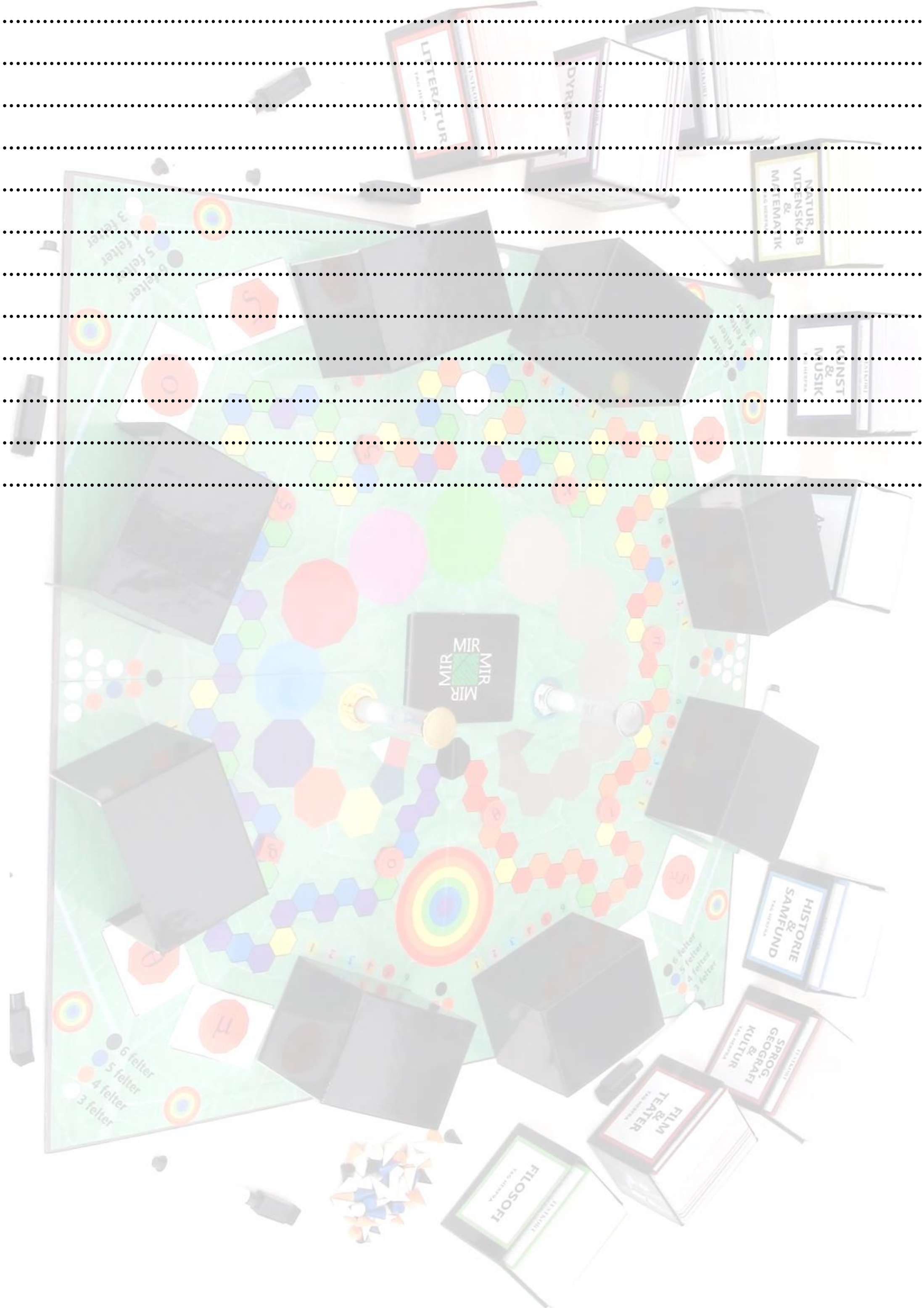
Løsninger til Vejledende Enkeltopgaver Matematik stx A-niveau 2019

Indholdsfortegnelse



1.D1

1.D1.1: $x+2=\dfrac{4}{x-1}$

Da man ikke kan dividere med 0, er $G=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$$x+2=\frac{4}{x-1} \Leftrightarrow (x+2)\cdot(x-1)=4 \Leftrightarrow x^2+2x-x-2=4 \Leftrightarrow x^2+x-6=0$$

Denne andengradsligning kan løses med diskriminantmetoden, men man kan også (som vist her) faktorisere og anvende nulreglen:

$$x^2+x-6=0 \Leftrightarrow (x+3)\cdot(x-2)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=-3 \;\vee\; x=2}}$$

Begge løsninger tilhører grundmængden og er derfor gyldige.

1.D1.2: $1=\dfrac{x^2}{3x+4}$

Da man ikke kan dividere med 0, er $G=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$

$$1=\frac{x^2}{3x+4} \Leftrightarrow 1\cdot(3x+4)=x^2 \Leftrightarrow 3x+4=x^2 \Leftrightarrow 0=x^2-3x-4$$

Denne andengradsligning kan løses med diskriminantmetoden, men man kan også (som vist her) faktorisere og anvende nulreglen:

$$0=x^2-3x-4 \Leftrightarrow 0=(x-4)\cdot(x+1) \Leftrightarrow \underline{\underline{x=4 \;\vee\; x=-1}}$$

Begge løsninger tilhører grundmængden og er derfor gyldige.

1.D1.3: $\begin{matrix} y=x+2 \\ x\cdot y-6x+3=0 \end{matrix}\quad ;\; G=\mathbb{R}^2$

Ligningssystemet løses ved substitutionsmetoden, hvor man udnytter, at den øverste ligning giver et udtryk for *y*, der kan indsættes på *y*'s plads i den nederste ligning:

$$x\cdot(x+2)-6x+3=0 \Leftrightarrow x^2+2x-6x+3=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$$

Denne andengradsligning kan løses med diskriminantmetoden, men man kan også (som vist her) faktorisere og anvende nulreglen:

$$x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow (x-3)\cdot(x-1)=0 \Leftrightarrow x=3 \;\vee\; x=1$$

For hver af disse løsninger anvendes den øverste ligning til at bestemme den tilsvarende *y*-værdi:

$x=1:\quad y=1+2=3$

$x=3:\quad y=3+2=5$

Dvs. ligningssystemets løsninger er $\underline{\underline{(1,3) \text{ og } (3,5)}}$

1.D1.4: $\begin{matrix} 2x+3y=4x-1 \\ -y+3x=2y \end{matrix}\quad ;\; G=\mathbb{R}^2$

Først omskrives ligningerne, så de bliver simplere:

$$2x+3y=4x-1 \Leftrightarrow 3y=4x-2x-1 \Leftrightarrow 3y=2x-1$$

$$-y+3x=2y \Leftrightarrow 3x=2y+y \Leftrightarrow 3x=3y \Leftrightarrow x=y$$

Den nederste ligning fortæller os, at *x*- og *y*-værdien skal være ens, hvilket kan udnyttes i den ovenstående ligning:

$$3x=2x-1 \Leftrightarrow 3x-2x=-1 \Leftrightarrow x=-1$$

Dvs. $\underline{\underline{(x,y)=(-1,-1)}}$

1.D1.5: a) Andengradsligningen kan løses med diskriminantmetoden eller som her ved faktorisering og anvendelse af nulreglen:

$$G=\mathbb{R}: \qquad x^2-x-6=0 \;\Leftrightarrow\; (x-3)\cdot(x+2)=0 \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{x=3 \;\vee\; x=-2}}$$

b) $\dfrac{x^2-x-6}{x+2}$

Det bemærkes, at udtrykket i tælleren svarer til udtrykket i andengradsligningen i opgave a), så hvis man har anvendt faktoriseringsmetoden i a), har man allerede faktoriseringen. Hvis man har anvendt diskriminantmetoden, skal de to løsninger anvendes til at faktorisere udtrykket:

$$\frac{x^2-x-6}{x+2}=\frac{(x-3)\cdot(x+2)}{x+2}=\underline{\underline{x-3}}$$

1.D1.6: a) Andengradsligningen kan løses med diskriminantmetoden eller som her ved faktorisering og anvendelse af nulreglen:

$$G=\mathbb{R}: \qquad x^2-x-6=0 \;\Leftrightarrow\; (x-3)\cdot(x+2)=0 \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{x=3 \;\vee\; x=-2}}$$

b) $G=\mathbb{R}: \qquad (x^2-x-6)\cdot(x+4)=0$

Først anvendes nulreglen, og derefter udnyttes resultatet fra spørgsmål a):

$$(x^2-x-6)\cdot(x+4)=0 \;\Leftrightarrow\; x^2-x-6=0 \;\vee\; x+4=0 \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{x=3 \;\vee\; x=-2 \;\vee\; x=-4}}$$

1.D1.7: $P(x)=(x^2+4x+5)\cdot(x^2-x-2)\cdot(x-3)$

Rødderne er de steder, hvor $P(x)=0$, så nulreglen giver os:

$$0=(x^2+4x+5)\cdot(x^2-x-2)\cdot(x-3) \;\Leftrightarrow\; x^2+4x+5=0 \;\vee\; x^2-x-2=0 \;\vee\; x-3=0$$

Vi ser på de tre ligninger hver for sig og udregner diskriminanten for den første:

$x^2+4x+5=0: \quad d=b^2-4ac=4^2-4\cdot1\cdot5=16-20=-4<0$, dvs. ingen løsninger.

$x^2-x-2=0 \;\Leftrightarrow\; (x-2)\cdot(x+1)=0 \;\Leftrightarrow\; x=2 \;\vee\; x=-1$

$x-3=0 \;\Leftrightarrow\; x=3$

Ligningerne gav os tre løsninger, dvs. *P* har 3 rødder (-1, 2 og 3)

Hvis man udregner diskriminanten for den anden andengradsligning og får, at den er positiv, hvorfor der er to løsninger, skal man (hvis man ikke finder disse) også lige tjekke, at tallet 3 ikke er en løsning (for ellers er der jo kun to forskellige rødder i alt) – med mindre man tilføjer, at rødder kan regnes med multiplicitet.

1.D1.8: $P(x)=(x^2+4x)\cdot(x^2-x-2)\cdot(x-3)$

Rødderne er de steder, hvor $P(x)=0$, så nulreglen giver os:

$$0=(x^2+4x)\cdot(x^2-x-2)\cdot(x-3) \;\Leftrightarrow$$

$$x^2+4x=0 \;\vee\; x^2-x-2=0 \;\vee\; x-3=0 \;\Leftrightarrow$$

$$x\cdot(x+4)=0 \;\vee\; (x-2)\cdot(x+1)=0 \;\vee\; x=3 \;\Leftrightarrow$$

$$x=0 \;\vee\; x=-4 \;\vee\; x=2 \;\vee\; x=-1 \;\vee\; x=3$$

Dvs. de fem rødder er $\underline{\underline{-4,\,-1,\,0,\,2 \text{ og } 3}}$

1.D1.9: $P(x) = (x^2 + 2x + 2) \cdot (x^2 - x + k)$

Rødderne er de steder, hvor $P(x) = 0$, så nulreglen giver os:

$$0 = (x^2 + 2x + 2) \cdot (x^2 - x + k) \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \quad \vee \quad x^2 - x + k = 0$$

Diskriminanten for den første af de to andengradsligninger bestemmes:
$d = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4 < 0$, dvs. ligningen har ingen løsninger, og dermed bidrager denne faktor ikke med nogen rødder.
P har altså 1 rod, netop når andengradsligningen $x^2 - x + k = 0$ har én løsning. Dvs. diskriminanten for andengradsligningen skal være 0:

$$x^2 - x + k = 0: \; d = 0 \Leftrightarrow b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k = 0 \Leftrightarrow 1 - 4k = 0 \Leftrightarrow 1 = 4k \Leftrightarrow \underline{\underline{k = \frac{1}{4}}}$$

1.D1.10: $\frac{p \cdot (4p + 2q)}{2p} = \frac{4p + 2q}{2} = \underline{\underline{2p + q}}$

1.D1.11: Første led reduceres med første kvadratsætning, mens man i andet led med fordel kan reducere parenteserne, inden man forholder sig til minus-tegnet foran leddet:

$$(x + 2y)^2 - (x - y) \cdot (x + 2y) = x^2 + 4y^2 + 4xy - (x^2 + 2xy - xy - 2y^2) =$$

$$x^2 + 4y^2 + 4xy - x^2 - 2xy + xy + 2y^2 = \underline{\underline{3xy + 6y^2}} \qquad \text{evt. } 3y(x + 2y)$$

1.D1.12: $\frac{x^2 + 2x}{(x+2) \cdot (x-5)} = \frac{x \cdot (x+2)}{(x+2) \cdot (x-5)} = \underline{\underline{\frac{x}{x-5}}}$

1.D1.13: $\frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 5x} = \frac{(x-5) \cdot (x+1)}{x \cdot (x-5)} = \underline{\underline{\frac{x+1}{x}}}$

1.D1.14: Tælleren genkendes som højresiden i første kvadratsætning, og nævneren er tredje kvadratsætning:

$$\frac{4x^2 + 4x \cdot y + y^2}{4x^2 - y^2} = \frac{(2x + y)^2}{(2x + y) \cdot (2x - y)} = \underline{\underline{\frac{2x + y}{2x - y}}}$$

1.D1.15: a) Vinkel C er en ret vinkel (da det er en kvartcirkel). Og da stigen tangerer kvartcirklen (fordi den kun rører i ét punkt), er $\angle CDA$ og $\angle BDC$ som angivet også rette.

Da vinkel C er ret, er vinklerne $\angle ACD$ og $\angle BCD$ komplementære, dvs. $\angle ACD = 90° - \angle BCD$.
Da trekant ACD er retvinklet, er $\angle ACD$ og $\angle CAD$ komplementære, dvs. $\angle ACD = 90° - \angle CAD$.
Dermed er $\angle BCD$ og $\angle CAD$ kongruente, dvs. $\angle BCD = \angle CAD$.

Trekanterne ACD og BCD er altså begge retvinklede og har yderligere en vinkel tilfælles (og dermed også den sidste vinkel tilfælles, da de har samme vinkelsum), og de er dermed ensvinklede, hvorfor forholdet mellem korresponderende sider er det samme for alle alle tre sidepar.

Siderne $AC_{\triangle ACD}$ og $BC_{\triangle BCD}$ er korresponderende.
Siderne $AD_{\triangle ACD}$ og $CD_{\triangle BCD}$ er korresponderende.
Siderne $CD_{\triangle ACD}$ og $BD_{\triangle BCD}$ er korresponderende.

Dermed gælder: $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|AD|}$, og altså $\underline{\underline{\frac{5-c}{2} = \frac{2}{c}}}$

b) De mulige værdier for c bestemmes ved at løse ligningen. Man må forvente to løsninger, da stigen kan lægges på to måder (lang AC eller lang BC – sidstnævnte vist på figuren):

$$\frac{5-c}{2} = \frac{2}{c} \Leftrightarrow (5-c)\cdot c = 2\cdot 2 \Leftrightarrow 5c - c^2 = 4 \Leftrightarrow c^2 - 5c + 4 = 0$$

Denne andengradsligning kan løses med diskriminantmetoden eller ved faktorisering og anvendelse af nulreglen (vist her):

$$c^2 - 5c + 4 = 0 \Leftrightarrow (c-4)\cdot(c-1) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{c = 4 \;\vee\; c = 1}}$$

1.D1.16: Trekanterne BCD og ADP deler punktet D, og vinklerne $D_{\triangle BCD}$ og $D_{\triangle ADP}$ er topvinkler og dermed kongruente. Da begge trekanter desuden er retvinklede, har de altså to – og dermed tre – vinkler fælles, dvs. de er ensvinklede, og dermed er forholdene mellem korresponderende sider ens.

BD og AD er korresponderende.
CD og DP er korresponderende.
BC og AP er korresponderende.

Dvs. $\frac{|AP|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|} \Leftrightarrow |AP| = \frac{|AD|}{|BD|}\cdot |BC|$

Ud fra opgaveformuleringen får man: $|AB| = 900\,\text{m}$, $|BC| = 400\,\text{m}$ og $|AD| = 600\,\text{m}$.

Dermed har man også: $|BD| = |AB| - |AD| = 900\,\text{m} - 600\,\text{m} = 300\,\text{m}$

Afstanden fra hoveddøren til udsigtstårnet er altså:

$$|AP| = \frac{600\,\text{m}}{300\,\text{m}}\cdot 400\,\text{m} = \underline{\underline{800\,\text{m}}}$$

1.D1.17: a) Man må gå ud fra, at alle vinkler på figuren er rette vinkler, bortset fra den store vinkel, der må være 270°. To af sidelængderne er ikke angivet, men de kan bestemmes ud fra de andre opgivne mål. Hvis man begynder i øverste venstre hjørne og bevæger sig mod uret, får man omkredsen O til:

$$O = x + (3\,\text{cm} + y) + 4\,\text{cm} + y + (x - 4\,\text{cm}) + 3\,\text{cm} = \underline{\underline{2x + 2y + 6\,\text{cm}}}$$

b) Metalpladen kan med et lodret snit opdeles i to rektangler, så man kan bestemme arealet som (der regnes nu uden enheder, hvor alle længder er opgivet i cm):

$$A = 3 \cdot x + y \cdot 4$$

Da omkredsen skal være 28 cm og arealet 38 cm^2, får man to ligninger:

Omkredsen: $28 = 2x + 2y + 6 \iff 22 = 2x + 2y \iff 11 = x + y \iff y = 11 - x$

Arealet: $38 = 3x + 4y$

Ligningen fra omkredsen giver os et udtryk for y, der kan indsættes på y's plads i arealligningen:

$$38 = 3x + 4\cdot(11 - x) \iff 38 = 3x + 44 - 4x \iff x = 6$$

Indsat i omkredsligningen giver det os: $y = 11 - 6 = 5$

Dvs. $\underline{\underline{x = 6\,\text{cm og } y = 5\,\text{cm}}}$

1.D1.18: $P(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \qquad A(0,1) \qquad B(5,36)$

Punktet A har førstekoordinaten 0, og dermed ligger det på andenaksen. Dermed svarer A's andenkoordinat til polynomiets c-værdi, dvs. $\underline{\underline{c = 1}}$.

b-værdien svarer til hældningen for tangenten til parablen i skæringspunktet med andenaksen (dvs. i dette tilfælde A), og da det er oplyst, at denne hældning er -3, er $\underline{\underline{b = -3}}$.

Koefficienten a bestemmes ved at indsætte B's koordinater i forskriften:

$$36 = a \cdot 5^2 - 3 \cdot 5 + 1 \iff 36 = 25a - 15 + 1 \iff 50 = 25a \iff \underline{\underline{a = 2}}$$

1.D1.19: $f(x) = x^2 + b \cdot x + c \qquad y = -x + 5 \qquad P(1, f(1))$

Da linjen tangerer grafen for f i P, skal de have samme y-værdi dette sted. Da man kender linjens ligning, kan denne fælles y-værdi bestemmes ved at indsætte i linjen ligning:

$$y = -1 + 5 = 4$$

Dvs. både grafen for f og linjen går gennem punktet $P(1,4)$.

Da den angivne tangent har hældningen -1, er $f'(1) = -1$. Dette kan bruges til at bestemme b-værdien:

$$f'(x) = 2x + b$$

$$-1 = 2 \cdot 1 + b \iff \underline{\underline{b = -3}}$$

Og med koordinaterne for P kan c-værdien så bestemmes:

$$4 = 1^2 - 3 \cdot 1 + c \iff 4 = 1 - 3 + c \iff \underline{\underline{c = 6}}$$

1.D1.20: a) Der er en fejl i formuleringen. Opgaven bliver betydeligt sværere at løse, hvis $0 < x < 4$, da man så skal tage hensyn til, at man på et tidspunkt ikke længere kan klippe et kvadrat. Og da spørgsmål b) omhandler dette, er det tydeligvis ikke meningen, at man skal forholde sig til det i spørgsmål a). Så hvis man kun tillader *x*-værdier, hvor man kan klippe et kvadrat, får man:

$$A_{tilovers} = T_{trekant} - A_{kvadrat} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g - A_{kvadrat} = \frac{1}{2} \cdot 4\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} - x \cdot x = \underline{\underline{12\,\text{cm}^2 - x^2}}$$

b) Når man klipper det størst mulige kvadrat, får man dannet tre (retvinklede) ensvinklede trekanter med sidelængderne (angivet i cm):

Stor: $\left(4, 6, hyp_{stor}\right)$

Mellem: $\left(x, 6-x, hyp_{mellem}\right)$

Lille: $\left(4-x, x, hyp_{lille}\right)$

Da forholdene mellem korresponderende sider i ensvinklede trekanter er ens, har man altså:

$$\frac{6-x}{6} = \frac{x}{4} \;\Leftrightarrow\; 4 \cdot (6-x) = 6 \cdot x \;\Leftrightarrow\; 24 - 4x = 6x \;\Leftrightarrow\; 24 = 10x \;\Leftrightarrow\; x = 2,4$$

Dvs. $\underline{\underline{x = 2,4\,\text{cm}}}$

Hvis man regner på den lille og den store trekant får man:

$$\frac{x}{6} = \frac{4-x}{4} \;\Leftrightarrow\; 4 \cdot x = 6 \cdot (4-x) \;\Leftrightarrow\; 4x = 24 - 6x \;\Leftrightarrow\; 10x = 24 \;\Leftrightarrow\; x = 2,4$$

Og den længste udregning opstår, hvis man regner på mellem og lille:

$$\frac{x}{6-x} = \frac{4-x}{x} \;\Leftrightarrow\; x \cdot x = (6-x) \cdot (4-x) \;\Leftrightarrow\; x^2 = 24 - 6x - 4x + x^2 \;\Leftrightarrow\; 0 = 24 - 10x \;\Leftrightarrow\; x = 2,4$$

1.D1.21: Da siderne *BD* og *CD* er lige lange, er trekant *BCD* en ligebenet trekant, og vinklerne overfor de lige lange sider er som vist på figuren kongruente (vinklerne angivet med *u*).

Tilsvarende gælder, at da siderne *CD* og *AD* er lige lange, er trekant *ACD* en ligebenet trekant med de kongruente vinkler *A* og *C* angivet med *w* på figuren.

Da vinkelsummen i en trekant er 180°, har man altså:

$$\angle BDC = 180° - u - u = 180° - 2u$$
$$\angle ADC = 180° - w - w = 180° - 2w$$

Vinklerne $\angle BDC$ og $\angle ADC$ er supplementvinkler, dvs:

$$\angle BDC + \angle ADC = 180°$$

$$(180° - 2u) + (180° - 2w) = 180° \;\Leftrightarrow\; 180° = 2u + 2w \;\Leftrightarrow\; 90° = u + w$$

Og da vinkel *C* i trekant *ABC* netop svarer til $u + w$, har man altså $\underline{\underline{C = 90°}}$

2.D1

2.D1.1: $f(x)=\sin\left(\pi\cdot x+\frac{\pi}{2}\right)+3 \qquad g(x)=x^2+2$

Undervejs i udregningen udnyttes det, at sinus er periodisk med perioden 2π :

$$g(f(2))=g\left(\sin\left(\pi\cdot 2+\frac{\pi}{2}\right)+3\right)=g\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+3\right)=g(1+3)=g(4)=4^2+2=16+2=\underline{\underline{18}}$$

2.D1.2: $f(x)=x^3+2x-3 \qquad g(x)=\sqrt{x}+2 \ , \ x\geq 0$

$$g(f(2))=g\left(2^3+2\cdot 2-3\right)=g(8+4-3)=g(9)=\sqrt{9}+2=3+2=\underline{\underline{5}}$$

2.D1.3: $f(x)=3\cdot 2^x \qquad g(x)=\sqrt{x-4} \ , \ x\geq 4$

$$f(g(x))=f\left(\sqrt{x-4}\right)=\underline{\underline{3\cdot 2^{\sqrt{x-4}} \ , \ x\geq 4}}$$

$$g(f(x))=g\left(3\cdot 2^x\right)=\underline{\underline{\sqrt{3\cdot 2^x-4}}}$$

Definitionsmængden for denne funktion bestemmes ved at sikre sig, at udtrykket inde i kvadratroden ikke er negativt:

$$3\cdot 2^x-4\geq 0 \ \Leftrightarrow \ 3\cdot 2^x\geq 4 \ \Leftrightarrow \ 2^x\geq \frac{4}{3} \ \Leftrightarrow \ \underline{\underline{x\geq \log_2\left(\frac{4}{3}\right)}}$$

2.D1.4: $f(x)=x^2+3 \qquad g(x)=\sqrt{x-3} \ , \ x\geq 3$

$$f(g(x))=f\left(\sqrt{x-3}\right)=\sqrt{x-3}^2+3=(x-3)+3=\underline{\underline{x}}$$

Da den sammensatte funktion giver en identitetsfunktion, er *f* og *g* omvendte funktioner, når man for *f* 's vedkommende begrænser definitionsmængden ved at fjerne alle negative tal.

$$g(f(x))=g\left(x^2+3\right)=\sqrt{\left(x^2+3\right)-3}=\sqrt{x^2}=\underline{\underline{|x|}}$$

For ikke-negative funktionsværdier svarer dette til en identitetsfunktion, så med ovennævnte begrænsning af *f* 's definitionsmængde ses det igen, at *f* og *g* er hinandens omvendte funktioner.

2.D1.5: $g(x)=x^2-1 \qquad f(x)=x+1$

Først findes funktionsudtrykket for den sammensatte funktion:

$$g(f(x))=g(x+1)=(x+1)^2-1=x^2+1+2x-1=x^2+2x$$

Og så kan ligningen løses:

$$g(f(x))=0 \ \Leftrightarrow \ x^2+2x=0 \ \Leftrightarrow \ x\cdot(x+2)=0 \ \Leftrightarrow \ x=0 \ \vee \ x+2=0 \ \Leftrightarrow \ \underline{\underline{x=0 \ \vee \ x=-2}}$$

2.D1.6: $g(x)=\sqrt{x}+1 \qquad f(x)=x^2-4x+4$

Først er det vigtigt at genkende funktionsudtrykket for *f* som højresiden i anden kvadratsætning:

$$f(x)=(x-2)^2$$

Derefter findes funktionsudtrykket for den sammensatte funktion:

$$g(f(x))=g\left((x-2)^2\right)=\sqrt{(x-2)^2}+1=|x-2|+1$$

Og til slut kan ligningen løses:

$$|x-2|+1=1 \ \Leftrightarrow \ |x-2|=0 \ \Leftrightarrow \ \underline{\underline{x=2}}$$

2.D1.7: a) Det ses på figuren, at grafen går gennem punktet (2,1), dvs $g(2)=1$ og dermed $\underline{\underline{g^{-1}(1)=2}}$

b) Da $g(2)=1$, løser man ligningen $g(f(x))=1$ ved at løse ligningen $f(x)=2$:

$$x^2-5x+8=2 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow (x-3)\cdot(x-2)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=3 \vee x=2}}$$

2.D1.8: $f(x)=3x+6$

For at bestemme den omvendte funktion til *f* byttes om på argument og funktionsværdi:

$$x=3\cdot f^{-1}(x)+6$$

Og så kan funktionsværdien isoleres:

$$x=3\cdot f^{-1}(x)+6 \Leftrightarrow 3\cdot f^{-1}(x)=x-6 \Leftrightarrow \underline{\underline{f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x-2}}$$

2.D1.9: $f(x)=2x+5 \qquad g(x)=\frac{1}{2}\cdot x-\frac{5}{2}$

$$f(g(x))=f\left(\frac{1}{2}\cdot x-\frac{5}{2}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot x-\frac{5}{2}\right)+5=x-5+5=\underline{\underline{x}}$$

Da den sammensatte funktion er en identitetsfunktion, er **funktionerne *f* og *g* omvendte funktioner.**

2.D1.10: $f(x)=\sqrt{x+2} \qquad g(x)=x^2-2 \quad , \quad x>0$

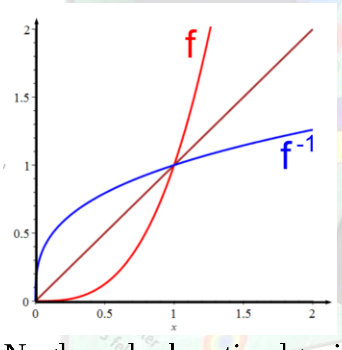
Man kan vise, at *f* og *g* er omvendte funktioner (og dermed herunder, at *g* er den omvendte funktion til *f*), ved at vise, at en af de sammensatte funktioner $f(g(x))$ og $g(f(x))$ er en identitetsfunktion (hvis den ene er, er den anden også).

$$f(g(x))=f(x^2-2)=\sqrt{(x^2-2)+2}=\sqrt{x^2}=|x|=x$$

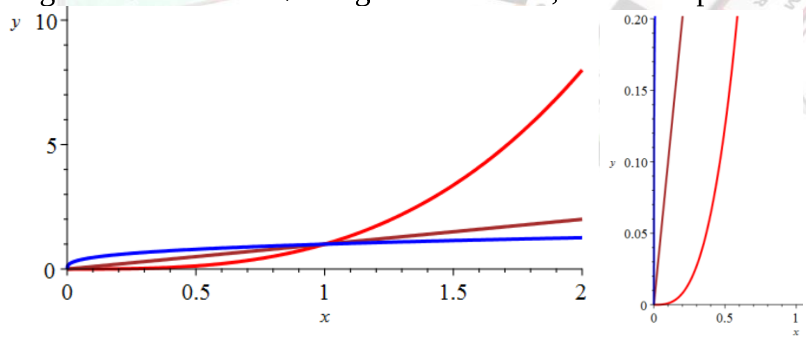
Det sidste lighedstegn følger af, at man kun ser på positive *x*-værdier.

Da den sammensatte funktion er en identitetsfunktion, er *g* den omvendte funktion til *f*.

2.D1.11: Graferne for en funktion og dens omvendte funktion er hinandens spejlinger i linjen med ligningen $y=x$. Dermed får man (hvis man antager, at aksernes skalaer er ens):

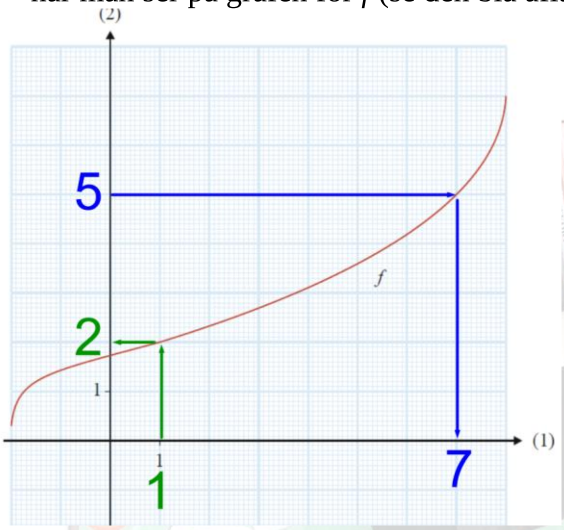


Nogle andre kreative løsninger kunne være, at man så på forskellige akseskalaer:



… eller at man byttede rundt på (1) og (2) på akserne og erstattede f med f^{-1}

2.D1.12: a) Da man ser på den omvendte funktion f^{-1}, svarer 5-tallet i $f^{-1}(5)$ til en værdi på andenaksen, når man ser på grafen for *f* (se den blå aflæsning nedenfor):



Så man kan aflæse, at $\underline{\underline{f^{-1}(5)=7}}$

b) I ligningen $f^{-1}(x)=1$ svarer 1-tallet til en værdi på førsteaksen, når man ser på grafen for *f* (se den grønne aflæsning ovenfor).

