfølge med længden 8. Det første og det fjerde element er begge $\frac{5}{17}$.

F_D er en endelig følge med længden 3. Det tredje element er $\triangle$.

F_E er en uendelig følge.

Definition 2: Lad F være en følge, hvor det giver mening at addere de enkelte elementer.
En *række* er så summen af alle følgens elementer.
Hvis F er en endelig følge, vil summen være et udtryk, der kaldes en *endelig række*.
Hvis F er en uendelig følge, kaldes den dannede række en *uendelig række*.

Eksempel 2: Med følgerne fra Eksempel 1 har man:

F_A: Her kan ikke dannes en række, medmindre bogstaverne repræsenterer tal, funktioner, … .

F_{B1}: Her får man den uendelige talrække $1+3+5+7+9+11+...$

F_{B2}: Her får man den endelige talrække $7+12+1+7+6$

F_C: Her får man den endelige talrække $\frac{5}{17}-\frac{2}{9}+0+\frac{5}{17}+\frac{13}{19}+\frac{1}{4}+42-1729$

Bemærk, at det i opskrivningen er udnyttet, at $a+(-b)=a-b$.

F_D: Her kan ikke dannes en række, medmindre symbolerne repræsenterer noget, der kan adderes.

F_E: Her får man den uendelige række $x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+...$

En endelig talrække er et udtryk, der altid kan udregnes, og værdien kaldes *rækkesummen*.

F.eks. har $7+12+1+7+6$ rækkesummen 33, og $\frac{5}{17}-\frac{2}{9}+0+\frac{5}{17}+\frac{13}{19}+\frac{1}{4}+42-1729$ har rækkesummen $-\frac{19601317}{11628}$ (Maple er anvendt). For uendelige talrækker er det mere kompliceret. Her er det ikke sikkert, at rækken har en rækkesum. Det vender vi tilbage til. Nu skal vi i første omgang se på en måde at opskrive systematiske rækker.

Eksempel 3: Se på den endelige række:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16$$

Der er 16 led i rækken, så det er ikke et uoverkommeligt arbejde at opskrive den, men netop fordi der er et system i rækken, kunne man også have skrevet den på to andre måder:

$$1+2+3+...+16 \text{ eller } \sum_{i=1}^{16} i$$

I den første af måderne skal man have nok tal med fra start til, at systemet fremgår. Det ville ikke være nok med $1+2+...+16$, da $1+2+4+7+11+16$ er en anden række og $1+2+4+8+16$ en tredje række, der kunne passe med opskrivningen. Mellem de to additionstegn efter tallet 3 skal der være tre prikker.

Egentlig er tre eller fire tal heller ikke nok til at angive et entydigt system. F.eks. er den uendelige række $1+2+3+4+8+12+16+32+48+64+128+192+256+512+...$ en række, hvis første 7 led også passer med det angivne. Og snedige matematikere kan altid finde alle mulige systemer, så egentlig kan man argumentere for, at opskrivningen med prikker slet ikke kan bruges. I praksis fungerer det dog fint, og man kan godt forstå meningen med $1+2+3+...+16$, hvis man ikke bevidst går efter at overkomplicere situationen.

Den anden skrivemåde skal forstås på denne måde: Tegnet Σ er det græske bogstav 'sigma' (i stor udgave). Det er et sumtegn, og det betyder, at man får opskrevet en sum (dvs. flere led med additionstegn imellem). Hvis man havde anvendt produkttegnet Π (et stort 'pi'), ville man have fået et produkt, dvs. flere faktorer med multiplikationstegn ('gangetegn') imellem. Der er ikke noget specielt ved bogstavet *i*, der står både efter og under sumtegnet (det er ikke den imaginære enhed). Man kunne have anvendt et hvilket som helst bogstav eller tegn. Det er bare kutyme at anvende i, j eller *k* i dette tilfælde, ligesom vi oftest anvender *x*, *y* og *z* til variabler og *a*, *b* og *c* til konstanter.

Sumtegnet blev indført af Leonhard Euler (1707-1783) og produkttegnet af C.F. Gauss (1777-1855). Så bliver det ikke større.

Eksempel 4: Nogle flere eksempler på anvendelse af sumtegnet og et med produkttegnet:

$$\sum_{i=1}^{9} i = 1+2+3+4+5+6+7+8+9$$

$$\sum_{i=2}^{7} \frac{3}{i} = \frac{3}{2}+\frac{3}{3}+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\frac{3}{6}+\frac{3}{7}$$

$$\sum_{j=-2}^{\infty} x^j = x^{-2}+x^{-1}+x^0+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+\ldots$$

$$\sum_{k=1}^{5} (5-k) = (5-1)+(5-2)+(5-3)+(5-4)+(5-5) = 4+3+2+1+0$$

$$\prod_{i=3}^{7} 2\cdot i = (2\cdot 3)\cdot(2\cdot 4)\cdot(2\cdot 5)\cdot(2\cdot 6)\cdot(2\cdot 7) = 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14$$

n og *m* skal være hele tal med *m*>*n*

Hvis *m* erstattes af ∞, har man en uendelig række.

$$\sum_{i=n}^{m} a_i$$

Her står et udtryk, hvor *i* indgår

De to symboler skal være ens. Man bruger normalt *i*, *j* eller *k*.

Det **væsentlige** er, at det er det samme bogstav, der står efter og under sumtegnet, fordi det i det første sumtegn skal forstås på den måde, at *i* "løber" mellem 1 og 9, hvilket vil sige, at man i udtrykket *i* inde i sumtegnet skal indsætte alle de hele tal fra 1 til 9 – begge tal inklusive.

I næste sumtegn løber *i* fra 2 til 7, hvilket giver en række med 6 led.

Opgaverne 500*

Øvelse 1: Find en snedig måde at udregne summer af typen $\sum_{i=1}^{100} i$, $\sum_{i=1}^{151} i$ og $\sum_{i=-17}^{247} i$ på.

Vi skal nu beskæftige os med rækker på formen $\sum_{i=0}^{n} a\cdot q^i = a + a\cdot q + a\cdot q^2 + a\cdot q^3 + \ldots + a\cdot q^n$, hvor q og a er konstanter. Til at begynde med tænker vi ikke på, om der skal restriktioner på q og a, så vi siger, at de kan antage et hvilket som helst reelt tal. Senere skal vi så se på, hvor der opstår problemer.

Eksempel 5:

Med $a=3,\ q=2$ og $n=7$: $\quad \sum_{i=0}^{7} 3\cdot 2^i = 3+6+12+24+48+96+192+384$

Med $a=1,\ q=\frac{1}{2}$ og $n=6$: $\quad \sum_{i=0}^{6} 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^i = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$

Med $a=-1,\ q=-2$ og $n=5$: $\quad \sum_{i=0}^{5} -1\cdot(-2)^i = -1+2-4+8-16+32$

Definition 3: Ovenstående kaldes *kvotientrækker*, og q er *kvotienten* (fordi man får q, hvis man tager et led i rækken og dividerer det med det foregående led, og en kvotient er netop resultatet af et divisionsstykke).

Vi skal prøve at udlede et generelt udtryk for rækkesummen af sådan en række. Men først tager vi to konkrete eksempler:

Eksempel 6: Vi ønsker at udregne rækkesummen for rækken $1+2+4+8+16+32$ ($a=1, q=2$ og $n=5$). Det kunne selvfølgelig hurtigt gøres ved bare at lægge de seks tal sammen, men vi ønsker at finde en metode, der også kan bruges, hvis der kommer langt flere led.

Vi betegner rækkesummen med bogstavet s, dvs.:

$$s=1+2+4+8+16+32$$

For at udregne s multiplicerer vi nu med 2 (kvotienten q) på begge sider af lighedstegnet og får så:

$$2\cdot s=2\cdot(1+2+4+8+16+32) \Leftrightarrow 2s=2+4+8+16+32+64$$

Det kan måske virke besynderligt at gøre dette, da man ikke umiddelbart kan se, at man er kommet nogle vegne, men prøv at betragte de to udtryk, vi nu har at arbejde med:

$$s=1+2+4+8+16+32$$
$$2s=2+4+8+16+32+64$$

Det, man skal lægge mærke til, er alle de led, der optræder begge steder, samt de to led, der IKKE optræder begge steder.

Man trækker den øverste venstreside fra den nederste OG den øverste højreside fra den nederste:

$$2s-s=(2+4+8+16+32+64)-(1+2+4+8+16+32) \Leftrightarrow$$
$$s=64-1 \Leftrightarrow$$
$$s=63$$

Opsamling: Tjek, at du har forstået, hvordan man kommer af med alle leddene bortset fra 64 og 1, og overvej, hvorfor det var væsentligt, at vi netop multiplicerede med q-værdien 2 i første omgang.

Eksempel 7: Vi ønsker at udregne rækkesummen $s=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\frac{1}{729}+\frac{1}{2187}$

Vi multiplicerer med kvotienten (her $q=\frac{1}{3}$):

$$\frac{1}{3}\cdot s=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\frac{1}{729}+\frac{1}{2187}+\frac{1}{6561}$$

Ligningerne trækkes fra hinanden:

$$s-\frac{1}{3}\cdot s=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\frac{1}{729}+\frac{1}{2187}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\frac{1}{729}+\frac{1}{2187}+\frac{1}{6561}\right)$$

$$\frac{2}{3}\cdot s=1-\frac{1}{6561} \quad\Leftrightarrow\quad s=\frac{1-\frac{1}{6561}}{\frac{2}{3}}=\frac{\frac{6561}{6561}-\frac{1}{6561}}{\frac{2}{3}}=\frac{6560}{6561}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3280}{2187}$$

Opgaverne 502*

Man kan slippe for at skulle foretage den samme udregning igen og igen, hvis man regner på bogstaver og dermed får en generel sætning:

Sætning 1: For reelle tal q og a, hvor $q \neq 1$, gælder:

$$\sum_{i=0}^{n} a \cdot q^i = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + ... + a \cdot q^n = \frac{a \cdot \left(q^{n+1} - 1\right)}{q-1}$$

Bevis 1: Nu anvendes den samme metode på det generelle udtryk:

$$s = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + ... + a \cdot q^n$$

Man multiplicerer med q på begge sider og får:

$$q \cdot s = a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + a \cdot q^4 + ... + a \cdot q^{n+1}$$

Den øverste ligning trækkes fra den nederste (dvs. venstreside fra venstreside og højreside fra højreside):

$$q \cdot s - s = \left(a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + a \cdot q^4 + ... + a \cdot q^{n+1}\right) - \left(a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + ... + a \cdot q^n\right)$$

Kig godt på indholdet af de to parenteser. Specielt skal du tænke over, hvad de tre prikker dækker over i de to tilfælde. Man kan jo f.eks. ikke se leddet $a \cdot q^n$ i den første parentes, men det ER der. Det er indeholdt i de tre prikker og står egentlig som et "usynligt" næstsidste led i første parentes. Det samme kan siges om leddet $a \cdot q^4$, som man ikke kan se i den anden parentes, men som er indeholdt i de tre prikker. Leddet $a \cdot q^{n-1}$ kan man ikke se i nogen af parenteserne, men det er der og står som et "usynligt" led i begge parenteser lige før $a \cdot q^n$.

Opsamling: Find de to led, der optræder i netop én af parenteserne.

