Løsninger til vejledende eksamensopgavesæt 1 og 2 A-niveau ny ordning

Vejledende sæt 1:

Første delprøve

<u>*Opgave 1:*</u> $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} t^2+t-2 \\ t^2 \end{pmatrix}$, $-4\le t\le 4$

Hastighedsfunktionen er den afledede af positionsvektoren. Man differentierer koordinatvis:

$$\vec{v}(t)=\vec{r}\,'(t)=\begin{pmatrix} 2t+1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

Hastighedsvektoren findes ved at indsætte tiden i vektorfunktionen:

$$\vec{v}(2)=\begin{pmatrix} 2\cdot 2+1 \\ 2\cdot 2 \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}}}$$

<u>*Opgave 2:*</u> $f(x)=3x^2+2x+1$

Stamfunktionen findes ved ledvis integration, og så kan det bestemte integral udregnes:

$$\int_1^2 f(x)\,dx=\left[x^3+x^2+x\right]_1^2=\left(2^3+2^2+2\right)-\left(1^3+1^2+1\right)=14-3=\underline{\underline{11}}$$

<u>*Opgave 3:*</u> $\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad M=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

Først kvadreres matricen:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\cdot 0+2\cdot 5 & 0\cdot 2+2\cdot 3 \\ 5\cdot 0+3\cdot 5 & 5\cdot 2+3\cdot 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 15 & 19 \end{bmatrix}$$

Denne matrix kan multipliceres med vektoren:

$$M^2\cdot\vec{v}=\begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 15 & 19 \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10\cdot 1+6\cdot 4 \\ 15\cdot 1+19\cdot 4 \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} 34 \\ 91 \end{pmatrix}}}$$

<u>*Opgave 4:*</u> Når træmassen er $M(t)$, hvor t er tiden, er væksthastigheden i træmassen $\frac{dM}{dt}$.

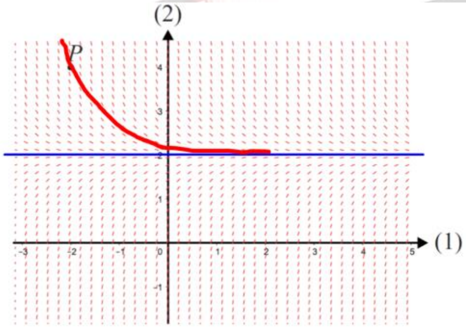
Da væksthastigheden er proportional med træmassen, har man $\frac{dM}{dt}=k\cdot M$.

Da proportionalitetskonstanten er 1,04, har man:

$$\underline{\underline{\frac{dM}{dt}=1{,}04\cdot M}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

Opgave 5: Det er væsentligt at bemærke, at løsningskurven skal lægge sig tættere og tættere på den vandrette linje med ligningen $y = 2$ og så ellers følge linjeelementerne:



Opgave 6: *E(X)* er middelværdien, og da det er en normalfordeling, har middelværdien og medianen samme værdi. Derfor kan man aflæse middelværdien ved at ud fra 50% på andenaksen (almindelig aflæsning af medianen):

$E(X) = \underline{\underline{25{,}1}}$

Dvs. at **der i gennemsnit er 25,1 kg korn i en pose.**

Opgave 7: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 3x + 1 \quad ; \quad P(2,6)$

Man kender allerede koordinatsættet for tangentens røringspunkt *P*, så man mangler kun tangenthældningen for at kunne bestemme ligningen. Tangenthældningen findes ved at indsætte punktets koordinater i differentialligningen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{2} + 3 \cdot 2 + 1 = 3 + 6 + 1 = 10$$

Nu kan man indsætte i ligningen for en ret linje ud fra punkt og hældning:

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

$$y - 6 = 10 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 10x - 14}}$$

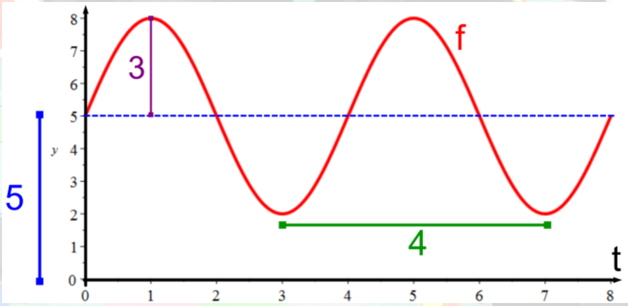
Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>Opgave 8:</u> $f(t) = 3 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot t\right) + 5$

a) Da man kender vinkelhastigheden $\omega = \frac{1}{2} \cdot \pi$, kan perioden beregnes:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{\frac{1}{2} \cdot \pi} = \underline{\underline{4}}$$

b) Det er en harmonisk svingning, hvor man kan aflæse, at amplituden er 3 og den lodrette forskydning 5. Der er ingen faseforskydning, så grafen skærer andenaksen i 5. Intervallet [0,8] rummer 2 perioder.