$f^{-1}(x)=1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$

2.D1.13: $f(x)=\frac{1}{3}\cdot e^{x^3-12x}$

Det bemærkes, at funktionen er en sammensat funktion med det indre funktionsudtryk x^3-12x:

$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot\left(3x^2-12\right)\cdot e^{x^3-12x}$

Ligningen løses med nulreglen, hvor det udnyttes, at eksponentialfunktioner ikke kan antage værdien 0:

$f'(x)=0$

$\frac{1}{3}\cdot\left(3x^2-12\right)\cdot e^{x^3-12x}=0 \Leftrightarrow 3x^2-12=0 \vee e^{x^3-12x}=0 \Leftrightarrow 3x^2=12 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=-2 \vee x=2}}$

2.D1.14: $f(x)=x^2\cdot\cos(x)\quad,\quad 0\le x\le 2\cdot\pi$ (der er ingen grund til at indføre en begrænset Dm)

Funktionen differentieres ved hjælp af produktreglen:

$f'(x)=2x\cdot\cos(x)+x^2\cdot(-\sin(x))=2x\cdot\cos(x)-x^2\cdot\sin(x)$

Og så kan differentialkvotienten i π findes ved indsættelse i den afledede funktion:

$f'(\pi)=2\cdot\pi\cdot\cos(\pi)-\pi^2\cdot\sin(\pi)=2\cdot\pi\cdot(-1)-\pi^2\cdot 0=\underline{\underline{-2\pi}}$

2.D1.15: $f(x)=\left(x^3-x^2\right)\cdot \mathrm{e}^{x-4}$

Funktionen er produktet af to funktioner, hvoraf den sidste er en sammensat funktion (med mindre man med den første potensregneregel omskriver den til $\mathrm{e}^{-4}\cdot \mathrm{e}^{x}$)

a) $f'(x)=\left(3x^2-2x\right)\cdot \mathrm{e}^{x-4}+\left(x^3-x^2\right)\cdot 1\cdot \mathrm{e}^{x-4}=\mathrm{e}^{x-4}\cdot\left(3x^2-2x+x^3-x^2\right)=\underline{\underline{\mathrm{e}^{x-4}\cdot\left(x^3+2x^2-2x\right)}}$

b) Ligningen løses med nulreglen, hvor det benyttes, at eksponentialfunktioner ikke kan antage værdien 0:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x-4}\cdot\left(x^3+2x^2-2x\right)=0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x-4}=0 \vee \left(x^3+2x^2-2x\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x^2+2x-2\right)\cdot x=0 \Leftrightarrow x^2+2x-2=0 \vee x=0$$

Andengradsligningen løses med diskriminantmetoden:

$d=b^2-4ac=2^2-4\cdot 1\cdot(-2)=4+8=12>0$ dvs. 2 løsninger

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{d}}{2\cdot a}=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2\cdot 1}=-1\pm\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{4}}=-1\pm\sqrt{\frac{12}{4}}=-1\pm\sqrt{3}$$

Dvs. $f'(x)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=-1-\sqrt{3} \vee x=0 \vee x=-1+\sqrt{3}}}$

2.D1.16: $f(x)=x\cdot\ln(x)-x$, $x>0$

a) Produktreglen anvendes til at differentiere funktionen:

$$f'(x)=1\cdot\ln(x)+x\cdot\frac{1}{x}-1=\ln(x)+1-1=\underline{\underline{\ln(x)}}$$

b) Ligningen kan enten løses ved at udnytte, at alle logaritmefunktioner giver 0, når de virker på 1, eller man kan som her anvende den omvendte funktion:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x)=0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\ln(x)}=\mathrm{e}^0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}$$

2.D1.17: $f(x)=7x+8+\cos(x)$

En funktion er voksende netop hvis dens afledede funktion er positiv (evt. nul i enkelte punkter), så den afledede funktion bestemmes:

$f'(x)=7+0-\sin(x)=7-\sin(x)\geq 6$, da sinusfunktionen højest kan antage værdien 1.

Da $f'(x)>0$, **er *f* voksende.**

2.D1.18: $f(x)=2x+1+k\cdot\sin(x)$

a) En funktion er voksende, netop hvis dens afledede funktion er positiv (evt. nul i enkelte punkter), så den afledede funktion bestemmes:

$f'(x)=2+k\cdot\cos(x)$

Da cosinusværdierne ligger i intervallet [-1,1], vil det andet led give værdier i intervallet $\left[-|k|,|k|\right]$.

Dvs. $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow |k|\leq 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{-2\leq k\leq 2}}$

2.D1.19: $f(x)=(x+1)\cdot e^{x^2+x}$

Funktionen er produktet af to funktioner, hvoraf den sidste er en sammensat, så både produktreglen og reglen for sammensat funktion anvendes ved differentiationen:

a) $f'(x)=1\cdot e^{x^2+x}+(x+1)\cdot(2x+1)\cdot e^{x^2+x}=e^{x^2+x}\cdot\left(1+2x^2+x+2x+1\right)=\underline{\underline{e^{x^2+x}\cdot\left(2x^2+3x+2\right)}}$

b) Ligningen løses ved at anvende nulreglen og løse en andengradsligning:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{x^2+x}\cdot\left(2x^2+3x+2\right)=0 \Leftrightarrow e^{x^2+x}=0 \;\vee\; 2x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow 2x^2+3x+2=0$

$d=b^2-4ac=3^2-4\cdot 2\cdot 2=9-16=-7<0$, dvs. ingen løsninger.

Dvs. **ligningen har ingen løsninger**

2.D1.20: $f(x)=\left(x^3+3x\right)\cdot e^{2x}$ $\quad P\left(0,f(0)\right)$

a) $f(0)=\left(0^3+3\cdot 0\right)\cdot e^{2\cdot 0}=(0+0)\cdot e^0=0\cdot 1=\underline{\underline{0}}$

b) Funktionen er produktet af to funktioner, hvoraf den sidste er en sammensat, så både produktreglen og reglen for sammensat funktion anvendes ved differentiationen:

$f'(x)=\left(3x^2+3\right)\cdot e^{2x}+\left(x^3+3x\right)\cdot 2\cdot e^{2x}=e^{2x}\cdot\left(3x^2+3+2x^3+6x\right)=\underline{\underline{e^{2x}\cdot\left(2x^3+3x^2+6x+3\right)}}$

c) For at kunne bestemme en ligning for tangenten, skal man kende funktionsværdien og differentialkvotienten i punktet. Funktionsværdien er udregnet i a), så man mangler kun differentialkvotienten:

$f'(0)=e^{2\cdot 0}\cdot\left(2\cdot 0^3+3\cdot 0^2+6\cdot 0+3\right)=1\cdot 3=3$ (tangenthældningen)

Værdierne indsættes i ligningen for en ret linje ud fra punkt og hældning:

$y-y_0=a\cdot\left(x-x_0\right)$

$y-0=3\cdot(x-0) \Leftrightarrow \underline{\underline{y=3x}}$

2.D1.21: $f'(x)=x^2-10x+16$

For at bestemme monotoniforholdene for f skal man først finde nulpunkter for den afledede funktion:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-10x+16=0 \Leftrightarrow (x-8)\cdot(x-2)=0 \;\vee\; x=2 \;\vee\; x=8$

Fortegnet for den anden afledede funktion bestemmes de steder, hvor den afledede funktion er 0:

$f''(x)=2x-10$

$f''(2)=2\cdot 2-10=-6<0$, dvs. lokalt maksimumssted.

$f''(8)=2\cdot 8-10=6>0$, dvs. lokalt minimumssted.

Så ***f* er voksende i intervallerne]-∞,2] og [8,∞[og aftagende i intervallet [2,8]**

2.D1.22: $f(x)=x^2$ $\quad P(1,-3)$

Da der er tale om tangenter til grafen for *f*, er hældningerne bestemt ved $a=f'(x)=2\cdot x$.

Men hældningerne kan også bestemmes ud fra to punkter på tangenten ($a=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$), og da det ene punkt er *P*, og det andet ligger på grafen for *f* og dermed har koordinaterne $\left(x,x^2\right)$, har man:

$$2x=\frac{x^2-(-3)}{x-1} \Leftrightarrow 2x\cdot(x-1)=x^2+3 \Leftrightarrow 2x^2-2x=x^2+3 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow$$

$$(x+1)\cdot(x-3)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=-1 \;\vee\; x=3}}$$

2.D1.23: Fortegnsskemaet fortæller os, at funktionen har lokalt minimum i $x=1$, da den afledede funktions fortegn er negativt på venstre side og positivt på højre side af 1.

Da der ikke er andre ekstremumssteder, og da funktionen er differentiabel og dermed kontinuert, er $x=1$ også et **globalt** minimumssted.

Og da $f(1)=4$, er **4 det globale minimum, og da** $2<4$**, har ligningen** $f(x)=2$ **ingen løsninger.**

2.D1.24: $f(x)=\ln\left(x^2+1\right) \qquad P(0, f(0))$

For at kunne bestemme en ligning for tangenten, skal man kende funktionsværdien og differentialkvotienten i punktet. Funktionen er en sammensat funktion, hvilket man skal tage hensyn til, når den differentieres:

$$f'(x)=2x\cdot\frac{1}{x^2+1}=\frac{2x}{x^2+1}$$

Røringspunktets andenkoordinat: $f(0)=\ln\left(0^2+1\right)=\ln(1)=0$

Tangentens hældning: $f'(0)=\dfrac{2\cdot 0}{0^2+1}=\dfrac{0}{1}=0$

Med disse værdier kan tangentens ligning bestemmes:

$$y-y_0=a\cdot(x-x_0)$$

$$y-0=0\cdot(x-0) \Leftrightarrow \underline{\underline{y=0}}$$

2.D1.25: $f(x)=x^3+k\cdot x^2+3x+1$

En funktion er voksende, netop hvis dens afledede funktion er positiv (evt. nul i enkelte punkter), så den afledede funktion bestemmes:

$$f'(x)=3x^2+2kx+3$$

Grafen for den afledede funktion er en parabel med grenene opad (positiv *a*-værdi), så den afledede er ikke negativ nogen steder, hvis grafen ikke skærer førsteaksen, dvs. hvis diskriminanten ikke er positiv:

$$d=b^2-4ac=(2k)^2-4\cdot 3\cdot 3=4\cdot k^2-36$$

$$d\le 0 \Leftrightarrow 4\cdot k^2-36\le 0 \Leftrightarrow 4\cdot k^2\le 36 \Leftrightarrow k^2\le 9 \Leftrightarrow \underline{\underline{-3\le k\le 3}}$$

2.D1.26: $f(x)=x^3+k\cdot x^2+3x+1$

Ligningen $f(x)=a$ løses grafisk ved at finde skæringen mellem den vandrette linje med ligningen $y=a$ og grafen for *f*. Så hvis ligningen ikke må have mere end én løsning, må der ikke være mere end én skæring med enhver vandret linje (dvs. med andre ord: *f* skal være injektiv).

Funktionsudtrykket for *f* er et 3. gradspolynomium, og funktionen er altså injektiv, hvis der ikke er nogen ekstremumssteder (hvor grafen vender). Man ser derfor på den afledede funktion:

$$f'(x)=3x^2+2kx+3$$

En funktion er voksende (og *f* kan ikke være aftagende, da 3. gradsleddet har positiv koefficient), netop hvis dens afledede funktion er positiv (evt. nul i enkelte punkter), og grafen for den afledede funktion er en parabel med grenene opad (positiv *a*-værdi), så den afledede er ikke negativ nogen steder, hvis grafen ikke skærer førsteaksen, dvs. hvis diskriminanten ikke er positiv:

$$d=b^2-4ac=(2k)^2-4\cdot 3\cdot 3=4\cdot k^2-36$$

$$d\le 0 \Leftrightarrow 4\cdot k^2-36\le 0 \Leftrightarrow 4\cdot k^2\le 36 \Leftrightarrow k^2\le 9 \Leftrightarrow \underline{\underline{-3\le k\le 3}}$$

2.D1.27: $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot \sin(x) \qquad P(0, f(0))$

For at kunne bestemme en ligning for tangenten, skal man kende funktionsværdien og differentialkvotienten i punktet. Funktionen er produktet af to funktioner, hvor den første er en sammensat funktion:

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \cdot \sin(x) + \mathrm{e}^{-x} \cdot \cos(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot (\cos(x) - \sin(x))$$

Røringspunktets andenkoordinat: $f(0) = \mathrm{e}^{-0} \cdot \sin(0) = 1 \cdot 0 = 0$

Tangentens hældning: $f'(0) = \mathrm{e}^{-0} \cdot (\cos(0) - \sin(0)) = 1 \cdot (1-0) = 1$

Med disse værdier kan tangentens ligning bestemmes:

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

$$y - 0 = 1 \cdot (x - 0) \iff \underline{\underline{y = x}}$$

2.D1.28: $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x}$

f og $p(x)$ differentieres. Om *f* bemærkes det, at den er produktet af to funktioner, hvor den anden er en sammensat funktion:

$$f'(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^{-x} + x \cdot (-1) \cdot \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x} \cdot (1 - x)$$

$$f''(x) = -\mathrm{e}^{-x} \cdot (1 - x) + \mathrm{e}^{-x} \cdot (-1) = \mathrm{e}^{-x} \cdot (x - 2)$$

Polynomiet kan blot differentieres ledvist:

$$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$p'(x) = 2a \cdot x + b$$

$$p''(x) = 2a$$

De dobbeltafledede benyttes til at bestemme *a*-værdien:

$$p''(0) = f''(0) \iff 2 \cdot a = \mathrm{e}^{-0} \cdot (0 - 2) \iff 2a = 1 \cdot (-2) \iff \underline{\underline{a = -1}}$$

De afledede benyttes til at bestemme *b*-værdien:

$$p'(0) = f'(0) \iff 2 \cdot a \cdot 0 + b = \mathrm{e}^{-0} \cdot (1 - 0) \iff b = 1 \cdot (1) \iff \underline{\underline{b = 1}}$$

De uafledede benyttes til at bestemme *c*-værdien:

$$p(0) = f(0) \iff a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \cdot \mathrm{e}^{-0} \iff c = 0 \cdot 1 \iff \underline{\underline{c = 0}}$$

2.D1.29: $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$. Man må ikke dividere med 0, men da nævneren ikke kan blive 0, er $Dm(f) = \mathbb{R}$
.

Ligningen $f(x) = 1$ opskrives og omskrives:

$$1 = \frac{x-1}{x^2+1} \iff 1 \cdot (x^2 + 1) = x - 1 \iff x^2 + 1 = x - 1 \iff x^2 - x + 2 = 0$$

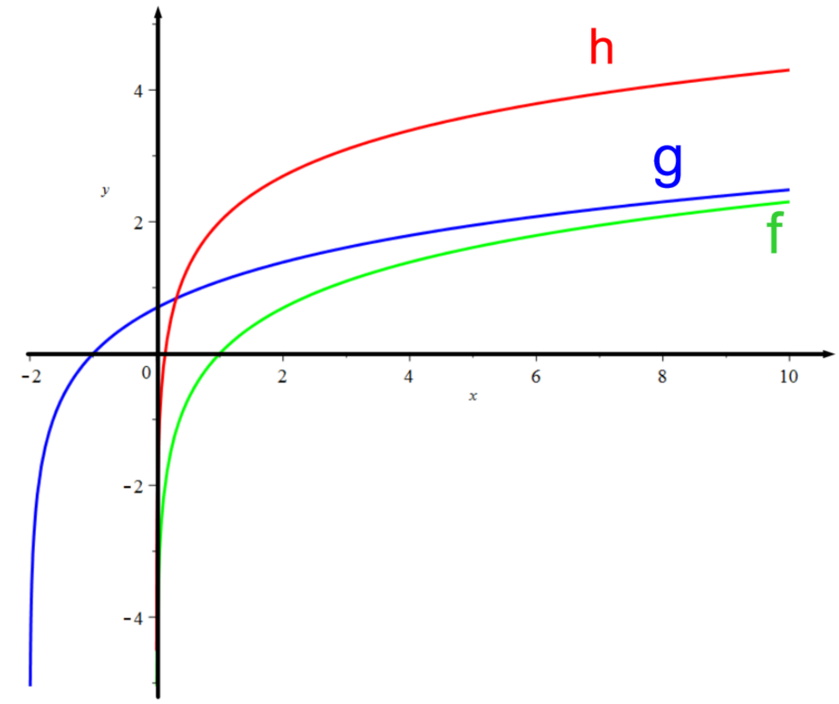
Dette er en andengradsligning, så for at finde ud af, om der er løsninger, ses på diskriminanten:

$d = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 8 = -7 < 0$, dvs. **der er ingen løsninger.**

2.D1.30: $g(x) = f(x+2) \quad h(x) = f(x)+2$

Grafen for funktionen *g* er en vandret parallelforskydning af grafen for *f* med 2 enheder mod venstre, da argumentet *x* er erstattet af $x-(-2)$. Dvs. den skal gå gennem punktet (-1,0) og havde linjen med ligningen $x=-2$ som lodret asymptote.

Grafen for *h* er en lodret parallelforskydning af grafen med 2 enheder opad, da man lægger 2 til alle funktionsværdier. Dvs. den går gennem punktet (1,2).



2.D1.31: $f(x) = \ln(x) \quad g(x) = 2\cdot\ln(x) \quad h(x) = \ln(x-2) \quad k(x) = \ln(x)+2$

Man har:

$f(1) = \ln(1) = 0$

$g(1) = 2\cdot\ln(1) = 2\cdot 0 = 0$

Dvs. graferne for *f* og *g* går gennem samme punkt på førsteaksen, nemlig punktet (1,0).
Dvs. *B* og *C* er graferne for *f* og *g*.
Da funktionsværdierne for *g* fremkommer ved at multiplicere funktionsværdierne fra *f* med 2, skal grafen for *g* ligge over grafen for *f* for positive funktionsværdier og under grafen for *f* for negative funktionsværdier. Dermed er ***B* grafen for funktionen *g*** og ***C* er grafen for funktionen *f*.**

Funktionsværdierne for *k* fremkommer ved at lægge 2 til funktionsværdierne fra *f* , så grafen for *k* er en lodret parallelforskydning af grafen for *f* med 2 enheder opad. Dvs. ***A* er grafen for *k*.**

Grafen for *h* er en vandret parallelforskydning af grafen for *f* med 2 enheder mod højre, da argumentet *x* er erstattet af $x-2$. Dvs. ***D* er grafen for *h*.**

2.D1.32: $f(x) = \sin(x) \quad g(x) = 2+\sin(x) \quad h(x) = \sin(2\cdot x) \quad k(x) = \sin(x+2)$

I *h* er sinusfunktionens argument $2x$, hvor alle de andre funktioner bare har *x*, så perioden for *h* er mindre end de andres (den svinger dobbelt så hurtigt), dvs. $h \sim B$
I *g* er lagt 2 til sinusværdien, hvilket forskyder sinusgrafen 2 lodret opad, dvs. $g \sim A$
A er en lodret forskydning af *D*, men ikke af *C*, så $f \sim D$
I *k* lægges 2 til argumentet i sinusfunktionen, hvilket giver en vandret forskydning af grafen med 2 til venstre i forhold til grafen for *f*, så $k \sim C$

2.D1.33: $f\left(x\right)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+10$

Man må benytte tegningen og gå ud fra, at punktet *B* har koordinaterne $\left(20,0\right)$, selvom førstekoordinaten ikke fremgår af teksten.
Ved indsættelse af *B's* koordinater i funktionsforskriften får man:

$$0=a\cdot 20^3+b\cdot 20^2+c\cdot 20+10 \;\Leftrightarrow\; 8000a+400b+20c+10=0 \qquad (1)$$

Da der skal være vandret tangent i *A* og *B*, skal den afledede funktions værdier være 0 disse steder (man må gå ud fra, at *A* ligger på andenaksen):

$$f'\left(x\right)=3a\cdot x^2+2b\cdot x+c$$

$$f'\left(0\right)=0 \;\Leftrightarrow\; 3a\cdot 0^2+2b\cdot 0+c=0 \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{c=0}}$$

$$f'\left(20\right)=0 \;\Leftrightarrow\; 3a\cdot 20^2+2b\cdot 20+0=0 \;\Leftrightarrow\; 1200a+40b=0 \;\Leftrightarrow\; 30a+b=0 \qquad (2)$$

Ligning (2) giver os $b=-30a$, hvilket indsættes i ligning (1) for at finde *a*-værdien:

$$8000a+400\cdot\left(-30a\right)+20\cdot 0+10=0 \;\Leftrightarrow\; 8000a-12000a+10=0 \;\Leftrightarrow\; 4000a=10 \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{a=\frac{1}{400}}}$$

Og hermed er: $b=-30\cdot\frac{1}{400}=\underline{\underline{-\frac{3}{40}}}$

2.D1.34: $f\left(x\right)=x^2-4x+6$ $\qquad P\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ $\qquad K\left(x_0\right)=\dfrac{f''\left(x_0\right)}{\left(1+\left(f'\left(x_0\right)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

For at bestemme krumningsudtrykket findes først første og anden afledede af *f*:

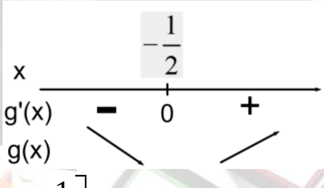
$f'\left(x\right)=2x-4$ $\qquad f'\left(2\right)=2\cdot 2-4=0$

$f''\left(x\right)=2$ $\qquad f''\left(2\right)=2$

Ved indsættelse i det angivne udtryk får man: $K\left(2\right)=\dfrac{2}{\left(1+\left(0\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{2}{1^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{2}{1}=\underline{\underline{2}}$

2.D1.35: $f'\left(x\right)=5$ $\qquad P\left(-\frac{1}{2},0\right)$ $\qquad Q\left(0,1\right)$

a) Da g' har nulpunktet $-\frac{1}{2}$ og dens graf positiv hældning (*Q* ligger til højre for *P* og har højere andenkoordinat), får man fortegnsskemaet:



Dvs. ***g* er aftagende i intervallet** $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ **og voksende i intervallet** $\left[-\frac{1}{2},\infty\right[$

b) De afledede funktioners værdier angiver tangenthældningerne, så tangenthældningerne er ens, der hvor graferne for de afledede funktioner skærer hinanden.
Da g' er en lineær funktion, der skærer andenaksen i 1, har man: $g'\left(x\right)=a\cdot x+1$.

Punktet *P* bruges til at finde *a*-værdien: $0=a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}a=1 \;\Leftrightarrow\; a=2$

Så kan førstekoordinaten til skæringspunktet bestemmes:

$$f'\left(x\right)=g'\left(x\right) \;\Leftrightarrow\; 5=2\cdot x+1 \;\Leftrightarrow\; 4=2x \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{x=2}}$$

2.D1.36: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + c \qquad l: y = 4x + 6$

Tangenten *l* har hældningen 4, dvs. den afledede funktion skal have værdien 4:

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 5$

$f'(x) = 4 \Leftrightarrow 4 = 3x^2 - 6x - 5 \Leftrightarrow 0 = 3x^2 - 6x - 9 \Leftrightarrow 0 = x^2 - 2x - 3 \Leftrightarrow$

$0 = (x+1)(x-3) \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$

Tilfælde 1: Her skal *l* røre grafen, hvor $x = -1$. Her er *y*-værdien: $y = 4 \cdot (-1) + 6 = 2$

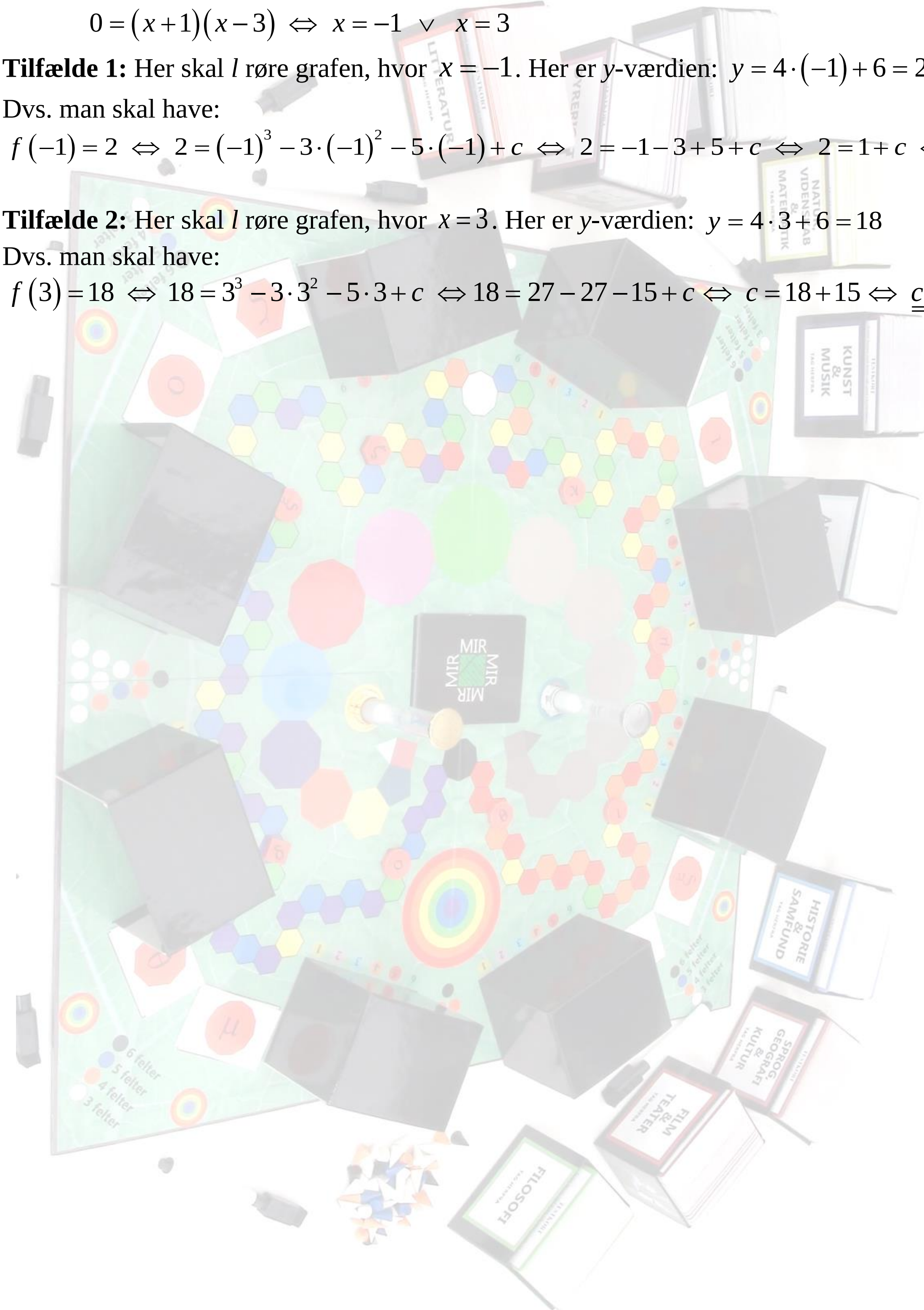
Dvs. man skal have:

$f(-1) = 2 \Leftrightarrow 2 = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + c \Leftrightarrow 2 = -1 - 3 + 5 + c \Leftrightarrow 2 = 1 + c \Leftrightarrow \underline{\underline{c = 1}}$

Tilfælde 2: Her skal *l* røre grafen, hvor $x = 3$. Her er *y*-værdien: $y = 4 \cdot 3 + 6 = 18$

Dvs. man skal have:

$f(3) = 18 \Leftrightarrow 18 = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + c \Leftrightarrow 18 = 27 - 27 - 15 + c \Leftrightarrow c = 18 + 15 \Leftrightarrow \underline{\underline{c = 33}}$



2.D2

2.D2.1: $f(x)=\sqrt{x} \quad , x \geq 0 \quad , \quad A(2, f(2)) \quad B(10, f(10))$

$f(x) := \sqrt{x}$:

Kurvelængden bestemmes ud fra formlen for buelængde (det er det samme):

$$L = \int_{2}^{10.} \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx = 8.198166007$$

Dvs. $\underline{\underline{L = 8.198}}$

2.D2.2: $f(x)=x^2+4x+1 \quad , \quad A(-1, f(-1)) \quad B(k, f(k))$

$f(x) := x^2 + 4x + 1$:

Da kurvelængden skal være 35, skal man løse ligningen $35 = \int_{-1}^{k} \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$:

$$solve\left(35. = \int_{-1}^{k} \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx, k\right)$$

$$3.963283044, -8.095328225, -1.967303928 - 5.984296632\,I, -1.967303928 + 5.984296632\,I$$

De komplekse løsninger forkastes, og da k skal være positiv, har man:

$\underline{\underline{k = 3,9633}}$

2.D2.3: $f(x)=(x+5)\cdot(x-1)\cdot(x-10)\cdot(x-15)$

$f(x) := (x+5)\cdot(x-1)\cdot(x-10)\cdot(x-15)$:

a) $f'(x) = (x-1)(x-10)(x-15) + (x+5)(x-10)(x-15) + (x+5)(x-1)(x-15) + (x+5)(x-1)(x-10)$

$\overset{\text{expand}}{=} 4x^3 - 63x^2 + 90x + 725$

Dvs. $\underline{\underline{f'(x) = 4x^3 - 63x^2 + 90x + 725}}$

Monotoniforholdene bestemmes ved først at finde steder med vandret tangent, dvs. steder hvor den afledede funktion er 0:

$f'(x) = 0. \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 5.415703840\}, \{x = 12.92388107\}, \{x = -2.589584910\}$

Fortegnet for den anden afledede bestemmes disse steder for at afgøre, hvilken slags punkt der er tale om:

$f''(-2.589584910) = 496.7590987 > 0$ dvs. lokalt minimumspunkt

$f''(5.415703840) = -240.4205068 < 0$ dvs. lokalt maksimumspunkt

$f''(12.92388107) = 465.9114081 > 0$ dvs. lokalt minimumspunkt

Dvs. ***f*** **er aftagende i intervallerne]-∞,-2.59] og [5.42,12.92] og voksende i intervallerne [-2.59,5.42] og [12.92,∞[**

b) Hvis en tangent går gennem punktet $(-3, 10)$, har den hældningen $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10 - f(x_0)}{-3 - x_0}$, hvor x_0 er det sted,

hvor tangenten tangerer grafen. Men da det er en tangent, kan man også finde hældningen ved $a = f'(x_0)$, dvs. der skal gælde

$f'(x_0) = \frac{10 - f(x_0)}{-3 - x_0}$. Stederne, hvor dette gælder, findes:

$solve\left(f'(x) = \frac{10. - f(x)}{-3 - x}, x\right) = 4.343786618, 12.74002763, -3.541907124 + 2.265722657\,I, -3.541907124 - 2.265722657\,I =$

De to sidste er komplekse løsninger, så de forkastes. Ligningerne for tangenterne de to første steder bestemmes:

$y - f(4.343786618) = f'(4.343786618)\cdot(x - 4.343786618) \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = 255.0690597\,x + 775.207179$

$y - f(12.74002763) = f'(12.74002763)\cdot(x - 12.74002763) \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = -82.5715553\,x - 237.714672$

Dvs. de to tangenter har ligningerne $\underline{\underline{t_1:\ y = 255.07\cdot x + 775.21 \qquad t_2:\ y = -82.57\cdot x - 237.71}}$

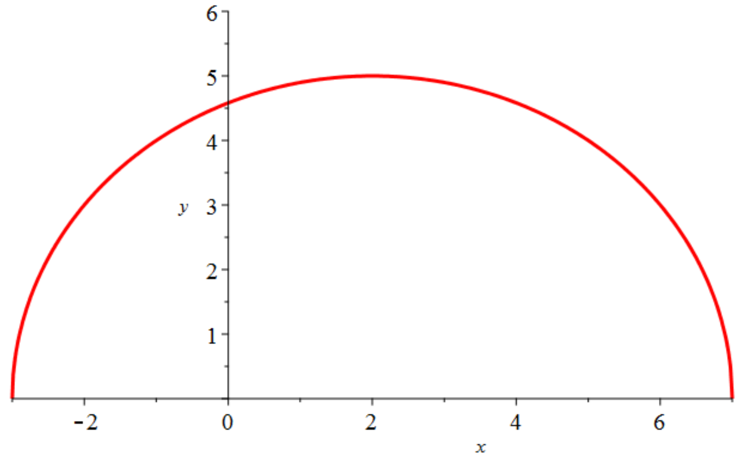
2.D2.4: $f(x)=\sqrt{-(x+3)\cdot(x-7)}$

a) Udtrykket under kvadratroden må ikke være negativt. Det er et andengradspolynomium med negativ koefficient på andengradsleddet, så grafen er en parabel med grenene nedad. Da polynomiet er angivet på faktoriseret form, kan man direkte aflæse, at rødderne er -3 og 7, og da grenene vender nedad, vil parablen altså ligge over førsteaksen imellem rødderne. Dermed har man:

$$\underline{\underline{Dm(f)=[-3,7]}}$$

$f(x) := \sqrt{-(x+3)\cdot(x-7)}$:

$plot(f(x), x=-3..7, y=0..6, color=red, thickness=3)$



b) $f'(x) = \dfrac{-2x+4}{2\sqrt{-(3+x)(x-7)}} \overset{\text{simplify}}{=} -\dfrac{x-2}{\sqrt{-(3+x)(x-7)}}$

Dvs. $\underline{\underline{f'(x) = \dfrac{2-x}{\sqrt{-(3+x)\cdot(x-7)}}}}$

Monotoniforholdene bestemmes ved først at finde nulpunkter for den afledede funktion. Her udnyttes det, at en brøk antager værdien 0, netop når tælleren er 0, og det er den, når $x=2$.