På venstresiden faktoriseres (dvs. "s sættes ud foran en parentes"), og på højresiden trækkes de to parenteser fra hinanden:

$$s \cdot (q-1) = a \cdot q^{n+1} - a \Leftrightarrow s \cdot (q-1) = a \cdot \left(q^{n+1} - 1\right) \Leftrightarrow s = \frac{a \cdot \left(q^{n+1} - 1\right)}{(q-1)}$$

Opgaverne 504*

Øvelse 2: I sidste skridt ovenfor har man divideret med $(q-1)$. For hvilken q-værdi er det ikke tilladt? Hvorfor virker vores metode til udregning af summen ikke for netop denne q-værdi? Hvilket udtryk angiver summen, når man arbejder med denne q-værdi?

Øvelse 3: Er der andre q-værdier eller a-værdier, der giver problemer? Hvad med $a = 0$ eller $q = 0$? Eller $q < 0$? Eller $a < 0$? Overvej, om der ville være problemer i udledningen, dvs. om udtrykket gælder.

Vi retter nu fokus på uendelige rækker med udgangspunkt i kvotientrækker:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a \cdot q^i = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \ldots$$

Bemærk forskellen fra tidligere. Der følger ikke noget efter de tre prikker, og vi har taget uendelighedssymbolet ∞ i brug. Bemærk, at symbolet ∞ ikke dækker over et bestemt tal, og man kan ikke regne med det, som man normalt kan med bogstaver.

Uendelighedssymbolet ∞ blev indført i 1655 af John Wallis (1616-1703)

Og nu begynder så det fascinerende arbejde med uendelighed, hvor tungen skal holdes lige i munden:

For lad os prøve at se, om vi kan bestemme summen af ovenstående uendelige række. Men hov! Kan vi være sikre på, at en sådan sum eksisterer? Det er oplagt, at en endelig række altid har en rækkesum, men kan man snakke om en sum i et tilfælde, hvor der er uendeligt mange led?

For at få svar på disse spørgsmål, **ANTAGER** vi nu, at en sådan sum eksisterer (dvs. vi tillader os at skrive "$s = \ldots$"), og vi forsøger med samme metode som før at gange igennem med q:

$$s = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \ldots$$
$$q \cdot s = a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + a \cdot q^4 + \ldots$$

Der er uendeligt mange led på begge højresider i ligningerne, og alle leddene bortset fra a findes i begge rækker. F.eks. står leddet $a \cdot q^{3284}$ på plads nummer 3285 i øverste række og plads nummer 3284 i nederste række. Hvis vi trækker den nederste ligning fra den øverste, får vi altså:

$$s - q \cdot s = \left(a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \ldots\right) - \left(a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + a \cdot q^4 + \ldots\right) \Leftrightarrow$$
$$s \cdot (1 - q) = a \Leftrightarrow$$
$$s = \frac{a}{1-q}$$

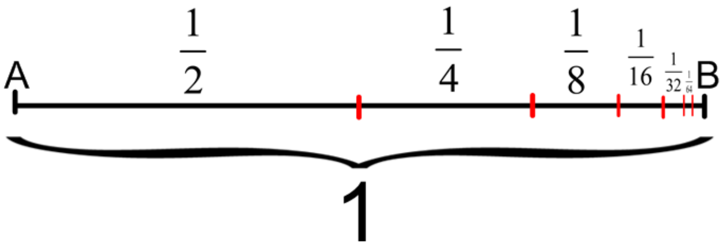
Det er altså nu - **tilsyneladende** - lykkedes for os at finde et udtryk for summen af denne række. Lad os prøve at se på, hvordan det fungerer i nogle konkrete tilfælde:

Eksempel 8: Rækken $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots$

Her er $q = \frac{1}{2}$ og $a = \frac{1}{2}$ (overvej selv, om dette passer).

Ifølge vores fundne udtryk skulle summen af rækken altså være: $s = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$

Vi kan tjekke, om dette resultat giver mening, ved at se på et linjestykke AB med længden 1, hvor vi skal bevæge os fra A til B og for hvert skridt bevæger os halvdelen af det manglende stykke:



Øvelse 4: Anvend formlen på rækken $1+2+4+8+16+32+64+...$ (bestem først q og a), og se om resultatet giver mening.

Øvelse 5: Hvad gik galt i ovenstående øvelse? Hvorfor virker formlen ikke?

Øvelserne har vist, at vi IKKE kunne tillade os at gå ud fra, at en uendelig række har en rækkesum. Det virkede i det ene tilfælde, men ikke i det andet. Man skal altså være varsom med, hvad man foretager sig, når der kommer uendelighed ind i billedet.

Men lad os prøve at se på løsningen af problemet, som Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) og Karl Weierstrass (1815-1897) i forlængelse af hinanden har æren for. De løste problemet på den eneste alment accepterede måde på sin tid, nemlig ved formuleringer baseret på *potentiel* uendelighed. Pointen er, at vi ikke skal betragte den uendelige række i sin helhed (det ville have krævet aktuel uendelighed, og det var problemet, da vi prøvede at trække to uendelige "haler" fra hinanden). Vi skal derimod se på nogle **endelige** rækker, hvor vi dermed **ved**, at rækkesummerne eksisterer.

Vores udgangspunkt er den **uendelige række**

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + ...$$

Vi ser nu på den såkaldte ***afsnitsfølge***, der er en uendelige følge:

$$s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, ...$$

hvor elementerne s_i er rækkesummerne af nedenstående **endelige rækker**:

$$\begin{aligned}
s_0 &= a_0 \\
s_1 &= a_0 + a_1 \\
s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\
s_3 &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\
s_4 &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\
s_5 &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\
s_6 &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \\
s_7 &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Elementerne i *afsnitsfølgerne* for generelle kvotientrækker og vores to konkrete eksempler er:

Kvotientrækker

$$\begin{aligned}
s_0 &= a \\
s_1 &= a + a\cdot q \\
s_2 &= a + a\cdot q + a\cdot q^2 \\
s_3 &= a + a\cdot q + a\cdot q^2 + a\cdot q^3 \\
s_4 &= a + a\cdot q + a\cdot q^2 + a\cdot q^3 + a\cdot q^4 \\
s_5 &= a + a\cdot q + a\cdot q^2 + a\cdot q^3 + a\cdot q^4 + a\cdot q^5 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Eksempel 8

$$\begin{aligned}
s_0 &= \frac{1}{2} \\
s_1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\
s_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \\
s_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \\
s_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32} \\
s_5 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Øvelse 4

$$\begin{aligned}
s_0 &= 1 \\
s_1 &= 1 + 2 = 3 \\
s_2 &= 1 + 2 + 4 = 7 \\
s_3 &= 1 + 2 + 4 + 8 = 15 \\
s_4 &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31 \\
s_5 &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Problemet er altså flyttet fra en uendelig række til en uendelig følge (afsnitsfølgen), og det gør hele forskellen. Vi kan nu sige:

Definition 4: Lad $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + ...$ være en uendelig række, og lad $s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, ...$ være den tilsvarende afsnitsfølge.
Man siger nu, at rækken har en rækkesum, hvis der findes et tal *s* således, at $s_n \to s$ for $n \to \infty$ (udtales "sn går mod s for n gående mod uendelig"). Man siger så, at rækken *konvergerer*, og man kalder den pågældende faste værdi for *grænseværdien* for afsnitsfølgen ved grænseovergangen *n* gående mod uendelig. Denne grænseværdi for afsnitsfølgen er så rækkesummen for rækken.
Hvis der ikke findes et sådant tal, har afsnitsfølgen ikke en grænseværdi (og rækken dermed heller ikke en rækkesum), og rækken kaldes *divergent*.

For at forstå denne definition kræves det, at man forstår notationen med pilene. Tankegangen har vi set i forbindelse med asymptoter for hyperbler, og det er en tankegang, der er helt central for infinitesimalregning, så du kommer til at se masser af pile senere. Vi ser altså på:

$$s_n \to s \text{ for } n \to \infty$$

Først tager vi den korrekte formulering, og så kigger vi på de to konkrete uendelige kvotientrækker, som vi har arbejdet med. Traditionelt anvender man det græske bogstav ε (epsilon) i formuleringen. Man skriver og siger så:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \; \exists M \in \mathbb{N} : \; n > M \Rightarrow |s_n - s| < \varepsilon$$

Således at
Tilhører
Eksistenskvantor
"Der eksisterer" /
"Eksisterer der"
Implikation /
Medfører
Alkvantor
"For alle"
Positive
reelle tal
Numerisktegn
"Afstanden mellem"

"*For ethvert positivt, reelt tal epsilon eksisterer der et naturligt tal M således, at når n er større end M, så er afstanden mellem s_n og s mindre end epsilon*".

Bemærk, at det er **afsnitsfølgen**, der "går mod" eller "ikke går mod" noget. Det er **ikke** rækken. Det er meningsløst at snakke om, at rækker skulle kunne gå mod noget (overvej hvorfor!). Vi kalder rækken for konvergent eller divergent, men det er egentlig bare ord, der er overført fra den tilsvarende afsnitsfølge, for uendelige følger er netop konvergente eller divergente afhængig af, om de "går mod" eller "ikke går mod" noget.

Grunden til, at Cauchys idé (og Weierstrass' videreudvikling) er løsningen på problemstillingen, er, at man undgår tvivlstilfælde og modsigelser, som vi ellers oplevede i forbindelse med de to uendelige kvotientrækker.

Bemærk, at løsningen på problemet er, at vi gik over til at arbejde med **endelige** rækker og anvende **potentiel** uendelighed. Epsilon-metoden anvender potentiel uendelighed, fordi vi for ethvert konkret epsilon får et – godt nok vilkårligt stort, men stadig konkret – *M*.

Lad os se på metoden brugt på vores to konkrete uendelige kvotientrækker. Først ses på:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+...$$

Som vi tidligere så, fik vi afsnitsfølgen $s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, ...$ til at være

$$\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{15}{16},\frac{31}{32},\frac{63}{64},\frac{127}{128},\frac{255}{256},\frac{511}{512},...$$

De enkelte elementer i følgen kan beregnes ved vores formel for **endelige** rækker: $s_n = \frac{a\cdot\left(q^{n+1}-1\right)}{q-1}$

.

Da $q=\frac{1}{2}$ og $a=\frac{1}{2}$, er $s_n = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right)}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right)}{-\frac{1}{2}} = -\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right) = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Vi ønsker nu at vise, at rækken er konvergent, og vi er kommet frem til, at vores faste værdi, tallet *s*, skal være 1. Vi er kommet frem til dette ud fra vores udregninger i Eksempel 8, og vi skal i denne omgang ikke beskæftige os med, hvordan man i andre situationer ville kunne komme frem til et sådant tal.

Afstanden mellem s_n og *s* er nu $\left|s_n - s\right| = \left|1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right| = \left|-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Det negative fortegn forsvinder pga. numerisktegnene.

Og læg nu mærke til det følgende, der er selve pointen med grænseværdier:

Vores fjende, der ikke ønsker, at vi skal kunne vise, at rækken er konvergent, kommer nu med det positive reelle tal $\varepsilon = 0,001$ og siger "Ha, så tæt kan du aldrig komme på 1!". Du tager det imidlertid helt roligt og løser på uligheden: $0,001 > \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \Leftrightarrow n > 8,97$ (udregningen er foretaget med '*solve*').