<u>Opgave 9:</u> $f(x) = \left(x^2 - 5x + 6\right) \cdot \ln\left(x^2 + 1\right)$

a) Funktionen er et produkt af to funktioner, hvor den sidste er en sammensat funktion. Så man skal både anvende produktreglen og reglen om differentiation af sammensat funktion (samt ledvis differentiation af udtrykkene inden i parenteserne).

$$f'(x) = (2x - 5) \cdot \ln\left(x^2 + 1\right) + \left(x^2 - 5x + 6\right) \cdot 2x \cdot \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$f'(0) = (2 \cdot 0 - 5) \cdot \ln\left(0^2 + 1\right) + \left(0^2 - 5 \cdot 0 + 6\right) \cdot 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{0^2 + 1} = -5 \cdot \ln(1) = -5 \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

b) Ligningen $f(x) = 0$ kan løses med nulreglen, da funktionsudtrykket er et produkt:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 5x + 6\right) \cdot \ln\left(x^2 + 1\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \ \vee\ \ln\left(x^2 + 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 3) \cdot (x - 2) = 0 \ \vee\ x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2 \ \vee\ x = 3 \ \vee\ x^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 2 \vee x = 3 \vee x = 0}}$$

Opgave 10: Først bemærkes det, at *f* og *g* har ens funktionsværdier i 0 og 2 (se de røde ovaler nedenfor).

x	0	1	2
$f(x)$	0	49	0
$g(x)$	0	-47	0
$F(x)$	0	36	66
$G(x)$	0	-34	-62

Dvs. graferne skærer hinanden i 0 og 2.
I dette interval ses det på figuren, at grafen for *f* ligger over grafen for *g*, hvilket man også kan se ved at sammenligne funktionsværdierne i 1 (brune firkant).
Arealet af punktmængden *M* kan hermed bestemmes ud fra stamfunktionernes funktionsværdier (blå cirkler):

$$A_M = \int_0^2 \left(f(x) - g(x)\right)dx = \left[F(x) - G(x)\right]_0^2 = \left(F(2) - G(2)\right) - \left(F(0) - G(0)\right) =$$
$$\left(66 - (-62)\right) - (0 - 0) = 128 - 0 = \underline{\underline{128}}$$

Opgave 11: $A(0,4)$ $B(2,0)$

a) Først bestemmes en ligning for linjen gennem *A* og *B*:

b-værdien er 4, da linjen skærer andenaksen i *A*. Hældningen er $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{0-4}{2-0} = -2$.

$l: \quad y = -2x + 4$

Da punktet, der udgør øverste, højre hjørne i rektanglet, ligger på linjen for *l*, har man:

$$A(x) = grundlinje \cdot højde = x \cdot y = x \cdot (-2x + 4) = \underline{\underline{-2x^2 + 4x}}$$

b) Udtrykket for arealet er et andengradspolynomium, hvis graf er en parabel med grenene pegende nedad. Dvs. det største areal findes det sted, hvor parablen har toppunkt. Toppunktsformlen (førstekoordinaten) kan derfor bruges til at finde den søgte værdi:

$$x_{\max Areal} = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-2)} = \underline{\underline{1}}$$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

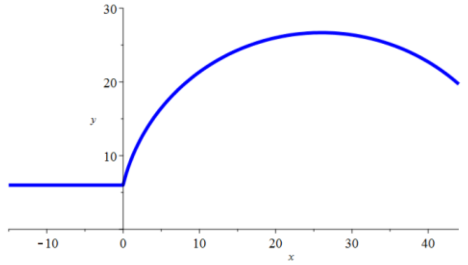
Anden delprøve

Opgave 12: Funktionen er angivet som en gaffelforskrift, og den gemmes i Maple.

$$f(x) := \begin{cases} 6 & -15 \le x \le 0 \\ \sqrt{-x^2 + 52\,x + 36} & 0 < x \le 44 \end{cases} :$$

a) Grafen for f skal tegnes i det interval, hvor funktionen er defineret:

$plot(f(x), x = -15..44, y = 0..30, color = blue, thickness = 5)$



b) Formlen for buelængden kan bruges til at finde længden af den krumme del:

$$l = \int_0^{44.} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \overset{\text{simplify}}{=} 55.61849108$$

Dvs. den **krumme del er 55,6 cm**

Opgave 13:

$with(Gym):$

a) Data hentes med 'Tools'-'Assistants'-'Import Data'.

$$M := \begin{bmatrix} 83.1 & 6.59 \\ 83.0 & 6.49 \\ 82.8 & 6.52 \\ 82.7 & 6.53 \\ 82.4 & 6.61 \\ 82.5 & 6.55 \\ 82.2 & 6.57 \\ 82.3 & 6.59 \\ 82.2 & 6.57 \\ 82.0 & 6.49 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

61 × 2 Matrix

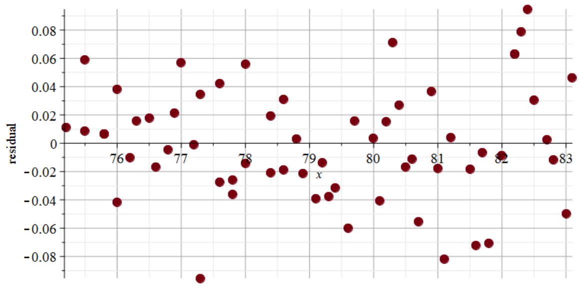
Først bestemmes en forskrift for den lineære model, der er antaget at gælde:

$l(v) := LinReg(M, v) = v \rightarrow LinReg(M, v)$

$l(v) = 0.0411476127767431\, v + 3.12467719457650$

Så tegnes et residualplot:

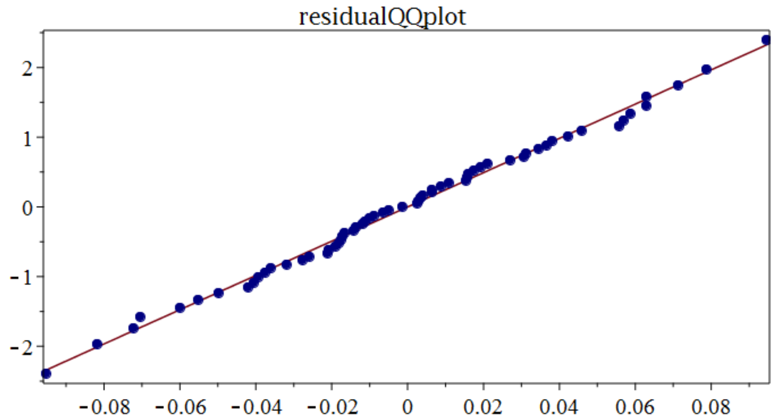
$plotResidualer(M, l)$



Residualerne ser ud til at fordele sig usystematisk omkring 0, hvilket tyder på, at det er passende med en lineær model.

b) For at undersøge, om residualerne er normalfordelte, laves et QQ-plot af residualerne:

$residualQQplot(M, l)$



Da punkterne med god tilnærmelse danner en ret linje, er residualerne med god tilnærmelse normalfordelte.

Et 95%-konfidensinterval for hældningen bestemmes ved hjælp af Gym-kommandoen *testLin*.

$testLin(M)$

	a	b
Koefficient	0.041148	3.124677
Standardfejl	0.002292	0.181607
t-stat	17.953392	17.205731
p-værdi	0.000000	0.000000
Nedre 95.00%	0.036562	2.761283
Øvre 95.00%	0.045734	3.488072
Frihedsgrader	59	

Dvs. 95%-konfidensintervallet for a er **[0,037 ; 0,046]**

<u>*Opgave 14:*</u> $a > 0$

Fortjeneste (kr.)	-10	a	a^2
Sandsynlighed	0,70	0,20	0,10

a) Man finder gennemsnittet ved at vægte fortjenesterne med deres sandsynligheder. Når $a = 5$ fås:

$$E(X) = (-10 \cdot 0,7 + 5 \cdot 0,20 + 5^2 \cdot 0,1)\text{kr.} = (-7 + 1 + 2,5)\text{kr.} = \underline{\underline{-3,5\,\text{kr.}}}$$

b) Gennemsnittet udtrykt ved a er:

$$E(X) = -10 \cdot 0,7 + a \cdot 0,20 + a^2 \cdot 0,1 = 0,1 \cdot a^2 + 0,2 \cdot a - 7$$

Udtrykket er et polynomium i a, og grafen er en parabel med grenene opad.
Skæringspunktet med førsteaksen bestemmes:

$$0.1 \cdot a^2 + 0.2 \cdot a - 7 = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{a = 7.426149773\}, \{a = -9.426149773\}$$

Det er oplyst, at a er positiv, og da grenene vender opad, vil spilleren i gennemsnit vinde penge, hvis $\underline{\underline{a > 7.43}}$

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>*Opgave 15:*</u> $\frac{dT}{dx} = 1{,}54 - 0{,}259 \cdot (T - 22)$

$with(Gym)$:

a) Veksthastighed findes ved indsættelse af $t = 26$ i differentialligningen:

$$\frac{dT}{dx} = 1.54 - 0.259 \cdot (26 - 22) = 0.504$$

Dvs. **temperaturens væksthastighed er 0,504** $\frac{\mathbf{°C}}{\mathbf{t}}$

b) Først findes den partikulære løsning til differentialligningen, hvor starttemperaturen er 22 °C.

$$T'(x) = 1.54 - 0.259 \cdot (T(x) - 22),\ T(0) = 22 \xrightarrow{\text{solve DE}} T(x) = \frac{1034}{37} - \frac{220\, e^{-\frac{259\, x}{1000}}}{37}$$

Forskriften kan bruges til at bestemme, hvornår temperaturen er mindst 27 °C:

$$solve\left(\frac{1034.}{37} - \frac{220\, e^{-\frac{259\, x}{1000}}}{37} \geq 27, x\right) = [7.097604172, \infty)$$

Dvs. efter **7,1 timer er det sikkert at slippe fisken ned i akvariet.**

<u>*Opgave 16:*</u> $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 12t \\ t^2 - 2t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

a) $r(t) := \langle t^3 - 12 \cdot t, t^2 - 2\, t \rangle$:

Koordinaterne til Q bestemmes ved at indsætte den oplyste t-værdi -2 i forskriften:

$$r(-2) = \begin{bmatrix} 16 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Dvs. $\underline{\underline{Q(16, 8)}}$

Den anden t-værdi svarende til dobbeltpunktet findes ved at udnytte, at begge koordinatfunktioner skal give de angivne værdier (Q's koordinater):

$$t^3 - 12 \cdot t = 16,\ t^2 - 2\, t = 8 \xrightarrow{\text{solve}} \{t = -2\}, \{t = 4\}$$