Fortegnet for den anden afledede af funktionen bestemmes for at afgøre typen af punkt:

$f''(2) = -\dfrac{\sqrt{25}}{25} < 0$ dvs. lokalt maksimum.

Dvs. ***f*** **er voksende i intervallet [-3,2] og aftagende i intervallet [2,7]**

c) En ligning for tangenten i $P(1, f(1))$ findes ved at indsætte i ligningen for tangenten:

$y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1) \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = \dfrac{\sqrt{24}\,(x-1)}{24} + 2\sqrt{6}$

Eller med afrundede værdier:

$y - f(1.) = f'(1.)\cdot(x-1.) \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = 0.2041241452\,x + 4.694855341$

$\underline{\underline{y = 0.204\cdot x + 4.695}}$

2.D2.5:

$f(x) := (x+6)\cdot(x-2)\cdot(x-8):$

a) For at bestemme monotoniforholdene bestemmes først nulpunkterne for den afledede funktion:

$f'(x) = 0. \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 5.388508354\}, \{x = -2.721841687\}$

For at bestemme typen af stederne findes fortegnet for den anden afledede af funktionen:

$f''(-2.721841687) = -24.33105012 < 0$ dvs. lokalt maksimumssted

$f''(5.388508354) = 24.33105012 > 0$ dvs. lokalt minimumssted

Dvs. ***f*** **er voksende i intervallerne]-∞,-2.72] og [5.39,∞[og aftagende i intervallet [-2.72,5.39]**

b) Tangenthældningen svarer til differentialkvotientens værdi i røringspunktet:

$f'(x) = 4. \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 5.549703547\}, \{x = -2.883036880\}$

Dvs. disse to steder har grafen tangenter med hældningen 4. Ligningerne for disse tangenter bestemmes ved indsættelse i tangentens ligning:

$y - f(-2.883036880) = f'(-2.883036880)\cdot(x - (-2.883036880)) \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = 177.1746446 + 3.999999990\,x$

$y - f(5.549703547) = f'(5.549703547)\cdot(x - 5.549703547) \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = -122.6561262 + 4.000000010\,x$

Dvs. $\underline{\underline{t_1:\ y = 4x + 177.2 \qquad t_2:\ y = 4x - 122.7}}$

c) Hvis en tangent går gennem punktet $(-3, 10)$, har den hældningen $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10 - f(x_0)}{-3 - x_0}$, hvor x_0 er det sted, hvor tangenten tangerer grafen. Men da det er en tangent, kan man også finde hældningen ved $a = f'(x_0)$, dvs. der skal gælde

$f'(x_0) = \frac{10 - f(x_0)}{-3 - x_0}$. Stedet eller stederne, hvor dette gælder, findes:

$solve\left(f'(x) = \frac{10. - f(x)}{-3 - x}, x\right) = 4.780293946, -3.640146973 + 3.090513726\,I, -3.640146973 - 3.090513726\,I$

De to sidste er komplekse løsninger, så de forkastes. Ligningen for tangenten i 4,78 bestemmes:

$y - f(4.780293946) = f'(4.780293946)\cdot(x - 4.780293946) \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = -13.68872093\,x - 31.06616290$

Dvs. denne tangent har ligningen $\underline{\underline{y = -13.69\cdot x - 31.07}}$

2.D2.6:

a) ***R*** **indføres som den variabel, der angiver antallet af rygere (målt i mio.) som funktion af tiden** ***t*** **målt i antal år efter 1980.**

Da det er oplyst, at man skal arbejde med en eksponentiel udvikling, og med den indførte variabel t, har man:

$R(t) = 721\cdot a^t$ (721 er begyndelsesværdien, da der var 721 mio. rygere i startåret 1980).

a-værdien kan beregnes ved at udnytte, at der i 2012 ($t = 32$) var 967 mio. rygere:

$967 = 721\cdot a^{32} \xrightarrow{\text{solve}} -1.009215938, 1.009215938$ (der anvendes numerisk solve for at undgå de 30 komplekse løsninger).

Da a-værdien skal være positiv, har man:

$\underline{\underline{R(t) = 721\cdot 1.0092^t}}$

b) $R(t) := 721\cdot 1.009215938^t : N(t) := \frac{12245}{1 + 1.74\cdot e^{-0.0273\cdot t}}:$

Da man er så heldig, at de valgte variable i spørgsmål a) måles i samme enhed som den nye funktion *N*, kan man finde en forskrift for funktionen *g*, der angiver andelen af rygere, ved at danne kvotientfunktionen:

$g(t) := \frac{R(t)}{N(t)}:$

$g(t) = \frac{721}{12245}\,1.009215938^t\left(1 + 1.74\,e^{-0.0273\,t}\right) \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 0.05888117599\,1.009215938^t\left(1. + 1.74\,e^{-0.0273\,t}\right)$

Dvs. $\underline{\underline{g(t) = 0.0589\cdot 1.00922^t\cdot\left(1 + 1.74\cdot e^{-0.0273\cdot t}\right)}}$

c) Ved hjælp af den afledede funktion bestemmes det eller de steder, der kan være ekstremumssteder:

$g'(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t = 45.23455515]]$

Med den anden afledede funktions fortegn dette sted undersøges det, hvilken slags sted, der er tale om:

$g''(45.23455515) = 0.00002233079096 > 0$ dvs. lokalt minimum

Da der ikke er andre ekstremumssteder, har man altså, at i denne model er **andelen af rygere mindst i år 2025.**

3.D1

3.D1.1: Det ubestemte integral bestemmes ved ledvis integration (integrationskonstanten huskes):

$$\int \left(3x^2+2x+1\right)dx = \underline{\underline{x^3+x^2+x+k}}$$

3.D1.2: Det ubestemte integral bestemmes ved ledvis integration (integrationskonstanten huskes):

$$\int \left(2x+\mathrm{e}^x\right)dx = \underline{\underline{x^2+\mathrm{e}^x+k}}$$

3.D1.3: Det ubestemte integral bestemmes ved ledvis integration (integrationskonstanten huskes):

$$\int \left(5x^4+\frac{1}{x}\right)dx = \underline{\underline{x^5+\ln|x|+k}}$$

3.D1.4: Det ubestemte integral bestemmes ved ledvis integration (integrationskonstanten huskes):

$$\int \left(\sin(x)+x\right)dx = \underline{\underline{-\cos(x)+\frac{1}{2}x^2+k}}$$

3.D1.5: Det bemærkes, at det andet led er en sammensat funktion (husk integrationskonstanten):

$$\int \left(2x+\mathrm{e}^{3x}\right)dx = \underline{\underline{x^2+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}+k}}$$

3.D1.6: Man skal enten anvende substitutionsmetoden eller integrere med hensyn til den indre funktion i den sammensatte funktion, dvs. x^2+1.

Substitutionsmetoden:

$$t = x^2+1$$

$$\frac{dt}{dx} = 2x$$

$$dt = 2x\,dx$$

$$\int 2x\cdot\left(x^2+1\right)^5 dx = \int t^5 dt = \frac{1}{6}t^6+k = \underline{\underline{\frac{1}{6}\cdot\left(x^2+1\right)^6+k}}$$

Integration med hensyn til den indre funktion:

$$\int 2x\cdot\left(x^2+1\right)^5 dx = \int \left(x^2+1\right)^5 d\left(x^2+1\right) = \underline{\underline{\frac{1}{6}\cdot\left(x^2+1\right)^6+k}}$$

3.D1.7: Man skal enten anvende substitutionsmetoden eller integrere med hensyn til den indre funktion i den sammensatte funktion, dvs. x^5+3.

Substitutionsmetoden:

$$t = x^5+3$$

$$\frac{dt}{dx} = 5x^4$$

$$dt = 5x^4\,dx$$

$$\int 5x^4\cdot\mathrm{e}^{x^5+3}dx = \int \mathrm{e}^t dt = \mathrm{e}^t+k = \underline{\underline{\mathrm{e}^{x^5+3}+k}}$$

Integration med hensyn til den indre funktion:

$$\int 5x^4\cdot\mathrm{e}^{x^5+3}dx = \int \mathrm{e}^{x^5+3}d\left(x^5+3\right) = \underline{\underline{\mathrm{e}^{x^5+3}+k}}$$

3.D1.8: Det ubestemte integral bestemmes ved ledvis integration (integrationskonstanten huskes):

$$\int \left(\ln(x) + x^2\right) dx = \underline{\underline{x \cdot \ln(x) - x + \frac{1}{3}x^3 + k}}$$

3.D1.9: Man kan godt benytte substitutionsmetoden med $t = 2x + 4$, men da den indre funktion er en lineær funktion, kan man måske godt gennemskue, at:

$$\int \sin(2x+4)\,dx = \underline{\underline{-\frac{1}{2} \cdot \cos(2x+4) + k}}$$

3.D1.10: Man skal enten anvende substitutionsmetoden eller integrere med hensyn til den indre funktion i den sammensatte funktion, dvs. $\ln(x)$.

Substitutionsmetoden:

$$t = \ln(x)$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$dt = \frac{1}{x}dx$$

$$\int 3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \left(\ln(x)\right)^2 dx = \int 3 \cdot t^2 dt = t^3 + k = \underline{\underline{\left(\ln(x)\right)^3 + k}}$$

Integration med hensyn til den indre funktion:

$$\int 3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \left(\ln(x)\right)^2 dx = \int 3 \cdot \left(\ln(x)\right)^2 d\left(\ln(x)\right) = \underline{\underline{\left(\ln(x)\right)^3 + k}}$$

3.D1.11: Man skal enten anvende substitutionsmetoden eller integrere med hensyn til den indre funktion i den sammensatte funktion, dvs. $x^2 + 3$.

Substitutionsmetoden:

$$t = x^2 + 3$$

$$\frac{dt}{dx} = 2x$$

$$dt = 2x\,dx$$

$$\int \frac{2x}{x^2+3} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + k = \ln\left|x^2+3\right| + k = \underline{\underline{\ln\left(x^2+3\right) + k}}$$

Numerisktegnet kan fjernes, da $x^2 + 3 > 0$ for alle x-værdier.

Integration med hensyn til den indre funktion:

$$\int \frac{2x}{x^2+3} dx = \int \frac{1}{x^2+3} d\left(x^2+3\right) = \ln\left|x^2+3\right| + k = \underline{\underline{\ln\left(x^2+3\right) + k}}$$

3.D1.12: Integranden integreres ledvist for at bestemme værdien af det bestemte integral:

$$\int_0^2 \left(3x^2 - 10x\right) dx = \left[x^3 - 5x^2\right]_0^2 = \left(2^3 - 5 \cdot 2^2\right) - \left(0^3 - 5 \cdot 0^2\right) = 8 - 5 \cdot 4 = 8 - 20 = \underline{\underline{-12}}$$

3.D1.13: Integranden integreres ledvist for at bestemme værdien af det bestemte integral:

$$\int_0^1 \left(8x^3 + e^x\right) dx = \left[2x^4 + e^x\right]_0^1 = \left(2 \cdot 1^4 + e^1\right) - \left(2 \cdot 0^4 + e^0\right) = 2 + e - 0 - 1 = \underline{\underline{e + 1}}$$

Da begge led er positive for positive x-værdier, ligger grafen for integranden over førsteaksen i intervallet [0,1], og dermed svarer værdien af det bestemte integral til **arealet af punktmængden, der dannes af koordinatakserne, grafen for integranden og den lodrette linje med ligningen** $x = 1$**.**

3.D1.14: Man kan godt anvende substitutionsmetoden med $t = 2x$, men måske kan man direkte gennemskue, hvad der er en stamfunktion:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\cdot\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\cdot\sin(2\cdot 0) = \frac{1}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\sin(0) = \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 0 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

3.D1.15: Substitutionsmetoden anvendes:

$$t = x^3 - 7$$

$$\frac{dt}{dx} = 3x^2$$

$$dt = 3x^2\,dx$$

$$x = 2:\ t = 2^3 - 7 = 8 - 7 = 1$$

$$x = 3: t = 3^3 - 7 = 27 - 7 = 20$$

$$\int_2^3 \frac{3x^2}{x^3 - 7}\,dx = \int_1^{20} \frac{1}{t}\,dt = \left[\ln|t|\right]_1^{20} = \ln(20) - \ln(1) = \ln(20) - 0 = \underline{\underline{\ln(20)}}$$

3.D1.16: Substitutionsmetoden anvendes:

$$t = x^3 + 2x + 4$$

$$\frac{dt}{dx} = 3x^2 + 2$$

$$dt = \left(3x^2 + 2\right)dx$$

$$x = 0:\ t = 0^3 + 2\cdot 0 + 4 = 4$$

$$x = 2: t = 2^3 + 2\cdot 2 + 4 = 16$$

$$\int_0^2 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt{x^3 + 2x + 4}}\,dx = \int_4^{16} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \left[2\cdot\sqrt{t}\right]_4^{16} = 2\cdot\sqrt{16} - 2\cdot\sqrt{4} = 2\cdot 4 - 2\cdot 2 = \underline{\underline{4}}$$

3.D1.17: $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$, $x > 0$ $\quad P(1,3)$

Først bestemmes den form, samtlige stamfunktioner er på:

$$F_k(x) = \int\left(2x + \frac{1}{x}\right)dx = x^2 + \ln|x| + k = x^2 + \ln(x) + k$$ (numerisktegnet fjernes pga. $x > 0$)

Da grafen skal gå gennem *P*, har man:

$$3 = 1^2 + \ln(1) + k \ \Leftrightarrow\ 3 = 1 + 0 + k \ \Leftrightarrow\ k = 2$$

Dvs. $\underline{\underline{F(x) = x^2 + \ln(x) + 2}}$

3.D1.18: $f(x) = \frac{5}{x} + 2x$, $x > 0$ $\quad g(x) = -\frac{5}{x^2} + 2 \quad h(x) = 5\ln(x) + x^2 \quad k(x) = \ln(5x) + x^2$

De tre funktioner differentieres, så man ud fra integrationsprøven kan konkludere, hvilken der er stamfunktion til *f*.

$$g'(x) = -5\cdot(-2)\cdot x^{-3} + 0 = \frac{10}{x^3}$$

$$h'(x) = 5\cdot\frac{1}{x} + 2x = \frac{5}{x} + 2x$$

$$k'(x) = 5\cdot\frac{1}{5x} + 2x = \frac{1}{x} + 2x$$

Da $h'(x) = f(x)$, er *h* en stamfunktion til *f*.

3.D1.19: $f(x)=(2x+1)\cdot\ln(x)\ ,\ x>0$ $\qquad g(x)=\frac{1}{x}+2\cdot\ln(x)\ ,\ x>0$

f er en stamfunktion til *g*, netop hvis $f'(x)=g(x)$, så *f* differentieres ved produktreglen:

$$f'(x)=2\cdot\ln(x)+(2x+1)\cdot\frac{1}{x}=2\cdot\ln(x)+\frac{2x+1}{x}=2\cdot\ln(x)+2+\frac{1}{x}$$

Dette svarer ikke til *g*, så ***f* er ikke en stamfunktion til *g***.

3.D1.20: $f(x)=x+5+\frac{1}{x}$ $\qquad g(x)=\frac{1}{2}\cdot(x+1)^2+\ln(x)+4x+3$

Først undersøges det, **om** *g* er en stamfunktion til *f*:

$$g'(x)=\frac{1}{2}\cdot2\cdot(x+1)+\frac{1}{x}+4+0=x+1+\frac{1}{x}+4=x+5+\frac{1}{x}$$

Da $g'(x)=f(x)$, er *g* en stamfunktion til *f*.

Så undersøges det, om grafen for *g* går gennem punktet $P(1,9)$

$$9=\frac{1}{2}\cdot(1+1)^2+\ln(1)+4\cdot1+3 \Leftrightarrow 9=2+0+4+3 \Leftrightarrow 9=9$$

Da udsagnet er sandt, ligger *P* på grafen for *g*, så
***g* er netop den stamfunktion til *f*, hvis graf går gennem punktet *P*.**

3.D1.21: a) Da *F* er en stamfunktion til *f*, har man $F'(-1)=f(-1)$, og på den blå graf for *f*, kan man aflæse, at funktionsværdien i -1 er 1, dvs.

$$\underline{\underline{F'(-1)=1}}$$

b) Man er nødt til at aflæse på grafen, og her ser det ud til, at *f* har nulpunkter i -2 og 5, hvoraf det første skal bruges som grænse i det bestemte integral, der skal bruges til at finde arealet af *M*. Da *M* ligger over førsteaksen, har man:

$$A_M=\int_{-2}^{4}f(x)dx=\left[F(x)\right]_{-2}^{4}=F(4)-F(-2)=7-(-2)=\underline{\underline{9}}$$

De røde værdier er aflæst på grafen for *F*.

3.D1.22: Da punktmængden ligger over førsteaksen, har man $A_M=\int_{-1}^{2}f(x)dx$.

Dette bestemte integral kan bestemmes ved hjælp af indskudsreglen:

$$A_M=\int_{-1}^{2}f(x)dx=\int_{-1}^{4}f(x)dx+\int_{4}^{2}f(x)dx=\int_{-1}^{4}f(x)dx-\int_{2}^{4}f(x)dx=5-(-2,6)=5+2,6=\underline{\underline{7,6}}$$

3.D1.23: Det ses, at grafen for *g* ligger over grafen for *f* i intervallet, og da det er oplyst, at de to grafer skærer hinanden i $x=0$ og $x=4$, får man:

$$A_M=\int_{0}^{4}\left(g(x)-f(x)\right)dx=\left[G(x)-F(x)\right]_{0}^{4}=$$

$$\left(G(4)-F(4)\right)-\left(G(0)-F(0)\right)=5-3-(-1)+1=\underline{\underline{4}}$$

3.D1.24: $f(x) = -x^3 + 9x$

Nulpunkterne for funktionen kan bestemmes ved hjælp af nulreglen:

$$0 = -x^3 + 9x \Leftrightarrow 0 = -x \cdot (x^2 - 9) \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 0 \vee x = 3$$

Da det er oplyst, at punktmængden ligger i første kvadrant, er det de to sidste nulpunkter, der skal anvendes som grænser i det bestemte integral, der angivet arealet af punktmængden:

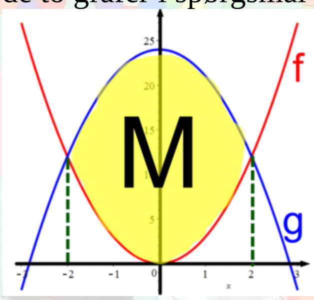
$$A_M = \int_0^3 (-x^3 + 9x)\,dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{9}{2}x^2\right]_0^3 = \left(-\frac{1}{4}\cdot 3^4 + \frac{9}{2}\cdot 3^2\right) - 0 = -\frac{81}{4} + \frac{81}{2} = \underline{\underline{\frac{81}{4}}}$$

3.D1.25: $f(x) = 3x^2 \qquad g(x) = -3x^2 + 24$

a) Skæringspunkternes førstekoordinater bestemmes ved at finde de x-værdier, hvor funktionsværdierne er ens, dvs. man løser ligningen $f(x) = g(x)$.

$$3x^2 = -3x^2 + 24 \Leftrightarrow 6x^2 = 24 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -2 \vee x = 2}}$$

b) Skitsen skal bruges til at hjælpe med at finde grænserne til det bestemte integral, der skal bruges i næste spørgsmål, samt at finde ud af, hvilken funktion der skal stå først. For at kunne tegne skitsen skal man bemærke, at begge grafer er parabler. Parablen svarende til *f* har grenene opad og har toppunkt i origo. Parablen svarende til *g* har grenene nedad og toppunkt i (0,24). Desuden har man fundet skæringsstederne mellem de to grafer i spørgsmål a). Disse ting skal fremgå af skitsen:



c) Da grafen for *g* ligger over grafen for *f* i det pågældende område, har man:

$$A_M = \int_{-2}^{2} (g(x) - f(x))\,dx = \int_{-2}^{2} (-3x^2 + 24 - 3x^2)\,dx = \int_{-2}^{2} (-6x^2 + 24)\,dx =$$

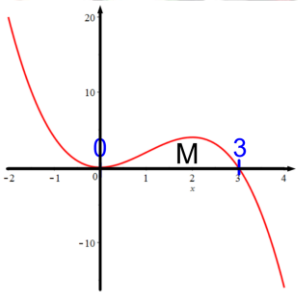
$$\left[-2x^3 + 24x\right]_{-2}^{2} = (-2\cdot 2^3 + 24\cdot 2) - (-2\cdot(-2)^3 + 24\cdot(-2)) = (-16 + 48) - (16 - 48) = \underline{\underline{64}}$$

3.D1.26: $f(x) = -x^3 + 3x^2$

a) Man kan løse ligningen $f(x) = 0$ ved at faktorisere og anvende nulreglen:

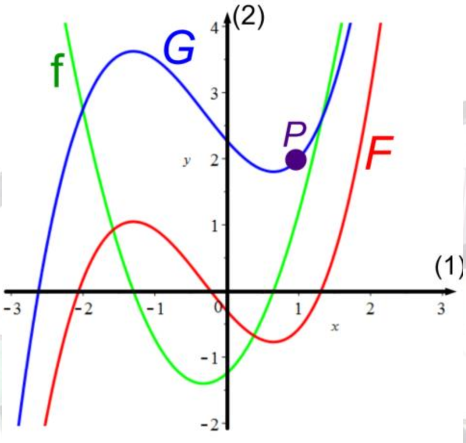
$$-x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (-x + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee -x + 3 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0 \vee x = 3}}$$

b) Løsningerne i a) fortæller os, hvor grafen rører førsteaksen, og da funktionsudtrykket er et tredjegradspolynomium med negativ koefficient på tredjegradsleddet, kan man skitsere grafen og punktmængden ($f(x) \to \infty \text{ for } x \to -\infty$ og $f(x) \to -\infty \text{ for } x \to \infty$).

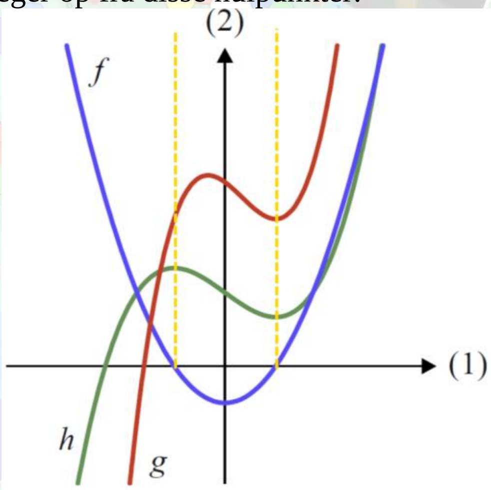


c) $A_M = \int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 (-x^3 + 3x^2)\,dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3\right]_0^3 = -\frac{1}{4}\cdot 3^4 + 3^3 = 27 - \frac{81}{4} = \frac{108}{4} - \frac{81}{4} = \underline{\underline{\frac{27}{4}}}$

3.D1.27: Alle stamfunktioner til *f* afviger fra hverandre med en konstant, dvs. graferne er lodrette parallelforskydninger af *F*. Stamfunktionen *G*, hvis graf går gennem punktet *P*, er altså nedenfor tegnet som en passende lodret parallelforskydning af grafen for *F*.



3.D1.28: Der, hvor grafen for *f* skærer førsteaksen, skal stamfunktionen have lokalt ekstremumspunkt, så man kan tegne lodrette streger op fra disse nulpunkter:



Det ses, at det er *h*, der har lokale ekstremumssteder begge steder, dvs. ***h* er stamfunktion til *f*.**

3.D1.29: $F(x) = x^3 + x^2 - 3x$

a) Alle stamfunktioner afviger fra hverandre ved en konstant, så den generelle form for stamfunktioner til *f* er:

$G_k(x) = x^3 + x^2 - 3x + k$

Hvis grafen skal gå gennem punktet $P(2,8)$, har man:

$8 = 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 + k \Leftrightarrow 8 = 8 + 4 - 6 + k \Leftrightarrow k = 2$

Dvs. den søgte stamfunktion er: $\underline{\underline{G(x) = x^3 + x^2 - 3x + 2}}$

3.D2

3.D2.1: $f(x)=x+5+\frac{1}{x}$ $\qquad$ $g(x)=\frac{1}{2}\cdot(x+1)^2+\ln(x)+4x+3$

$$f(x) := x+5+\frac{1}{x}:$$

$$g(x) := \frac{1}{2}\cdot(x+1)^2+\ln(x)+4\cdot x+3:$$

Først undersøges det med integrationsprøven, om g er en stamfunktion til f, dvs. man ser, om $g'(x)=f(x)$:

$$g'(x) = x+5+\frac{1}{x} = f(x)$$

Dvs. g **er** en stamfunktion.
Så skal man se, om grafen for g går gennem punktet $P(1, 9)$:
$g(1) = 9$
Dvs. ***g* er den stamfunktion til *f*, hvis graf går gennem punktet *P(1,9)***

3.D2.2: $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

Først bestemmes en stamfunktion til f

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \ln\left(x^2+1\right)$$

Samtlige stamfunktioner til f er altså på formen

$$F_k(x) = \ln\left(x^2+1\right)+k:$$

Hvis grafen skal gå gennem $P(0, 8)$, har man:

$$8 = \ln\left(0^2+1\right)+k \Leftrightarrow 8 = \ln(1)+k \Leftrightarrow 8 = 0+k \Leftrightarrow k = 8$$

Dvs. den søgte stamfunktions forskrift er

$$\underline{\underline{F(x) = \ln\left(x^2+1\right)+8}}$$

3.D2.3:

$$f(x) := x^2+-4x+7 : g(x) := -x^2+6x-1:$$

a) Det er angivet på figuren, at de to grafer skærer hinanden i $x = 1$ og $x = 4$, men her tjekkes det også med en udregning:

$$f(x) = g(x) \xrightarrow{\text{solve}} \{x=4\}, \{x=1\}$$

Det er grafen for g (grenene pegende nedad), der ligger øverst mellem de to skæringspunkter.

$$A_M = \int_1^4 (g(x)-f(x))\,\mathrm{d}x = 9$$

Dvs. $\underline{\underline{A_M = 9}}$

b) $V = \pi\cdot\int_1^4 g(x)^2\,\mathrm{d}x - \pi\cdot\int_1^4 f(x)^2\,\mathrm{d}x = 99\,\pi \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 311.0176727$

Dvs. $\underline{\underline{V = 99\,\pi}}$

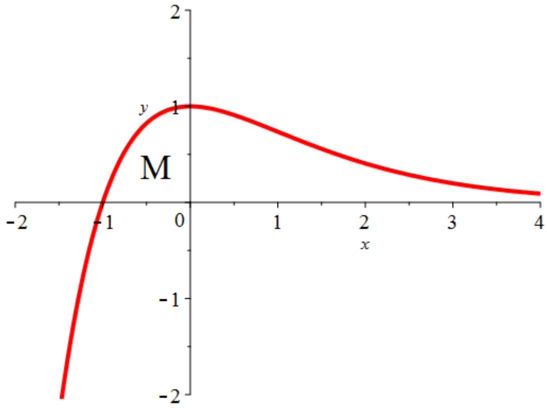
3.D2.4:

$with(Gym):$

$f(x) := (x+1)\cdot e^{-x}:$

a) Først tegnes grafen for at få et overblik over opgaven.

$plot(f(x), x=-2..4, y=-2..2, color=red, thickness=4)$



Man skal altså finde grafens skæring med førsteaksen for at få den nedre grænse i det bestemte integral.

Nulreglen giver os:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x+1=0 \vee e^{-x}=0 \Leftrightarrow x=-1$

(Man kan selvfølgelig også anvende 'solve')

Så kan arealet af punktmængden M bestemmes:

$$A_M = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = -2+e$$

Dvs. $\underline{\underline{A_M = e-2}}$

b) Det er de samme grænser, der skal anvendes, når rumfanget skal bestemmes:

$$V = \int_{-1}^{0} \pi\cdot f(x)^2\,dx = \frac{\pi e^2}{4} - \frac{5\pi}{4} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 1.876360272$$

Dvs. $\underline{\underline{V = 1.876}}$

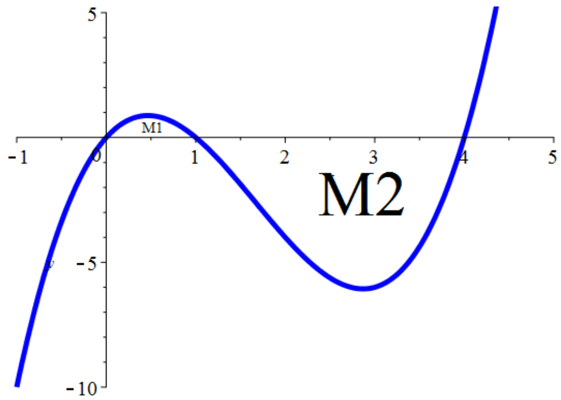
3.D2.5:

$with(Gym):$

$f(x) := x^3 - 5x^2 + 4x:$

a) Grafen for f tegnes for at få et overblik over opgaven (og for at besvare spørgsmål a))

$plot(f(x), x=-1..5, y=-10..5, color=blue, thickness=5)$



b) Nulpunkterne for f bestemmes:

$$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 0\}, \{x = 4\}, \{x = 1\}$$

Den lille punktmængde M_1 ligger over førsteaksen, mens den store punktmængde M_2 ligger under førsteaksen. Derfor skal man ændre fortegn på det bestemte integral i sidstnævnte tilfælde.

$$A_{samlet} = A_{M_1} + A_{M_2} = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_1^4 f(x)\,dx = \frac{71}{6}$$

Dvs. $\underline{\underline{A_{samlet} = \frac{71}{6}}}$

c) Med rumfanget behøver man ikke at tage hensyn til, om punktmængderne ligger over eller under førsteaksen, så det samlede rumfang kan regnes med et enkelt integral (man kan selvfølgelig stadigvæk anvende to integraler).

$$V = \int_0^4 \pi \cdot f(x)^2\,dx = \frac{5632\,\pi}{105} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 168.5090460$$

Dvs. **det samlede rumfang er 168,5**

3.D2.6: $f(x) = 4 - \frac{x^2}{4}$

a) For at kunne bestemme arealet af punktmængden M, skal man først bestemme funktionens nulpunkter, da de skal fungere som øvre og nedre grænse i det bestemte integral, der svarer til arealet (da grafen ligger over x-aksen).

$$f(x) := 4 - \frac{x^2}{4} :$$

$$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = -4\}, \{x = 4\}$$

Så kan arealet bestemmes:

$$A_M = \int_{-4}^4 f(x)\,dx = \frac{64}{3}$$

Dvs. at $\underline{\underline{A_M = \frac{64}{3}}}$

b) Det angivne rektangel har længden $2x$ og bredden $f(x)$, så arealet af rektanglet er:

$$A_{rektangel} = 2x \cdot f(x) = 2x \cdot \left(4 - \frac{x^2}{4}\right) = 8x - \frac{1}{2} \cdot x^3$$

Dvs. at arealet af det skraverede område er:

$$A_{skraveret} = A_{parabel} - A_{rektangel} = \underline{\underline{\frac{64}{3} - 8x + \frac{1}{2} \cdot x^3 \quad ; \quad 0 < x < 4}}$$

3.D2.7: $f(x) = x^2 - 6x + 9$

a) $f(x) := x^2 - 6x + 9$:

Selvom det er antydet på figuren, at grafen for f rører førsteaksen i $(3, 0)$, bør det lige tjekkes med en udregning:

$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 3\}, \{x = 3\}$

3 er en dobbeltrod, dvs. det er rigtigt, at parablens toppunkt ligger på førsteaksen. Hermed kender man grænserne i det bestemte integral.

$$A_M = \int_0^3 f(x)\, dx = 9$$

Dvs. $\underline{\underline{A_M = 9}}$

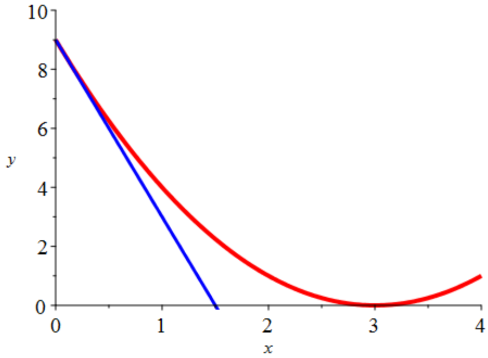
b) Da funktionsudtrykket er gemt i Maple, kan tangentligningen bestemmes ved:

$y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = -6x + 9$

Dvs. tangentligningen er: $\underline{\underline{y = -6x + 9}}$

c) For at få overblik over opgaven tegnes grafen for f og tangenten i samme koordinatsystem:

$plot([f(x), -6x + 9], x = 0..4, y = 0..10, color = [red, blue], thickness = [4, 3])$



Tangenten danner en trekant, hvor vi ud fra højde og grundlinje kan bestemme arealet:

Højde: $x = 0$: $\quad y = -6 \cdot 0 + 9 = 9$

Grundlinje: $y = 0$: $\quad 0 = -6x + 9 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Dvs. $T_{tangenttrekant} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{3}{2} = \underline{\underline{\frac{27}{4}}}$

Da man i a) har fundet arealet af M til 9, er arealet af den anden del af M:

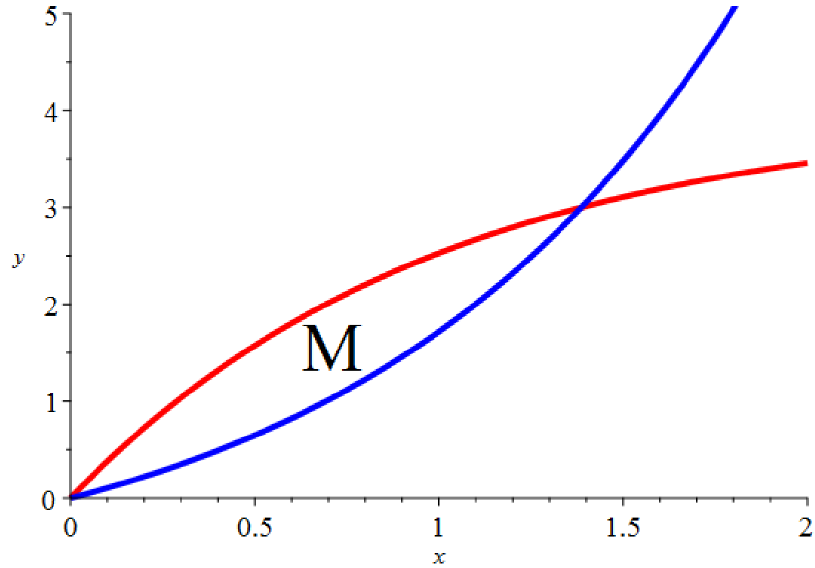
$$A_{resten-af-M} = 9 - \frac{27}{4} = \frac{36}{4} - \frac{27}{4} = \underline{\underline{\frac{9}{4}}}$$

3.D2.8: $g(x) = 4 \cdot (1 - e^{-x}) \qquad h(x) = e^{x} - 1$

a) $g(x) := 4 \cdot (1 - e^{-x}) : h(x) := e^{x} - 1 :$

For at få overblik over opgaven tegnes graferne for g og h i første kvadrant:

$plot([g(x), h(x)], x = 0..2, y = 0..5, color = [red, blue], thickness = 4)$



Skæringspunkterne mellem de to grafer bestemmes, da de skal bruges som grænserne i det bestemte integral, der skal udregnes for at finde arealet:

$g(x) = h(x) \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 0\}, \{x = 2\ln(2)\}$

Man kan se på figuren, at det er grafen for g, der ligger øverst i intervallet, men det kan også vises ved at sammenligne 2 funktionsværdier i området:

$g(1.) = 2.528482235 \quad > \quad h(1.) = 1.718281828$

$$A_M = \int_0^{2\cdot\ln(2)} (g(x) - h(x))\, dx = -6 + 10\ln(2) \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 0.931471806$$

$\underline{\underline{A_M = 0.9315}}$

b) Man kan ikke tale om stamfunktion**en**, da der er uendelig mange af slagsen, men man skal blot vise, at enhver stamfunktion til g er voksende i intervallet I=[0,∞[.