Du siger så til fjenden: "Jeg vælger $M = 8$", og fjenden - der er hurtig i opfattelsen - synker straks i knæ og erkender sit nederlag. Fordi det er jo sådan, at når $n > M$, dvs. $n = 9, 10, 11, 12, ...$, så er afstanden mellem 1 og s_n mindre end 0,001.

Næppe er denne fjende dog slået, før en mægtigere dukker op. Hun slynger $\varepsilon = 0,000000001$ i hovedet på dig. Endnu engang er du dog rolig og løser denne gang blot uligheden:

$0,000000001 > \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \Leftrightarrow n > 28,90$, hvorefter du besvarer fjendens angreb med $M = 28$.

Øvelse 6: Sæt jer sammen to og to. Den ene skal optræde som fjende, mens den anden skal sætte det afgørende forsvar ind.

Men nu tropper den mægtigste af alle fjender frem. Han tager sit ε og gemmer det på ryggen, så du ikke kan se værdien. Du ved altså nu, at der er et tal ε, men du ved ikke, hvad tallet er. Din eneste chance for at komme med et forsvar er nu, at dit *M* skal udtrykkes helt generelt ud fra ε.

Dette lyder muligvis mærkeligt, men pointen er bare, at du skal arbejde med ε i stedet for konkrete tal, ligesom du ofte arbejder med andre bogstaver i stedet for tal. Så nu bliver uligheden:

$$\varepsilon > \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \Leftrightarrow n > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} - 1$$

Løsningen indeholder den naturlige logaritmefunktion $\ln$. Vi tjekker med Maple, at udtrykket passer for vores to tidligere værdier: $\varepsilon = 0,001$ og $\varepsilon = 0,000000001$:

$$\frac{\ln(0.001)}{\ln(0.5)} - 1 = 8.965784284$$

$$\frac{\ln(0.000000001)}{\ln(0.5)} - 1 = 28.89735286$$

Vi kan se, at udtrykket passer for disse to værdier.

Det væsentlige er dog ikke selve resultatet, men det **at der overhovedet er et resultat**. Ovenstående udtryk viser altså, at uanset hvilket tal ε, som fjenden måtte trække frem, så kan du sætte *M* til at være det største naturlige tal mindre end udtrykket $\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} - 1$ og hermed forsvare dig.

Øvelse 7: Hvad hvis du i ovenstående tilfælde havde valgt 3 som den faste værdi i stedet for 1? Kan du så finde et ε, som du ikke kunne forsvare dig mod? Og hvad hvis du havde valgt tallet 1,000000000001. Hvilke ε ville du så stå forsvarsløs over for? Eller hvad med tallet 0,999999?

Øvelse 8: Hvad hvis du havde valgt tallet 0,75? Der gælder jo, at $s_1 = 0,75$, så i dette tilfælde er der jo slet ingen afstand, når $n = 1$. Hvorfor er 0,75 så ikke grænseværdien?

Øvelse 9: Rækken $1+2+4+8+16+32+64+...$ har afsnitsfølgen $1,3,7,15,31,63,127,...$ Hvorfor er rækken divergent, dvs. hvorfor kan man ikke finde en grænseværdi?

For endelige rækker havde vi sætningen:

Sætning 1: For reelle tal *q* og *a*, hvor $q \neq 1$, gælder:

$$\sum_{i=0}^{n} a \cdot q^i = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + ... + a \cdot q^n = \frac{a \cdot \left(q^{n+1} - 1\right)}{q - 1}$$

For uendelige rækker gælder sætningen:

Sætning 2:

Når $-1 < q < 1$ er rækken $\sum_{i=0}^{\infty} a \cdot q^i = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + ...$ konvergent med rækkesummen $\frac{a}{1-q}$

Øvelse 10: Hvordan er Sætning 2 fremkommet ud fra Sætning 1?

3. TÆLLELIGHED

Euklids 5. aksiom lyder: *Det hele er større end en del af det.*

Øvelse 11: Kig på Euklids 5. aksiom. Er det så indlysende, at det kan accepteres af alle?

Det oplagte svar på Øvelse 11 er "JA!". Men se nu her...

Vi kigger på mængden af de naturlige tal $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,...\}$

Og så kigger vi på mængden af kvadrattal $K = \{1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,121,144,169,...\}$

Det er oplagt, at mængden af kvadrattal er en ægte delmængde af de naturlige tal, da alle kvadrattallene er naturlige tal, og da der er naturlige tal, der ikke er kvadrattal (f.eks. 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10 og 11). Vi skriver altså $K \subset \mathbb{N}$.

Ifølge Euklids 5. aksiom skulle mængden af naturlige tal derfor være større end mængden af kvadrattal, dvs. der skulle være flere elementer i $\mathbb{N}$ end i K. Galileo Galilei (1564-1642) hævdede imidlertid, at der er lige så mange kvadrattal som naturlige tal. Hvordan skal det forstås?

Hvis vi har to endelige mængder, kan vi bare tælle antallet af elementer i de to mængder og sammenligne antallene. Men det kan vi ikke gøre med uendelige mængder. Så vi har brug for en driftssikker metode, der gør det meningsfuldt at sammenligne størrelsen af uendelige mængder. Cantor indførte følgende metode:

Metode til sammenligning af antal elementer i to mængder

Hvis der findes en *enentydig* afbildning (kaldet en *bijektion*) af den ene mængde på den anden, har de to mængder lige mange elementer. Man siger, at de har samme *kardinaltal*.

En enentydig afbildning er en sammenparring af elementerne i de to mængder, dvs. de optræder som par, og der er ingen elementer i nogen af mængderne, der mangler en partner.

Denne metode gælder for både endelige og uendelige mængder. Kardinaltallet for de endelige mængder er simpelthen antallet af elementer i mængden, mens Cantor tildelte de naturlige tal kardinaltallet $\aleph_0$ (udtales "aleph nul" eller "alef nul"). Alef er det første bogstav i en række forskellige alfabeter, bl.a. det hebraiske. Nullet henviser til, at de naturlige tal har det mindste kardinaltal blandt de uendelige mængder. Der er også mængder med kardinaltal $\aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, ...$.

Lad os se på nogle eksempler, hvor metoden anvendes. Vi begynder med det uafsluttede problem med de naturlige tal, $\mathbb{N}$, og kvadrattallene, *K*. Det blev hævdet, at de to mængder er lige store, dvs. med vores nye notation: $\mathbb{N}$ og K har samme kardinaltal.

Vi viser dette ved at finde en enentydig afbildning *f* mellem de to mængder. Vi lader *f* være givet ved *funktionsforskriften* $f(n) = n^2$. Afbildningen kan illustreres således:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
\mathbb{N} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & \dots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
K & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & 64 & 81 & 100 & 121 & 144 & 169 & 196 & \dots
\end{array}$$

Det skal bemærkes, at en afbildning normalt illustreres med en pil, der kun peger i én retning, men netop for at illustrere parringen af elementer, vælger man dobbeltpile ved enentydige afbildninger. Hermed er vist, at mængden af naturlige tal og mængden af kvadrattal har samme kardinaltal ($\aleph_0$).

Opgaverne 506*

Definition 5: En mængde med samme kardinaltal som de naturlige tal, dvs. en mængde med kardinaltallet $\aleph_0$, siges at være *tællelig* eller *numerabel*. Man angiver, at to mængder X og Y har samme kardinaltal ved $|X| = |Y|$. Så en mængde X er tællelig, hvis $|X| = |\mathbb{N}|$.

Dvs. de lodrette streger bruges til at angive størrelserne af mængderne, hvilket for endelige mængder vil sige antallet af elementer i mængden. F.eks.

$$
\begin{aligned}
|\{a,t,k,s\}| &= 4 \\
|\varnothing| &= 0 \\
|\{1,2,3\}| &= 3 \\
|\{1,2,3\}| &= |\{7,43,1823\}| \ . \\
|\{61,892\}| &< |\{2,3,4,5\}| \\
|\mathbb{N}| &= |K| \\
|\mathbb{N}| &= \aleph_0
\end{aligned}
$$

I nedenstående øvelser kan du enten angive en forskrift for funktionen eller angive den med et system af pile, der viser den enentydige parring (eller begge dele).

Øvelse 12: Vis ved at finde en passende enentydig funktion, at mængden $\{1,10,100,1000,10000,\ ...\}$ er tællelig (dvs. at den har samme kardinaltal $\aleph_0$ som de naturlige tal).

Øvelse 13: Vis, at mængden af hele tal $\mathbb{Z} = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ er tællelig.

Øvelse 14: Vis, at mængden af lige tal $\{...,-6,-4,-2,0,2,4,6,...\}$ er tællelig.

Øvelse 15: Vis, at mængden $\{7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,...\}$ er tællelig.

Indtil videre er vi kun stødt på uendelige mængder, der har samme kardinaltal som de naturlige tal. Lad os nu prøve at se, om vi ikke kan finde nogle større mængder.

Vi ser på mængden af rationale tal, $\mathbb{Q}$, dvs. mængden af alle tal, der kan skrives som en uforkortelig brøk med hele tal i tæller og nævner.

Argumentér for, at der mellem …

Øvelse 16: … tallene 0 og 1 findes uendeligt mange rationale tal.

Øvelse 17: … to vilkårlige naturlige tal findes uendeligt mange rationale tal.

Øvelse 18: … to vilkårligt valgte naturlige tal IKKE findes uendeligt mange naturlige tal.

Øvelse 19: … to vilkårligt valgte rationale tal findes uendeligt mange rationale tal.

Øvelserne 16-19 kunne give en fornemmelse af, at der er flere rationale tal end naturlige tal. Men det er faktisk ikke tilfældet. Vi vil nu vise, at der er lige mange naturlige og rationale tal.

Vi ønsker altså at finde en enentydig afbildning fra de naturlige tal til de rationale tal. Dette gøres ved at opstille de rationale tal på en række, så man kan tælle dem:

$$0,1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1,-2,-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3},2,3,\frac{3}{2},\frac{3}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{3}{4},-\frac{3}{2},-3,-4,-\frac{4}{3},-\frac{4}{5},-\frac{3}{5},-\frac{2}{5},-\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\ldots$$

Afbildningen knytter så 1 til det første tal, 2 til det næste tal, 3 til det tredje tal, osv.:

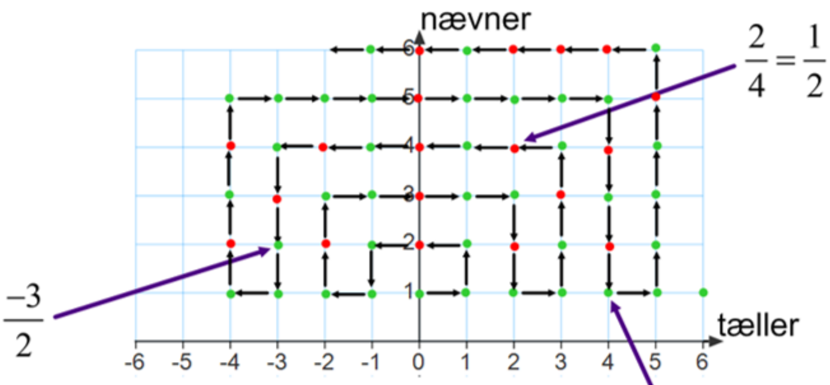
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**...**
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	2	...

Men, men, men ... har vi virkelig bevist noget her?

Øvelse 20: Hvorfor er dette ikke et gyldigt bevis? Hvad mangler man?
Øvelse 21: Kan du finde en anden opskrivning af de rationale tal, så man kan tælle dem?