Vi kender allerede den første løsning, så $\underline{\underline{t_0 = 4}}$

b) Som retningsvektorer for tangenterne i punktet kan man anvende hastighedsvektorerne:

$$a := r'(-2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$b := r'(4) = \begin{bmatrix} 36 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Vinklen mellem disse vektorer bestemmes med formlen $\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$:

$$Cos(v) = \frac{dotP(a, b)}{len(a) \cdot len(b)} \xrightarrow{\text{solve for v}} [[v = 99.46232221]]$$

Denne vinkel er stump, så den søgte vinkel er supplementvinklen til denne vinkel:

$v_{spids} = 180 - 99.46232221 = 80.53767779$

$\underline{\underline{v_{spids} = 80.5°}}$

Opgave 17: Matrixregning.

Opgave 18: $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

a) $f(x, y) := x^3 - 3\cdot x\cdot y + y^3$:

De partielt afledede kan hurtigt bestemmes i hånden, men her anvendes Maple:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)) = 3x^2 - 3y$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f(x,y)) = 3y^2 - 3x$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y \qquad og \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x}}$$

b) Først bestemmes de to stationære punkter:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)) = 0, \ \frac{\partial}{\partial y}(f(x,y)) = 0 \xrightarrow{\text{solve}}$$

$$\{x=0, y=0\}, \{x=1, y=1\}, \left\{x = -\frac{1}{2} - \frac{I\sqrt{3}}{2}, y = -\frac{1}{2} + \frac{I\sqrt{3}}{2}\right\}, \left\{x = -\frac{1}{2} + \frac{I\sqrt{3}}{2}, y = -\frac{1}{2} - \frac{I\sqrt{3}}{2}\right\}$$

De to sidste løsninger er komplekse, så de forkastes.

De to første giver punkterne $(0, 0, 0)$ og $(1, 1, -1)$

Arten af stationære punkter bestemmes ved at udregne determinanten af Hesse-matricen.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(f(x,y)) = 6x$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(f(x,y)) = 6y$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(f(x,y)) = -3$$

$$det(H) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(f(x,y))\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2}(f(x,y)) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(f(x,y))\right)^2 = 6x\cdot 6y - 9 = 36xy - 9$$

$(0, 0, 0)$: $det(H) = 36\cdot 0\cdot 0 - 9 = -9 < 0$, dvs. **$(0, 0, 0)$ er et saddelpunkt.**

(1,1,-1): $\det(H) = 36\cdot 1\cdot 1 - 9 = 27 > 0$, dvs. fortegnet for en af de dobbeltafledede skal tjekkes:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 6\cdot 1 = 6 > 0$$, dvs. **(1,1,-1) er et lokalt minimumspunkt.**

Opgave 19: $f(x) = \frac{1}{x}$

a) Først findes det sted, hvor grafen for f skærer den vandrette linje med ligningen $y = 5$:

$$f(x) := \frac{1}{x} :$$

$$f(x) = 5 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{x = \frac{1}{5}\right\}$$

Så kan rumfanget af omdrejningslegemet bestemmes:

$$V = V_{cylinder} + V_{grafdel} = \pi\cdot 5^2\cdot\frac{1}{5} + \int_{\frac{1}{5}}^{5} \pi\cdot f(x)^2\,dx = \frac{49\pi}{5} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 30.78760801$$

Dvs. $\underline{\underline{V = \frac{49}{5}\cdot\pi}}$

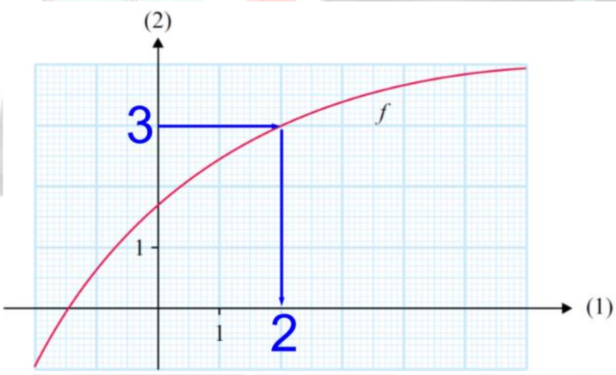
Vejledende sæt 2:

Første delprøve

Opgave 1: Stamfunktionen bestemmes ved ledvis integration, og så anvendes den til bestemmelse af værdien af det bestemte integral.

$$\int_1^2 \left(8x^3+6x^2\right)dx = \left[2x^4+2x^3\right]_1^2 = \left(2\cdot 2^4+2\cdot 2^3\right)-\left(2\cdot 1^4+2\cdot 1^3\right)=\left(32+16\right)-\left(2+2\right)=\underline{\underline{44}}$$

Opgave 2: Da den omvendte funktion bytter om på *x*- og *y*-værdier, går man ind fra 3 på andenaksen og aflæser:



Dvs. $f^{-1}(3)=\underline{\underline{2}}$

Opgave 3: $f(x)=4\cdot e^{x^2+2x-3}$

a) Funktionsværdien bestemmes ved indsættelse i funktionsforskriften:

$$f(1)=4\cdot e^{1^2+2\cdot 1-3}=4\cdot e^0=4\cdot 1=\underline{\underline{4}}$$

b) For at bestemme monotoniforholdene skal man anvende den afledede funktion, og det bemærkes, at *f* er en sammensat funktion:

$$f'(x)=4\cdot(2x+2)\cdot e^{x^2+2x-3}$$

Ved hjælp af nulreglen findes det eller de steder, hvor den afledede funktion er 0:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4\cdot(2x+2)\cdot e^{x^2+2x-3}=0 \Leftrightarrow 2x+2=0 \vee e^{x^2+2x-3}=0 \Leftrightarrow x=-1$$

Sidste biimplikation skyldes, at eksponentialfunktioner aldrig antager værdien 0.
Så findes den anden afledede af f. Der er nu tale om både en produktfunktion og en sammensat funktion:

$$f''(x)=4\cdot 2\cdot e^{x^2+2x-3}+4\cdot(2x+2)\cdot(2x+2)\cdot e^{x^2+2x-3}=4\cdot e^{x^2+2x-3}\cdot\left(2+(2x+2)^2\right)$$

Fortegnet for den anden afledede bestemmes det sted, hvor den første afledede er 0:

$f''(-1)=4\cdot e^{(-1)^2+2\cdot(-1)-3}\cdot\left(2+\left(2\cdot(-1)+2\right)^2\right)=4\cdot e^{-4}\cdot 2>0$, dvs. lokalt minimumssted.

Altså er monotoniforholdene:

***f* er aftagende i intervallet]-∞,-1] og voksende i [-1,∞[**

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

<u>*Opgave 4:*</u> $f(x) = 2 \cdot e^x - x^2 - 2x$ $\qquad y' = x^2 + y - 2$

Først bestemmes den afledede funktion:

$f'(x) = 2 \cdot e^x - 2x - 2$

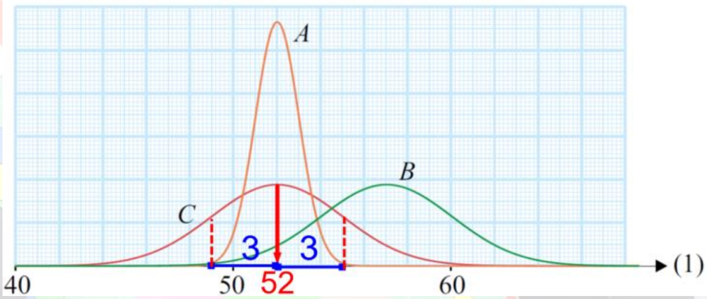
Det undersøges, om *f* er en løsning til differentialligningen, ved at indsætte funktionsudtrykket og udtrykket for den afledede funktion i differentialligningen og se, om man får en identitet.

$2 \cdot e^x - 2x - 2 = x^2 + \left(2 \cdot e^x - x^2 - 2x\right) - 2 \Leftrightarrow$

$2 \cdot e^x - 2x - 2 = 2 \cdot e^x - 2x - 2$

Da dette er en identitet, **er *f* en løsning til differentialligningen.**

<u>*Opgave 5:*</u> Middelværdierne aflæses lodret under maksimumspunkterne for graferne:



Begge graferne *A* og *C* hører altså til normalfordelinger med middelværdien 52.
68,3% af arealet under grafen skal ligge inden for én spredning fra middelværdien, hvilket virker rimeligt for grafen *C*, mens det ikke stemmer med grafen *A*, hvor tallet ser ud til at være over 99%.
Det er altså **grafen *C***, der hører til den normalfordelte stokastiske variabel med $\mu = 52$ og $\sigma = 3$

<u>*Opgave 6:*</u> Matrixregning.

<u>*Opgave 7:*</u> $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - t \\ \frac{1}{2}t^2 - t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ $\qquad l: x - y = 2$

a) Hastighedsfunktionen findes ved at differentiere stedfunktionen:

$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 - 1 \\ t - 1 \end{pmatrix}$

Så kan hastighedsvektoren til tiden 0 bestemmes: $\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0^2 - 1 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$

b) Ud fra ligningen for linjen *l* kan man aflæse en normalvektor til linjen til $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Hastighedsvektoren er parallel med linjen, når den står vinkelret på en normalvektor til linjen, så med prikproduktet undersøges det, hvornår hastighedsvektoren er ortogonal med $\vec{n}(t)$.

$$\vec{v}(t) \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{v}(t) \bullet \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3t^2 - 1 \\ t - 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left(3t^2 - 1\right) \cdot 1 + (t - 1) \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3t^2 - t = 0 \Leftrightarrow t \cdot (3t - 1) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee 3t - 1 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{t = 0 \vee t = \frac{1}{3}}}$$

Opgave 8: Da S angiver antallet af skarvkolonier til tiden t, angives hastigheden med $\frac{dS}{dt}$.