Lad G være en vilkårlig stamfunktion til g. G er så voksende i I, netop hvis G' er positiv i I (evt. 0 i enkelte punkter).

Da $G'(x) = g(x)$, skal man altså vise, at $g(x) > 0$ i I (evt. 0 i enkelte punkter).

Vi søger derfor eventuelle nulpunkter for g:

$g(x) = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot (1 - e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow -x = \ln(1) \Leftrightarrow x = 0$

Der er altså kun ét nulpunkt, og da vi allerede ved, at $g(1) > 0$, er $g(x) > 0$ i]0,∞[,

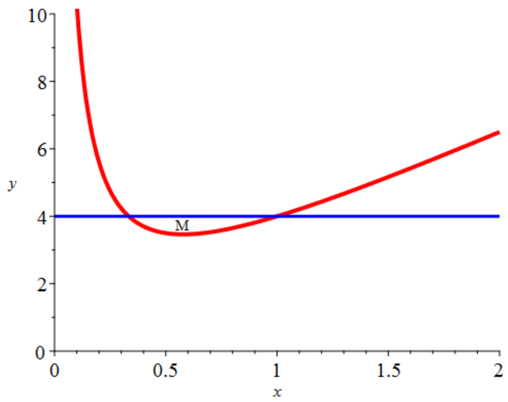
og **dermed er *G* voksende.**

3.D2.9: $f(x) = 3x + \frac{1}{x}$, $x > 0$, $l:\ y = 4$

a) $f(x) := 3x + \frac{1}{x}$:

Grafen for f tegnes sammen med linjen l i første kvadrant for at få overblik over opgaven:

$plot([f(x), 4], x = 0..2, y = 0..10, color = [red, blue], thickness = [4, 3])$



Man skal altså finde skæringspunkterne for at bestemme arealet af M:

$f(x) = 4 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 1\}, \left\{x = \frac{1}{3}\right\}$

Grafen for f ligger under den vandrette linje i området, så arealet af M er:

$$A_M = \int_{\frac{1}{3}}^{1} (4 - f(x))\, dx = \frac{4}{3} - \ln(3) \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 0.234721044$$

Dvs. $\underline{\underline{A_M = 0.2347}}$

b) Det er de samme grænser, der kan bruges, når rumfanget af omdrejningslegemet skal bestemmes:

$$V = \int_{\frac{1}{3}}^{1} \pi \cdot 4^2\, dx - \int_{\frac{1}{3}}^{1} \pi \cdot f(x)^2\, dx = \frac{16\pi}{9} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 5.585053608$$

Dvs. $\underline{\underline{V = \frac{16}{9} \cdot \pi}}$

3.D2.10:

a) $f(x) := 2 \cdot 0.5^x : g(x) := 4 :$

Arealet bestemmes ved udregning af et bestemt integral. Man ved, at den øvre grænse i integralet er 0, men for at finde den nedre grænse, skal man have fundet det sted i 2. kvadrant, hvor de to grafer skærer hinanden:

$f(x) = g(x) \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = -1.]]$

Man kan se på figuren, at grafen for g ligger øverst i intervallet [-1,0], men det kan også tjekkes ved at udregne funktionsværdier et sted i intervallet:

$g(-0.5) = 4$ (ikke det mest overraskende resultat, da det er en konstantfunktion).

$f(-0.5) = 2.828427124$

Da $g(-0.5) > f(-0.5)$ ligger grafen for g øverst, og dermed er arealet af punktmængden M:

$$A_M = \int_{-1}^{0} (g(x) - f(x))\, dx = 1.114609918$$

Dvs. $\underline{\underline{A_M = 1.115}}$

b) Da arealet skal være 2, og da man kender den nedre grænse 0, får man:

$$\int_{0.}^{k} f(x)\, dx = 2 \xrightarrow{\text{solutions for k}} 1.704381255$$

Dvs. $\underline{\underline{k = 1.704}}$

3.D2.11:

$f(x) := -x^2 + 4\,x:$

a) For at kunne bestemme arealet af M skal man kende de steder, hvor grafen skærer førsteaksen:

$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 0\}, \{x = 4\}$

Grafen er - som man også kan se på figuren - en parabel med grenene nedad, så M ligger mellem disse grænser:

$$A_M = \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{32}{3}$$

Dvs. $\underline{\underline{A_M = \frac{32}{3}}}$

b) $g(x) := k \cdot x:$

Først findes (ved hjælp af faktorisering og nulreglen) de steder, hvor graferne for g og f skærer hinanden:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 4\,x = k \cdot x \Leftrightarrow x^2 + (k-4) \cdot x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x + k - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4 - k$

Det kan også gøres med Maple:

$solve(f(x) = g(x), x) = 0, 4 - k$

Og med disse grænser kan man sammenligne arealerne:

$A_{M_1} = A_{M_2}$

$$\int_0^{4-k} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{4-k} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{4-k}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{solve}} 0.8251978961$$

Der anvendes numerisk 'solve' (ellers skal man bemærke, at der er to komplekse løsninger).

Dvs. $\underline{\underline{k = 0.825}}$

3.D2.12: $f(x) = x^2 - k \cdot x \qquad g(x) = k \cdot x$

a) $f(x) := x^2 - k \cdot x : g(x) := k \cdot x:$

Skæringsstederne bestemmes ved at sætte funktionsudtrykkene lig hinanden.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - k \cdot x = k \cdot x \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot k \cdot x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x - 2 \cdot k) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \cdot k$

Ved at indsætte i en af funktionsforskrifterne (her vælges g's) kan man finde de tilsvarende funktionsværdier.

$g(0) = 0$

$g(2 \cdot k) = 2 \cdot k^2$

Dvs. koordinatsættene for skæringspunkterne er $\underline{\underline{(0, 0) \text{ og } (2\,k, 2\,k^2)}}$

b) Da det er oplyst, at k er positiv, ligger $2\,k$ til højre for 0 og vil derfor være den øvre grænse i det bestemte integral, der skal benyttes.

Grafen for g er en ret linje (med positiv hældning), mens grafen for f er en parabel **med grenene opad**. Derfor vil grafen for g ligger øverst i intervallet. Da arealet skal være 36, har man:

$$\int_0^{2 \cdot k} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = 36 \xrightarrow{\text{solutions for k}} 3, -\frac{3}{2} - \frac{3\,\mathrm{I}\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2} + \frac{3\,\mathrm{I}\sqrt{3}}{2}$$

De komplekse løsninger forkastes. Den sidste løsning kan bruges, da den er positiv, dvs. $\underline{\underline{k = 3}}$

3.D2.13: $f(x)=(1-x)\cdot(x-a)\ ,\ a>1$

a) Førstekoordinaten til skæringspunkterne med førsteaksen bestemmes ved hjælp af nulreglen:

$$0=(1-x)\cdot(x-a)\ \Leftrightarrow\ 1-x=0\ \vee\ x-a=0\ \Leftrightarrow\ \underline{\underline{x=1\ \vee\ x=a}}$$

b) $f(x) := (1-x)\cdot(x-a)$:

Man bemærker, at punktmængden M ligger under førsteaksen, så man skal skifte fortegn på det bestemte integral for at finde arealet:

$$A_M = -\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}+\frac{a}{2}$$

Dvs. $\underline{\underline{A_M = \frac{a}{2}-\frac{1}{6}}}$

c) Fra spørgsmål a) kender man grænserne for det bestemte integral, der skal anvendes til at bestemme arealet af N, så man får:

$$A_M = A_N \Leftrightarrow \frac{a}{2}-\frac{1}{6} = A_N$$

$$\frac{a}{2}-\frac{1}{6} = \int_1^a f(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{solve}} \{a=3\},\ \{a=0\},\ \{a=0\}$$

Da det er oplyst, at $a > 1$, har man $\underline{\underline{a=3}}$

3.D2.14: $f(x)=a\cdot x+b$

En stamfunktion til f er $F(x)=\frac{a}{2}\cdot x^2+b\cdot x$

Så $\int_0^2 f(x)dx=10$ giver os:

$$\left[\frac{a}{2}x^2+b\cdot x\right]_0^2=10\ \Leftrightarrow\ \left(\frac{a}{2}\cdot 2^2+b\cdot 2\right)-\left(\frac{a}{2}\cdot 0^2+b\cdot 0\right)=10\ \Leftrightarrow\ 2a+2b=10$$

$\int_0^4 f(x)dx=25$ giver os:

$$\left[\frac{a}{2}x^2+b\cdot x\right]_0^4=25\ \Leftrightarrow\ \left(\frac{a}{2}\cdot 4^2+b\cdot 4\right)-\left(\frac{a}{2}\cdot 0^2+b\cdot 0\right)=25\ \Leftrightarrow\ 8a+4b=25$$

For at retfærdiggøre, at opgaven er med hjælpemidler, løses dette ligningssystem med to ligninger i Maple, selvom det hurtigt kunne gøres i hånden ved at forlænge den øverste ligning med 2:

$$2\,a+2\,b=10,\ 8\,a+4\,b=25 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{a=\frac{5}{4},\ b=\frac{15}{4}\right\}$$

Dvs. $\underline{\underline{a=\frac{5}{4}\ \text{ og }\ b=\frac{15}{4}}}$

3.D2.15:

a) $f(x) := a \cdot \sqrt{x \cdot (16 - x)}$:

Rumfanget af et omdrejningslegeme er givet ved $V = \pi \cdot \int_{start}^{slut} f(x)^2 \, dx$.

Da rumfanget skal være 260 cm^3, får man:

$$fsolve\left(260 = \pi \cdot \int_0^{10} f(x)^2 \, dx, a\right) = -0.4211224043, 0.4211224043$$

Da a er positiv, er det altså den anden løsning, der er den rigtige:

$\underline{\underline{a = 0.421}}$

b) a fastsættes: $a := 0.3$:

Vi skal nu finde den øvre grænse i det bestemte integral, der giver rumfanget 100 cm^3.

$$100 = \pi \cdot \int_0^{x_0} f(x)^2 \, dx \xrightarrow{\text{solve for x\_\_0}}$$

$$[[x_0 = 8.192917363], [x_0 = 21.75894052], [x_0 = -5.951857888]]$$

Da x skal ligge mellem 0 og 10, er det den første løsning, der er den rigtige.

Dvs. markeringen på glasset skal sættes 8,2 cm oppe på glasset.

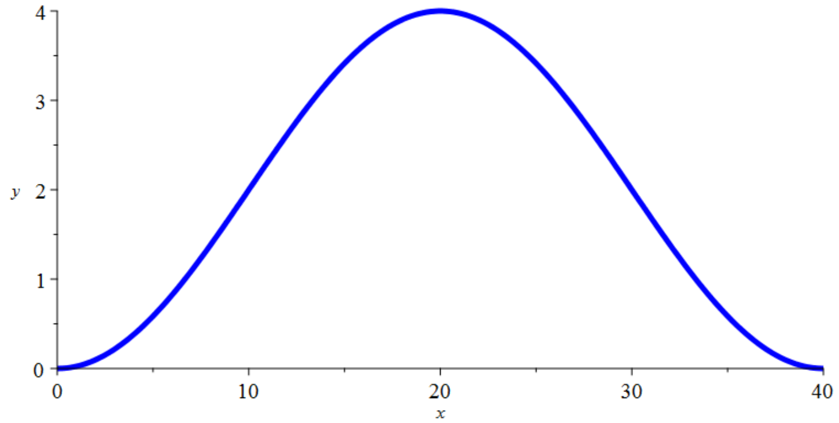
3.D2.16:

$with(Gym)$:

$f(x) := 2 \cdot \sin(0.05 \cdot \pi \cdot x - 0.5 \cdot \pi) + 2$:

a) Grafen skal tegnes i intervallet [0,40], så det skal være hverken mere eller mindre end dette:

$plot(f(x), x = 0..40, y = 0..4, color = blue, thickness = 5)$



b) Der er ikke angivet enheder i opgaver, så rumfanget bliver dimensionløst.

$$V = \int_0^{40} \pi \cdot f(x)^2 \, dx = 753.9822368$$

$\underline{\underline{V = 753.98}}$

c) Det maksimale tværsnitsareal findes det sted, hvor funktionsværdien er størst,
da det giver den største cirkel, når der roteres omkring førsteaksen.
Dette sted kan bl.a. bestemmes ved almindelig funktionsanalyse, hvor man først
finder det sted, hvor den afledede af f er nul:

$intervalsolve(f'(x) = 0, x = 0..40) = [1.305728676 \; 10^{-9}, 20.00000000, 40.00000000]$

Den første løsning svarer til 0 (beregningsunøjagtighed).

Fortegnet for den anden afledede bestemmes i 20:

$f''(20) = -0.04934802202 < 0$, dvs. lokalt maksimumssted.

0 og 40 er endepunkter i intervallet, så den største værdi i intervallet må antages i ovenstående
lokale maksimumssted.

Tværsnittet er en udfyldt cirkel, så arealet er:

$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot f(20)^2 = 50.26548246$

$\underline{\underline{A = 50.27}}$

3.D2.17:

$with(Gym):$

$f(x) := 2.5\cdot\sqrt{x+0.05} + 1.4 : g(x) := 3\cdot\sqrt{x-0.5} :$

a) Skålen kan rumme det, der kan være i den del, der kommer fra rotationen af området under grafen for g. I forskriften for g kan man ud fra udtrykket under kvadratrodstegnet se, at 0,5 er det sted, hvor grafen for g skærer førsteaksen, hvilket skal bruges som nedre grænse i det bestemte integral, der skal bruges til at beregne rumfanget:

$$V_{indreskål} = \int_{0.5}^{6.5} \pi\cdot g(x)^2\,dx = 508.9380099$$

Dvs. **skålen kan rumme 509 cm^3**

b) Rumfanget af ler-delen beregnes ved at trække ovenstående rumfang fra rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer ud fra grafen for f. Bemærk, at der arbejdes med forskellige nedre grænser:

$$V_{ler} = \int_{0}^{6.5} \pi\cdot f(x)^2\,dx - \int_{0.5}^{6.5} \pi\cdot g(x)^2\,dx = 197.8559239$$

Dvs. **der skal bruges 198 cm^3 ler.**

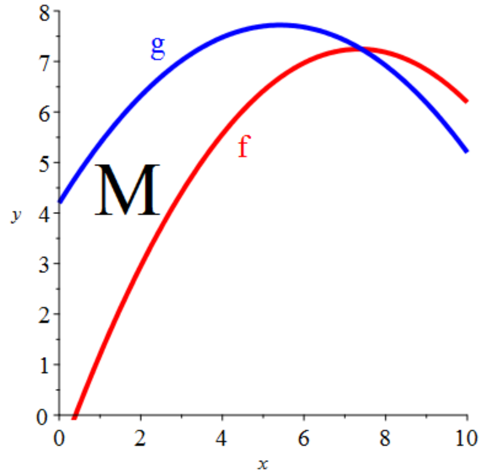
3.D2.18:

$with(Gym):$

$f(x) := -0.15\cdot x^2 + 2.205\cdot x - 0.858 : g(x) := -0.12\cdot x^2 + 1.3\cdot x + 4.2 :$

a) Graferne tegnes i første kvadrant i et passende område, dvs. et område med en størrelse, så grafernes første skæring klart fremgår:

$plot([f(x), g(x)], x = 0..10, y = 0..8, color = [red, blue], thickness = 4)$



b) Skålens højde svarer til førstekoordinaten for grafernes første skæringspunkt.

$$f(x) = g(x) \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 7.408247377\}, \{x = 22.75841929\}$$

Det andet skæringspunkt har ikke noget med træskålen at gøre.

$$\underline{\underline{h_{skål} = 7.4 \text{ cm}}}$$

c) Rumfanget af træ-delen beregnes ved at trække rumfanget fremkommet ud fra grafen for f fra det rumfang, der fremkommer ud fra grafen for g. Man kender den øvre grænse, der er højden beregnet ovenfor. Den nedre grænse for integralet med f bestemmes ved at finde det sted, hvor grafen for f skærer førsteaksen:

$$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 0.4000000000\}, \{x = 14.30000000\}$$

Det er den første løsning, der skal bruges, da den ligger til venstre for 7,408.

$$V_{træ} = \int_{0}^{7.408247377} \pi\cdot g(x)^2\,dx - \int_{0.4}^{7.408247377} \pi\cdot f(x)^2\,dx = 485.2221195$$

Dvs. **rumfanget af trædelen er 485,2 cm^3**

3.D2.19:

a) Da bægerets radius er 3 cm, har man den rette linje skærer andenaksen i 3, dvs.

$f(x) = a \cdot x + 3$

Når x-værdien er 11 (højden på bægeret), er y-værdien 5 (radius i toppen), så man har:

$$5 = a \cdot 11 + 3 \Leftrightarrow 2 = a \cdot 11 \Leftrightarrow a = \frac{2}{11}$$

Dvs. $\underline{\underline{f(x) = \frac{2}{11} \cdot x + 3}}$

b) Når væskeoverfladen er 8 cm fra bunden, svarer det til $x = 8$.

Rumfanget af kaffen svarer til rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når punktmængden mellem grafen for f og førsteaksen i intervallet [0,8] drejes 360° om førsteaksen:

$$V = \pi \cdot \int_0^8 \left(\frac{2}{11} \cdot x + 3\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{40856\,\pi}{363} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 353.5892823$$

Dvs. der er **354 cm^3** kaffe i bægeret

3.D2.20: $g'(t) = 675000 \cdot t \cdot \mathrm{e}^{-3t} \quad ; \quad 0 \le t \le 4$

a) Det er væksthastigheden $g'(t)$, der er angivet, så man har:

$$\int_0^4 g'(t)\, \mathrm{d}t = [g(t)]_0^4 = g(4) - g(0)$$

Det er $g(4)$, der angiver mængden af optaget glukose, mens $g(0) = 0$, da man ikke kan have optaget noget glukose før indtagelsen.

$$g(4) = \int_0^4 g'(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^4 675000 \cdot t \cdot \mathrm{e}^{-3 \cdot t}\, \mathrm{d}t = 75000 - 975000\, \mathrm{e}^{-12} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 74994.00939$$

Dvs. **der er optaget 75 g**

3.D2.21:

a) $f(x) := \begin{cases} 0.25 \cdot \sqrt{9 - 16 \cdot x^2} & -0.75 \le x \le 0 \\ -0.055 \cdot x + 0.75 & 0 < x \le 11 \end{cases}$:

Der bør ikke være lighedstegn begge steder i forbindelse med 0 ovenfor (som der er i opgaveformuleringen). Her er valgt svagt ulighedstegn øverst og stærkt nederst, men det kunne også være omvendt, da begge udtryk giver 0,75, når $x = 0$.

Det er antydet, at grafen for f skærer førsteaksen i -0,75, men det kan også vises:

$$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x \le -0.7500000000\}, \{11. < x\}$$

Man kan se, at funktionsværdierne regnes som 0 uden for definitionsmængden, men -0,75 er inden for definitionsmængden, og her er funktionsværdien også 0.

Så kan arealet af M beregnes:

$$A_M = \int_{-0.75}^{11} f(x)\, \mathrm{d}x = 5.364286467$$

$\underline{\underline{A_M = 5.36}}$

b) Rumfanget kan beregnes med de samme grænser. Nu skal det dog bemærkes, at der er kommet enheder på opgaven, så rumfanget skal angives med enhed.

$$V = \int_{-0.75}^{11} \pi \cdot f(x)^2\, \mathrm{d}x = 8.858008466$$

Dvs. $\underline{\underline{V = 8.86 \text{ m}^3}}$

3.D2.22: a) $f(x) := 211.4885 - 10.4801 \cdot \left(e^{0.0329 \cdot x} + e^{-0.0329 \cdot x}\right)$:

Ved jordoverfladen er f(x) = 0, og bredden af buen ved jordoverfladen er afstanden mellem funktionens to nulpunkter.

$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 91.25312187\}, \{x = -91.25312187\}$

$b = 91.25312187 - (-91.25312187) = 182.5062437$

Dvs. buens bredde er 182,5m

b) Buelængden kan beregnes ved $l = \int_a^b \sqrt{(f'(x))^2 + 1} \cdot dx$

$\int_{-91.25312187}^{91.25312187} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \overset{\text{simplify}}{=} 451.2554737$

Dvs. at længden af buen er 451,3m

3.D2.23: $f(x) = -9{,}75 \cdot \sin(0{,}0817 \cdot x) \quad ; \quad 0 \le x \le 1000$

a) $f(x) := -9.75 \cdot \sin(0.0817 \cdot x)$:

Den vandrette afstand mellem to toppe svarer til bølgelængden:

$\lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k} = \frac{2 \cdot \pi}{0.0817} = 76.90557292$

Dvs. **den vandrette afstand mellem to toppe er 76,9 mm**

Den lodrette afstand mellem top og bund svarer til 2 gange amplituden:

$2 \cdot 9.75 = 19.50$

Dvs. **den lodrette afstand mellem top og bund er 19,5 mm**

b) Den ene af længden og bredden er bølget. Vi lader det være længden.
Vi skal altså anvende formlen for buelængde:

$l = \int_0^{1000} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \overset{\text{simplify}}{=} 1143.533503$

Dvs. overfladearealet bliver:

$O = l \cdot b = 1143.533503\text{mm} \cdot 1000\text{mm} = 1.143533503\ 10^6\ \text{mm}^2$

$\underline{\underline{O = 1.144\text{m}^2}}$

3.D2.24: $f(x)=19\cdot\frac{\sqrt{-x^2+100x+14400}}{65}$; $0\le x\le 180$

a) $f(x) := 19\cdot\frac{\sqrt{-x^2+100\cdot x+14400}}{65}$:

Det tjekkes, at grafen for f skærer førsteaksen i 180:

$f(180) = 0$

Hermed kan rumfanget af omdrejningslegemet bestemmes:

$$V=\int_0^{180}\pi\cdot f(x)^2\,dx=\frac{32749920\,\pi}{169}\xrightarrow{\text{at 10 digits}}608798.2728$$

Dvs. **rumfanget er 608798 m³**

b) Overfladearealet kan bestemmes med den angivne formel:

$$O=2\cdot\pi\cdot\int_0^{180.}f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=36876.92426$$

Dvs. **overfladearealet er 36877** m²

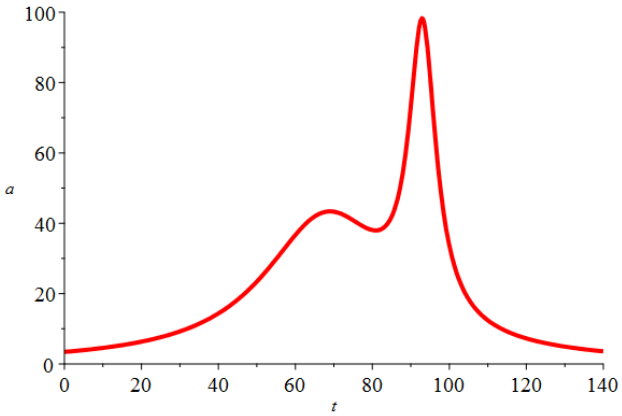
3.D2.25: $a(t)=\frac{16400}{(t-68)^2+400}+\frac{1480}{(t-93)^2+18}$; $0\le t\le 140$

t er tidspunktet målt i ms og a er førerdukkens deceleration i m/s².

a) $a(t) := \frac{16400}{(t-68)^2+400}+\frac{1480}{(t-93)^2+18}$:

Definitionsmængden er angivet, så grafen skal tegnes i dette vindue:

plot$(a(t),\ t=0..140,\ a=0..100,\ color=red,\ thickness=4)$



b) Der laves funktionsundersøgelse for at finde den største deceleration:

with(*Gym*) :

intervalsolve$(a'(t)=0,\ t=0..140)$

Warning, some roots are returned as numeric approximations

[68.98516399, 80.87934879, 92.91407443]

Fortegnet for den anden afledede bestemmes de steder, hvor der er vandret tangent (dvs. de steder, der er fundet ovenfor).

$a''(68.98516399) = -0.1779395608 < 0$, dvs. lokalt maksimumssted.

$a''(80.87934879) = 0.2966782706 > 0$, dvs. lokalt minimumssted.

$a''(92.91407443) = -9.068244204 < 0$, dvs. lokalt maksimumssted.

Den største deceleration må findes i et af de to lokale maksimumssteder, da grafen ikke vender på ydersiderne af disse steder (det lokale minimumssted ligger mellem de to lokale maksimumssteder).

$a(68.98516399) = 43.38935768$

$a(92.91407443) = 98.25574023$

Dvs. **den største deceleration er 98,3** $\mathbf{\frac{m}{s^2}}$

c) $SI=\int_0^{T}(a(t))^{2.5}\,dt=\int_0^{140.}(a(t))^{2.5}\,dt\overset{\text{simplify}}{=}982847.7128$

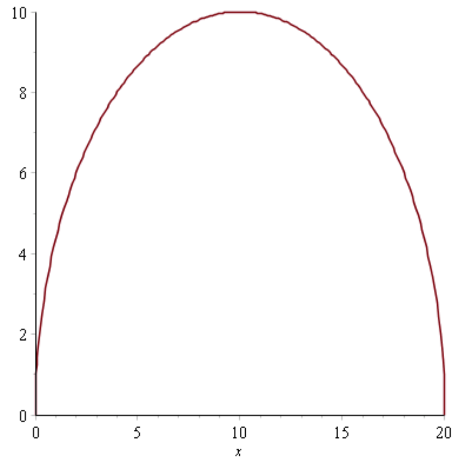
Dvs. $\underline{\underline{SI=982848}}$

3.D2.26: a) $f(x)=\sqrt{-x^2+20x}$; $0 \le x \le 20$

$f(x) := \sqrt{-x^2+20x}$:

Grafen tegnes i det angivne interval ($Dm = [0, 20]$):

$plot(f(x), x = 0..20) =$



Når man kigger på forskriften, kan man se, at man har med en cirkel at gøre (radius 10 cm), og omdrejningslegemet er så en kugle. Dermed kan man med det samme se, at diameteren det bredeste sted er 20 cm. Men hvis man ikke opdager dette, kan man løse opgaven på den sædvanlige måde med at bestemme maksimumsstedet ud fra den afledede funktion:

$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 10]]$

$f''(10) = -\frac{1}{100}\sqrt{100} < 0$ Dvs. det er et lokalt maksimum.

Da $f(10) = 10$ angiver radius, er diameteren på det bredeste sted $\underline{\underline{20\ cm}}$

Hvis $h = 18$ har man:

$f(18) = 6$

Dvs. her er diameteren $\underline{\underline{12\ cm}}$

b) $O = 2\cdot\pi\cdot\int_0^h f(x)\cdot\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

Hvis overfladearealet skal være 1005 (og her må man gå ud fra, at der menes 1005 cm^2), skal man løse ligningen:

$$1005 = 2\cdot\pi\cdot\int_0^h f(x)\cdot\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

$1005 = 2\cdot\pi\cdot\int_0^h f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \xrightarrow{\text{solve}}$

Warning, unable to determine if 20 is between 0 and h; try to use assumptions or use the AllSolutions option

15.99507178

Denne ligning volder problemer i Maple, men her findes løsningen med 'Numerically Solve from point' og begynde ved 10.

Man kan tjekke, at resultatet passer:

$1005 = 2\cdot\pi\cdot\int_0^{15.99507178} f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = 1005 = 319.9014356\,\pi$

Dvs $\underline{\underline{h = 16.0}}$

En anden mulighed er at udnytte, at det er oplyst, at 10 < h < 20:

$solve\left(1005 = 2\cdot\pi\cdot\int_0^h f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\right)$ assuming $10 < h < 20 = \frac{201}{4\pi} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 15.99507178$

3.D2.27: $f(x)=2\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{33}\cdot x-\frac{\pi}{2}\right)+2 \quad ; \quad 0\le x\le 33$

$with(Gym):$

a) $f(x) := 2\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{33}\cdot x-\frac{\pi}{2}\right)+2:$

Lampens maksimale højde svarer til den maksimale funktionsværdi.
Da en sinusfunktions højeste værdi er 1, har man $f_{max}=2\cdot 1+2=4$.

Dvs. $\underline{\underline{a=4}}$

b) Tværsnitsarealet (ingen enheder er oplyst) svarer til arealet under grafen for f:

$$A=\int_0^{33} f(x)\,\mathrm{d}x = 66$$

Dvs. **lampens tværsnitsareal er 66**

3.D2.28: $f(x)=1+0{,}1\cdot x^2 \qquad P(5,f(5))$

a) $f(x) := 1+0.1\cdot x^2:$

Da funktionsudtrykket er gemt i Maple, kan en ligning for tangenten bestemmes:

$$y-f(5)=f'(5)\cdot(x-5) \xrightarrow{\text{isolate for y}} y=1.0\,x-1.5$$

Dermed er tangentens ligning: $\underline{\underline{y=x-1{,}5}}$

Dette kunne også have været udregnet i hånden ved:
Først bestemmes røringspunktets andenkoordinat:

$$f(5)=1+0{,}1\cdot 5^2=1+0{,}1\cdot 25=3{,}5$$

Så bestemmes tangentens hældning ved at finde differentialkvotienten i $x=5$:

$$f'(x)=0{,}1\cdot 2\cdot x=0{,}2\cdot x$$

$$f'(5)=0{,}2\cdot 5=1$$

Da man nu både kender tangentens hældning og røringspunktets koordinater har man:

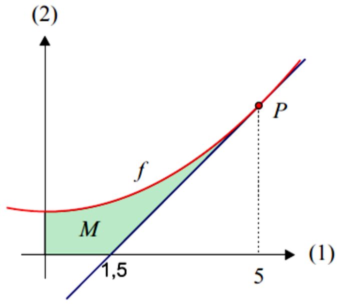
$$y-3{,}5=1\cdot(x-5) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{y=x-1{,}5}}$$

b) Først bestemmes førstekoordinaten til tangentens skæringspunkt med førsteaksen (y=0):

$$0=x-1{,}5 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=1{,}5}}$$

c) Derefter kan rumfanget bestemmes.