Problemet med ovenstående bevis er, at vi ikke har argumenteret for, at vores opskrivning af de rationale tal virkelig er en opskrivning, hvor vi får alle de rationale tal med (og kun får hvert tal med én gang). Der mangler et klart system.

Argumentet er Figur 2:



Figur 2: De rationelle tal er placeret i et koordinatsystem, hvor tælleren er angivet på førsteaksen og nævneren på andenaksen. Pilene angiver en systematisk måde at få talt alle de rationelle tal. Man begynder i punktet (0,1) svarende til tallet 0 og går derfra til punktet (1,1) svarende til tallet 1. Herfra til punktet (1,2) svarende til tallet $\frac{1}{2}$. Man fortsætter til punktet (0,2), men dette punkt svarer også til tallet 0, og da det allerede er taget med, springes det over. De grønne prikker angiver altså de rationelle tal, der skrives op, mens de røde prikker angiver tal, der springes over, fordi de allerede er med.

Vigtigt: Tænk grundigt over argumentationen. Du skal forstå, hvorfor det er væsentligt, at man med pilene angiver en systematisk måde at få alle de rationale tal med. Men du skal også lægge mærke til, at det ikke nødvendigvis skulle være den angivne systematik. Der kan findes andre systematiske måder. Men husk: **Metoden SKAL være systematisk, for ellers kan man ikke lave en enentydig afbildning.**

Øvelse 22: Vis, at der er lige mange naturlige tal og talpar (x, y), hvor x og y er hele tal.

4. HILBERTS HOTEL

Man kommer ikke uden om Hilberts Hotel, når man gennemgår uendeligheder.

Hilberts Hotel er et temmelig specielt hotel, opfundet af den tidligere omtalte matematiker David Hilbert med henblik på at forklare nogle af de overraskende resultater, vi kom frem til i forrige kapitel. Så **en del af det følgende er sådan set bare en anden måde at illustrere, hvordan flere forskellige mængder er tællelige**.

Vi ser på en lidt udvidet udgave af Hilberts Hotel: I vores tilfælde består Hilberts Hotel af en reception med plads til uendeligt mange mennesker, uendeligt mange enkeltmandsværelser nummereret med tallene 1, 2, 3, 4, ... , en kostskole med uendeligt mange drenge og piger bestyret af Børge Jessen samt en balsal med to uendeligt lange stolerækker langs væggene, hvor dansemester Georg Cantor huserer. I første omgang ser vi kun på receptionen og hotelværelserne. Kostskolen og balsalen ser vi på i kapitel 6.

Hilberts Hotel er helt fyldt op. Samtlige værelser er optaget. David Hilbert står selv i receptionen, da en rejsende en sen aften træder ind og spørger efter et værelse for natten. Værelserne er som sagt enkeltmandsværelser, og politikken på dette område er meget streng, så det er udelukket, at der kan bo flere på ét værelse.

Hilbert er dog helt rolig. Selvfølgelig er der plads til den rejsende. Hilbert trykker på en knap på sit bord og sender en meddelelse til samtlige logerende, at de skal flytte ind på værelset ved siden af med nummeret en højere end deres nuværende værelse. De logerende er efterhånden vant til proceduren og flytter straks. Hermed bliver der plads til den rejsende i værelse 1.

Øvelse 23: Arbejdes der med potentiel eller aktuel uendelighed?

Øvelse 24: Hvilke to talmængder har man sammenlignet i fortællingen? Dvs. hvilke to talmængder har man argumenteret for har samme kardinaltal?

Øvelse 25: Endnu senere samme aften dukker 6 rejsende op og vil have et værelse. Hvad skal Hilbert nu gøre? Sammenlign med Øvelse 15.

Øvelse 26: Næppe har de 6 rejsende fundet sig til rette, før der dukker et selskab med uendelig mange personer op og ønsker et værelse. Hilbert kigger lige op og noterer sig, at han kan nummerere de nye gæster med tallene 1, 2, 3, 4, 5, ... Han trykker så på knappen på sit bord, og ... Hvad beder han gæsterne om, og hvor er der nu plads til de rejsende?

Øvelse 27: Nu dukker der 4 selskaber op, hvor hvert selskab har samme størrelse som selskabet i Øvelse 26. Hvad skal Hilbert gøre for at få plads til alle?

Hilbert skal lige til at låse døren for natten, da det banker på igen. Han ser ud af kighullet i døren og opdager, at der udenfor står uendelig mange selskaber af samme størrelse som dem i øvelserne 26 og 27. Han tjekker lige, at han kan nummerere selskaberne med tallene 1, 2, 3, 4, ... (så han kan kalde den 17. person i det 31. selskab for 31_{17} og den 4128. person i det 968432. selskab for 968432_{4128}) og åbner så døren.

Øvelse 28: Spørgsmålet er nu, hvordan Hilbert skal få plads til alle gæsterne. Der er uendeligt mange muligheder. Prøv at finde en eller flere. Det kan både være en metode, hvor alle værelserne er fyldt op efterfølgende, eller en hvor der er (evt. uendeligt mange) frie værelser.

Lad os se på et par løsninger til Øvelse 28.

Den første løsning efterlader uendeligt mange frie værelser. Den er baseret på, at der findes uendeligt mange primtal, samt Aritmetikkens Fundamentalsætning (eksistens og entydighed af primtalsopløsning): Hilbert beder gæsterne på værelserne om at flytte til værelset med nummeret 2^n, hvor n er deres nuværende værelsesnummer. Dvs. gæsten i værelse 1 flytter til værelse $2^1 = 2$, mens gæsten i værelse 7 flytter til værelse $2^7 = 128$.

Derefter tager Hilbert det næste primtal, 3, og beder gæsterne i det første selskab om at gå til værelserne 3^n således, at den fjerde person i det første selskab indlogerer sig på værelse $3^4 = 81$, mens den 17. person i det første selskab får værelse $3^{17} = 129140163$.

Næste primtal er 5, så den tredje gæst i det andet selskab får værelse $5^3 = 125$.

Og sådan fortsættes med primtallene, så gæsterne i det 145. selskab anvender det 146. i rækken af primtal (som er 839) og flytter til værelserne 839^n, hvor n er deres nummer i selskabet.

Værelse 1 samt alle værelser med et nummer, hvis primfaktoropløsning indeholder mindst 2 forskellige primtal, efterlades hermed frie, og der er ingen værelser med mere end én gæst, da primfaktoropløsninger er entydige, dvs. man kan ikke få det samme tal som produkt af forskellige primtal.

Opsamling: Tjek, at du har forstået, hvorfor alle gæster får deres eget værelse, samt hvorfor der er uendelig mange frie værelser.

En anden løsning, der ikke efterlader frie værelser (og Hilbert ser helst et fyldt hotel) er følgende:

Alle gæsterne i værelserne flytter til de ulige tal, dvs. gæsten i værelse n flytter til værelse $2n-1$. Altså gæst i værelse 1 bliver, gæst i værelse 2 flytter til værelse 3, gæst i værelse 3 flytter til værelse 5, osv.

Hermed er værelser med lige tal frie. Dermed kan man dividere deres nummer med 2 og stadig have et naturligt tal. Men efter divisionen vil nogle tal være ulige, mens andre vil være lige. Og gæsterne i det første selskab flytter ind i de værelser, hvis nummer efter division med 2 bliver et ulige tal. Det er tallene 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46, 50, ... Man kan også mere matematisk sige, at det er alle tallene, der kan skrives som $2 \cdot m$, hvor m er et ulige tal.

Af de resterende tal får gæsterne i det andet selskab de værelser, hvis nummer efter division med 4 giver et ulige tal, dvs. 4, 12, 20, 28, 36, 44, 52, ... , eller tallene $2^2 \cdot m$, hvor m er et ulige tal.

I det tredje selskab får gæsterne de værelser, der efter division med 8 giver et ulige tal, dvs. 8, 24, 40, 56, ... , eller tallene $2^3 \cdot m$, hvor m er et ulige tal.

I det n'te selskab er det tallene $2^n \cdot m$, hvor m er et ulige tal, der benyttes.

Øvelse 29: Argumentér for, at ingen værelser er tomme, samt at alle gæster har fået et værelse.

Måske var det overraskende for dig, at der blev plads til alle gæsterne i Øvelse 28, men faktisk viste du i Øvelse 22 et endnu mere utroligt resultat, for det uendelige antal selskaber med uendeligt mange gæster udgør jo kun talparrene i første kvadrant.

5. FLERE UENDELIGHEDER

Vi har nu beskæftiget os med de naturlige tal, de hele tal og de rationale tal, og det har - muligvis noget overraskende - vist sig, at de alle er tællelige, dvs. de har alle kardinaltallet $\aleph_0$.

Det kunne måske få nogle til at drage den forhastede konklusion, at der kun er én slags uendelighed, for "uendelig" er da "uendelig", og en mængde kan da ikke være mere eller mindre uendelig!? Men lad os se på det.

Øvelse 30: Vi begynder med at betragte intervallerne $[0,1]$ og $[0,2]$, dvs. alle reelle tal mellem henholdsvis 0 og 1 samt 0 og 2 (alle tal inkl.).
Argumentér for, at der er uendeligt mange tal i hvert af de to intervaller.

Øvelse 31: Vis, at der er lige mange tal i de to intervaller, dvs. at de har samme kardinaltal.

Øvelse 32: Vis, at der er lige mange tal i intervallerne $[0,1]$ og $[0,100]$.

Øvelse 33: Vis, at der er lige mange tal i intervallerne $[0,1]$ og $[-100,100]$.

Øvelse 34: Vis, at der er lige mange tal i to vilkårligt valgte lukkede intervaller.

Måske var resultaterne i ovenstående øvelser ikke så overraskende, da de minder meget om resultaterne i forrige kapitel. Men vi har i hvert fald endnu engang set, at når det drejer sig om uendelighed, så er det hele ikke nødvendigvis større end en del af det.

Det er væsentligt at bemærke, at alle de involverede intervaller i øvelserne 30 – 34 er lukkede intervaller. Lad os nu prøve at se på åbne intervaller:

Øvelse 35: Vis, at intervallerne $]0,1[$ og $]0,2[$ har samme kardinaltal.

Øvelse 36: Vis, at der er lige mange tal i intervallerne $]0,1[$ og $]0,100[$.

Øvelse 37: Vis, at intervallerne $]0,1[$ og $]-100,100[$ har samme kardinaltal.

Øvelse 38: Vis, at der er lige mange tal i to vilkårligt valgte åbne intervaller.

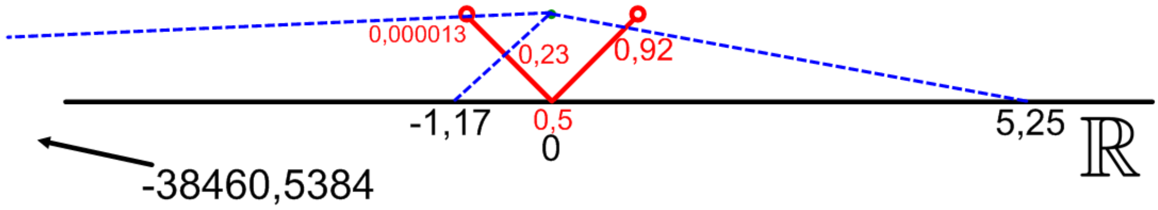
Vi ved fra tidligere, at mængden af alle reelle tal $\mathbb{R}$ – når man betragter det som interval – er et **åbent** interval, og vi skriver derfor med åbne klammer $\mathbb{R} =]-\infty,\infty[$.