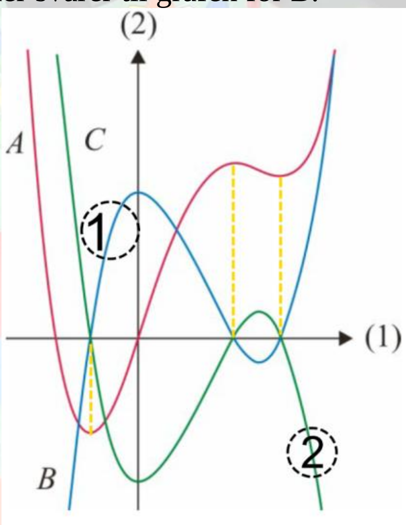
Forskellen mellem 67 og antal skarvkolonier er: $67 - S$.

Produktet mellem ovenstående og antal skarvkolonier er: $S \cdot (67 - S)$.

Da ovenstående skal være proportionalt med hastigheden, har man: $\frac{dS}{dt} = k \cdot S \cdot (67 - S)$

Da proportionalitetskonstanten er 0,0029, har man: $\underline{\underline{\frac{dS}{dt} = 0{,}0029 \cdot S \cdot (67 - S)}}$

Opgave 9: Ved at betragte den del af grafen for B, der er markeret med en stiplet cirkel nr. 1 (se nedenfor), kan man se, at grafen for B ikke kan svare til stamfunktionen F, for her er tangenthældningen positiv, mens graferne for A og C ligger under førsteaksen, så ingen af disse kunne være den afledede af den funktion, der svarer til grafen for B:



Ved at betragte den stiplede cirkel nr. 2 kan man se, at grafen C heller ikke kan svare til stamfunktionen F, for her er negativ tangenthældning, mens de to andre funktioner ligger over førsteaksen, hvorfor de ikke kan svare til den afledede af den funktion, der svarer til C.

Altså er *A* graf for stamfunktionen *F*.

De stiplede gule linjer angiver de steder, hvor F (svarende til grafen for A) har lokale ekstrema. Her skal den afledede funktion – altså f – have nulpunkter. Dette gælder imidlertid for begge de resterende funktioner. Men ved at kigge f.eks. mellem de to første ekstremumssteder ser man, at det er **grafen *B*, der svarer til *f***, fordi hældningerne for tangenterne til A er positive i dette interval, hvilket stemmer med, at grafen B her ligger over førsteaksen.

Opgave 10: $X \sim b\left(4, \frac{1}{3}\right)$

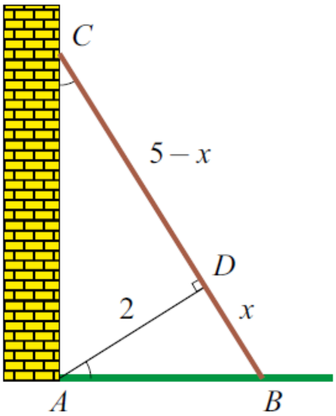
Man kan udregne sandsynligheden ved hjælp af binomialformlen

$$P(X = r) = K(n,r) \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$$

Da $n = 4$ og $p = \frac{1}{3}$, har man:

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{4-2} = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{9} = 6 \cdot \frac{4}{81} = \underline{\underline{\frac{24}{81}}}$$

Opgave 11:



Da mur og jord danner en ret vinkel, er vinklerne $\angle BAD$ og $\angle CAD$ komplementære.
Da vinkel $\angle ADC$ er ret, er $\angle ACD$ og $\angle CAD$ komplementære.
Dermed er $\angle ACD = \angle BAD$ (hvilket egentlig også er angivet på figuren), og alle trekanterne *ABC*, *ACD* og *ABD* er derfor ensvinklede (da de alle er retvinklede og har yderligere en vinkel ens).
Da forholdene mellem korresponderende sidepar er ens, har man altså:

$$\frac{x}{2} = \frac{2}{5-x} \Leftrightarrow x\cdot(5-x) = 2\cdot 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-4)\cdot(x-1) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 4 \ \vee \ x = 1}}$$

Anden delprøve

Opgave 12:

a) Exceptionelle udfald ligger mere end tre spredninger fra middelværdien. Da middelværdien er 0,53 kg og spredningen er 0,20 kg (og tre spredninger dermed 0,60 kg), ligger de exceptionelle udfald i den høje ende over 1,13 kg. Da 1 kg < 1,13 kg (en fysiker ville nok gerne have haft nogle flere betydende cifre på "1 kg") **er denne mængde IKKE et exceptionelt udfald.**

b) Tæthedsfunktionen for den konkrete normalfordeling er:

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot 0.2} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-0.53)^2}{0.2^2}} :$$

Så kan sandsynligheden for at udlede mindre end 0,70 kg beregnes ud fra fordelingsfunktionen.

$$F(0.70) = \int_{-\infty}^{0.7} f(x)\, \mathrm{d}x = 0.8023374570$$

Dvs. sandsynligheden er **80%**

Man kan også bruge Gym-pakkens *normalcdf*:

$with(Gym)$:

$normalcdf(0.53, 0.2, 0.7) = 0.802337456877308$

Opgave 13: $f(x) = 25 \cdot x^4 - \frac{2}{x} \quad , \quad x > 0$

a) Samtlige stamfunktioner til f er på formen:

$$F_k(x) = \int f(x)\, \mathrm{d}x = 5\,x^5 - 2 \cdot \ln|x| + k = 5\,x^5 - 2 \cdot \ln(x) + k$$

Man kan fjerne numerisktegnet, da x-værdierne er positive.