Lerskålen findes ved først at dreje den del af grafen for f, der ligger i intervallet [0,5], hvorefter man fratrækker det omdrejningslegeme, der fremkommer, når man drejer den del af tangenten, der ligger inden for intervallet [1,5 ; 5].

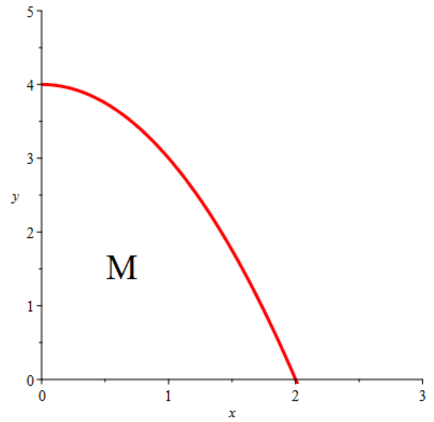


$$V_{skål}=\pi\cdot\int_0^5 f(x)^2\,dx-\pi\cdot\int_{1,5}^5 (x-1{,}5)^2\,dx=\underline{\underline{16{,}6242611252}}$$

3.D2.29: $f(x) := -x^2 + 4:$

a) Først skal punktmængden M identificeres. Den ligger i første kvadrant:

$plot(f(x), x = 0..3, y = 0..5, thickness = 3, color = red)$



Man skal bruge nulpunktet som øvre grænse i det bestemte integral, så det bestemmes:

$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = -2\}, \{x = 2\}$

Dvs. arealet af M bliver:

$$A_M = \int_0^2 f(x)\, dx = \frac{16}{3}$$

$$\underline{\underline{A_M = \frac{16}{3}}}$$

b) $T(a) := \dfrac{(a^2+4)^2}{4 \cdot a}:$

Først bestemmes de steder, hvor T har vandret tangent:

$$T'(a) = 0 \xrightarrow{\text{solve for a}} \left[[a = 2\,\mathrm{I}], [a = -2\,\mathrm{I}], \left[a = \frac{2}{3}\sqrt{3}\right], \left[a = -\frac{2}{3}\sqrt{3}\right] \right]$$

Kun den tredje af disse løsninger er både reel og ligger i intervallet $0 < a < 2$.

Ved at se på fortegnet for den anden afledede funktion undersøges det, om det er et minimumssted:

$T''\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3} > 0$ dvs. det er et lokalt minimumssted.

Da der ikke er andre lokale ekstremumssteder i intervallet, er arealet af trekant OQR er mindst, når $\underline{\underline{a = \frac{2}{\sqrt{3}}}}$

c) Andenkoordinaten for tangentens røringspunkt bestemmes ved indsættelse i funktionsforskriften:

$f(a) = -a^2 + 4$

Tangentens hældning bestemmes ved at indsætte i den afledede funktion:

$f'(x) = -2x$

$f'(a) = -2 \cdot a$

Så tangentens ligning bliver:

$y + a^2 - 4 = -2 \cdot a \cdot (x - a) \Leftrightarrow y = -2\,a \cdot x + a^2 + 4$

Dette kunne også være fundet ved at lade Maple regne det hele ud:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a) \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = -2\,a\,(x - a) - a^2 + 4 \overset{\text{simplify}}{=} y = a^2 - 2\,a\,x + 4$$

Skæringen med andenaksen findes ved at sætte x til 0: $y = a^2 + 4$:

Skæringen med førsteaksen findes ved at sætte y til 0: $0 = a^2 - 2\,a \cdot x + 4 \Leftrightarrow 2\,a \cdot x = a^2 + 4 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} + \frac{2}{a}$

Dvs. $\underline{\underline{R(0, a^2 + 4) \text{ og } Q\left(\frac{a}{2} + \frac{2}{a}, 0\right)}}$

Trekantens areal bestemmes med $T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$

$$T(a) = \frac{1}{2} \cdot (a^2 + 4) \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{2}{a}\right) = \frac{1}{2} \cdot (a^2 + 4) \cdot \left(\frac{a^2}{2\,a} + \frac{4}{2\,a}\right) = \frac{1}{2} \cdot (a^2 + 4) \cdot \frac{(a^2 + 4)}{2\,a} = \underline{\underline{\frac{(a^2 + 4)^2}{4\,a}}}$$

4.D1

4.D1.1: $f(x,y) = 4x^3 \cdot y$

a) Når man snitter med planen givet ved ligningen $y = 4$, skal 4 indsættes på y's plads i forskriften, hvis man skal finde forskriften for snitkurven (der angives med funktionen g).

$f(x,4) = 4x^3 \cdot 4 = 16x^3$

$\underline{\underline{g(x) = 16x^3}}$

b) $f_x{}'(x,y) = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 4 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot y = \underline{\underline{12x^2 y}}$

$f_y{}'(x,y) = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 4x^3 \cdot 1 = \underline{\underline{4x^3}}$

4.D1.2: $f(x,y) = 2y + x^2$

a) $f(-2,3) = 2 \cdot 3 + (-2)^2 = 6 + 4 = \underline{\underline{10}}$

b) Der differentieres ledvist: $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 + 2x = \underline{\underline{2x}}$

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2 + 0 = \underline{\underline{2}}$

4.D1.3: $f(x,y) = 2x \cdot y + x^2$

a) Der differentieres ledvist: $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2 \cdot y + 2x = \underline{\underline{2 \cdot (x+y)}}$

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2x + 0 = \underline{\underline{2x}}$

b) Først bestemmes gradienten af f i $f(x, y, f(x,y))$: $\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y + 2x \\ 2x \end{pmatrix}$

Dvs. gradienten i punktet $f(1,2, f(1,2))$ er $\begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}}}$

4.D1.4: $f_{xx}''(x,y) = 2$ $\quad f_{yy}''(x,y) = 6y + 12$ $\quad f_{xy}''(x,y) = 0$ $\quad P(1,-1,4)$ er et stationært punkt.

a) Determinanten af Hesse-matricen bestemmes for at afgøre arten af det stationære punkt P:

Generelt: $\det(H) = f_{xx}''(x,y) \cdot f_{yy}''(x,y) - \left(f_{xy}''(x,y)\right)^2 = 2 \cdot (6y + 12) - 0^2 = 12y + 24$

I P: $\det(H) = 12 \cdot (-1) + 24 = -12 + 24 = 12 > 0$, dvs. man skal se på fortegnet for $f_{xx}''(x,y)$.

Da $f_{xx}''(x,y) > 0$, er ***P* et lokalt minimumspunkt.**

4.D1.5: $f_{xx}''(-2,-1) = -12$ $\quad f_{yy}''(-2,-1) = 2$ $\quad f_{xy}''(-2,-1) = 0$ $\quad P(-2,-1,19)$ er et stationært punkt.

a) Determinanten af Hesse-matricen bestemmes for at afgøre arten af det stationære punkt P:

$\det(H) = f_{xx}''(x,y) \cdot f_{yy}''(x,y) - \left(f_{xy}''(x,y)\right)^2 = -12 \cdot 2 - 0^2 = -24 < 0$, dvs. ***P* er et saddelpunkt.**

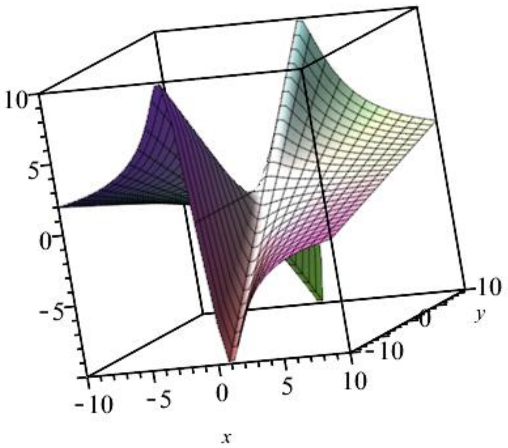
4.D2

4.D2.1:

$$f(x,y) := \frac{2\cdot x\cdot y}{x^2+1}:$$

a) Grafen kan tegnes med et 3D-plot:

$plot3d(f(x,y), view = [-10..10, -10..10, -10..10])$



b) Snitfunktionsforskriften for $y = 4$ er:

$$f_{y=4}(x) = \frac{2\cdot x\cdot 4}{x^2+1} = \underline{\underline{\frac{8\,x}{x^2+1}}}$$

c) $f(x, 4) = 1 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 4-\sqrt{15}], [x = 4+\sqrt{15}]]$

Dvs. $\underline{\underline{x = 4-\sqrt{15} \quad \vee \quad x = 4+\sqrt{15}}}$

Løsningerne svarer til x-koordinaterne for de punkter, hvor grafen for f skærer både den lodrette plan med ligningen $y = 4$ og den vandrette plan med ligningen $z = 1$.

4.D2.2: $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2 - 3$

a) Ligningen for niveaukurven $f(x,y) = 6$ er $6 = x^2 + (y-1)^2 - 3$, hvilket kan omskrives:

$$6 = x^2 + (y-1)^2 - 3 \Leftrightarrow$$

$$9 = x^2 + (y-1)^2$$

Dette er **ligningen for en cirkel** med centrum i $(0,1)$ og radius 3.

b) Ligningen $f(x,y) = k$ er $k = x^2 + (y-1)^2 - 3$, hvilket kan omskrives til

$$k + 3 = x^2 + (y-1)^2$$

Højresiden er summen af to kvadrater, dvs. den kan kun antage ikke-negative værdier. Ligningen har altså ingen løsninger, når venstresiden er negativ, dvs.:

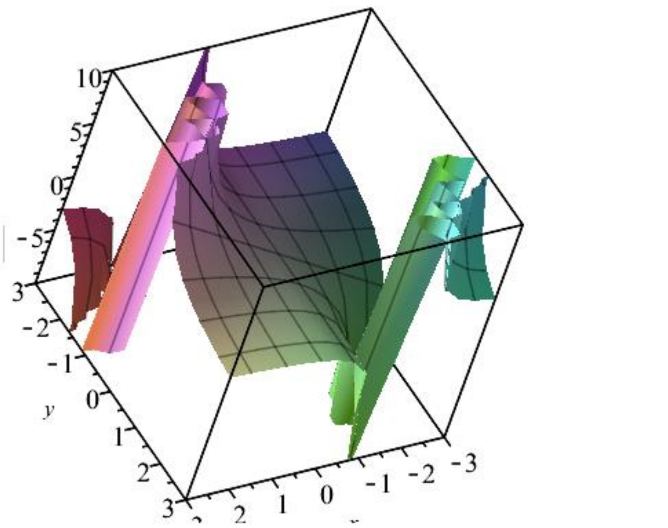
$$k + 3 < 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{k < -3}}$$

4.D2.3:

$$f(x,y) := \frac{6\,x}{x \cdot y + 3}:$$

$a)$ Grafen kan tegnes med et 3d-plot:

$$plot3d(\,f(x,y),\, view = [\,-3\,..3, -3\,..3, -10\,..10\,]\,)$$



b) Maple kan beregne de partielt afledede:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\,f(x,y)\,) = \frac{6}{y\,x+3} - \frac{6\,x\,y}{(y\,x+3)^2}$$

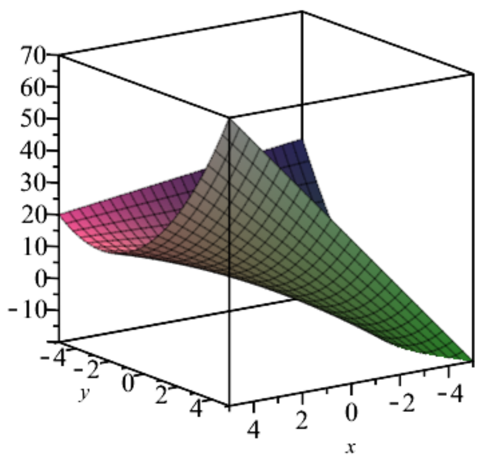
$$\frac{\partial}{\partial y}(\,f(x,y)\,) = -\frac{6\,x^2}{(y\,x+3)^2}$$

4.D2.4: $f(x,y) = 4x + y^2 + x \cdot y$

a) $f(x,y) := 4 \cdot x + y^2 + x \cdot y:$

Man kan med den rette syntaks tegne grafen i vinduet [-5,5]×[-5,5], hvorefter man kan fastsætte z-vinduet med højreklik, 'Axes' og 'proporties':

$$plot3d\left(4 \cdot x + y^2 + x \cdot y,\, x = -5\,..5,\, y = -5\,..5\right)$$



b) $with(Gym)$:
Man kan benytte Gym-kommandoen gradient:

$$gradient(f(x, y), [x, y] = [1, 3]) = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Men man kan også beregne den ved:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y)) = y + 4$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f(x, y)) = x + 2\,y$$

Så gradienten i punktet $P(1, 3, f(1, 3))$ er:

$$(3 + 4, 1 + 2 \cdot 3) = \underline{\underline{(7, 7)}}$$

Gradienten er ensrettet med vektoren $(1, 1)$, og dens størrelse er $\sqrt{7^2 + 7^2} = 7\sqrt{2} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 9.8994$

Dvs. at grafen er stejlest i retningen $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, hvor tangentens hældning er 9,8994

4.D2.5:

$$f(x, y) := \frac{e^x}{y^2 + 1} :$$

a) De partielt afledede bestemmes:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y)) = \frac{e^x}{y^2 + 1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f(x, y)) = -\frac{2\,e^x\,y}{(y^2 + 1)^2}$$

Dermed bliver de partielt afledede i (0,1):

$$f_x'(0, 1) = \frac{e^0}{1^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$f_y(0, 1) = -\frac{2 \cdot e^0 \cdot 1}{(1^2 + 1)^2} = -\frac{1}{2}$$

Dvs. $\underline{\underline{f_x'(0, 1) = \frac{1}{2} \qquad f_y'(0, 1) = -\frac{1}{2}}}$

b) Formel (196) i formelsamlingen fortæller os, at vi udover ovenstående partielle afledede i punktet har brug for at kende z-koordinaten:

$$f(0, 1) = \frac{1}{2}$$

Tangentplanens ligning er:

$$z = z_0 + f_x'(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y'(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (x - 0) - \frac{1}{2} \cdot (y - 1) \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = -2\,z + 2 + x$$

Så tangentplanens ligning er:

$$\underline{\underline{x - y - 2\,z + 2 = 0}}$$

4.D2.6: $f''_{xx}(x, y) = 6x \qquad f''_{yy}(x, y) = 24y^2 \qquad f''_{xy}(x, y) = 0 \qquad P(2, -1, 8)$

Determinanten af Hesse-matricen udregnes for at bestemme arten af stationært punkt:

$$\det(H) = f''_{xx}(x, y) \cdot f''_{yy}(x, y) - \left(f''_{xy}(x, y)\right)^2 = 6x \cdot 24y^2 - 0^2 = 144xy^2$$

I punktet P er værdien af determinanten:

$\det(H) = 144 \cdot 2 \cdot (-1)^2 = 288 > 0$, dvs. P er et lokalt ekstremumspunkt.

Da $f''_{xx}(x, y) = 6x = 6 \cdot 2 = 12 > 0$, er ***P* et lokalt minimumspunkt.**

4.D2.7: $f(x,y)=\dfrac{x\cdot y}{x^2+y^4+1}$

a) $f(x,y) := \dfrac{x\cdot y}{x^2+y^4+1}$:

De dobbeltafledede og den blandede afledede beregnes med Maple:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(f(x,y)) = -\frac{6\,y\,x}{(y^4+x^2+1)^2}+\frac{8\,y\,x^3}{(y^4+x^2+1)^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(f(x,y)) = -\frac{20\,x\,y^3}{(y^4+x^2+1)^2}+\frac{32\,y^7\,x}{(y^4+x^2+1)^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(f(x,y)) = \frac{1}{y^4+x^2+1}-\frac{4\,y^4}{(y^4+x^2+1)^2}-\frac{2\,x^2}{(y^4+x^2+1)^2}+\frac{16\,y^4\,x^2}{(y^4+x^2+1)^3}$$

b) De stationære punkter er de punkter, hvor begge førsteafledede er 0, så disse bestemmes.
Da almindeligt 'solve' ikke giver resultaterne, anvendes 'explicit solve':

$$solve\left(\left[\frac{\partial}{\partial x}(f(x,y))=0,\ \frac{\partial}{\partial y}(f(x,y))=0\right],\ \{x,y\},\ explicit\right) =$$

$\{x=0, y=0\}$, $\{x=\sqrt{2}, y=1\}$, $\{x=-\sqrt{2}, y=1\}$, $\{x=\sqrt{2}, y=-1\}$, $\{x=-\sqrt{2}, y=-1\}$, $\{x=\sqrt{2}, y=\mathrm{I}\}$, $\{x=-\sqrt{2}, y=\mathrm{I}\}$, $\{x=\sqrt{2}, y=-\mathrm{I}\}$, $\{x=-\sqrt{2}, y=-\mathrm{I}\}$

Der er nogle komplekse tal blandt disse løsninger, og de pågældende løsninger forkastes, dvs.
de stationære punkter er:

$\underline{\underline{A(0,0),\ B(\sqrt{2},1),\ C(-\sqrt{2},1),\ D(\sqrt{2},-1)\ \text{og}\ \ E(-\sqrt{2},-1)}}$

c) For at bestemme arten af de stationære punkter indføres navne for funktionerne svarende til de dobbelte afledede, den blandede afledede og determinanten af Hesse-matricen:

$$fxx(x,y) := -\frac{6\,y\,x}{(y^4+x^2+1)^2}+\frac{8\,y\,x^3}{(y^4+x^2+1)^3}:$$

$$fyy(x,y) := -\frac{20\,x\,y^3}{(y^4+x^2+1)^2}+\frac{32\,y^7\,x}{(y^4+x^2+1)^3}:$$

$$fxy(x,y) := \frac{1}{y^4+x^2+1}-\frac{4\,y^4}{(y^4+x^2+1)^2}-\frac{2\,x^2}{(y^4+x^2+1)^2}+\frac{16\,y^4\,x^2}{(y^4+x^2+1)^3}:$$

$$detHesse(x,y) := fxx(x,y)\cdot fyy(x,y)-fxy(x,y)^2:$$

Og så kan arten af de fem stationære punkter bestemmes:

A: $detHesse(0,0) = -1 < 0$ dvs. **punktet A(0,0) er et saddelpunkt**

B: $detHesse(\sqrt{2},1) = \frac{1}{8} > 0$, dvs. man skal også finde fortegnet for den ene dobbeltafledede:

$fxx(\sqrt{2},1) = -\frac{\sqrt{2}}{8} < 0$, dvs. **punktet B($\sqrt{2}$, 1) er et lokalt maksimumspunkt.**

C: $detHesse(-\sqrt{2},1) = \frac{1}{8} > 0$, dvs. man skal også finde fortegnet for den ene dobbeltafledede:

$fxx(-\sqrt{2},1) = \frac{\sqrt{2}}{8} > 0$, dvs. **punktet C($-\sqrt{2}$, 1) er et lokalt minimumspunkt.**

D: $detHesse(\sqrt{2},-1) = \frac{1}{8} > 0$, dvs. man skal også finde fortegnet for den ene dobbeltafledede:

$fxx(\sqrt{2},-1) = \frac{\sqrt{2}}{8} > 0$, dvs. **punktet D($\sqrt{2}$,-1) er et lokalt minimumspunkt.**

E: $detHesse(-\sqrt{2},-1) = \frac{1}{8} > 0$, dvs. man skal også finde fortegnet for den ene dobbeltafledede:

$fxx(-\sqrt{2},-1) = -\frac{\sqrt{2}}{8} < 0$, dvs. **punktet E($-\sqrt{2}$,-1) er et lokalt maksimumspunkt.**

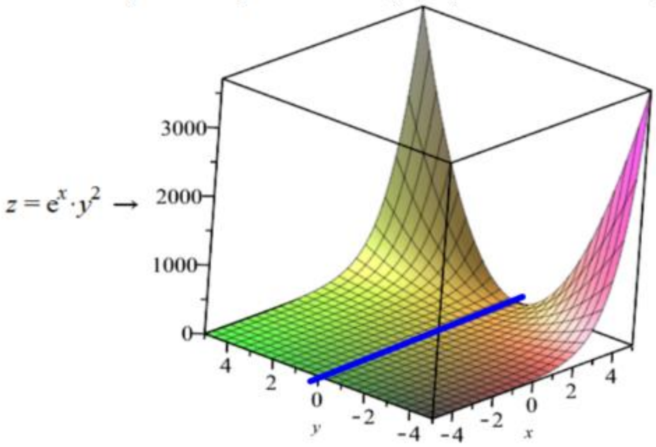
4.D2.8: $f\left(x,y\right)=\mathrm{e}^{x}\cdot y^{2}$

a) Stationære punkter er de punkter, hvor begge partielt afledede er 0,
så først bestemmes de partielt afledede af f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y^{2}\cdot \mathrm{e}^{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2\cdot y\cdot \mathrm{e}^{x}$$

Begge disse er 0 netop hvis $y=0$.
Dvs. alle punkter på formen $(x,\ 0)$ er stationære punkter (se den blå linje nedenfor).



Da der er uendelig mange stationære punkter, kan man ikke argumentere for, at funktionen ikke har nogen stationære punkter.

4.D2.9:

$f(t, v) := 13.3 + 0.62\cdot t - 13.95\cdot v^{0.16} + 0.486\cdot t\cdot v^{0.16}$:

a) $f(-5, 20) = -16.25322932$

Dvs. at **når den aktuelt målte temperatur er -5 °C, og vindhastigheden er 20 meter i sekundet (hård kuling), opleves temperaturen som -16,3 °C.**

b) $f(-3, v) = -10 \xrightarrow{\text{solve for v}} [[v = 7.883892525]]$

Dvs. at vindhastigheden skal være **7,9 meter i sekundet.**

4.D2.10: $A(m,h)=0{,}007184\cdot m^{0{,}425}\cdot h^{0{,}725}$

$A(m, h) := 0.007184\cdot m^{0.425}\cdot h^{0.725}:$

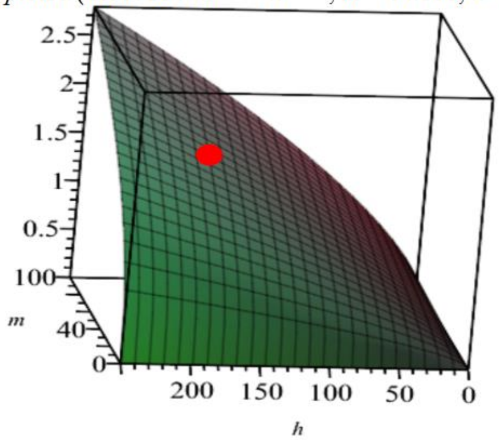
a) Overfladearealet af en person med $m=67$ og $h=170$ findes ved indsættelse i forskriften:

$A(67, 170) = 1.776329723$

Dvs. **personens overfladeareal er 1,78 m^2**

b) Her tegnes grafen med Maple, og så lægges punktet ind manuelt i tegneprogram:
(Det lyder som en 'Skal laves i Geogebra'-opgave)

$plot3d\left(0.007184\cdot m^{0.425}\cdot h^{0.725}, m=0..100, h=0..250\right)$



c) $\dfrac{\partial}{\partial m}(A(m, h)) = \dfrac{0.003053200\ h^{0.725}}{m^{0.575}}$

$A'_m(67, 170) = \dfrac{0.003053200\cdot 170^{0.725}}{67^{0.575}} = 0.01126776317$

Dette fortæller, at for en person på 170 cm, der vejer 67 kg, er **væksthastigheden for overfladearealet 0,00113 $\frac{\mathbf{m^2}}{\mathbf{kg}}$, dvs. hvis personen øger sin vægt med 1 kg, vil overfladearealet ca. øges med 0,00113 kvadratmeter**. Det er kun 'ca.', da væksthastigheden ændrer sig undervejs fra 67 kg til 68 kg.

4.D2.11

$A(x, y) := 250\cdot x+250\cdot y-2\cdot x^2-2\cdot y^2-2\cdot x\cdot y:$

a) Sidelængder på 20 cm og 30 cm svarer til $x=20$ og $y=30$, så man har:

$A(20, 30) = 8700$

Dvs. **overfladearealet er 8700 cm^2**

b) Maple kan anvendes til at bestemme de dobbeltafledede:

$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(A(x, y)) = -4$

$\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(A(x, y)) = -4$

$\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(A(x, y)) = -2$

Dvs. $\underline{\underline{\dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2}=-4 \qquad \dfrac{\partial^2 A}{\partial y^2}=-4 \qquad \dfrac{\partial^2 A}{\partial x\,\partial y}=-2}}$

c) For at finde kassens maksimale overfladeareal skal man finde stationære punkter, der er løsningerne til følgende ligningssystem med de første afledede:

$$solve\left(\left[\frac{\partial}{\partial x}(A(x,y))=0, \frac{\partial}{\partial y}(A(x,y))=0\right], \{x,y\}\right) = \left\{x=\frac{125}{3}, y=\frac{125}{3}\right\}$$

Dette er ikke et overraskende resultat, da det svarer til, at alle 12 rør er lige lange, dvs. man har en kube.
Med determinanten for Hessematricen undersøges det, hvilken type stationært punkt, det drejer sig om:

$$det(H) = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}\right)^2 = (-4)\cdot(-4) - (-2)^2 = 16 - 4 = 12>0 \text{ , dvs.}$$

der er tale om maksimum eller minimum. For at skelne mellem disse findes fortegnet for den ene af de dobbeltafledede:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -4<0 \quad \text{dvs. det er et lokalt maksimumspunkt.}$$

Punktets koordinater kan dermed anvendes til at finde kassens maksimale overfladeareal:

$$A\left(\frac{125}{3}, \frac{125}{3}\right) = \frac{31250}{3} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 10416.66667$$

Dvs. det **maksimale overfladeareal er 10417 cm^2**

4.D2.12: $P(x,y)=8\cdot x+6\cdot y+35$

a) $P(x,y) := 8\cdot x + 6\cdot y + 35$:
Da x er den kørte afstand målt i km, **lægges der 8 kr. til prisen for hver km, der køres.**
Da y er tiden målt i minutter, **lægges der 6 kr. til prisen for hvert minut, der køres.**
Da $P(0,0)=35$, **er udgangspunktet for prisen 35 kr.**

b) Da tiden er 10 minutter, er $y=10$, og da prisen er 185 kr., er $P=185$, dvs. man har:

$$P(x,10)=185. \xrightarrow{\text{solve}} \{x=11.25000000\}$$

Dvs. taxaen kørte $\underline{\underline{11.25 \text{ km}}}$

c) $\frac{\partial}{\partial x}(P(x,y)) = 8$

$\frac{\partial}{\partial y}(P(x,y)) = 6$

Da x er den kørte afstand målt i km, **lægges der 8 kr. til prisen for hver km, der køres.**
Da y er tiden målt i minutter, **lægges der 6 kr. til prisen for hvert minut, der køres.**

4.D2.13:

$$f(x,y) := 0.3\cdot e^{0.125\cdot x} + 12.1\cdot e^{-0.125\cdot x} - 3 + y^2 : \quad A(0,0,f(0,0)) \quad B(20,0,f(20,0))$$

a) Funktionsværdien svarer til højden over jordoverfladen:
$f(0,0) = 9.4$
Dvs. **A ligger 9,4 meter over jordoverfladen.**

b) Når $y=0$ får man:

$$f(x,0) = 0.3\, e^{0.125\,x} + 12.1\, e^{-0.125\,x} - 3$$

Dvs. $\underline{\underline{f_{snit}(x) = 0.3\cdot e^{0.125\cdot x} + 12.1\cdot e^{-0.125\cdot x} - 3}}$

c) Længden af snitkurven beregnes som buelængden, dvs. formel (171) i formelsamlingen:

$$f_{snit}(x) := 0.3\cdot e^{0.125\cdot x} + 12.1\cdot e^{-0.125\cdot x} - 3 :$$

$$\int_0^{20.} \sqrt{1 + (f_{snit}'(x))^2}\, dx = 23.15426458$$

Dvs. snitkurvens længde er **23,15 meter**

4.D2.14:

$with(Gym):$

$f(x,y) := 2\cdot y^3 - 3\cdot x^2 + k\cdot y + 18\cdot x + 16:$

$P(3, 2, f(3,2))$ er et stationært punkt.

a) Ved stationære punkter er begge de partielt afledede af f nul:

$$f_x(x,y) := \frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)) = (x,y) \to \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$$

$$f_x(x,y) = -6\,x + 18$$

Dette giver os ikke nogen ekstra viden, da vi allerede ved, at $x = 3$.

$$f_y(x,y) := \frac{\partial}{\partial y}(f(x,y)) = (x,y) \to \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$$

$$f_y(x,y) = 6\,y^2 + k$$

Dvs. $6\cdot 2^2 + k = 0 \Leftrightarrow 24 + k = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{k = -24}}$

b) For at bestemme arten af det stationære punkt, findes dobbeltafledede:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(f(x,y)) = -6$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(f(x,y)) = 12\,y$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(f(x,y)) = 0$$

Dvs. determinanten af Hessematricen bliver:

$det(H) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = -6\cdot(12\cdot 2) - 0^2 = -144 < 0$, dvs. **P er et saddelpunkt.**

4.D2.15: $f(x,y) = x^4 + p\cdot x^2\cdot y + q\cdot y^2 - 8y$

$with(Gym):$

$f(x,y) := x^4 + p\cdot x^2\cdot y + q\cdot y^2 - 8\cdot y:$

a) Gradienten beregnes:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,x^3 + 2\cdot p\cdot y\cdot x \\ p\cdot x^2 + 2\cdot q\cdot y - 8 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(2,1) = \begin{pmatrix} 4\cdot 2^3 + 2\cdot p\cdot 1\cdot 2 \\ p\cdot 2^2 + 2\cdot q\cdot 1 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 + 4\,p \\ 4\,p + 2\,q - 8 \end{pmatrix}$$

Dette kan også bestemmes med Gym-pakkens *gradient* i menuen:

$$f(x,y) \xrightarrow{\text{gradient } (x0,y0)}$$

$x_0 = 2, y_0 = 1$

$$\begin{bmatrix} 4\,p + 32 \\ 4\,p + 2\,q - 8 \end{bmatrix}$$

Når gradienten skal være $\begin{pmatrix} 28 \\ -8 \end{pmatrix}$, har man altså 2 ligninger med 2 ubekendte:

$$32 + 4\cdot p = 28,\ 4\cdot p + 2\cdot q - 8 = -8 \xrightarrow{\text{solve}} \{p = -1, q = 2\}$$

Dvs. $\underline{\underline{p = -1 \text{ og } q = 2}}$

b) Man kan bestemme en tangentplan med Gym-pakken (menuen til højre).

$p := -1 : q := 2 :$

$$f(x,y) \xrightarrow{\text{tangentplan}}$$

$x_0 = 2, y_0 = 1$

$z = 28\,x - 42 - 8\,y$

Dvs. $\underline{\underline{28\,x - 8\,y - z - 42 = 0}}$

5.D1

5.D1.1: $f(x) = x \cdot e^x + 3x \qquad y' = y + \dfrac{y}{x} - 3x$

Først findes den afledede funktion af *f*.