I øvelserne 30-34 og 35-38 er lukkede og åbne intervaller blevet behandlet særskilt, og det vil vi fortsætte med, indtil vi i afsnit 6 har bevist Bernsteins Ækvivalenssætning. For uden denne sætning er det faktisk ret svært at sammenligne mægtigheden af åbne og lukkede intervaller.

Bemærk altså vigtigheden af, at det i følgende sætning er det åbne interval $]0,1[$ og ikke det lukkede interval $[0,1]$, der sammenlignes med $\mathbb{R}$.

Sætning 3: Intervallet $]0,1[$ har samme kardinaltal som mængden af alle reelle tal, $\mathbb{R}$.

Bevis 3: Vi anvender følgende konstruktion (Figur 3).



Figur 3: Konstruktion der viser, at intervallet $]0,1[$ og mængden af reelle tal $\mathbb{R}$ har samme mægtighed (dvs. samme kardinaltal).

Figuren skal forstås på følgende måde: Den sorte linje er de reelle tal angivet som en talakse, hvor 0 er placeret det sted, hvor de røde linjer rører. Den knækkede røde linje angiver intervallet $]0,1[$, hvor cirklerne angiver de åbne intervalendepunkter, og knækket ligger ved tallet 0,5. Den grønne prik, hvorfra de stiplede blå linjer udgår, er placeret lodret over tallet 0 på den reelle talakse (og 0,5 på den røde linje) og lige mellem de to røde cirkler.

Der skal nu skabes en enentydig sammenhæng mellem tallene i intervallet $]0,1[$ og de reelle tal, og denne sammenhæng illustreres ved de rette, blå, stiplede linjer. Skæringen mellem en blå linje og den røde linje angiver et tal i intervallet $]0,1[$ (angivet ovenfor med røde tal), mens skæringen mellem en blå linje og den sorte linje angiver et reelt tal (angivet med et sort tal).

Øvelse 39: Argumenter for, at en blå linje skærer den røde linje, hvis og kun hvis den skærer den sorte linje.

Enhver blå linje, der skærer den røde og den sorte linje, angiver en sammenparring af elementer i de to mængder. De tre blå linjer på figuren har altså sammenparret tallet 0,92 fra intervallet $]0,1[$ med det reelle tal 5,25.

0,000013 fra $]0,1[$ er sammenparret med det reelle tal -38460,5384.

0,23 fra $]0,1[$ er sammenparret med det reelle tal -1,17

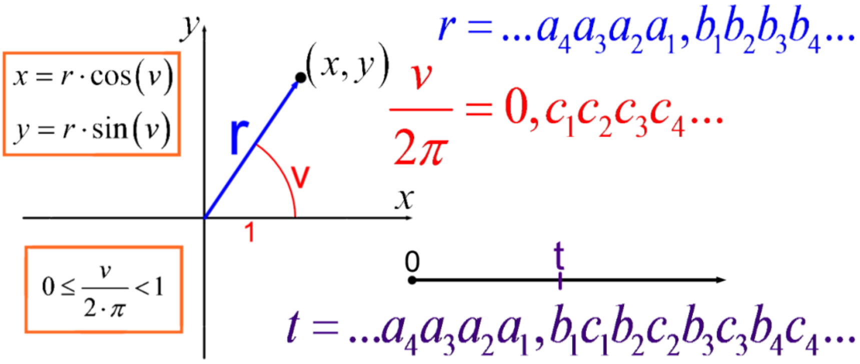
Og 0,5 fra $]0,1[$ er parret med det reelle tal 0, men her er den blå linje ikke tegnet for ikke at gøre figuren for uoverskuelig.

Man kan altså sige, at der er lige så mange tal i intervallet $]0,1[$, som der er reelle tal.

Efter en masse problemstillinger omhandlende udelukkende intervaller, skal vi nu prøve at sammenligne punkter i planen med punkter på talaksen (de reelle tal). Vi skriver mængden af reelle tal som $\mathbb{R}$ og mængden bestående af samtlige punkter i planen som $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ eller $\mathbb{R}^2$.

Vi viser dog i første omgang kun, at $\left|[0,\infty[\right| = \left|\mathbb{R}^2\right|$, dvs. egentlig et skrappere resultat, da vi ikke tager de negative tal i brug. Vi skal senere se, at man ud fra dette nemt kan slutte $|\mathbb{R}| = \left|\mathbb{R}^2\right|$.

Vi begynder med at se på en anden måde at angive punkter i planen (formelt skifter vi til såkaldte *polære koordinater*):



Et punkt (x,y) i planen angiver vi ved dets afstand *r* fra origo og vinklen *v* mellem førsteaksen og linjestykket mellem origo og punktet, når positiv omløbsretning er mod uret. Vi ved fra vores arbejde med enhedscirklen, at vinklen målt i radianer vil ligge mellem 0 og 2π, så hvis vi i stedet ser på $\frac{v}{2\pi}$, får vi et tal mellem 0 og 1, dvs. det kan skrives som 0,… (se figuren).

Både afstanden *r* og tallet $t \in [0,\infty[$ er ikke-negative reelle tal, og vores enentydige afbildning bliver så:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & & [0,\infty[\\ r = \ldots a_4a_3a_2a_1,b_1b_2b_3b_4\ldots & & \\ \frac{v}{2\pi} = 0,c_1c_2c_3c_4\ldots & \longleftrightarrow & t = \ldots a_4a_3a_2a_1,b_1c_1b_2c_2b_3c_3b_4c_4\ldots \end{array}$$

Dvs. origo knyttes sammen med tallet 0, og ellers er sammenknytningen som vist i følgende eksempel:

$t = 7392{,}154806$ knyttes til $r = 7392{,}140$ og $\frac{v}{2\pi} = 0{,}586$. Dette giver os altså vinklen $v = 2\pi\cdot 0{,}586 = 3{,}68194659$, og vi kan så finde punktet:

$$(x,y) = (r\cdot\cos(v), r\cdot\sin(v)) = (7392.14\cdot\cos(3.68194659), 7392.14\cdot\sin(3.68194659)) = (-6338.957096, -3802.809055)$$

Konklusionen ovenfor er rigtig, men faktisk holder beviset ikke (Bernsteins Ækvivalenssætning vil dog råde bod på dette). For prøv at se på følgende tal: $t_1 = 613{,}\overline{90}$ og $t_2 = 614$

t_2 knyttes til $v = 0$ og $r = 614$, dvs. punktet (614,0).

t_1 knyttes til $v = 0$ og $r = 613{,}\overline{9}$, og vi ved fra Grundlæggende Matematiske Begreber del 1, at $613{,}\overline{9} = 614$, dvs. de to forskellige tal (for $613{,}\overline{90} \ne 614$) knyttes til samme punkt, og dermed er der IKKE tale om en bijektion.

Den overraskende pointe er, at det er blandt tallene i $[0,\infty[$, at der er et overskud. Dvs. det er i den **tilsyneladende** mindste mængde, at der er "for mange" tal. Denne pointe gør det nemt for os at vise, at mængderne har samme mægtighed, når vi har fået vist Bernsteins Ækvivalenssætning.

Lad os prøve at stoppe op et øjeblik og se på, hvad vi har fået vist og ikke mindst, hvad vi **ikke** har fået vist.

Vi har vist, at:

- Mængderne af naturlige tal, hele tal og rationale tal har samme mægtighed.
- Alle lukkede intervaller har samme mægtighed.
- Alle åbne intervaller har samme mægtighed.

Vi har **ikke** vist, at åbne intervaller har samme mægtighed som lukkede intervaller.

Vi mangler også at se på det væsentlige spørgsmål, om de reelle tal har samme mægtighed som de naturlige tal. Så lad os se på mængderne $\mathbb{N}$ og $\mathbb{R}$.

Øvelse 40: Kan du finde en enentydig afbildning af de naturlige tal på de reelle tal og dermed vise, at de to mængder indeholder lige mange elementer (har samme mægtighed)?

Øvelse 41: Se på alle de forslag, der måtte være fremkommet i Øvelse 40, og argumentér for, hvorfor de ikke virker.

Sætning 4: $\mathbb{N}$ og $\mathbb{R}$ har IKKE samme kardinaltal.

Dette vil muligvis overraske dig, da vi indtil videre kun har set på mængder med samme kardinaltal, og da vi bl.a. viste, at de rationale tal er tællelige, dvs. numerable, dvs. har samme kardinaltal som de naturlige tal, dvs. har samme mægtighed som de naturlige tal.

Vi viser dette ved et *modstridsbevis* (*indirekte bevis*):

Bevis 4: Vi ønsker at vise, at $\mathbb{N}$ og $\mathbb{R}$ IKKE har samme kardinaltal. Da vi ved, at $]0,1[$ og $\mathbb{R}$ har samme kardinaltal, kan vi vise det ved at vise, at $\mathbb{N}$ og $]0,1[$ IKKE har samme kardinaltal (overvej dette!). Så vi **antager**, at de **har** samme kardinaltal. Ifølge denne **antagelse** findes der en enentydig afbildning af de naturlige tal på $]0,1[$.

Lad nedenstående være en sådan enentydig afbildning (som vi har **antaget** eksisterer):

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbb{N} & &]0,1[\\
1 & \longrightarrow & 0{,}\color{red}{7}867875412785412164128946289372323190173\ldots \\
2 & \longrightarrow & 0{,}2\color{red}{0}198453627658349981324523673849012121287\ldots \\
3 & \longrightarrow & 0{,}74\color{red}{8}3634546572839746234029474638273826482 7\ldots \\
4 & \longrightarrow & 0{,}456\color{red}{7}384793098745737849382728274123097492 3\ldots \\
5 & \longrightarrow & 0{,}1415\color{red}{9}265358979323846264338327950288419716\ldots \\
6 & \longrightarrow & 0{,}09834\color{red}{5}637919237364193172849191826467719 2\ldots \\
7 & \longrightarrow & 0{,}458374\color{red}{9}347292740474839127401824780147107 2\ldots \\
8 & \longrightarrow & 0{,}7182818\color{red}{2}845904523536028747135266249775724\ldots \\
9 & \longrightarrow & 0{,}82756457\color{red}{8}912462389464126894912012746428 91\ldots \\
10 & \longrightarrow & 0{,}600214384\color{red}{9}76472301489124623894241280723 86\ldots \\
11 & \longrightarrow & 0{,}3242148789\color{red}{5}24708912524141012848461289148 9\ldots \\
12 & \longrightarrow & 0{,}51237148012\color{red}{8}4748120124782134723883209186 3\ldots \\
13 & \longrightarrow & 0{,}897962131240\color{red}{1}244638270505137041238013650 3\ldots \\
14 & \longrightarrow & 0{,}4235532123553\color{red}{4}009134577509341015775304905\ldots \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Tallene efter kommaerne er "tilfældige". Bemærk de røde tal, der har lagt navn til denne type beviser, kaldet *diagonalbeviser* (som Cantor fandt på i 1891). I det tal, der er parret med 1, er det første decimal, der er rød. I det tal, der er parret med 2, er det anden decimal, der er rød. Og sådan fortsætter det.