Punktet $P(1, 8)$ anvendes til at bestemme k-værdien:

$$8 = 5 \cdot 1^5 - 2 \cdot \ln(1) + k \Leftrightarrow 8 = 5 - 2 \cdot 0 + k \Leftrightarrow k = 3$$

Dvs. $\underline{\underline{F(x) = 5 \cdot x^5 - 2 \cdot \ln(x) + 3}}$

Opgave 14: Matrixregning

Løsningerne er hentet på www.szymanskispil.dk Quizspillene ASHRAM, MIR og SPORTSNØRD

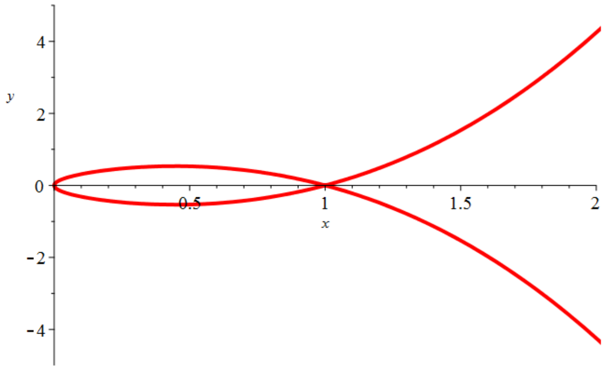
Opgave 15: $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} t^2 \\ t^5-t \end{pmatrix}$; $-2\le t\le 2$ $\qquad Q(1,0)$

$with(Gym):$

For at få et overblik over opgaven tegnes den del af kurven, hvor dobbeltpunktet befinder sig:

$r(t) := \langle t^2, t^5-t\rangle :$

$plot\left(\left[r(t)_1, r(t)_2, t=-2..2\right], x=0..2, y=-5..5, color=red, thickness=4\right)$



a) Q's koordinater giver en ligning for hver af koordinatfunktionerne, dvs. man får et ligningssystem med to ligninger:

$\left[t^2=1, t^5-t=0\right] \xrightarrow{\text{solve}} \{t=1\}, \{t=-1\}$

Dvs. $\underline{\underline{t_1=-1 \text{ og } t_2=1}}$

b) Numerisktegnet, der ellers optræder i arealudtrykket, er udeladt, da denne omløbsretning giver et positivt resultat.

$$T=\frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1} dotP(r'(t), hat(r(t)))\,\mathrm{d}t=\frac{16}{21}$$

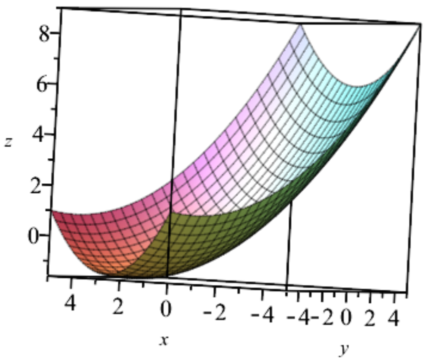
Dvs. $\underline{\underline{T=\frac{16}{21}}}$

Opgave 16: $f(x,y)=0{,}1\cdot x^2-0{,}8\cdot x+0{,}1\cdot y^2$ $\qquad P(0,0,0)$

a) Grafen kan tegnes med et 3D-plot.

$f(x,y) := 0.1\cdot x^2-0.8\cdot x+0.1\cdot y^2 :$

$z=f(x,y)\ \rightarrow$



b) For at bestemme ligningen for tangentplanen skal man anvende formel 196
i formelsamlingen. Dvs. man skal kende de partielt afledede:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)) = 0.2\,x - 0.8$$

$$f'_x(0,\ 0) = 0.2\cdot 0 - 0.8 = -0.8$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f(x,y)) = 0.2\,y$$

$$f'_y(0,\ 0) = 0.2\cdot 0 = 0$$

Sammen med *P*'s koordinater anvendes disse værdier til at bestemme tangentplanens ligning:

$$z = z_0 + f'_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0)$$

$$z = 0 - 0.8\cdot(x - 0) + 0\cdot(y - 0) \Leftrightarrow \underline{\underline{0.8\cdot x + z = 0}}$$

c)

$$0.9 = f(x,y)$$

$$0.9 = 0.1\,x^2 - 0.8\,x + 0.1\,y^2$$

Dette er ligningen for en cirkel. Den skal om på formen $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$,
så man kan aflæse radius. Så først forlænges ligningen med 10:

$$9 = x^2 - 8\,x + y^2$$

Så kvadratkompletteres højresiden:

$$(x-4)^2 + (y-0)^2 = 9 + 4^2$$

$$(x-4)^2 + (y-0)^2 = 25 = r^2$$

Dvs. $\underline{\underline{r = 5}}$

Opgave 17: $\dfrac{dh}{dt} = -15\cdot h^{-\frac{3}{2}} \qquad h(0) = 30$

a) Man kan løse differentialligningen med den angivne startbetingelse:

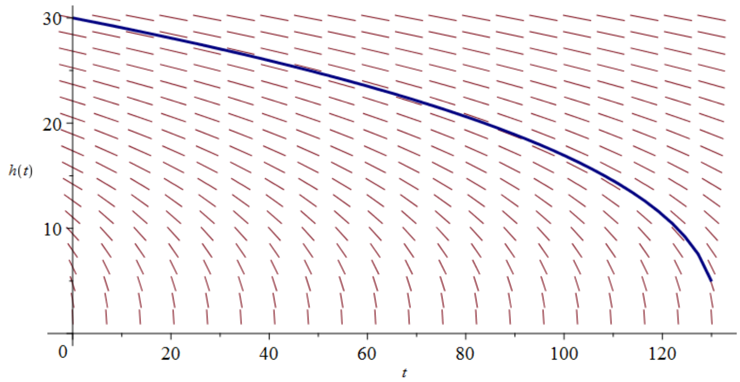
$$\left[h'(t) = -15\cdot h(t)^{-\frac{3}{2}},\ h(0) = 30\right] \xrightarrow{\text{solve DE}} h(t) = \frac{\left(28800\sqrt{30} - 1200\,t\right)^{2/5}}{4}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{h(t) = \frac{\left(28800\sqrt{30} - 1200\,t\right)^{2/5}}{4}}}}$$

$with(Gym)$:

b) Med Gym-pakkens *linjeelementer* eller *hældningsfelt* kan man tegne hældningsfeltet:

$$linjeelementer\left(h'(t) = -15\cdot h(t)^{-\frac{3}{2}},\ h(t),\ t = 0..130,\ h = 0..30,\ [h(0) = 30]\right)$$



c) Beholderen er tom, når $h(t) = 0$:

$$\frac{\left(28800\sqrt{30} - 1200\,t\right)^{2/5}}{4} = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{t = 24\sqrt{30}\} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} \{t = 131.4534138\}$$

Dvs. **beholderen er tom 131,5 sekunder efter åbningen af hanen.**

Opgave 18:

$with(Gym)$:

a) Man skal anvende rumfangsformlerne, der står på side 47 i formelsamlingen:

$$V_{kegle} = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h$$

$$V_{cylinder} = \pi\cdot r^2\cdot h$$

Da rumfanget af hele tragten er 40 dm^3, har man:

$$40 = V_{kegle} + V_{cylinder}$$

$$40 = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot(2\cdot r) + \pi\cdot r^2\cdot s \xrightarrow{\text{isolate for s}} s = -\frac{-40 + \frac{2\,\pi\,r^3}{3}}{\pi\,r^2}$$

Dvs. $\underline{\underline{s = \frac{120 - 2\cdot\pi\cdot r^3}{3\cdot\pi\cdot r^2}}}$

b) Igen skal formlerne på side 47 i formelsamlingen anvendes:

$$\mathrm{O}_{cylinder} = 2\cdot\pi\cdot r\cdot h$$

$$\mathrm{O}_{kegle} = \pi\cdot r\cdot l_{side}$$

Længden af siden (l_{side}) kan bestemmes med Pythagoras: $l_{side} = \sqrt{h^2 + r^2}$

Hermed får man overfladearealet:

$$\mathrm{O} = \mathrm{O}_{cylinder} + \mathrm{O}_{kegle} = 2\cdot\pi\cdot r\cdot s + \pi\cdot r\cdot\sqrt{(2\,r)^2 + r^2} = 2\cdot\pi\cdot r\cdot\frac{120 - 2\cdot\pi\cdot r^3}{3\cdot\pi\cdot r^2} + \pi\cdot r\cdot\sqrt{(2\,r)^2 + r^2}$$

Udtrykket på højresiden reduceres:

$$\mathrm{O} = 2\cdot\frac{120 - 2\cdot\pi\cdot r^3}{3\cdot r} + \pi\cdot r\cdot\sqrt{5\,r^2} = \frac{240}{3\cdot r} - \frac{4\cdot\pi\cdot r^3}{3\cdot r} + \pi\cdot r^2\cdot\sqrt{5} = \underline{\underline{\frac{80}{r} + r^2\cdot\pi\cdot\left(-\frac{4}{3} + \sqrt{5}\right)}}$$

Maples 'simplify' kan føre til et resultat, der kan reduceres til det angivne udtryk:

$$2\cdot\pi\cdot r\cdot\frac{120 - 2\cdot\pi\cdot r^3}{3\cdot\pi\cdot r^2} + \pi\cdot r\cdot\sqrt{(2\,r)^2 + r^2} \xrightarrow{\text{assuming positive}} \frac{3\,\pi\,r^3\sqrt{5} - 4\,\pi\,r^3 + 240}{3\,r}$$

c) **local** O : $\mathrm{O}(r) := \frac{80}{r} + r^2\cdot\pi\cdot\left(-\frac{4}{3} + \sqrt{5}\right)$:

Først findes det eller de steder i det angivne interval, hvor den afledede er 0:

$fintervalsolve(\mathrm{O}'(r) = 0, r = 0..4) = [2.416109815]$

Fortegnet for den anden afledede bestemmes dette sted:

$\mathrm{O}''(2.416109815) = 11.34409811 + 2\,\pi\left(\sqrt{5} - \frac{4}{3}\right) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 17.016 > 0$ dvs. lokalt minimumssted.

Dvs. tragtens ydre overfladeareal er mindst muligt, når $\underline{\underline{r = 2.4 \text{ dm}}}$