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x + 3 = e^x \cdot (1 + x) + 3$$

Det undersøges, om *f* er en løsning til differentialligningen ved at indsætte funktionsudtrykket og udtrykket for den afledede funktion og se, om man får en identitet.

$$e^x \cdot (1 + x) + 3 = x \cdot e^x + 3x + \frac{x \cdot e^x + 3x}{x} - 3x \iff$$

$$e^x + x \cdot e^x + 3 = x \cdot e^x + 3x + e^x + 3 - 3x \iff 0 = 0$$

Da man har fået en identitet, **er *f* en løsning til differentialligningen.**

5.D1.2: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \qquad y \cdot \dfrac{dy}{dx} = x$

Først bestemmes den afledede funktion af *f*, hvor man bemærker, at *f* er en sammensat funktion:

$$f'(x) = 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Udtrykkene for *f* og *f'* indsættes i differentialligningen for at se, om man får en identitet:

$$\sqrt{x^2 + 1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = x \iff x = x$$

Da dette er en identitet, **er *f* en løsning til differentialligningen.**

5.D1.3: $f(x) = (x + 1) \cdot e^x \qquad \dfrac{dy}{dx} = y + \dfrac{y}{x + 1}$

Hvis funktionsudtrykkene for funktionen og dens afledede indsat i differentialligningen giver en identitet, er *f* en løsning til differentialligningen.
Funktionen differentieres med produktreglen:

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x + 1) \cdot e^x = (x + 2) \cdot e^x$$

Indsættelse i differentialligningen:

$$(x + 2) \cdot e^x = (x + 1) \cdot e^x + \frac{(x + 1) \cdot e^x}{x + 1} \iff$$

$$(x + 2) \cdot e^x = (x + 1) \cdot e^x + e^x \iff$$

$$(x + 2) \cdot e^x = (x + 2) \cdot e^x$$

Da dette er en identitet, er *f* en løsning til differentialligningen.

5.D1.4: $\frac{dy}{dx} = y \cdot (x-1) \qquad P(3,5)$

a) Linjeelementet består af punktets koordinater samt differentialkvotienten det pågældende sted, og den bestemmes ved indsættelse af punktets koordinater i differentialligningen, da *f* er en løsning til differentialligningen og har en graf, der går gennem punktet:

$$\frac{dy}{dx} = 5 \cdot (3-1) = 5 \cdot 2 = 10$$

Linjeelementet er $\underline{\underline{(3,5;10)}}$, dvs. **i punktet *P* har tangenten til grafen for *f* hældningen 10.**

b) Vi kender allerede punktets koordinater og tangenthældningen, så vi kan indsætte i tangentligningen:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$y - 5 = 10 \cdot (x-3) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 10x - 25}}$$

5.D1.5: $\frac{dy}{dx} = 3x + 2y \qquad P(1, f(1))$

a) For at kunne bestemme tangentens ligning skal man kende koordinatsættet til røringspunktet samt tangentens hældning. Det er oplyst, at hældningen er 9, og da *f* er en løsning til differentialligningen, kan man finde røringspunktets *y*-koordinat ved indsættelse i differentialligningen:

$$9 = 3 \cdot 1 + 2y \Leftrightarrow 2y = 6 \Leftrightarrow y = 3$$

Hermed bliver tangentligningen:

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

$$y - 3 = 9 \cdot (x-1) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 9x - 6}}$$

5.D1.6: *S*: Antallet af skarvkolonier i Danmark

t: Tiden målt i år efter 1982

$\frac{dS}{dt}$: Den hastighed, hvormed antallet af skarvkolonier vokser

$67 - S$: Forskellen mellem 67 og antal skarvkolonier

$S \cdot (67 - S)$: Produktet af antal skarvkolonier og ovenstående forskel.

Da hastigheden skal være proportional med ovenstående produkt, har man:

$$\frac{dS}{dt} = k \cdot S \cdot (67 - S)$$

Proportionalitetskonstanten er oplyst, så man har:

$$\underline{\underline{\frac{dS}{dt} = 0,0029 \cdot S \cdot (67 - S)}}$$

5.D1.7: $P(0,3)$

a) Da hældningskoefficienten er proportional funktionsværdien med proportionalitetsfaktoren 0,2, har man:

$$a = 0,2 \cdot f(0) = 0,2 \cdot 3 = \underline{\underline{0,6}}$$

b) Da tangentens hældningskoefficient svarer til differentialkvotienten, har man:

$$\underline{\underline{f'(x) = 0,2 \cdot f(x)}}$$

5.D1.8: T er stegens indre temperatur målt i °C.
x er tiden målt i minutter.
Ovnens temperatur er 150°C
Hastigheden, hvormed stegens temperatur stiger, angives så ved: $\frac{dT}{dx}$
Forskellen mellem ovnens temperatur og stegens indre temperatur er: $(150-T)$

Da hastigheden er proportional med forskellen gælder: $\frac{dT}{dx}=k\cdot(150-T)$

Da proportionalitetskonstanten er oplyst til 0,011 har man endelig den søgte differentialligning:

$$\underline{\underline{\frac{dT}{dx}=0,011\cdot(150-T)}}$$

5.D1.9: V: Indføres som angivelse af vandmængden målt i L.
t: Indføres som tiden målt i sekunder.
Dermed har man:
$\frac{dV}{dt}$: Den hastighed, hvormed vandmængden ændrer sig.
Hastighedsudtrykket består af et konstant positivt bidrag fra vandhanen og et negativt bidrag fra den utætte bundprop. Da det negative bidrag er proportional med vandmængden, får man:

$$\underline{\underline{\frac{dV}{dt}=0,4-0,001\cdot V}}$$

5.D1.10: $A:\frac{dy}{dx}=0$ $\quad B:\frac{dy}{dx}=2$ $\quad C:\frac{dy}{dx}=0,1\cdot y$

a) A: Differentialligningen fortæller os, at hældningen for alle tangenter til grafen er 0, dvs. grafen for funktionen er en vandret linje. Derfor **hører differentialligningen *A* til funktionen *h*.**

B: Differentialligningen fortæller os, at hældningen for alle tangenter til grafen er 2, dvs. grafen for funktionen er en ret linje med hældningen 2. Derfor **hører differentialligningen *B* til funktionen *f*.**

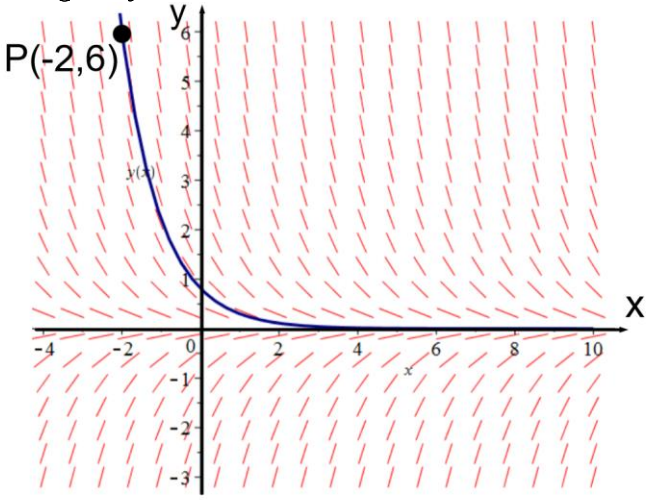
C: Differentialligningen fortæller os, at hældningen for tangenterne afhænger af funktionsværdien på den måde, at en større funktionsværdi giver en større tangenthældning. Derfor **hører differentialligningen *C* til funktionen *g*.**

5.D1.11: $f(x)=3\cdot e^x$

a) Først bestemmes den afledede funktion, da det er tangenthældningerne, der er angivet i et hældningsfelt:
$f'(x)=3\cdot e^x$

Da det er en eksponentialfunktion, er $f(x)=f'(x)>0$ for alle x-værdier, dvs. alle funktionsværdier og tangenthældninger er positive, hvilket ikke stemmer med hældningsfeltet, hvor vi over førsteaksen har negative tangenthældninger.
Dvs. ***f* kan ikke være en løsning til differentialligningen.**

5.D1.12: Løsningskurven skal følge linjeelementerne:



5.D1.13: $y' = -0{,}5 \cdot y \qquad P(2,1)$

a) Den fuldstændige løsning til denne type differentialligning er $f(x) = c \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5 \cdot x}$

Konstantens værdi bestemmes ved at indsætte punktets koordinater.

$$1 = c \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5 \cdot 2} \iff 1 = c \cdot \mathrm{e}^{-1} \iff c = \frac{1}{\mathrm{e}^{-1}} = \mathrm{e}^{1} = \mathrm{e}$$

Dvs. forskriften for *f* er:

$$f(x) = \mathrm{e}^{1} \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5 \cdot x}$$

$$\underline{\underline{f(x) = \mathrm{e}^{1-0{,}5 \cdot x}}}$$

5.D1.14: $y' = 3 - a \cdot y \qquad (0,2;-1)$

a) Ud fra linjeelementer kan man aflæse funktionsværdien og tangenthældningen, og ved at indsætte disse i differentialligningen, kan man bestemme a-værdien:

$$-1 = 3 - a \cdot 2 \iff 2a = 4 \iff \underline{\underline{a = 2}}$$

b) Differentialligningen er en standardtype (177 i formelsamlingen), og den fuldstændige løsning er:

$$f(x) = \frac{3}{2} + c \cdot \mathrm{e}^{-2 \cdot x}$$

Punktets koordinater indsættes for at bestemme konstanten:

$$2 = \frac{3}{2} + c \cdot \mathrm{e}^{-2 \cdot 0} \iff \frac{1}{2} = c \cdot 1 \iff c = \frac{1}{2}$$

Dvs. $\underline{\underline{f(x) = \dfrac{3 + \mathrm{e}^{-2 \cdot x}}{2}}}$

5.D1.15: $y' = y \cdot (1 - 0{,}2 \cdot y) \qquad P(0,1)$

I formelsamlingen genkendes dette som differentialligning (178), så den fuldstændige løsning er:

$$f(x) = \frac{\frac{1}{0{,}2}}{1 + c \cdot \mathrm{e}^{-1 \cdot x}} = \frac{5}{1 + c \cdot \mathrm{e}^{-x}}$$

Koordinaterne for P anvendes for at finde den partikulære løsning, hvis graf går gennem P:

$$1 = \frac{5}{1 + c \cdot \mathrm{e}^{-0}} \iff 1 = \frac{5}{1 + c} \iff 1 + c = 5 \iff c = 4$$

Dvs. $\underline{\underline{f(x) = \dfrac{5}{1 + 4 \cdot \mathrm{e}^{-x}}}}$

5.D1.16: $\frac{dy}{dt} = a \cdot y \cdot (M - y) \qquad M = 1000 \qquad y(0) = 100 \quad a = 0{,}0001$

a) Da man til tiden 0 har 100 individer, får man væksthastigheden:

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}0001 \cdot 100 \cdot (1000 - 100) = 0{,}01 \cdot 900 = \underline{\underline{9}}$$

b) Den fuldstændige løsning til den logistiske differentialligning er:

$$y(t) = \frac{M}{1 + c \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot M \cdot t}} = \frac{1000}{1 + c \cdot \mathrm{e}^{-0{,}0001 \cdot 1000 \cdot t}} = \frac{1000}{1 + c \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot t}}$$

Da man ved, at der er 100 individer til $t = 0$, kan man bestemme *c*:

$$100 = \frac{1000}{1 + c \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot 0}} \Leftrightarrow 100 = \frac{1000}{1 + c \cdot 1} \Leftrightarrow 1 + c = 10 \Leftrightarrow c = 9$$

Dvs. den partikulære løsning er:

$$\underline{\underline{y(t) = \frac{1000}{1 + 9 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot t}}}}$$

5.D1.17: $f'(x) = 1 + \frac{f(x)}{x} \qquad P(1,2) \qquad g(x) = \frac{1}{x} \cdot f(x)\ ;\ x > 0$

a) For at kunne bestemme tangentligningen skal man udover de allerede oplyste koordinater for røringspunktet også kende tangenthældningen, og den bestemmes ved indsættelse af punktets koordinater i differentialligningen:

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{1} = 3$$

Så kan tangentligningen bestemmes:

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

$$y - 2 = 3 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 3x - 1}}$$

b) Funktionen *g* differentieres med produktreglen:

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot f(x) + \frac{1}{x} \cdot f'(x)$$

Da *f* er en løsning til differentialligningen, kender man et udtryk for den afledede fra differentialligningen:

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot f(x) + \frac{1}{x} \cdot \left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)$$

$$g'(x) = -\frac{f(x)}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{f(x)}{x^2} = \underline{\underline{\frac{1}{x}}}$$

Man ved nu, at *g* er en stamfunktion til ovenstående, dvs.

$g(x) = \ln(x) + k$ (da $x > 0$).

Dermed er:

$$f(x) = x \cdot g(x) = x \cdot (\ln(x) + k) = x \cdot \ln(x) + k \cdot x$$

P's koordinater kan bruges til at bestemme *k*:

$$2 = 1 \cdot \ln(1) + k \cdot 1 \Leftrightarrow 2 = 0 + k \Leftrightarrow k = 2$$

Dvs. $\underline{\underline{f(x) = x \cdot (2 + \ln(x))}}$

5.D1.18: $\frac{dy}{dx} = 5y - y^2$

a) Når $y = 2$ har man:

$$\frac{dy}{dx} = 5 \cdot 2 - 2^2 = 10 - 4 = \underline{\underline{6}}$$

b) Hvis væksthastigheden skal være 4, dvs. $\frac{dy}{dx} = 4$, har man:

$$4 = 5y - y^2 \Leftrightarrow y^2 - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow (y-1)\cdot(y-4) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 1 \vee y = 4}}$$

5.D1.19: $y' = 0{,}3 \cdot y$

a) Da tangenthældningen skal have samme fortegn som funktionsværdien, kan man udelukke *f*, da man i anden kvadrant har negative tangenthældninger og positive funktionsværdier. Tangenthældningen er proportional med funktionsværdien, så når funktionsværdien bliver større, skal tangenthældningen også blive større, hvilket ikke sker for *h*, der dermed udelukkes. Da en af funktionerne er løsning, har man altså, at ***g* er løsning til differentialligningen.**

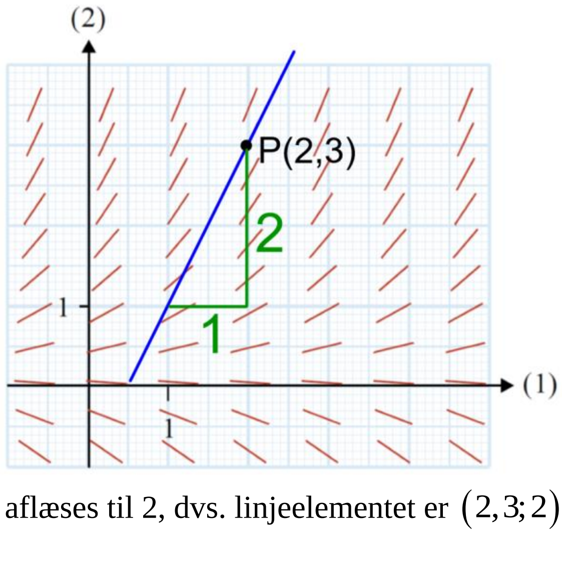
5.D1.20: $y' = -0{,}6 \cdot y$

Differentialligningen fortæller os, at tangenthældningen er ligefrem proportional med funktionsværdien med proportionalitetsfaktoren -0,6.

Ud fra dette kan man konkludere flere ting.

1) Man finder tangenthældningen alene ud fra funktionsværdien, og man skal altså ikke bruge argumentet (*x*-værdien). Derfor skal tangenthældninger være ens langs enhver vandret linje, man kan lægge ind over hældningsfeltet. Dette gælder dog for alle tre hældningsfelter, så det kan ikke bruges til at afvise nogen felter.
2) Da proportionalitetsfaktoren er negativ, skal tangenthældningen have modsat fortegn af funktionsværdien, dvs. under *x*-aksen skal tangenthældningen være positiv, og over *x*-aksen skal tangenthældningerne være negative. Dette gælder kun for **hældningsfelt *B***. Hældningsfelt *A* har positive tangenthældninger overalt, mens *C* har forkert fortegn på alle tangenthældningerne i forhold til differentialligningen.
3) Desuden skal den numeriske værdi af tangenthældningen også øges med øget numerisk værdi af funktionsværdien. Dette kan også bruges til at forkaste *A* og *C*, for *A* har tilsyneladende ens tangenthældninger over det hele, mens *C* begynder at få mindre tangenthældninger, når man kommer et vist stykke op over *x*-aksen (det ligner logistisk vækst).

5.D1.21: Tangenten tegnes som en forlængelse af linjeelementet i $P(2,3)$ (**blå rette linje**)



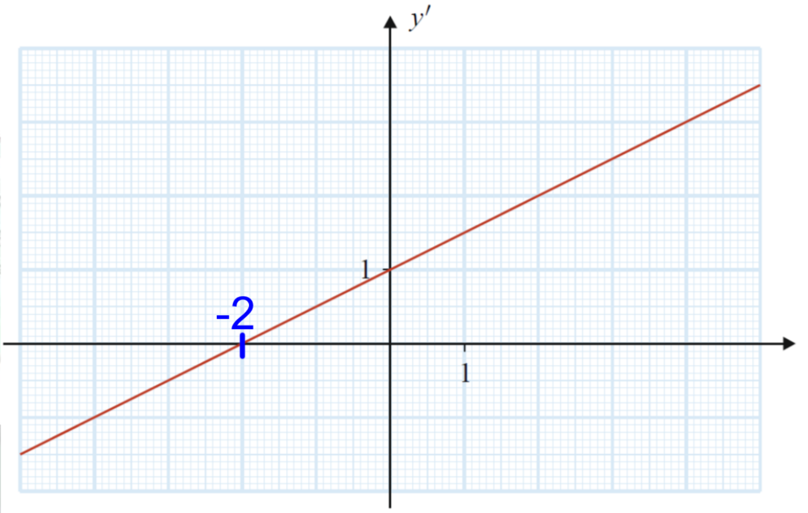
Tangenthældningen kan aflæses til 2, dvs. linjeelementet er $(2,3;2)$

5.D1.22: $P(6,1)$

Punktet P har andenkoordinaten 1, så på grafen aflæses det, at når y er 1 (førsteaksen på figuren), er væksthastigheden (y') 3.

Dvs. at linjeelementet er $\underline{\underline{(6,1;3)}}$

5.D1.23: Skæringspunktet med førsteaksen aflæses:



Til højre for dette sted ligger linjen over førsteaksen, dvs. væksthastigheden er positiv for $\underline{\underline{y > -2}}$

5.D1.24: $O(0,0)$ $P(4,3)$

a) Hældningen bestemmes ud fra de to oplyste punkter:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}$$

Da skæringen med andenaksen er 0, har man:

$$\underline{\underline{y'(t) = \frac{4}{3} \cdot y(t)}}$$

5.D2

5.D2.1: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x\cdot y}{\ln(y)}$ $\qquad P\left(3,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$

Differentialligningen kan løses med separation af de variable. Det bemærkes, at man arbejder med $y>0$, da man har en logaritmefunktion, og $y\neq 1$, da man ikke må få 0 i nævneren.
Dvs. differentialligningen kan løses i intervallerne $0<y<1$ og $y>1$. Da punktets andenkoordinat er mellem 0 og 1, er det førstnævnte interval, der skal anvendes.
$0<y<1$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x\cdot y}{\ln(y)} \Leftrightarrow \int\frac{\ln(y)}{y}dy=\int x\,dx \Leftrightarrow \int\ln(y)\,d(\ln(y))=\int x\,dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot(\ln(y))^2=\frac{1}{2}x^2+k$$

Punktet P's koordinater bruges til at finde k:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 3^2+k \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot(-1)^2=\frac{1}{2}\cdot 3^2+k \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{9}{2}+k \Leftrightarrow k=-4$$

Hermed bliver forskriften for den partikulære løsning:

$$\frac{1}{2}\cdot(\ln(f(x)))^2=\frac{1}{2}x^2-4 \Leftrightarrow (\ln(f(x)))^2=x^2-8 \Leftrightarrow \ln(f(x))=-\sqrt{x^2-8}$$

$$\underline{\underline{f(x)=\mathrm{e}^{-\sqrt{x^2-8}}\quad ;\ x>\sqrt{8}}}$$

Det negative fortegn foran kvadratroden (markeret med rødt) kommer af, at vi arbejder med funktionsværdier mellem 0 og 1, så logaritmeværdierne bliver negative.
Definitionsmængden kommer af, at udtrykket under kvadratrodstegnet skal være positivt (hvis det er 0, får man den forbudte funktionsværdi 1), samt at punktet P skal ligge i definitionsmængden.

Man kan også finde løsningen med Maple:

$$y'=\frac{x\cdot y}{\ln(y)},\ y(3)=\frac{1}{\mathrm{e}}\xrightarrow{\text{solve DE}} y(x)=\mathrm{e}^{-\sqrt{x^2-8}}$$

Så skal man dog selv analysere sig frem til definitionsmængden.

5.D2.2: $(x+5)\cdot\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{y}$ $\qquad P(-4,1)$

Den partikulære løsning findes ved at løse differentialligningen sammen med P's koordinater:

$$\left[(x+5)\cdot f'(x)=\sqrt{f(x)},\ f(-4)=1\right]\xrightarrow{\text{solve DE}} f(x)=\frac{\ln(x+5)^2}{4}+\ln(x+5)+1$$

Dvs. $\underline{\underline{f(x)=\dfrac{\ln(x+5)^2}{4}+\ln(x+5)+1}}$

5.D2.3: $\frac{dy}{dx} = x \cdot (y+1)$

a) Det er ikke differentialligningen, men funktionen, der har linjeelementer. Man kan dog ved hjælp af differentialligningen finde det linjeelement, der svarer til punktet $(1,1)$ på grafen for *f*:

$\frac{dy}{dx} = 1 \cdot (1+1) = 1 \cdot 2 = 2$, dvs. linjeelementet, der skal tegnes sammen med løsningskurven er $(1,1;2)$.

Funktionsudtrykket for løsningen, hvis graf går gennem (1,1) bestemmes:

$$f'(x) = x \cdot (f(x)+1), f(1) = 1 \xrightarrow{\text{solve DE}} f(x) = -1 + \frac{2\,e^{\frac{x^2}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}}$$

Linjeelementet er et lille stykke af den rette linje med ligningen:

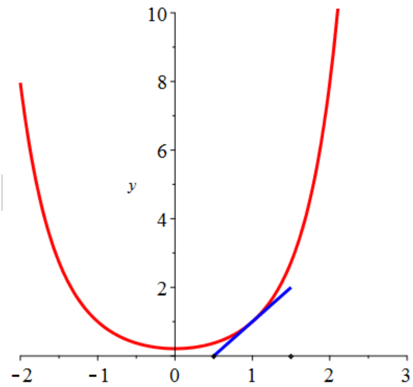
$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

$$y - 1 = 2 \cdot (x-1) \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = 2x - 1$$

For at kunne nøjes med at tegne et lille stykke laves en gaffelforskrift:

$$g(x) := \begin{cases} 200 & x < 0.5 \\ 2x - 1 & 0.5 < x < 1.5 \\ 200 & x > 1.5 \end{cases} :$$

$$plot\left(\left[-1 + \frac{2\,e^{\frac{x^2}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}}, g(x)\right], x = -2..3, y = 0..10, discont = true, color = [red, blue], thickness = 3\right)$$

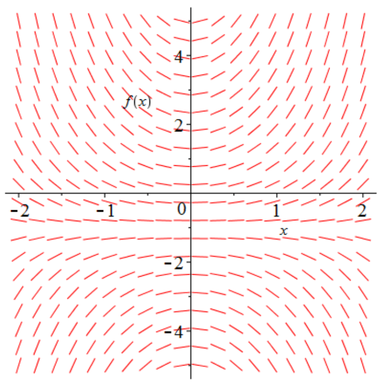


b) Nulreglen kan bruges til at løse ligningen:

$x \cdot (y+1) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0 \vee y = -1}}$

Dette svarer til alle de vandrette linjeelementer, der vil ligge på *y*-aksen (*x* = 0) og den vandrette linje med ligningen *y* = −1. Dette ses også i et hældningsfelt:

$linjeelementer(f'(x) = x \cdot (f(x)+1), f(x), x = -2..2, f(x) = -5..5, color = red)$



5.D2.4: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{x-4}$

a) Det er ikke differentialligningen, men funktionen, der har linjeelementer. Man kan dog ved hjælp af differentialligningen finde det linjeelement, der svarer til punktet $(2,5)$ på grafen for *f*:

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{5^2}{2-4} = -\dfrac{25}{2}$, dvs. linjeelementet, der skal tegnes sammen med løsningskurven er $\left(2{,}5;-\dfrac{25}{2}\right)$.

Funktionsudtrykket for løsningen, hvis graf går gennem (2,5) bestemmes:

$$dsolve\left(\left[f'(x) = \frac{f(x)^2}{x-4}, f(2) = 5\right]\right) = f(x) = -\frac{5}{-5\,\mathrm{I}\,\pi + 5\ln(x-4) - 5\ln(2) - 1}$$

Funktionsudtrykket indeholder den imaginære enhed, men det hænger sammen med, at den naturlige logaritmefunktion også giver noget komplekst, når x ikke er over 4.

Linjeelementet er et lille stykke af den rette linje med ligningen:

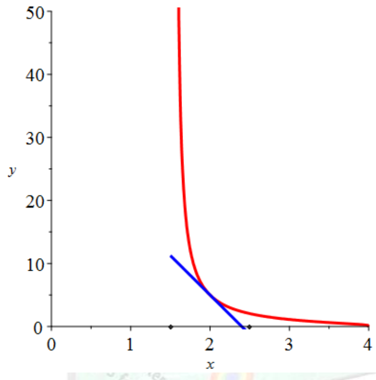
$$y - y_0 = a\cdot(x - x_0)$$

$$y - 5 = -\frac{25}{2}\cdot(x-2) \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = -\frac{25\,x}{2} + 30$$

For at kunne nøjes med at tegne et lille stykke laves en gaffelforskrift:

$$g(x) := \begin{cases} 200 & x < 1.5 \\ -\dfrac{25\,x}{2} + 30 & 1.5 < x < 2.5 \\ 200 & x > 2.5 \end{cases} :$$

$$plot\left(\left[-\frac{5}{-5\,\mathrm{I}\,\pi + 5\ln(x-4) - 5\ln(2) - 1}, g(x)\right], x = 0..4, y = 0..50, discont = true, color = [red, blue], thickness = 3\right)$$



5.D2.5: $\dfrac{dM}{dt} = -k \cdot M^{\frac{2}{3}} \quad M(0) = 1 \quad M(75) = 0{,}5$

a) Den ene betingelse bruges til at bestemmeden partikulære løsning udtrykt ved k, hvorefter den anden betingelse bruges til at finde k:

$$M'(t) = -k \cdot M(t)^{\frac{2}{3}}, M(0) = 1 \xrightarrow{\text{solve DE}} M(t) = -\frac{1}{27} k^3 t^3 + \frac{1}{3} k^2 t^2 - k t + 1$$

Så bestemmes k-værdien:

$$M(t) := -\frac{1}{27} k^3 t^3 + \frac{1}{3} k^2 t^2 - k t + 1 :$$

$solve(M(75) = 0.5, k) =$

$0.05587401052 + 0.02749459274\,\mathrm{I}, 0.008251978961, 0.05587401052 - 0.02749459274\,\mathrm{I}$

De komplekse løsninger forkastes, dvs. $k := 0.008251978961$:

$$\boldsymbol{M(t) = -2.081184448\ 10^{-8}\, t^3 + 0.00002269838559\, t^2 - 0.008251978961\, t + 1}$$

b) Mølkuglen er fordampet, når massen er 0:

$M(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve for t}}$

$[[t = 363.6295025], [t = 363.5089852 + 0.06943324937\,\mathrm{I}], [t = 363.5089852 - 0.06943324937\,\mathrm{I}]]$

Igen forkastes de komplekse løsninger, dvs. det tager **364 døgn**

5.D2.6: $\dfrac{1}{N} \cdot \dfrac{dN}{dt} = 0{,}24 - 0{,}013 \cdot t$

a) Da t måles i antal år efter 1980, og der i 1992 var 156000 i Danmark, har man $N(12) = 156000$.

Med denne betingelse kan differentialligningen løses:

$$\left[\frac{1}{N(t)} \cdot N'(t) = 0.24 - 0.013 \cdot t, N(12) = 156000\right] \xrightarrow{\text{solve DE}} \boldsymbol{N(t) = \frac{156000\, \mathrm{e}^{-\frac{t(-480 + 13t)}{2000}}}{\mathrm{e}^{\frac{243}{125}}}}$$

b) Man kan løse opgaven med almindelig funktionsanalyse, dvs. først finde de steder, hvor den afledede er 0 og derefter fortegnet for den anden afledede disse steder:

$$N(t) := \frac{156000\, \mathrm{e}^{-\frac{t(-480 + 13t)}{2000}}}{\mathrm{e}^{\frac{243}{125}}} :$$

$$N'(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{t = \frac{240}{13}\right\} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} \{t = 18.46153846\}$$

$$N''\left(\frac{240}{13}\right) = -\frac{18586.48495}{\mathrm{e}^{\frac{243}{125}}} < 0 \text{ dvs. lokalt maksimumssted.}$$

Antallet af skarver til dette tidspunkt er:

$$N\left(\frac{240}{13}\right) = \frac{156000\, \mathrm{e}^{\frac{144}{65}}}{\mathrm{e}^{\frac{243}{125}}} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 204637.6025$$

Dvs. det største antal skarver er **204638**

Man kan også finde tidspunktet ved at kigge på differentialligningen, hvor man kan se, at væksthastigheden er 0, når $0.24 - 0.013 \cdot t = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{t = 18.46153846\}$

Og man kan se på $0.24 - 0.013 \cdot t$, at væksthastigheden er positiv, når t er mindre end 18,5 og negativ, når den er større, dvs. det er et lokalt maksimumssted.

5.D2.7: $M'(t) = -0{,}069 \cdot M(t) + 9{,}627 \cdot e^{-0{,}0096 \cdot t}$ $\quad M(0) = 0$

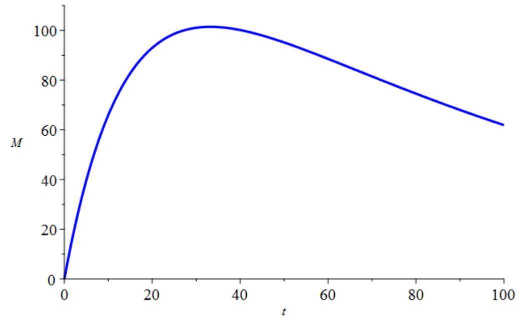
a) Den partikulære løsning med begyndelsesbetingelsen $M(0) = 0$ bestemmes:

$$\left[M'(t) = -0.069 \cdot M(t) + 9.627 \cdot e^{-0.0096 \cdot t},\ M(0) = 0\right] \xrightarrow{\text{solve DE}}$$

$$M(t) = \frac{16045\, e^{-\frac{6\,t}{625}}}{99} - \frac{16045\, e^{-\frac{69\,t}{1000}}}{99}$$

b) $M(t) := \frac{16045\, e^{-\frac{6\,t}{625}}}{99} - \frac{16045\, e^{-\frac{69\,t}{1000}}}{99}$:

plot$(M(t), t = 0..100, M = 0..110, color = blue, thickness = 3)$



c) Differentialkvotienten svarer til væksthastigheden, så man løser:

$$M'(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{ t = -\frac{5000 \ln\left(\frac{16}{115}\right)}{297} \right\} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} \{t = 33.20443445\}$$

Dvs. væksthastigheden er 0 efter **33 døgn**

5.D2.8: $y'(t) = -0{,}03 \cdot y(t)$ $\quad y(0) = 1{,}8$

a) Differentialligningen fortæller os direkte, hvad væksthastigheden er, når vi kender koncentrationen, så vi indsætter i denne:

$y'(t) = -0.03 \cdot 1.2 = -0.036$

Dvs. at **klorkoncentrationen aftager med 0,036 mg/liter pr. time** , når klorkoncentrationen er på 1,2 mg/liter

b) Det er en standarddifferentialligning af typen $y'(t) = k \cdot y(t)$, hvor den fuldstændige løsning er $y(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$.