Pointen er nu, at vi kan konstruere et tal i intervallet $]0,1[$, der IKKE er parret med et naturligt tal (hvilket er den søgte modstrid), ved at vi lader første decimal være forskellig fra første decimal i det første tal (dvs. i ovenstående tilfælde forskelligt fra 7), anden decimal lader vi være forskellig fra anden decimal i det andet tal (dvs. her forskellig fra 0), tredje decimal skal være forskellig fra det tredje tals tredje decimal (i dette tilfælde forskellig fra 8), osv.

Et eksempel på sådan et tal er: 0,53497326450367...

Et andet eksempel er: 0,13462766413069...

Der er uendelig mange muligheder for konstruktionen af sådan et tal, og hele idéen er, at vi nu har fået skabt et tal, der IKKE er i rækken, da det afviger fra hvert eneste tal med mindst én decimal (nemlig lige præcis den decimal, der er valgt anderledes). Og dette er i modstrid med, at vi har at gøre med en enentydig afbildning, da vi altså har fundet et tal, der ikke er parret med et naturligt tal.

Resumé: Vi **antager**, at de to mængder har samme kardinaltal. I så fald findes en enentydig afbildning. Vi viser, at en sådan enentydig afbildning **ikke** er enentydig, hvilket er en modstrid. Vi har dermed vist, at vores oprindelige antagelse var forkert og kan således konkludere, at de to mængder IKKE har samme kardinaltal.

Man siger så, at mængden af reelle tal **ikke** er tællelig. Det betyder bl.a., at man ikke kan stille dem op i en følge, som vi så, at man kunne gøre med de rationale tal. Bemærk dog, at de rationale tal ikke var stillet op i en *ordnet* følge, dvs. en følge hvor elementerne hele tiden bliver større. Både de naturlige tal og de hele tal kan stilles op i ordnede følger.

Vi har nu kort sagt vist, at der er lige mange naturlige tal, hele tal og rationale tal, mens der er flere reelle tal end tal i de tre andre mængder. Ja, faktisk kan vi jo se, at der er flere tal i intervallet]0;0,000000000000000000000000000000000000000000001[end i mængden af rationale tal.

Øvelse 42: Argumentér for, at der mellem to vilkårligt valgte forskellige rationale tal ligger uendelig mange irrationale tal.

Øvelse 43: Argumentér for, at der mellem to vilkårligt valgte forskellige irrationale tal ligger uendelig mange rationale tal.

Ovenstående to øvelser er nogle af mange eksempler på, hvorfor en hel del mennesker - og heriblandt nogle meget få matematikere - ikke kan acceptere uendeligheder. Det er nogle meget overraskende resultater, MEN det er vigtigt, at du lægger mærke til, at der ALDRIG opstår modstridende udsagn.

Det ville have været modstridende udsagn, hvis du både havde kunnet vise, at der mellem to vilkårligt valgte forskellige reelle tal ligger uendeligt mange rationale tal OG at der findes to forskellige reelle tal, hvorimellem der IKKE ligger uendeligt mange rationale tal.

Opsamling: Bemærk forskellen mellem på den ene side overraskende og ikke-intuitive resultater og på den anden side modstridende resultater. Det er kun den første side, vi støder på.

Som nævnt fandt Cantor på diagonalbeviset i 1891 (vores bevis er lidt anderledes end Cantors, da han kun anvendte to cifre i sit bevis). Men allerede i 1873 var det lykkedes for ham at bevise selve indholdet i sætningen, nemlig at de reelle tals mægtighed var større end de naturlige tals. Og i 1877 kom han så frem til det, der kaldes *kontinuumshypotesen*.

Kontinuumshypotesen: Der findes ingen mængde M med egenskaben $|\mathbb{N}| < |M| < |\mathbb{R}|$.

Bemærk, at det ikke er en sætning, men en hypotese. Påstanden er aldrig blevet bevist. I 1900 placerede David Hilbert det som det første af 10 (senere 23) matematiske problemer, der var uløste. Det er senere blevet bevist, at man hverken kan bevise eller modbevise påstanden ud fra de aksiomer, som mængdelæren er opbygget af.

Med udgangspunkt i kontinuumshypotesen tildelte Cantor mængden af reelle tal mægtigheden $\aleph_1$, dvs. $|\mathbb{R}| = \aleph_1$. Og med $\aleph_0$ og $\aleph_1$ har vi altså to former for uendelighed. Cantor viste dog i 1891 – i samme artikel som indeholdt diagonalbeviset – en sætning, der gør det hele meget vildere. Den kommer vi til.

Vi vil bruge mængders mægtighed til at skelne mellem begreberne *kontinuert* og *diskret*, når det drejer sig om mængder – og dermed også intervaller.

Vi vil sige, at $\aleph_1$ (dvs. $\mathbb{R}$) svarer til et *kontinuum* (*kontinuert*), mens $\aleph_0$ (dvs. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ og $\mathbb{Q}$) er *diskrete* mængder, hvor elementerne ikke ligger tæt, fordi der mellem to rationale tal altid ligger et irrationalt tal (Øvelse 42).

Der er dog ikke enighed om denne forståelse, for $\mathbb{Q}$ volder problemer. Man kan nemlig også bruge *diskret* om mængder, hvor elementerne er isolerede, og det er rationale tal ikke, fordi man altid mellem et givet rationalt tal og et vilkårligt andet reelt tal kan finde et rationalt tal.

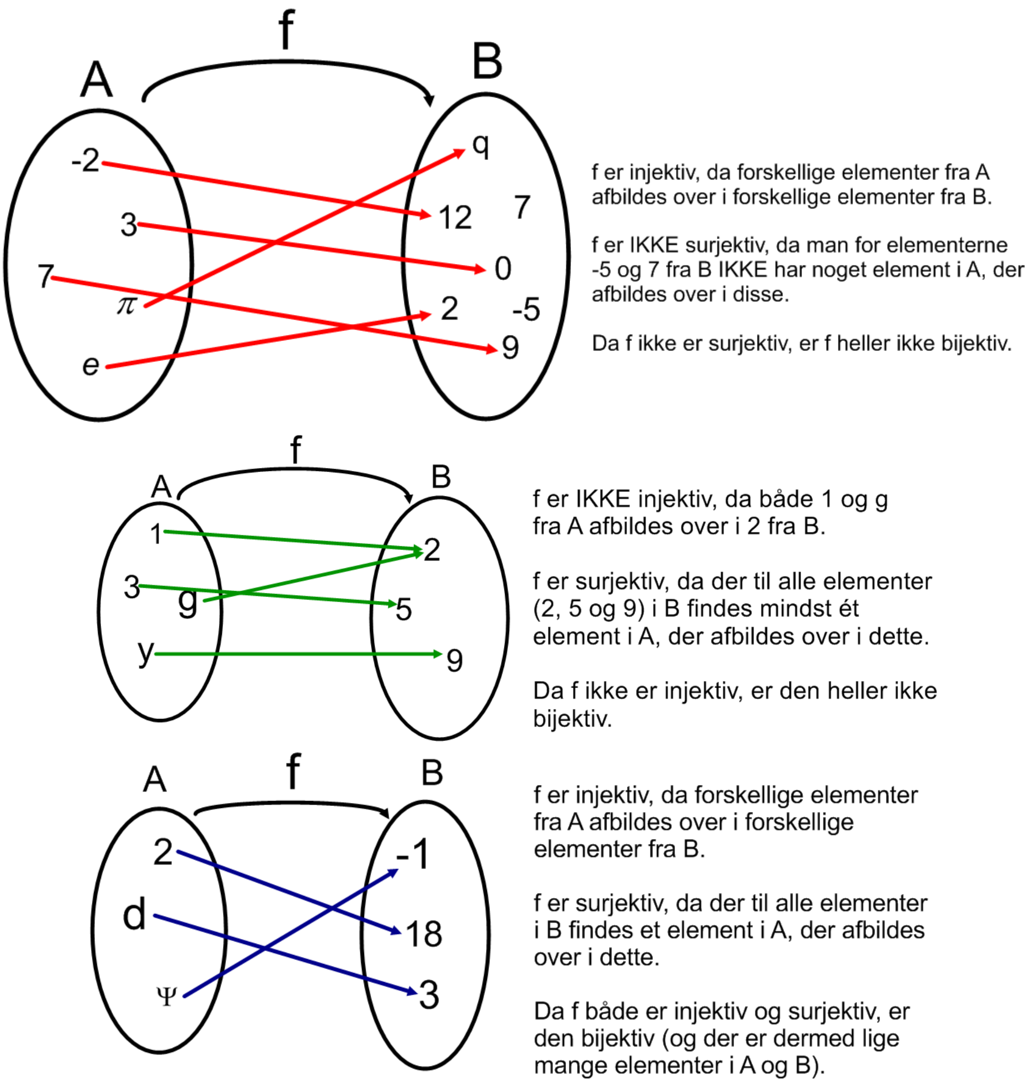
I forbindelse med forsøget på at vise $|[0,\infty[| = |\mathbb{R}|$ og $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}\times\mathbb{R}|$ stødte vi på problemer med at finde en passende bijektion. Vi skal nu finde en nemmere vej og har derfor brug for nye begreber:

Definition 6:

En afbildning $f: A \mapsto B$ kaldes *injektiv*, hvis forskellige elementer fra A afbildes ind i forskellige elementer fra B.

En afbildning $f: A \mapsto B$ kaldes *surjektiv*, hvis der for ethvert element i B findes mindst ét element i A, der afbildes ind i dette.

En afbildning $f: A \mapsto B$, der både er injektiv og surjektiv, kaldes en *bijektiv* afbildning (eller en *bijektion*).



Figur 4: Øverst en injektiv afbildning, i midten en surjektiv afbildning og nederst en bijektiv afbildning. Bemærk, at der altid udgår en pil fra alle elementer i *A*. Det er et krav, hvis *f* skal være en afbildning. Det er kun, hvis afbildningen er surjektiv (eller bijektiv), at der går en pil til alle elementer i *B*.

Bemærk altså forskellen på en injektiv og en bijektiv afbildning. En injektiv afbildning, der ikke også er surjektiv, er **ikke** en enentydig afbildning, fordi der er elementer i *sekundærmængden/kodomænet* (kaldet *B* på Figur 4), der ikke knyttes til et element fra *primærmængden/definitionsmængden* (kaldet *A* på Figur 4).

Pointen med at indføre begrebet *injektiv afbildning* er, at vi nu kan definere følgende:

Definition 7: Hvis der findes en injektiv afbildning af mængden *A* på *B*, har mængden *A* højst samme kardinaltal som mængden *B*, dvs. $|A| \leq |B|$

Dette er meget anvendeligt, da det ofte er meget lettere at finde en injektiv afbildning end en bijektion. Prøv selv følgende:

Øvelse 44: Find en injektiv afbildning af $\left]0,1\right[$ ind i $\left[0,1\right]$.

Øvelse 45: Find en injektiv afbildning af $\left[0,1\right]$ ind i $\left]0,1\right[$.

Øvelse 46 (Gør det nemt for dig selv!): Find en injektiv afbildning af $\mathbb{N}$ ind i $\mathbb{Z}$.

Øvelse 47 (Gør det igen nemt for dig selv!): Find en injektiv afbildning af $\mathbb{N}$ ind i $\mathbb{Q}$ og en injektiv afbildning af $\mathbb{N}$ ind i $\mathbb{R}$.

Øvelse 48: Prøv at finde en injektiv afbildning af $\left[0,1\right]$ ind i $\mathbb{N}$, selv om du ved, at det ikke kan lade sig gøre (bare for at tænke over et eksempel, hvor der netop ikke findes en injektiv afbildning).

Det er meget svært at finde en bijektiv afbildning af $\left]0,1\right[$ på $\left[0,1\right]$ (prøv evt. selv), mens øvelserne 44 og 45 gerne skulle have vist os, hvor relativ nemt det er at finde injektive afbildninger begge veje.

Dvs. det har i dette tilfælde været meget svært via vores metoder at vise $\left|\left]0,1\right[\right| = \left|\left[0,1\right]\right|$, mens det var nemt at vise $\left|\left]0,1\right[\right| \leq \left|\left[0,1\right]\right|$ og $\left|\left]0,1\right[\right| \geq \left|\left[0,1\right]\right|$.

Men kig på de to svage uligheder. Kan vi ikke bare slutte fra disse og til et lighedstegn? Hvis vi arbejdede med endelige mængder kunne vi i hvert fald, for hvis du ved om to tal *A* og *B*, at $A \leq B$ og $A \geq B$, så ved du, at $A = B$. Men vi har jo efterhånden lært, at man ikke kan være sikker på ret meget, når det kommer til uendeligheder.

Vi skal dog nu, at man KAN slutte fra $\left|\left]0,1\right[\right| \leq \left|\left[0,1\right]\right|$ og $\left|\left]0,1\right[\right| \geq \left|\left[0,1\right]\right|$ til $\left|\left]0,1\right[\right| = \left|\left[0,1\right]\right|$.

Den pågældende sætning kaldes på dansk normalt for Bernsteins Ækvivalenssætning, mens den andre steder kaldes Cantor–Bernstein–Schröder-sætningen.

6. BERNSTEINS ÆKVIVALENSSÆTNING

eller Jessens Balsal

Bernsteins Ækvivalenssætning (Sætning 5):
Hvis der både findes en injektiv afbildning af *A* ind i *B* og af *B* ind i *A*, så findes en bijektiv afbildning af *A* på *B*.
Dette kan også udtrykkes: Hvis $|A| \leq |B|$ og $|B| \leq |A|$, så gælder $|A| = |B|$.

Da vi første gang stødte på Hilberts Hotel, havde vi allerede gennemgået matematikken bag det. Denne gang tager vi det i omvendt rækkefølge. Først fortællingen. Derefter den matematiske forklaring.

Så lad os vende tilbage til Hilberts Hotel, hvortil der som tidligere omtalt også er en kostskole bestyret af Børge Jessen og en dansesal, hvor dansemesteren Georg Cantor underviser. Hilberts Hotel ligger i Aristoteles' Univers, som vi ser på i fysikdelen, hvor Universet er evigt, dvs. der har ikke været en skabelse, og Hilberts Hotel har - ligesom Ramasjangskolen - eksisteret altid. Måske undrede du dig over, at Hilbert kunne tage det så roligt, selvom han så uendeligt mange selskaber hver med uendeligt mange gæster. Men det skyldes simpelthen, at han er vant til noget meget værre. For på kostskolen bor ikke bare uendeligt mange drenge og piger forstået som tællelig uendelighed. Nej, der bor uendeligt mange drenge og piger, hvor 'uendeligt' ikke nødvendigvis dækker over tællelighed.

Det er nogle meget generte drenge og piger, der går på kostskolen. De taler aldrig sammen til daglig, men når der er bal - og bal har der været afholdt uendeligt mange gange - så slår de sig løs og snakker uendelig hurtigt under selve dansen, og de snakker kun om de drenge og piger, som de har hørt om eller snakket med (bemærk dette: Ingen snak på andre tidspunkter end under selve dansen).

Ballet foregår ved, at drengene sidder på bænke langs den ene væg, mens pigerne sidder på bænke langs den anden væg. Hver anden gang er det drengene, der byder op, og hver anden gang er det pigerne, der byder op. Hver dreng har en favoritpige, som han danser med hver eneste gang, han selv byder op. For pigerne gælder det samme. Hver pige har også en favorit, som hun danser med, hver gang hun selv byder op.

Men der er et problem. Cantor bemærker, at hver eneste gang, drengene byder op, så sidder der piger tilbage (bænkevarmere), og hver eneste gang pigerne byder op, så sidder der drenge tilbage (bænkevarmere). Og det bryder Cantor sig ikke om. Han så gerne, at alle dansede som par.

Og endelig uendelig lang tid ude i fremtiden får Cantor en idé. Denne gang beder han ikke bare drengene eller pigerne om at byde op. Nej, han beder alle de drenge, der hver anden gang er bænkevarmere ELLER har hørt om en dreng, der er bænkevarmer, om at byde deres favoritpige op. Derefter beder han de piger, der ikke er blevet budt op, om at byde deres favoritdreng op, og vupti! Minsandten om det hele ikke gik op. Alle danser og er glade.

Øvelse 49: Forklar, hvad historien har med Bernsteins Ækvivalenssætning at gøre. Dvs. identificer de steder, hvor de injektive afbildninger beskrives, og hvor den bijektive afbildning nævnes.

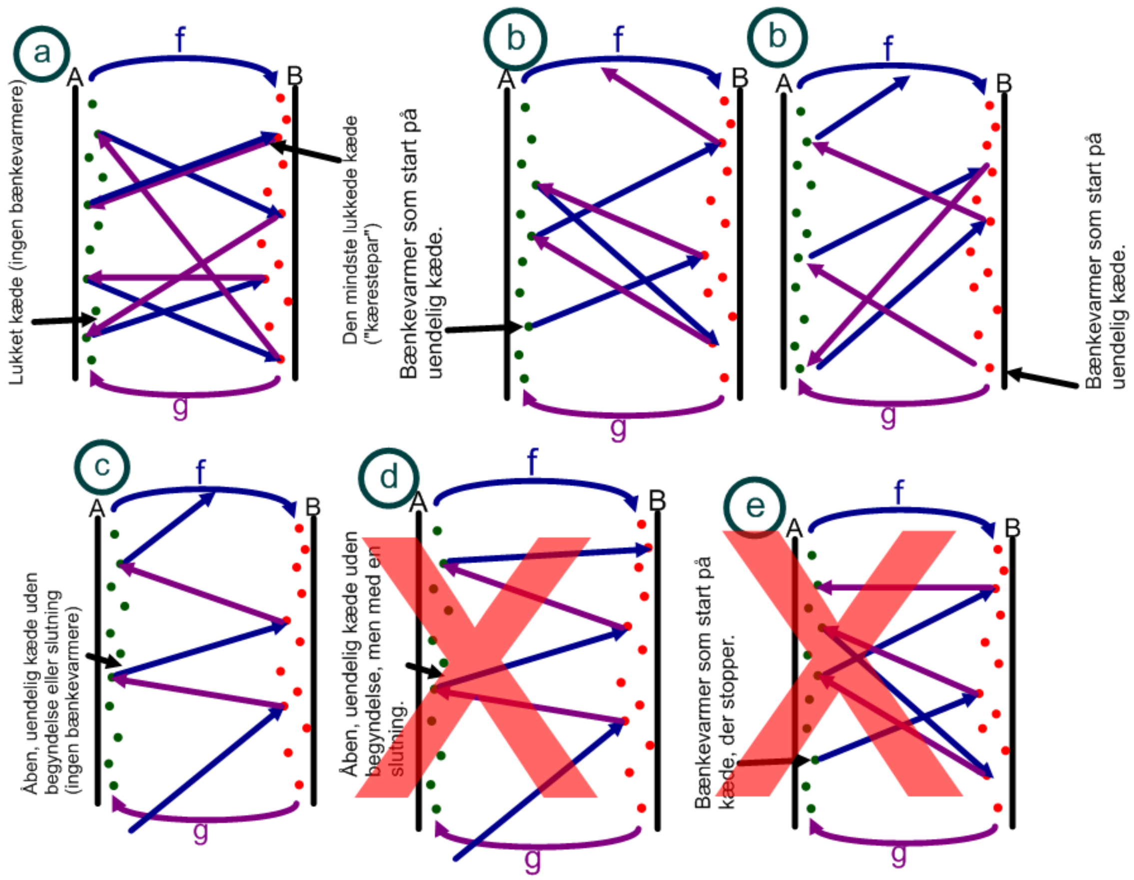
Øvelse 50 Forklar, hvorfor alle danser.

Bevis 5: Det er en "hvis ... så"-sætning, så vi antager nu, at der findes en injektiv afbildning *f* fra *A* til *B* og en injektiv afbildning *g* fra *B* til *A*. Målet er så at vise, at der dermed findes en bijektion fra *A* til *B*.

Den injektive afbildning *f* fra *A* til *B* virker på samtlige elementer i *A*, og den afbilder forskellige elementer fra *A* over i forskellige elementer i *B* (Derfor danser alle drengene, når det er dem, der byder op, og alle danser to og to, da forskellige drenge ikke kan byde den samme pige op. Og endelig kan der godt være bænkevarmere blandt pigerne, da vi kun ved, at *f* virker på samtlige elementer i *A*).

Den injektive afbildning *g* fra *B* til *A* virker på samtlige elementer i *B*, og den afbilder forskellige elementer fra *B* over i forskellige elementer i *A* (Alle piger danser; kun dansende par; muligvis bænkevarmere blandt drengene).

På Figur 5 ser vi på de forskellige muligheder for sammenparringer af elementer i *A* og *B*:



Figur 5: De "ulovlige" muligheder d) og e) er markeret med røde krydser.

Der opstår kæder, når man følger afbildningerne *f* og *g*. De blå pile viser, hvordan *f* virker på et element i *A* og afbilder det over i et element i *B*. På elementerne i *B* virker *g* og afbilder dem over i et element i *A*. Det er væsentligt at bemærke, at der udgår pile fra samtlige elementer i både *A* og *B* (jvf. afsnittet øverst på siden), mens det ikke nødvendigvis er samtlige elementer, der bliver ramt af en pil (da *f* og *g* ikke nødvendigvis er surjektive).

Enten har en kæde en begyndelse, eller også har den ingen begyndelse, dvs. man kan fortsætte i det uendelige bagud. Så vi deler i første omgang op i de to tilfælde:

Kæden har en begyndelse:

Her kan man så yderligere se på, om kæden har en slutning.

Kæden har en slutning:

Figur 5 a) Der kan dannes lukkede kæder, hvor man ender tilbage, hvor man startede, uanset ved hvilket element i kæden, man begynder.

Figur 5 e) Kæden kan **ikke** slutte ved et element, hvorfra der ikke udgår en pil (da et sådant element ikke findes). Derfor må der nødvendigvis dannes lukkede kæder, hvis kæden både har en begyndelse og en slutning.

Kæden har ikke en slutning:

Figur 5 b) Her fortsætter kæden i det uendelige, og den efterlader et enkelt element (en bænkevarmer), som ingen pile fører til. Dette element kan både være fra A og fra B.

Kæden har ingen begyndelse:

Igen kan man dele op i de to muligheder, at kæden har en slutning og ikke har en slutning.

Kæden har en slutning:

Figur 5 d) Dette kan ikke lade sig gøre, for kæden kan ikke slutte på et element, hvorfra der ikke udgår en pil. Den kan kun slutte på et element, hvorfra der udgår en pil, men et sådan element må nødvendigvis være et begyndelseselement, og et sådant findes ikke i denne kæde.