Da vi kender begyndelsesbetingelsen, kan dette bruges til at finde konstanten c:

$1.8 = c \cdot e^{-0.03 \cdot 0} \Leftrightarrow 1.8 = c \cdot 1 \Leftrightarrow c = 1.8$

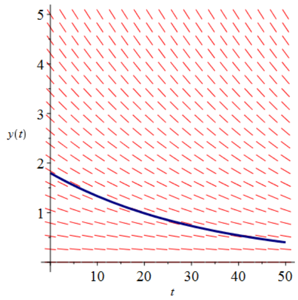
Dvs. at klorkoncentrationen kan beskrives ved funktionen $\underline{\underline{y(t) = 1.8 \cdot e^{-0.03 \cdot t}}}$

Man kunne også have bedt Maple om at løse differentialligningen med begyndelsesbetingelsen:

$$[y'(t) = -0.03 \cdot y(t), y(0) = 1.8] \xrightarrow{\text{solve DE}} y(t) = \frac{9}{5} e^{-\frac{3}{100} t}$$

c) Hældningsfeltet kan tegnes med Gym-kommandoen *hældningsfelt*:

hældningsfelt$(y'(t) = -0.03 \cdot y(t), y(t), t = 0..50, y = 0..5, color = red, [y(0) = 1.8])$



5.D2.9: $\frac{dN}{dt} = 0{,}00526 \cdot N \cdot (209 - N)$ Oplysning: Efter 30 døgn var der 103 smittede.

a) Når antallet af smittede er 100, kan man bestemme væksthastigheden ved indsættelse i differentialligningen:

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}00526 \cdot 100 \cdot (209 - 100) = 0{,}526 \cdot 109 = 57{,}334$$

Dvs. at antallet af smittede vokser med 57 individer pr. døgn, når der er 100 smittede.

b) Det er en differentialligning, der beskriver logistisk vækst, og den fuldstændige løsning er:

$$N(t) = \frac{209}{1 + c \cdot e^{-0{,}00526 \cdot 209 \cdot t}} = \frac{209}{1 + c \cdot e^{-1{,}09934 \cdot t}}$$

Da man kender antallet af smittede efter 30 døgn, kan man bestemme konstanten c:

$$103 = \frac{209}{1 + c \cdot e^{-1{,}09934 \cdot 30}} \Leftrightarrow 1 + c \cdot e^{-1{,}09934 \cdot 30} = \frac{209}{103} \Leftrightarrow c = \frac{\frac{209}{103} - 1}{e^{-1{,}09934 \cdot 30}} = 2{,}165646 \cdot 10^{14}$$

Dvs. at den søgte løsning er:

$$\underline{\underline{N(t) = \frac{209}{1 + 2{,}166 \cdot 10^{14} \cdot e^{-1{,}09934 \cdot t}}}}$$

c) Tallet 209 er den øvre grænse for den logistiske vækst, dvs. at antallet af smittede ender med på sit højeste at være 209.

5.D2.10: $\frac{dU}{dx} = 0{,}1518 \cdot U$ U er skibets CO_2-udledning målt i g/ton/km. x er skibets fart målt i knob.

a) I Maple bestemme den partikulære løsning til differentialligningen, der går gennem punktet (25 ; 6,25).

restart

$$dsolve\left(\left[\frac{dU}{dx} = 0.1518 \cdot U, U(25) = 6.25\right]\right) = U(x) = \frac{25}{4} \frac{e^{\frac{759}{5000} x}}{e^{\frac{759}{200}}}$$

$$evalf\left(U(x) = \frac{25}{4} \frac{e^{\frac{759}{5000} x}}{e^{\frac{759}{200}}}\right) = U(x) = 0.1405181613\, e^{0.1518000000\, x}$$

Dvs. $\underline{\underline{U(x) = 0{,}1405181613 \cdot e^{0{,}1518 \cdot x}}}$

b)

For at kunne arbejde videre med funktionen defineres den:

$U(x) := 0.1405181613\, e^{0.1518000000\, x}$:

Når udledningen er 4 g/ton/km kan farten bestemmes ved:

$fsolve(U(x) = 4) = 22.06003226$

Dvs. farten er $\underline{\underline{22{,}1\ knob}}$

c) Med udgangspunkt i, at 6,25g/ton/km er 100%, kan man regne procenten ud for 17,5 knob:

$$\frac{U(17.5)}{6.25} = 0.3202991102 = 32\ \%$$

Modellen understøtter altså påstanden.

5.D2.11: $\frac{dv}{dt}-\frac{1}{15-t}\cdot v=\frac{300}{15-t}-9{,}81 \quad 0\leq t\leq 14$

v er rakettens fart målt i m/s og t er tiden efter affyring målt i sekunder.
Når $t = 0$ er $v = 0$.

a) Differentialligningen løses sammen med begyndelsesbetingelsen:

$$v'(t)-\frac{1}{15-t}\cdot v(t)=\frac{300}{15-t}-9.81,\ v(0)=0 \xrightarrow{\text{solve DE}} v(t)=\frac{-\frac{3057}{20}t-\frac{981}{200}t^2}{-15+t}$$

$$\xrightarrow{\text{at 10 digits}} v(t)=\frac{-152.8500000\,t-4.905000000\,t^2}{-15.+t}$$

Dvs. at:

$$\underline{\underline{v(t)=\frac{-4{,}905\cdot t^2-152{,}85\cdot t}{t-15}}}$$

b) Hastigheden 1000 m/s svarer til $v(t)=1000$:

$$\frac{-152.8500000\,t-4.905000000\,t^2}{-15.+t}=1000 \xrightarrow{\text{solve for t}}$$

$$[[t=-247.3968074],[t=12.36112951]]$$

Den negative løsning giver ikke mening, da det er inden affyringen, så farten opnås **12,4 sekunder efter affyring**.

5.D2.12:

$$\frac{dL}{dt}=k\cdot(100-L) \qquad L(0)=0.4 \qquad L(1)=11$$

a) Differentialligningen løses først med begyndelsesbetingelsen:

$$[L'(t)=k\cdot(100-L(t)),L(0)=0.4] \xrightarrow{\text{solve DE}} L(t)=100-\frac{498\,e^{-k t}}{5}$$

Derefter kan konstanten k bestemmes ved at benytte den anden betingelse:

$$11=100-\frac{498\cdot e^{-k\cdot 1}}{5} \xrightarrow{\text{solve}} \left\{k=-\ln\left(\frac{445}{498}\right)\right\}$$

Dvs. man har:

$$L(t)=100-\frac{498\,e^{-\left(-\ln\left(\frac{445}{498}\right)\right)\cdot t}}{5}=100-\frac{498\,e^{\ln\left(\frac{445}{498}\right)t}}{5} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 100.-99.60000000\,e^{-0.1125257948\,t}$$

Dvs. $\underline{\underline{L(t)=100-99.6\cdot e^{-0.1125257948\cdot t}}}$

b) $L(t) := 100-\frac{498\,e^{\ln\left(\frac{445}{498}\right)t}}{5}$:

Længderne på 40 cm og 60 cm omregnes til aldre:

$L(t)=40. \xrightarrow{\text{solve}} \{t=4.504012640\}$

$L(t)=60. \xrightarrow{\text{solve}} \{t=8.107320740\}$

Dvs. aldersintervallet er $\underline{\underline{[4.5\ ,\ 8.1]}}$, hvor alderen er angivet i år.

5.D2.13: $\frac{dh}{dt} = 0{,}16 \cdot h$

a) Når græshøjden h er 4, har man $\frac{dh}{dt} = 0{,}16 \cdot 4 = 0{,}64$

Dvs. at græsset vokser med $\underline{\underline{0{,}64 \frac{cm}{døgn}}}$, når græshøjden er 4cm.

b) Da græshøjden er 3cm umiddelbart efter græsslåning, har man begyndelsesbetingelsen $h(0) = 3$. Med denne betingelse kan differentialligningen løses:

$$[h'(t) = 0.16 \cdot h(t), h(0) = 3] \xrightarrow{\text{solve DE}} h(t) = 3\,e^{\frac{4}{25}t}$$

Dvs. $\underline{\underline{h(t) = 3 \cdot e^{0.16 \cdot t}}}$

c)

Tiden mellem to græsslåninger bestemmes ved at finde ud af, hvordan græshøjden er 8 cm:

$$8 = 3 \cdot e^{0.16 \cdot t} \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t = 6.130182831]]$$

Dvs. der går $\underline{\underline{6\ døgn}}$ mellem to græsslåninger.

5.D2.14: $y' = 0{,}03 \cdot \left(g(t) - y\right)$; $f(0) = 10$ $\quad g(t) = 20 + 0{,}25 \cdot t$; $0 \le t \le 320$

a) Da man kender funktionsudtrykket for vandtemperaturen, kan det indsættes i differentialligningen, der så kan løses sammen med begyndelsesbetingelsen:

$$f'(t) = 0.03 \cdot (20 + 0.25 \cdot t - f(t)), f(0) = 10 \xrightarrow{\text{solve DE}} f(t) = \frac{t}{4} + \frac{35}{3} - \frac{5\,e^{-\frac{3t}{100}}}{3}$$

Dette er funktionsforskriften for den indre temperatur.

Vandbadet er 100 °C, når $g(t) = 100$:

$$20 + 0.25 \cdot t = 100 \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t = 320.]]$$

Man kan finde objektets indre temperatur til dette tidspunkt:

$$f(320) = \frac{320.}{4} + \frac{35}{3} - \frac{5\,e^{-\frac{3 \cdot 320.}{100}}}{3} = 91.66655379$$

Dvs. **objektets indre temperatur er 91,7 °C**

5.D2.15: $f(t)=b\cdot a^t$; t er antal år EFTER 2001 ; *f(t)* er den relative væksthastighed i år^{-1}

a) Da man har fået oplyst mere end to målinger, og da modellen er en eksponentiel udvikling, skal der anvendes eksponentiel regression. Det foretages i Maple:

$with(Gym):$

$År := [0, 1, 2, 3, 4, 5]:$

$Vækst := [0.398, 0.302, 0.259, 0.221, 0.158, 0.124]:$

$f(t) := ExpReg(År, Vækst, t):$

$f(t) = 0.399055918186501\ 0.797193751434736^t$

Dvs. man har:

$\underline{\underline{a = 0.7972}}$ og $\underline{\underline{b = 0.3991}}$

b) $\frac{1}{N}\cdot\frac{dN}{dt} = f(t)$.

Da N er antal fisk, og der er 520 i år 2001, er $N(0)=520$

I Maple kan differentialligningen løses:

$$\left[\frac{1}{N(t)}\cdot\frac{d}{dt}N(t) = f(t), N(0) = 520.\right] \xrightarrow{\text{solve DE}} N(t) = \frac{520\, e^{\frac{99763979546625331}{250000000000000000}\,\frac{199298437858684091^t\, 500000000^{-2t}}{\ln(199298437858684091) - 2\ln(500000000)}}}{e^{\frac{99763979546625331}{250000000000000000\,(\ln(199298437858684091) - 2\ln(500000000))}}}$$

$$evalf(\%) = N(t) = 3024.316873\, e^{-1.760611706\ 1.992984379\ 10^{17^{t}}\ 5.00000000\ 10^{8^{-2.\,t}}}$$

Dvs. at forskriften for N er: $\underline{\underline{N(t) = 3024\cdot e^{-1.76\cdot 1.993\cdot 10^{17^{t}}\cdot 5\cdot 10^{8^{-2\cdot t}}}}}$

c) Da højresiden i differentialligningen er en eksponentiel udvikling og derfor altid er positiv, er væksthastigheden også hele tiden positiv, så antallet af fisk er voksende. Man skal derfor blot finde det tidspunkt, hvor antallet er 2000, for at man kan svare på, hvornår det overstiger 2000.

Hvis antallet af fisk skal overstige 2000, skal $N(t) > 2000$:

$N(t) = 2000. \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t = 6.391435068]]$

Som det ses på grafen og løsningen af ligningen, vil populationen overstige 2000 i løbet af år $\underline{\underline{2007}}$

5.D2.16: $\frac{dm}{dt} = \frac{k}{7000} - \frac{42}{7000} \cdot m$; m(t) er vægten i kg ; t er tiden i døgn ; k er kostindtag i kcal/døgn.

a) Det er oplyst, at vægten er 85 kg, dvs. m = 85, og kostindtaget er 3300 kcal/døgn, dvs. k=3300. Dermed kan væksthastigheden bestemmes:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{3300}{7000} - \frac{42}{7000} \cdot 85 = -0,0385714$$

Dvs. at personen <u>taber sig med 0,039kg pr. døgn med dette kostindtag.</u>

b) Den nye person vejer 87 kg til t = 0.

$$m'(t) = \frac{k}{7000} - \frac{42}{7000} \cdot m(t),\ m(0) = 87 \xrightarrow{\text{solve DE}}$$

$$m(t) = \frac{k}{42} + \mathrm{e}^{-\frac{3\,t}{500}} \left(87 - \frac{k}{42}\right)$$

Dvs. man har:

$$\underline{\underline{m(t) = \frac{k}{42} - \frac{k - 3654}{42} \cdot e^{\frac{-3 \cdot t}{500}}}}$$

c) Hvis personen efter 100 døgn skal veje 80 kg, skal kostindtaget være:

$$80 = \frac{k}{42} - \frac{k - 3654}{42} \cdot e^{\frac{-3 \cdot 100}{500}}$$

Denne ligning løse ved indtastningen:

$$80 = \frac{k}{42} + \mathrm{e}^{-\frac{3 \cdot 100}{500}} \left(87 - \frac{k}{42}\right) \xrightarrow{\text{solve for k}} \left[\left[k = \frac{42\left(87\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{5}} - 80\right)}{\mathrm{e}^{-\frac{3}{5}} - 1}\right]\right]$$

$$\xrightarrow{\text{at 10 digits}} [[k = 3002.387451]]$$

Dvs. <u>k = 3002</u> (svarende til at kostindtaget er 3002 kcal pr. døgn)

5.D2.17: $\frac{dM}{dt} = -k \cdot M^2 \quad M(0) = 70 \quad M(60) = 20$

a) Maple er tilsyneladende ikke i stand til at løse ligningssystemet på én gang ved anvendelse af de to kendte punkter. Man kan enten begyndte med at finde den fuldstændige løsning og derefter bruge de to kendte punkter til at bestemme de to konstanter, eller man kan som her anvende det ene punkt med det samme og derefter anvende det andet til at bestemme den manglende konstant:

$$M'(t) = -k \cdot M(t)^2, M(0) = 70 \xrightarrow{\text{solve DE}} M(t) = \frac{70}{70\,k\,t + 1}$$

Konstanten k bestemmes ved anvendelse af det andet punkt:

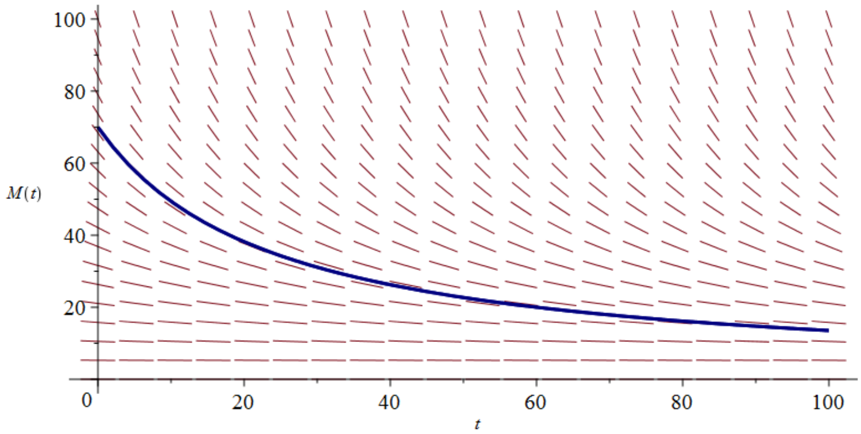
$$20 = \frac{70}{70 \cdot k \cdot 60 + 1} \xrightarrow{\text{solve}} \left\{k = \frac{1}{1680}\right\}$$

Dvs. forskriften for funktionen er:

$$M(t) = \frac{70}{\frac{70}{1680} \cdot t + 1} = \underline{\underline{\frac{70}{\frac{t}{24} + 1}}}$$

b) Et spørgsmål, der ikke har noget med matematik at gøre, og som kun kan løses, hvis man kender den rigtige 'knap'. I dette tilfælde er det dog endnu værre, da man ikke kan tegne et hældningsfelt uden at kende k, og den er fundet ud fra de to kendte punkter.
Ved at anvende den fundne k-værdi, får man (*linjeelementer* og *hældningsfelt* virker ens):

$$linjeelementer\left(M'(t) = -\frac{1}{1680} \cdot M(t)^2, M(t), t = 0..100, M = 0..100, [M(0) = 70]\right)$$



c) Linjeelementet kan bestemmes ved at finde funktionsværdi og tangenthældning i 60. Funktionsværdien er angivet i opgaveformuleringen til at være 20. Så man skal blot finde tangenthældningen, der kan beregnes ud fra selve differentialligningen:

$$M'(60) = -k \cdot M(60)^2 = -\frac{1}{1680} \cdot 20^2 = -\frac{5}{21}$$

Dvs. det søgte linjeelement er $\underline{\underline{\left(60, 20, -\frac{5}{21}\right)}}$

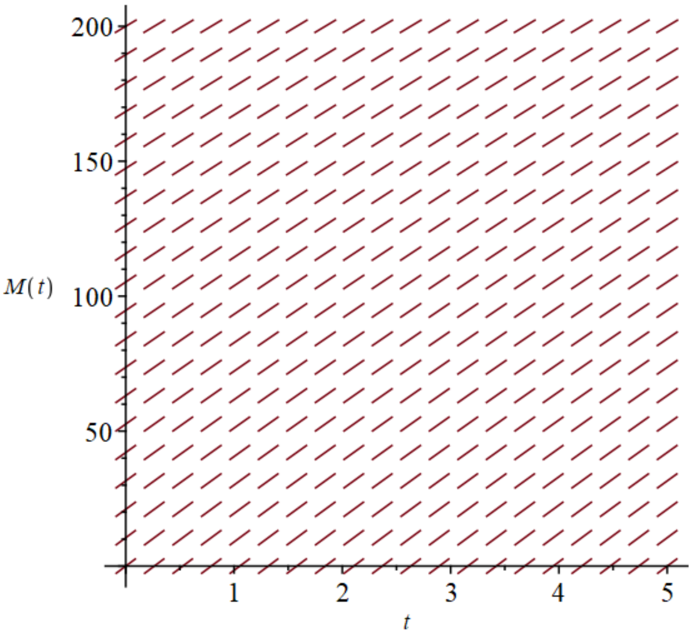
5.D2.18:

$with(Gym)$:

$$\frac{dM}{dt} = p - 0.03 \cdot M \quad , \quad M(0) = 0$$

a) Hældningsfeltet kan tegnes med en af kommandoerne *linjeelementer* eller *hældningsfelt*. Det er oplyst, at $p = 30$, og at vinduet skal være $[0,5] \times [0,200]$:

$hældningsfelt(M'(t) = 30 - 0.03 \cdot M(t), M(t), t = 0..5, M = 0..200)$



b) Med Maple kan man finde den partikulære løsning, hvor $M(0) = 0$, men hvor p er ukendt:

$$M'(t) = p - 0.03 \cdot M(t), M(0) = 0 \xrightarrow{\text{solve DE}} M(t) = -\frac{100\,p\left(-1 + e^{-\frac{3\,t}{100}}\right)}{3}$$

Dvs. $\underline{\underline{M(t) = \frac{100\,p}{3} - \frac{100\,p}{3} \cdot e^{-\frac{3\,t}{100}}}}$

Man kan også finde funktionsforskriften ved at benytte, at det er en differentialligning på standardformen $y' = b - a \cdot y$ (formel 177 i formelsamlingen).

c) $M(t) := \frac{100\,p}{3} - \frac{100\,p}{3} \cdot e^{-\frac{3\,t}{100}}$:

Tiden t er målt i timer, og mængden M af medicin i patientens blodbaner måles i µg, så når patienten efter 3 timer skal have mængden 100 µg i blodbanerne, skal $M(3) = 100$.

$solve(M(3) = 100., p) = 34.85583030$

Dvs. $\underline{\underline{p = 34.9\ \frac{\mu g}{t}}}$

5.D2.19: $N'(t)=0{,}01\cdot\sin\left(0{,}017\cdot t-1{,}03\right)\cdot N(t) \quad 0\le t\le 365$

a) Differentialligningen løses med den opløste begyndelsesbetingelse:

$$[N'(t)=0.01\cdot\sin(0.017\cdot t-1.03)\cdot N(t),\ N(0)=100] \xrightarrow{\text{solve DE}}$$

$$N(t)=\frac{100\,e^{-\frac{10}{17}\cos\left(\frac{17}{1000}t-\frac{103}{100}\right)}}{e^{-\frac{10}{17}\cos\left(\frac{103}{100}\right)}} \xrightarrow{\text{assuming positive}} N(t)$$

$$=100\,e^{\frac{10}{17}\cos\left(\frac{103}{100}\right)-\frac{10}{17}\cos\left(\frac{17}{1000}t-\frac{103}{100}\right)}$$

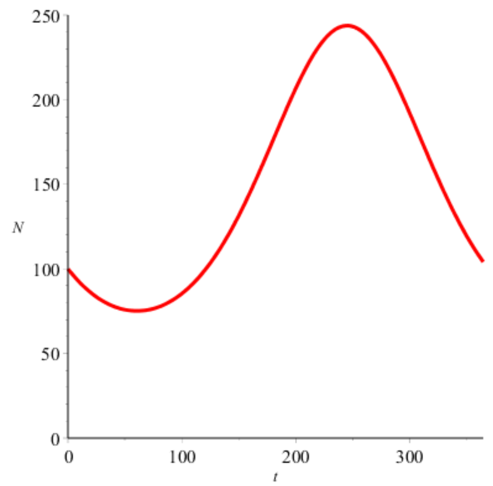
$$N(t):=100\,e^{\frac{10}{17}\cos\left(\frac{103}{100}\right)-\frac{10}{17}\cos\left(\frac{17}{1000}t-\frac{103}{100}\right)}:$$

Dvs. forskriften er $\boldsymbol{N(t)=100\,e^{\frac{10}{17}\cos\left(\frac{103}{100}\right)-\frac{10}{17}\cos\left(\frac{17}{1000}t-\frac{103}{100}\right)}}$

b)

Når grafen tegnes, skal det være i intervallet $0\le t\le 365$:

$plot(N(t),\ t=0..365,\ y=0..250)$



c)

Væksthastigheden svarer til $N'(t)$, så der hvor den er størst eller mindst, skal $N''(t)=0$. Da det er en trigonometrisk funktion anvendes intervalsolve (og for at få et pænt tal sættes *f* foran):

$fintervalsolve(N''(t)=0.,\ t=0..365)=[181.2671778,\ 309.5084285]$

For at afgøre om det er lokalt maksimum, lokalt minimum eller vandret vendetangent udregnes fortegnes for den tredje afledede:

$N'''(181.2671778)=-0.0003956497654\,e^{\frac{10}{17}\cos\left(\frac{103}{100}\right)+0.2720238093} < 0$ dvs. lokalt maksimum.

$N'''(309.5084285)=0.0003956497654\,e^{\frac{10}{17}\cos\left(\frac{103}{100}\right)+0.2720238094} > 0$ dvs. lokalt minimum.

For at tjekke, om det lokale maksimum også svarer til et globalt maksimum, udregnes væksthastigheden i dette sted og sammenlignes med væksthastigheden i yderpunkterne:

$$N'(0)=-\sin\left(\frac{103}{100}\right)\xrightarrow{\text{at 5 digits}}-0.85730$$

$$N'(181.2671778)=0.8866503292\,e^{\frac{10}{17}\cos\left(\frac{103}{100}\right)+0.2720238093}\xrightarrow{\text{at 5 digits}}1.5755$$

$$N'(365)=\sin\left(\frac{207}{40}\right)e^{\frac{10}{17}\cos\left(\frac{103}{100}\right)-\frac{10}{17}\cos\left(\frac{207}{40}\right)}\xrightarrow{\text{at 5 digits}}-0.93167$$

Dvs. **væksthastigheden er størst efter 181 døgn**

5.D2.20: $C'(t) = \frac{P}{0,280} - R\cdot(C-400)$

P: Samlet mængde kuldioxid udskilt pr. time målt i liter.
R: Luftudskiftninger pr. time.
Der regnes med 25 ”stillesiddende” personer, selvom læreren nok ikke er stillesiddende, så da hver person udskiller 50 liter kuldioxid pr. time, har man:

$P := 25\cdot 50 = 1250$

$R := 7:$

$C(0) = 400$

a) Differentialligningen løses med den angivne startbetingelse:

$$C'(t) = \frac{P}{0.280} - R\cdot(C(t) - 400),\ C(0) = 400 \xrightarrow{\text{solve DE}}$$

$$C(t) = \frac{518877551}{500000} - \frac{318877551\, e^{-7t}}{500000}$$

b) $C(t) := \frac{518877551}{500000} - \frac{318877551\, e^{-7t}}{500000}:$

$solve(C(t) > 1000., t) = (0.4038333912, \infty)$

$0.4038333912\cdot 60 = 24.23000347$

Dvs. der går **0,40 timer** (svarende til 24 minutter), inden kuldioxid-koncentrationen overstiger 1000 ppm.

c) Man skal altså sørge for, at de 1000 ppm først nås efter 1,5 time, dvs. $C(1.5) = 1000$. Man har stadig begyndelsesbetingelsen $C(0) = 400$. Begyndelsesbetingelsen bruges til at bestemme en løsning med R som ukendt, hvorefter R kan bestemmes ved hjælp af den anden betingelse.

restart

$$C'(t) = \frac{1250}{0.280} - R\cdot(C(t) - 400),\ C(0) = 400 \xrightarrow{\text{solve DE}}$$

$$C(t) = 400 + \frac{2232142857}{500000\, R} - \frac{2232142857\, e^{-Rt}}{500000\, R}$$

Betingelsen $C(1.5) = 1000$ benyttes til at finde R:

$$1000 = 400 + \frac{2232142857}{500000\, R} - \frac{2232142857\, e^{-R\cdot 1.5}}{500000\, R} \xrightarrow{\text{solve for R}} [[R = 7.440370354]]$$

Dvs. ***R* skal mindst være 7,44**, altså 7,44 luftudskiftninger pr. time.

5.D2.21:

restart

with(*Gym*) :

$m'(t) = 4 \cdot d \cdot e^{-4 \cdot t} - 0.21 \cdot m(t) \qquad m(0) = 0$

Begyndelsesbetingelsen følger af opgaveteksten, hvor der står, at der ikke er noget medicin i blodet fra start.

a) Differentialligningen løses for $d = 20$ med begyndelsesbetingelsen:

$$m'(t) = 4 \cdot 20 \cdot e^{-4 \cdot t} - 0.21 \cdot m(t),\ m(0) = 0 \xrightarrow{\text{solve DE}} m(t) = -\frac{8000\, e^{-4t}}{379} + \frac{8000\, e^{-\frac{21t}{100}}}{379}$$

$$m(t) = -\frac{8000\, e^{-4t}}{379} + \frac{8000\, e^{-\frac{21t}{100}}}{379}$$

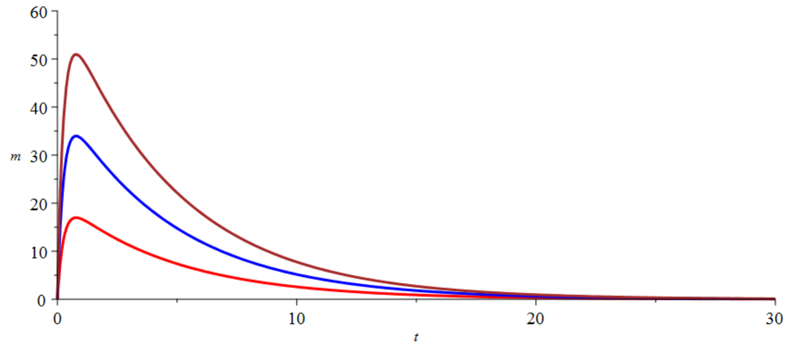
b) Først findes løsninger for værdierne $d = 40$ og $d = 60$:

$$m'(t) = 4 \cdot 40 \cdot e^{-4 \cdot t} - 0.21 \cdot m(t),\ m(0) = 0 \xrightarrow{\text{solve DE}} m(t) = -\frac{16000\, e^{-4t}}{379} + \frac{16000\, e^{-\frac{21t}{100}}}{379}$$

$$m'(t) = 4 \cdot 60 \cdot e^{-4 \cdot t} - 0.21 \cdot m(t),\ m(0) = 0 \xrightarrow{\text{solve DE}} m(t) = -\frac{24000\, e^{-4t}}{379} + \frac{24000\, e^{-\frac{21t}{100}}}{379}$$

Der kan så tegnes tre grafer:

$$plot\left(\left[-\frac{8000\, e^{-4t}}{379} + \frac{8000\, e^{-\frac{21t}{100}}}{379}, -\frac{16000\, e^{-4t}}{379} + \frac{16000\, e^{-\frac{21t}{100}}}{379}, -\frac{24000\, e^{-4t}}{379} + \frac{24000\, e^{-\frac{21t}{100}}}{379}\right], t = 0..30, m = 0..60, thickness = 3, color = [red, blue, brown]\right)$$



c)

Først bestemmes løsningen med d som variabel:

$$m'(t) = 4 \cdot d \cdot e^{-4 \cdot t} - 0.21 \cdot m(t),\ m(0) = 0 \xrightarrow{\text{solve DE}} m(t) = -\frac{400\, d\, e^{-4t}}{379} + \frac{400\, e^{-\frac{21t}{100}}\, d}{379}$$

$$m(t) := -\frac{400\, d\, e^{-4t}}{379} + \frac{400\, e^{-\frac{21t}{100}}\, d}{379}:$$

Så bestemmes det sted, hvor der er vandret tangent (i dette tilfælde ses på grafen, at vi kun kan forvente ét sted, der er lokalt maksimumssted):

$$m'(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve for t}} \left[\left[t = \frac{100 \ln\left(\frac{400}{21}\right)}{379}\right]\right]$$

Fortegnet for den anden afledede bestemmes dette sted for at afgøre typen af punktet:

$$m''\left(\frac{100 \ln\left(\frac{400}{21}\right)}{379}\right) = -\frac{21\, d\, 400^{\frac{358}{379}}\, 21^{\frac{21}{379}}}{10000} < 0 \text{ (da } d \text{ er positiv), dvs. lokalt maksimumssted.}$$

Det lokale maksimum bestemmes:

$$m\left(\frac{100 \ln\left(\frac{400}{21}\right)}{379}\right) = \frac{d\, 400^{\frac{358}{379}}\, 21^{\frac{21}{379}}}{400} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 0.8493473650\, d$$

Som det ses, er **den maksimale mængde af medicin i blodet 84,9% af *d***

5.D2.22:

$$\frac{dA}{dt} = k\cdot(M-A)$$

a) Med $M = 300$, $k = 0.02$ og $A = 75$ (til $t = 0$), får man:

$$\frac{dA}{dt} = 0.02\cdot(300-75) = 4.50$$

Dvs. **fra start vokser medarbejderens produktionsevne pr. døgn med 4,5 enheder pr. dag**

b) Differentialligningen løses med de angivne værdier for k og M:

$$[A'(t) = 0.02\cdot(300-A(t)), A(0) = 75] \xrightarrow{\text{solve DE}} A(t) = 300 - 225\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t}$$

Dvs. $\underline{\underline{A(t) = 300 - 225\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t}}}$

Hvis medarbejderen skal kunne producere 200 enheder pr. dag, skal $A(t) = 200$:

$$200. = 300 - 225\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t} \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t = 40.54651081]]$$

Dvs. medarbejderen skal være under oplæring i **41 døgn** for at kunne producere 200 enheder pr. dag

c) Oplysningerne fortæller, at $A(0) = 50$ og $A(30) = 120$. Først løses differentialligningen løses med $M = 250$:

$$A'(t) = k\cdot(250 - A(t)) \xrightarrow{\text{solve DE}} A(t) = 250 + \mathrm{e}^{-kt}\_C1$$

Dvs. $A(t) := 250 + c\cdot\mathrm{e}^{-k\cdot t}$:

Der er altså to konstanter $(k \text{ og } c)$, men der er også to oplysninger, der gør det muligt at bestemme begge konstanter:

$solve([A(0) = 50., A(30) = 120.], \{k, c\}) = \{c = -200., k = 0.01435943054\}$

Man er kun blevet bedt om at bestemme k, og man har altså $\underline{\underline{k = 0.01436}}$

Først tjekkes det, at tallet 250 i funktionsforskriften svarer til M:

$A'(t) = k\cdot(M - A(t)) \xrightarrow{\text{solve DE}} A(t) = M + \mathrm{e}^{-kt}\_C1$ Dvs. de 250 **er** M.

Forskriften for funktionen bliver:

$A(t) := 250 - 200\cdot\mathrm{e}^{-0.01435943054\cdot t}$:

Det ses, at $A(t) \to 250$ for $t \to \infty$, da $-0.01435943054\cdot t \to -\infty$ og dermed $\mathrm{e}^{-0.01435943054\cdot t} \to 0$.

Dvs. de 250 (altså M) er den øvre grænse for funktionen, dvs.

M angiver den maksimale produktionsevne, som medarbejderen kan og vil opnå over tid.