Kæden har ikke en slutning:

Figur 5 c) Her fortsætter kæden i det uendelige, og der er ingen bænkevarmere.

Dette er altså vores udgangspunkt. Vi skal nu finde den bijektive afbildning, der afslutter vores bevis:

Øvelse 51: Argumentér for, at figurerne 5 a) og c) allerede giver mulighed for den sammenparring af elementer i A og B, der er nødvendig i en bijektion. Er der flere muligheder for sådanne sammenparringer af de involverede elementer?

Du skulle gerne i Øvelse 51 være kommet frem til, at det var ligegyldigt, om man benyttede f eller g (dvs. om man tog udgangspunkt i elementerne fra A eller B), når man skulle sammenparre elementerne. Men det er ikke tilfældet i kæderne fra Figur 5 b). På den venstre figur skal man tage udgangspunkt i f, mens man skal tage udgangspunkt i g på den højre.

Her er så bare ét enkelt problem tilbage. Vi skal jo have en funktion, der virker på elementerne i A og ikke på B, dvs. vi kan ikke lave en bijektion ved at blande f og g. MEN ... problemet er ikke så stort. I stedet for g anvender vi den omvendte funktion til g, der skrives g^{-1}. Den afbilder ved at vende pilene fra g, dvs. den virker på elementerne i A.

Så vores bijektive afbildning bliver altså en afbildning, der virker som f på samtlige elementer, der befinder sig i en kæde som på Figur 5 a), c) samt venstre del af b), mens den virker som g^{-1} på elementerne i kæder som på Figur 5 b) højre del.

Vi har altså nu bevist Bernsteins Ækvivalenssætning.

Med Bernsteins Ækvivalenssætning og de øvelser, vi tidligere har været igennem, kan vi nu få styr på en masse løse ender:

Øvelse 52: Argumentér for, at intervallerne $]0,1[$ og $[0,1]$ har samme mægtighed.

Øvelse 53: Argumentér for, at $\mathbb{R}$ og $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ har samme mægtighed.

Øvelse 54: Hvad kan mon siges om mægtigheden af mængden af punkter i rummet $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ eller $\mathbb{R}^3$, og hvad kan siges om mægtigheden af punkter i det 4-dimensionelle rum $\mathbb{R}^4$?

Lad os endnu engang samle op på, hvad vi nu har vist:

1) Mængderne $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ og $\mathbb{Q}$ har samme mægtighed, og de har samme mægtighed som mængden bestående af alle talpar (x, y), hvor x og y er hele tal. Alle disse mængder tildeles kardinaltallet $\aleph_0$.

2) Alle intervaller (både åbne og lukkede og hele talaksen, dvs. mængden $\mathbb{R}$) har samme mægtighed, og de har samme mægtighed som mængden af punkter i både planen og rummet. Alle disse mængder tildeles kardinaltallet $\aleph_1$.

Det væsentlige at bemærke i denne omgang er, at vi nu har set to forskellige slags uendelighed. Men vi har også set, at det tilsyneladende er svært at finde mængder med en større uendelighed end mængden af reelle tal, for når mængden af punkter i rummet ikke kan bruges, hvad kan så?

Svaret følger i næste kapitel.

7. UENDELIG MANGE SLAGS UENDELIGHEDER

Vi skal nu arbejde med delmængder af mængder.

Se først på mængden $A=\{1,7,12,32\}$.

Det er en mængde bestående af 4 elementer.

Vi er nu interesserede i delmængderne af denne mængde. Eksempler på forskellige delmængder af denne mængde er:

$Ø$, $\{1,32\}$, $\{7,12,32\}$, $\{1,12\}$, $\{1,7,12,32\}$ og $\{7\}$

Delmængden $\{32,1\}$ er den samme som $\{1,32\}$, da rækkefølgen af elementer ikke har betydning.

Vi er interesseret i antallet af delmængder:

Øvelse 55: Hvor mange delmængder kan dannes ud fra en mængde med 2 elementer?

Øvelse 56: Hvor mange delmængder kan dannes ud fra en mængde med 3 elementer?

Øvelse 57: Hvor mange delmængder kan dannes ud fra en mængde med 1 element?

Øvelse 58: Hvor mange delmængder kan dannes ud fra en mængde med 4 elementer?

Øvelse 59: Hvor mange delmængder kan dannes ud fra en mængde med 5 elementer?

Øvelse 60: Hvor mange delmængder kan dannes ud fra en mængde med n elementer?

Øvelse 61: Find et bevis/argument for svaret på Øvelse 60?

Øvelse 60 forklarer notationen i følgende definition:

Definition 8: Lad *A* være en mængde. Mængden bestående af samtlige delmængder af *A* kaldes *potensmængden* af *A*, og den skrives 2^A.

Eksempel 9: Lad følgende mængder være givet: $A=\{a,b,c\}$ $B=\{1,2,3,4\}$ $C=\varnothing$ $D=\{7\}$.

Så er:

$2^A=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

$2^B=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$

$2^C=\{\varnothing\}$

$2^D=\{\varnothing,\{7\}\}$

Potensmængden af de naturlige tal – dvs. mængden bestående af samtlige delmængder af de naturlige tal – skrives altså $2^{\mathbb{N}}$.

Sætning 6: Potensmængden af de naturlige tal har samme mægtighed som mængden af reelle tal:

$$\left|2^{\mathbb{N}}\right|=|\mathbb{R}|$$

Bevis 6: Vi vil bevise dette ved hjælp af Bernsteins Ækvivalenssætning og ønsker derfor at finde injektive afbildninger fra hver af mængderne på den anden mængde. Først ses på $2^{\mathbb{N}} \mapsto \mathbb{R}$:

Mængden af naturlige tal er $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,...\}$.

Et positivt reelt tal under 1 kan skrives $0,a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}...$

Vores afbildning fra $2^{\mathbb{N}}$ til $\mathbb{R}$ bliver så, at hvis et tal er med i en delmængde af naturlige tal, sættes den tilsvarende decimal til 1, og ellers sættes den til 0. Dvs. f.eks. gælder:
$\{1,4,9,12\}$ afbildes på 0,100100001001, og $\{2,3,4,8,11,12,18\}$ afbildes på 0,011100010011000001.
Dette er en injektiv afbildning, da forskellige mængder af naturlige tal afbildes over i forskellige reelle tal.

Vi ser nu på $\mathbb{R} \mapsto 2^{\mathbb{N}}$:
De reelle tal kan skrives som $\pm\, ...a_4a_3a_2a_1,b_1b_2b_3b_4...$
De positive tal knyttes nu til mængderne givet ved $\{1a_1,10b_1,100a_2,1000b_2,10000a_3,100000b_3,...\}$
De negative tal knyttes til mængderne $\{2a_1,20b_1,200a_2,2000b_2,20000a_3,200000b_3,...\}$
Tallet 0 knyttes til den tomme mængde, og hvis der på et tidspunkt ikke optræder andet end 0'er i fortsættelsen af rækken $a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4...$, skal der ikke være flere tal i mængden med naturlige tal.
Dvs. f.eks. afbildes 34,972 i $\{14,109,1003,10007,100000,1000002\}$,
og -913,5 afbildes i $\{23,205,2001,20000,200009\}$.

Da vi nu har en injektiv afbildning af $2^{\mathbb{N}}$ ind i $\mathbb{R}$ og en anden injektiv afbildning af $\mathbb{R}$ ind i $2^{\mathbb{N}}$, fortæller Bernsteins Ækvivalenssætning os, at $|2^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$.

Vi har altså nu set, hvordan vi med udgangspunkt i de naturlige tal har været i stand til at skabe en mængde med samme mægtighed som de reelle tal, nemlig ved at se på potensmængden af $\mathbb{N}$.
Og sådan kan vi faktisk fortsætte, for Cantor viste i 1891 følgende sætning:

Cantors sætning (Sætning 7): Potensmængden af en mængde *A* har større kardinalitet end *A*:

$$|2^A| > |A|$$

I beviset for Cantors sætning har man givet en funktion $g: A \mapsto 2^A$ og konstruerer så en mængde $B = \{x \in A \,|\, x \notin g(x)\}$, dvs. en mængde bestående af alle de elementer fra *A*, der ikke tilhører den delmængde af *A*, som *g* afbilder dem over i. Vi ser her på et konkret eksempel.
Lad $A = \{1,2,3,4\}$, og lad funktionen *g* afbilde de fire elementer fra *A* over i følgende fire delmængder af *A*:
$g(1) = \{1,2,4\}$, $g(2) = \{1,3\}$, $g(3) = \varnothing$ og $g(4) = \{4\}$.
Da $1 \in \{1,2,4\}$, $2 \notin \{1,3\}$, $3 \notin \varnothing$ og $4 \in \{4\}$, har man altså i dette tilfælde $B = \{2,3\}$.

Bevis 7: Vi vil vise, at der findes en injektiv, men ikke en bijektiv, afbildning fra A til 2^A.

Afbildningen $f: A \mapsto 2^A$ givet ved forskriften $f(x) = \{x\}$, hvor altså ethvert element i A afbildes over i den delmængde af A, der kun indeholder elementet selv, er en injektiv afbildning, da forskellige elementer afbildes over i forskellige delmængder.

At der ikke findes en surjektiv afbildning – og dermed heller ikke en bijektion – vises nu med et modstridsbevis. Så vi **antager**, at vi har fundet en surjektiv afbildning $g: A \mapsto 2^A$.

Vi konstruerer nu mængden B ved $B = \{x \in A \,|\, x \notin g(x)\}$.

Da $B \subseteq A$ (også hvis $B = \varnothing$), kan vi ud fra vores **antagelse** om, at g er surjektiv, dvs. at enhver delmængde af A er billedet af mindst et element fra A, sige, at der må findes et element $y \in A$, hvor $g(y) = B$.

Men ifølge den måde, B er konstrueret på, har vi, at hvis $y \in B$, så vil $y \notin g(y)$, og da vi jo har, at $g(y) = B$, så gælder altså:

$$y \in B \Rightarrow y \notin B$$

Og igen ud fra den måde, B er konstrueret på, har vi, at hvis $y \notin B$, så er det fordi, at $y \in g(y)$, men igen er $g(y) = B$, så man har:

$$y \notin B \Rightarrow y \in B.$$

Samlet kan vi altså konkludere, at:

$$y \in B \quad \Leftrightarrow \quad y \notin B$$

Men det er en modstrid, dvs. vores **antagelse** om, at g er surjektiv, må være forkert, dvs. man kan lave en injektiv, men ikke en bijektiv afbildning fra A til 2^A, og dermed er $|A| < |2^A|$

Cantors sætning gælder som vist for alle mængder – også de endelige – og om de uendelige mængder kan vi i forlængelse af kontinuumshypotesen og $|2^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$ konkludere:

Mængden af alle delmængder af $\mathbb{R}$ skrives $2^{\mathbb{R}}$ og har mægtigheden $\aleph_2$.

Mængden af alle delmængder af $2^{\mathbb{R}}$ skrives $2^{2^{\mathbb{R}}}$ og har mægtigheden $\aleph_3$.

Mængden af alle delmængder af $2^{2^{\mathbb{R}}}$ skrives $2^{2^{2^{\mathbb{R}}}}$ og har mægtigheden $\aleph_4$.

$$\vdots$$

Dvs. der findes uendeligt mange slags uendeligheder.


LIGHTYEAR