5.D2.23: $P(0{,}12.0)$ $Q(100{,}11.82)$ $m'(t) = a\cdot m(t) + b$

a) Da man kender to punkter, som den rette linje går igennem,

kan man enten på sædvanlig vis bestemme hældningen a med $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

og efterfølgende b-værdien (der også kan aflæses ud fra punkt P), men man kan også som her opstille to ligninger med to ubekendte:

$$12 = a\cdot 0 + b,\ 11.82 = a\cdot 100 + b \xrightarrow{\text{solve}} \{a = -0.001800000000, b = 12.\}$$

Dvs. $\underline{\underline{m'(t) = -0.0018\cdot m(t) + 12}}$

b) $m(0) = 0$

$$m'(t) = -0.0018\cdot m(t) + 12, m(0) = 0 \xrightarrow{\text{solve DE}}$$

$$\boldsymbol{m(t) = \frac{20000}{3} - \frac{20000\,\mathrm{e}^{-\frac{9t}{5000}}}{3}}$$

$$m(85) = \frac{20000.}{3} - \frac{20000.\,\mathrm{e}^{-\frac{9\cdot 85.}{5000}}}{3} = 945.801855$$

Dvs. **der er 946 kg kvælstof i søen efter 85 timer.**

5.D2.24:

Man har en logistisk ligning: $\frac{dy}{dx} = 0.00002 \cdot y \cdot (10000 - y) \qquad y'(40) = 250$

a) De mulige antal bakterier bestemmes ved at indsætte den kendte væksthastighed i differentialligningen:

$250 = 0.00002 \cdot y \cdot (10000 - y) \xrightarrow{\text{solve for y}} [[y = 8535.533906], [y = 1464.466094]]$

Dvs. der kan være **1464 eller 8536 bakterier i suppen til tidspunktet $x = 40$**

b) Den partikulære løsning kan bestemmes med Maple:

$$y'(x) = 0.00002 \cdot y(x) \cdot (10000 - y(x)), y(40) = 1464.466094 \xrightarrow{\text{solve DE}} y(x) = \frac{7322330470000\, e^{-8}}{4267766953\, e^{-\frac{x}{5}} + 732233047\, e^{-8}}$$

Man kan også udnytte, at man kender den fuldstændige løsning:

$$f(x) = \frac{10000}{1 + c \cdot e^{-0.00002 \cdot 10000 \cdot x}}$$

Og konstanten kan så bestemmes:

$$1464.466094 = \frac{10000}{1 + c \cdot e^{-0.00002 \cdot 10000 \cdot 40}} \xrightarrow{\text{solve for c}} [[c = 17374.29639]]$$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{10000}{1 + 17374 \cdot e^{-0.2 \cdot x}}}}$$

6.D1

6.D1.1: $x^2 + y^2 = 25 \qquad Q(3,4)$

a) Q ligger på cirklen, netop hvis punktets koordinater indsat giver et sandt udsagn:

$$3^2 + 4^2 = 25 \quad \Leftrightarrow 9+16=25 \Leftrightarrow 25=25$$

Da dette er et sandt udsagn**, ligger *Q* på cirklen.**

Cirklen har centrum i origo. Vektoren $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ svarer altså til en radius angivet med retning, dvs. det er en normalvektor for tangenten i punktet (tangent og radius er ortogonale). Så en ligning for tangenten er:

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0$$

$$3 \cdot (x-3) + 4 \cdot (y-4) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{3x + 4y - 25 = 0}}$$

b) Nu arbejdes med punktet $P(x_0, y_0)$.

Igen er vektoren $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ en normalvektor til tangenten, så ligningen bliver:

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0$$

$$x_0 \cdot (x - x_0) + y_0 \cdot (y - y_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 \cdot x + y_0 \cdot y - x_0^2 - y_0^2 = 0$$

Da punktet P ligger på cirklen, vil dets koordinater indsat i cirkelligningen give et sandt udsagn, dvs. $x_0^2 + y_0^2 = 25$, dvs. ligningen bliver:

$$x_0 \cdot x + y_0 \cdot y - \left(x_0^2 + y_0^2\right) = 0 \Leftrightarrow x_0 \cdot x + y_0 \cdot y = x_0^2 + y_0^2 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_0 \cdot x + y_0 \cdot y = 25}}$$

6.D1.2: $C : x^2 + x + y^2 - \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}$

Der kvadratkompletteres, så centrum og radius kan aflæses:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{4}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{9}{16} = r^2$$

Dvs. $\underline{\underline{\text{centrum: } \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \text{ og } r = \frac{3}{4}}}$

6.D1.3: $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 - 5t + a \\ t + 1 \end{pmatrix} \;, \; t \in \mathbb{R} \qquad P(0,2)$

Parameterkurven går gennem P, når $t = 1$, da $y(1) = 1+1 = 2$.

For denne t-værdi skal x-komposanten altså være 0, da P har førstekoordinaten 0, dvs.:

$$t^2 - 5t + a = 0$$

$$1^2 - 5 \cdot 1 + a = 0 \Leftrightarrow -4 + a = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = 4}}$$

6.D1.4: $f(x)=\sin(x)+1$

a) Uanset hvilken funktionsforskrift, man arbejder med, kan man altid omdanne den til en vektorfunktion ved at lade *x*-værdien svare til parameteren *t*, og så erstatte *x* med *t* i funktionsudtrykket:

$$\vec{g}(t)=\begin{pmatrix} t \\ \sin(t)+1 \end{pmatrix} \quad ; \quad t\in[0,2\pi]$$

Man kan vælge en hvilken som helst definitionsmængde, da parameterkurven bare skal være "en del af" grafen for *f*.

6.D1.5: $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t^2-5t+6 \\ t^2+1 \end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$

a) $x(t)=0 \Leftrightarrow t^2-5t+6=0 \Leftrightarrow (t-2)\cdot(t-3)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{t=2 \ \vee \ t=3}}$

Ovenstående er de værdier for parameteren, hvor parameterkurven skærer andenaksen.

6.D1.6: $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} t+2 \\ t^2+4t+3 \end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$

Parameterfremstillingen kan omformes, så *y*-værdien udtrykkes ved *x*-værdien (dvs. til en ligning). Man udnytter, at parameterfremstillingen giver ligningssystemet:

$x=t+2$

$y=t^2+4t+3$

I den øverste af disse to ligninger isoleres *t*, hvorefter udtrykket for *t* indsættes på *t*'s plads i den nederste ligning:

$t=x-2$

$y=(x-2)^2+4\cdot(x-2)+3=x^2+4-4x+4x-8+3=x^2-1$

Så man kan se, parameterkurven gennemløber parablen givet ved ligningen $y=x^2-1$.

Man kan også vise det ved en direkte omformning af *y*-komposanten i parameterfremstillingen:

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} t+2 \\ t^2+4t+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (t+2) \\ (t+2)^2-1 \end{pmatrix}$$

6.D1.7: $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} t-1 \\ \sqrt{t^2-6t-16} \end{pmatrix}$, $-2\le t\le 8$

Der er fejl i opgaven. Der skulle nok have været i minus foran udtrykket under kvadratroden.

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} t-1 \\ \sqrt{-\left(t^2-6t-16\right)} \end{pmatrix}$$

a) Fra vektorfunktionen har man, at $x=t-1 \Leftrightarrow t=x+1$.

Dette kan sættes ind i udtrykket for *y*-koordinaten, der så kan omskrives til en cirkelligning:

$y=\sqrt{-\left((x+1)^2-6\cdot(x+1)-16\right)} \Leftrightarrow$

$y^2=-x^2-1-2x+6x+6+16 \Leftrightarrow$

$y^2+x^2-4x=21 \Leftrightarrow$

$(x-2)^2+(y-0)^2=21+2^2=25=5^2$

Ovenstående er ligningen for en cirkel med centrum i (2,0) og radius 5

6.D1.8: $P(2,1) \quad r=4$

Den simpleste vektorfunktion, der beskriver banekurven for en cirkel med centrum i *P* og radius 4, er:

$$\underline{\underline{\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix} \quad , \quad t\in\mathbb{R}}}$$

Man kan godt tilføje en vinkelhastighed og forskyde fasen, så man f.eks. har $\begin{matrix}\cos(-37\cdot t+3)\\ \sin(-37\cdot t+3)\end{matrix}$, og man kan anvende et andet parameterinterval (f.eks. $[0,2\pi]$), så længe man bare sikrer sig, at hele cirklen gennemløbes.

6.D1.9: $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}t^3-2t\\ t^2\end{pmatrix} \ , \ t\in\mathbb{R} \qquad P(4,4) \qquad l:\ 2x-5y+12=0$

a) Punktets *y*-koordinat giver os ligningen $t^2=4$, der har løsningen $t=-2 \ \vee \ t=2$.
Det undersøges hvilken af disse, der giver den rigtige *x*-koordinat:

$t=-2:\ x=(-2)^3-2\cdot(-2)=-8+4=-4$

$t=2:\ \ x=2^3-2\cdot 2=8-4=4$

Dvs. **det er parameterværdien 2, der hører til *P*.**

b) Først tjekkes det, at *P* ligger på linjen *l*. Det gøres ved at indsætte *P*'s koordinater i ligningen og se, om man får et sandt udsagn:

$2\cdot 4-5\cdot 4+12=0 \ \Leftrightarrow \ 8-20+12=0 \ \Leftrightarrow \ 0=0$

Dvs. *P* ligger på linjen *l*.

Den anden ting, der skal være opfyldt, hvis linjen skal være tangent til parameterkurven i *P*, er at en normalvektor for *l* står vinkelret på hastighedsvektoren, da hastighedsvektoren er en retningsvektor for tangenten:

$$\vec{v}(t)=\vec{s}\,'(t)=\begin{pmatrix}3t^2-2\\ 2t\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(2)=\begin{pmatrix}3\cdot 2^2-2\\ 2\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ 4\end{pmatrix}$$

En normalvektor for *l* aflæses ud fra ligningen til $\vec{n_l}=\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$.

$$\vec{v}(2)\perp\vec{n_l} \ \Leftrightarrow \ \vec{v}(2)\bullet\vec{n_l}=0 \ \Leftrightarrow \ \begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}=0 \ \Leftrightarrow \ 10\cdot 2+4\cdot(-5)=0 \ \Leftrightarrow \ 20-20=0 \ \Leftrightarrow \ 0=0$$

Da udsagnet er sandt, er de to vektorer ortogonale, og *l* er dermed tangent til banekurven i *P*.

6.D1.10: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t^3 - t^2 \\ 2t^2 - 2t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ $\qquad P(0,4)$

a) Til en parameterfremstilling for en tangent har man brug for en retningsvektor og røringspunktets koordinater. Røringspunktets koordinater er oplyst, men først tjekkes det, om punktet ligger banekurven:

Først findes de parameterværdier, hvor førstekoordinaten passer:

$$2t^3 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 \cdot (2t-1) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{1}{2}$$

Så findes andenkoordinaten svarende til disse parameterværdier:

$$t = 0: \quad y = 2 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 = 0$$

$$t = \frac{1}{2}: \quad y = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Ingen af disse værdier stemmer med en *y*-koordinat på 4, så *P* ligger ikke på parameterkurven, og opgaven kan derfor ikke løses.

6.D1.11: $x(t) = t^2 \qquad y(t) = 3t - 1 \qquad l: 3x - 2y + 1 = 0$

a) En normalvektor for tangenten aflæses ud fra ligningen til $\overrightarrow{n_l} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Denne normalvektor skal være ortogonal med hastighedsvektoren i punktet, da hastighedsvektoren er en retningsvektor for tangenten.

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 3 \end{pmatrix}$$

Man har så:

$$\vec{v}(t) \perp \overrightarrow{n_l} \Leftrightarrow \vec{v}(t) \bullet \overrightarrow{n_l} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2t \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2t \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 0 \Leftrightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Dvs. parameterværdien skal være 1 for at retningen passer.

Dette indsætte i forskriften for vektorfunktionen:

$$\vec{s}(1) = \begin{pmatrix} x(1) \\ y(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^2 \\ 3 \cdot 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dvs. $\underline{\underline{P(1,2)}}$

Man kan også lige tjekke, at *P* ligger på *l* (ellers ville der være fejl i opgaven), hvilket det gør.

Man kunne også have fundet *t*-værdien ved at udnytte, at punktet skal ligge på både banekurven og tangenten, hvilket gøres ved at indsætte koordinatfunktionerne på *x*'s og *y*'s plads i tangentligningen. Dette giver en andengradsligning, der dog kun har én løsning. Hvis der havde været to løsninger, skulle man ved hjælp af vektorers retninger (som ovenfor) have fundet ud af, hvilken værdi, der svarende til et røringspunkt (den rigtige), og hvilken der svarede til et skæringspunkt mellem banekurve og tangentent

6.D1.12: $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} t^3-3t \\ t^2+1 \end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$ $\qquad P(-2,5)$

Parameterkurven går gennem *P*, netop hvis der er en mindst én *t*-værdi, hvor *x*-komposanten er -2 og *y*-komposanten 5.
Man kan begynde med at finde de *t*-værdier, hvor *y*-komposanten er 5:

$$t^2+1=5 \Leftrightarrow t^2=4 \Leftrightarrow t=-2 \;\vee\; t=2$$

Det undersøges så, om en af disse *t*-værdier giver *x*-komposanten -2:

$$x(-2)=(-2)^3-3\cdot(-2)=-8+6=-2$$

$$x(2)=2^3-3\cdot 2=8-6=2$$

(den sidste udregning er overflødig, da den første allerede har givet os svaret).

Dvs. $\vec{s}(-2)=\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, så **parameterkurven går gennem *P*.**

6.D1.13: $\vec{s}\,'(t)=\begin{pmatrix} 2t+1 \\ 3t^2 \end{pmatrix}$; $t\in\mathbb{R}$ $\qquad t=0: P(3,4)$

a) Vektorfunktionens hastighedsfunktions koordinatfunktioner integreres for at finde den form, vektorfunktionen er på:

$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} t^2+t+c_1 \\ t^3+c_2 \end{pmatrix} \;;\; t\in\mathbb{R}$$

Hermed er:

$$\vec{s}(0)=\begin{pmatrix} 0^2+0+c_1 \\ 0^3+c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Da dette skal svare til punktet *P*, har man altså $c_1=3$ og $c_2=4$, og dermed:

$$\underline{\underline{\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} t^2+t+3 \\ t^3+4 \end{pmatrix} \;;\; t\in\mathbb{R}}}$$

6.D1.14: $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} t^2+3t \\ t \end{pmatrix}$, $-5\le t\le 5$ $\qquad l: x-4y-4=0$

a) $\vec{v}(t)=\vec{r}\,'(t)=\begin{pmatrix} 2t+3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{v}(3)=\begin{pmatrix} 2\cdot 3+3 \\ 1 \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

b) Man kan aflæse en normalvektor for linjen ud fra ligningen: $\overrightarrow{n_l}=\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Hastighedsvektoren er parallel med linjen *l*, når den står vinkelret på normalvektoren:

$$\vec{v}(t)\parallel l \Leftrightarrow \vec{v}(t)\perp\overrightarrow{n_l} \Leftrightarrow \vec{v}(t)\bullet\overrightarrow{n_l}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2t+3 \\ 1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

$$(2t+3)\cdot 1+1\cdot(-4)=0 \Leftrightarrow 2t+3-4=0 \Leftrightarrow 2t-1=0 \Leftrightarrow 2t=1 \Leftrightarrow \underline{\underline{t=\frac{1}{2}}}$$

6.D2

6.D2.1:

$s(t) := \langle 11.2\cdot t, -4.91\cdot t^2 + 8.43\cdot t + 1.7\rangle$:

a) $s(1) = \begin{bmatrix} 11.2 \\ 5.22 \end{bmatrix}$

Dvs. at efter 1 sekund er kuglens position $\underline{\underline{(11.2 \text{ m }, 5.22 \text{ m})}}$

b) Kuglen rammer jorden, når andenkoordinaten er 0:

$-4.91\cdot t^2 + 8.43\cdot t + 1.7 = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{t = -0.1823034780\}, \{t = 1.899207755\}$

Den negative værdi forkastes, da den ligger før kuglen slippes.
Den positive t-værdi indsættes i x-koordinatfunktionen for at finde længden:

$s(1.899207755) = \begin{bmatrix} 21.27112686 \\ -1.\ 10^{-8} \end{bmatrix}$

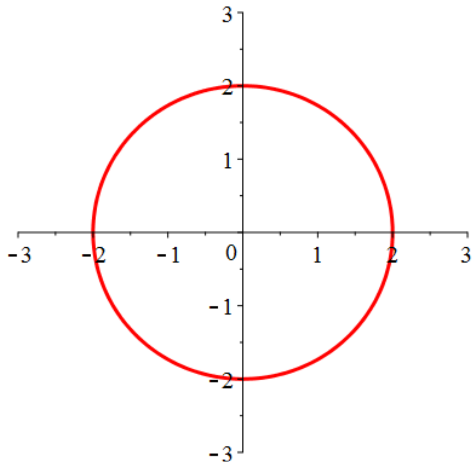
Dvs. længden er **21,27 meter**

6.D2.2:

$s(t) := \langle 2\cdot\cos(t), 2\cdot\sin(t)\rangle$:

a) Parameterkurven for s kan tegnes med intervallet $t \in [0, 2\pi]$

$plot\left(\left[s(t)_1, s(t)_2, t = 0..2\cdot\pi\right], view = [-3..3, -3..3], thickness = 3, color = red\right)$



b) For at bestemme retningen for gennemløbet bestemmes startpositionen og hastighedsvektoren i startpositionen:

$s(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$s'(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Hastighedsvektoren peger lodret opad i punktet (2,0), dvs. **parameterkurven gennemløbes mod uret (positiv omløbsretning)**

c) Hastighedsfunktionen er $s'(t) = \begin{pmatrix} -2\cdot\sin(t) \\ 2\cdot\cos(t) \end{pmatrix}$

Prikproduktet kan bruges til at vise, at vektorer er ortogonale, så prikproduktet mellem stedvektor og hastighedsvektor udregnes:

$s'(t) \bullet s(t) = \begin{pmatrix} -2\cdot\sin(t) \\ 2\cdot\cos(t) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2\cdot\cos(t) \\ 2\cdot\sin(t) \end{pmatrix} = -2\cdot\sin(t)\cdot 2\cdot\cos(t) + 2\cdot\cos(t)\cdot 2\cdot\sin(t) = 0$

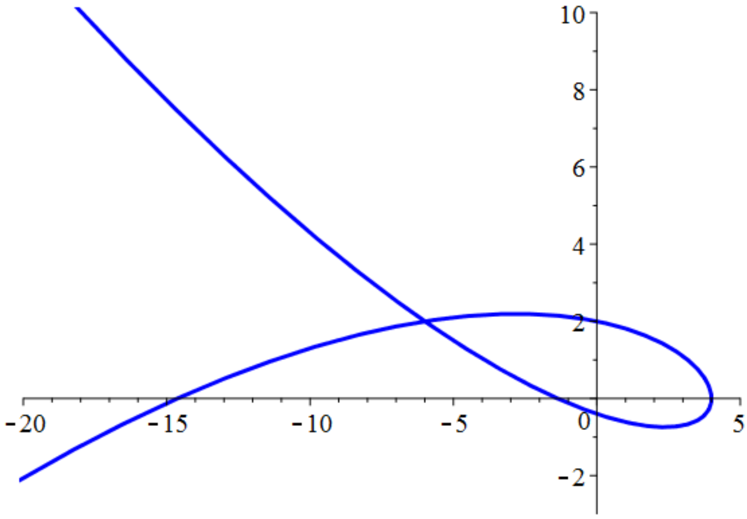
Da prikproduktet er 0, er vektorerne ortogonale (i ethvert punkt på parameterkurven)

6.D2.3:

$r(t) := \langle -t^2 + 4, 0.1\cdot t^3 + 0.2\cdot t^2 - t\rangle$:

a) En del af parameterkurven tegnes:

$plot\left(\left[r(t)_1, r(t)_2, t=-20..20\right], view = [-20..5, -3..10], thickness = 3, color = blue\right)$



b) Skæringspunkterne med førsteaksen er punkterne med andenkoordinaten 0:

$0.1\cdot t^3 + 0.2\cdot t^2 - t = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{t = 0.\}, \{t = 2.316624790\}, \{t = -4.316624790\}$

$r(-4.316624790) = \begin{bmatrix} -14.63324958 \\ 2.\ 10^{-9} \end{bmatrix}$

$r(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0. \end{bmatrix}$

$r(2.316624790) = \begin{bmatrix} -1.366750418 \\ 0. \end{bmatrix}$

Dvs. **skæringspunkterne med førsteaksen er (-14.63 , 0) , (-1.37 , 0) og (4,0)**

Skæringspunkterne med andenaksen er punkterne med førstekoordinaten 0:

$-t^2 + 4 = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{t = -2\}, \{t = 2\}$

$r(-2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2. \end{bmatrix}$

$r(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.4 \end{bmatrix}$

Dvs. **skæringspunkterne med andenaksen er (0,2) og (0, -0.4)**

6.D2.4:

$s(t) := \langle 10\cdot\cos(t) + 5\cdot\cos(-3\cdot t), 10\cdot\sin(t) + 5\cdot\sin(-3\cdot t)\rangle :$
(egentlig er der vist fem dobbeltpunkter, da intervallet er lukket, og intervalendepunkterne gik samme funktionsværdi).

a) Når $t = \frac{\pi}{3}$ har man:

$$s\left(\frac{\pi}{3}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 5\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Dvs. ***P* har koordinatsættet** $\left(0, 5\sqrt{3}\right)$

b) Den anden t-værdi knyttet til dette dobbeltpunkt findes ved at finde fælles t-værdier blandt løsningerne til ligningerne opstillet ud fra koordinatfunktionerne:

$with(Gym) :$

$intervalsolve(10\cdot\cos(t) + 5\cdot\cos(-3\cdot t) = 0, t = 0..2\cdot\pi) =$
$\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right]$

$intervalsolve(10\cdot\sin(t) + 5\cdot\sin(-3\cdot t) = 5\cdot\sqrt{3}, t = 0..2\cdot\pi) = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$

Man genfinder den kendte t-værdi og ser, at den anden t-værdi er:

$$\underline{\underline{t = \frac{2\cdot\pi}{3}}}$$

6.D2.5:

$s(t) := \langle t^3 - 3\cdot t, -t^4 + 4\cdot t^2\rangle :$

a) Da man har fået oplyst en af t-værdierne til det pågældende dobbeltpunkt ($t = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$), kan man bestemme koordinatsættet til punktet ved direkte indsættelse i funktionsudtrykket:

$$s\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\right) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - \frac{3\sqrt{6}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + 4\left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \end{bmatrix} \stackrel{\text{simplify}}{=} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dvs. koordinatsættet er $\underline{\underline{\left(\sqrt{2}, 1\right)}}$

b) For at finde t-værdierne svarende til dobbeltpunktet $P\left(-\sqrt{2}, 1\right)$, skal man løse vektorligningen $s(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Dette kan gøres med *vsolve*.

$vsolve\left(s(t) = \langle -\sqrt{2}, 1.\rangle, t\right) = \{t = 0.5176380902\}, \{t = -1.931851653\}$

Man kan også opstille et ligningssystem:

$-\sqrt{2} = t^3 - 3\cdot t, 1. = -t^4 + 4\cdot t^2 \xrightarrow{\text{solve}} \{t = 0.5176380902\}, \{t = -1.931851653\}$

Dvs. $\underline{\underline{t = -1.932 \vee t = 0.518}}$

c) Da det sidste dobbeltpunkt ligger på andenaksen, har det førstekoordinaten 0, dvs.

$t^3 - 3\cdot t = 0 \Leftrightarrow t\cdot\left(t^2 - 3\right) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = -\sqrt{3} \vee t = \sqrt{3}$

Koordinatsættene til de tilsvarende punkter bestemmes:

$$s\left(-\sqrt{3}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$s(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$s\left(\sqrt{3}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Det er altså (hvilket også fremgår af figuren) punktet (0,3), der er dobbeltpunktet, og t-værdierne er:

$\underline{\underline{t = -\sqrt{3} \vee t = \sqrt{3}}}$

6.D2.6:

$s(t) := \langle e^t \cdot \cos(t), e^t \cdot \sin(t) \rangle$:

a) Hastighedsfunktionen er den afledede af stedfunktionen
(som vi må antage, at s er):

$$s'(t) = \begin{bmatrix} e^t \cos(t) - e^t \sin(t) \\ e^t \sin(t) + e^t \cos(t) \end{bmatrix}$$

Dvs. $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos(t) - e^t \sin(t) \\ e^t \sin(t) + e^t \cos(t) \end{pmatrix}$

b) Accelerationsfunktionen er den dobbeltafledede af stedfunktionen:

$$s''(t) = \begin{bmatrix} -2\, e^t \sin(t) \\ 2\, e^t \cos(t) \end{bmatrix}$$

Dvs. $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -2\, e^t \sin(t) \\ 2\, e^t \cos(t) \end{pmatrix}$

6.D2.7:

$s(t) := \langle t^3 - 3 \cdot t, -t^4 + 4 \cdot t^2 \rangle$:

a) Punktet P svarer til parameterværdien -1, så koordinatsættet er:

$$s(-1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Dette er punktet, som tangenten går gennem. Man skal så også bruge
en retningsvektor, og her kan man bruge hastighedsvektoren.

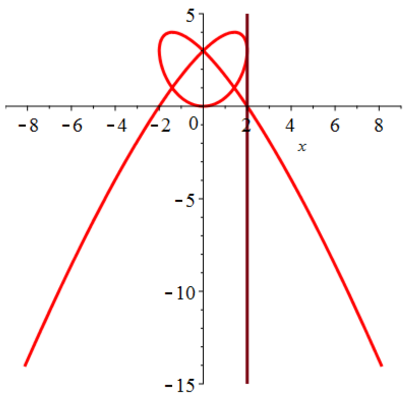
$s'(-1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$ (her kan man evt. vælge at anvende en simplere vektor parallel med denne)

Dvs. parameterfremstillingen er $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) Og nu skal man så vise, at man kan sine Maple-indtastninger:
Man kan finde endepunkterne ved indsættelse:

$s(-2.5) = \begin{bmatrix} -8.125 \\ -14.0625 \end{bmatrix}$ $s(2.5) = \begin{bmatrix} 8.125 \\ -14.0625 \end{bmatrix}$

$plot([s(t)_1, s(t)_2, t=-2.5..2.5], view = [-9..9, -15..5], thickness = 3, color = red)$



Tangenten er en lodret linje med ligningen $x = 2$, der er trukket op i grafbilledet.

6.D2.8: $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} -t^2+4 \\ 0{,}1\cdot t^3+0{,}2\cdot t^2-t \end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$

$s(t) := \langle -t^2+4,\ 0.1\cdot t^3+0.2\cdot t^2-t\rangle$:

a) Hastighedsfunktionen bestemmes ved at differentiere koordinatvis:

$$s'(t) = \begin{bmatrix} -2\,t \\ 0.3\,t^2+0.4\,t-1 \end{bmatrix}$$

Dvs. $\underline{\underline{\vec{s}\,'(t) = \begin{pmatrix} -2\,t \\ 0.3\cdot t^2+0.4\cdot t-1 \end{pmatrix}}}$

b) Hastighedsvektoren kan bruges som en retningsvektor for tangenten (der er uendelig mange retningsvektorer, så opgavetekstens "retningsvektoren" er en forkert formulering):

$$\vec{r}_{tangent} = \vec{v}(-3) = s'(-3) = \begin{bmatrix} 6 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{\vec{r}_{tangent} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0.5 \end{pmatrix}}}$

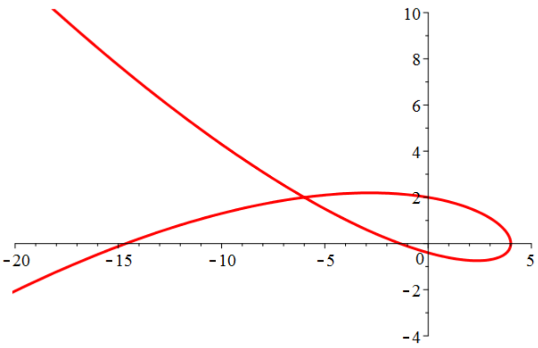
c) I punktet peger hastighedsvektoren mod højre, så
sløjfen gennemløbes i negativ omløbsretning (med uret)

6.D2.9:

$s(t) := \langle -t^2+4,\ 0.1\cdot t^3+0.2\cdot t^2-t\rangle$:

a) Parameterkurven kan tegnes i Maple:

$plot\left(\left[s(t)_1, s(t)_2, t=-5..5\right], view=[-20..5,-4..10], thickness=3, color=red\right)$



b) Først bestemmes den afledede funktion for at kunne finde steder med lodrette og vandrette tangenter:

$$s'(t) = \begin{bmatrix} -2\,t \\ 0.3\,t^2+0.4\,t-1 \end{bmatrix}$$

Lodrette tangenter:

Her er førstekoordinaten for den afledede funktion 0, dvs. $-2\cdot t=0 \Leftrightarrow t=0$

Koordinatsættet for røringspunktet findes ved indsættelse i stedfunktionen:

$$s(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0. \end{bmatrix}$$

Dvs. koordinatsættet er $\underline{\underline{(4,0)}}$

Vandrette tangenter:

Her er andenkoordinaten for den afledede funktion 0, dvs.

$0.3\,t^2+0.4\,t-1=0 \xrightarrow{\text{solve}} \{t=1.276983965\},\ \{t=-2.610317298\}$

Koordinatsættet for røringspunktet findes ved indsættelse i stedfunktionen:

$$s(-2.610317298) = \begin{bmatrix} -2.813756396 \\ 2.194461958 \end{bmatrix}$$

$$s(1.276983965) = \begin{bmatrix} 2.369311953 \\ -0.7426101068 \end{bmatrix}$$

Dvs. koordinatsættene er $\underline{\underline{(-2.81\,,2.19)}}$ og $\underline{\underline{(2.37\,,-0.74)}}$

6.D2.10: $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} -t^2 + 4 \\ 0{,}1 \cdot t^3 + 0{,}2 \cdot t^2 - t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

$s(t) := \langle -t^2 + 4, 0.1 \cdot t^3 + 0.2 \cdot t^2 - t \rangle$:

a) Hastighedsfunktionen bestemmes:

$$s'(t) = \begin{bmatrix} -2\,t \\ 0.3\,t^2 + 0.4\,t - 1 \end{bmatrix}$$

Skæringer med andenaksen svarer til $x'(t) = 0$, dvs. $-2\,t = 0 \Leftrightarrow t = 0$

Skæringer med førsteaksen svarer til $y'(t) = 0$, dvs.

$0.3\,t^2 + 0.4\,t - 1 = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{t = 1.276983965\}, \{t = -2.610317298\}$

Dvs. $\underline{\underline{t = -2.610 \;\vee\; t = 0 \;\vee\; t = 1.277}}$

b) Punkterne på parameterkurven for $\vec{s}$ findes ved at indsætte parameterværdierne i $\vec{s}(t)$:

$$s(-2.610317298) = \begin{bmatrix} -2.813756396 \\ 2.194461958 \end{bmatrix}$$

$$s(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0. \end{bmatrix}$$

$$s(1.276983965) = \begin{bmatrix} 2.369311953 \\ -0.7426101068 \end{bmatrix}$$

Dvs. punkterne er $\underline{\underline{(-2.814, 2.194) \text{ og } (4, 0) \text{ og } (2.369, -0.743)}}$

c) Parameterkurven for $\vec{s}$ har vandret eller lodret tangent, når parameterkurven for $\vec{s}\,'$ skærer akserne (så længe det ikke er i origo).

Når parameterkurven for $\vec{s}\,'$ skærer førsteaksen, har parameterkurven for $\vec{s}$ vandret tangent.

Når parameterkurven for $\vec{s}\,'$ skærer andenaksen, har parameterkurven for $\vec{s}$ lodret tangent.

6.D2.11: $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 11{,}2 \cdot t \\ -4{,}91 \cdot t^2 + 8{,}43 \cdot t + 1{,}7 \end{pmatrix}$; $t \geq 0$

$\vec{s}(t) := \langle 11.2 \cdot t, -4.91 \cdot t^2 + 8.43 \cdot t + 1.7 \rangle$:

a) Hastighedsvektoren er den afledede af positionsfunktionen:

$\vec{v}(t) := \frac{d}{dt}\,\vec{s}(t)$: =

$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} 11.2 \\ -9.82\,t + 8.43 \end{bmatrix}$$

Dvs. $\underline{\underline{\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 11.2 \\ -9.82 \cdot t + 8.43 \end{pmatrix}}}$

b) Hastighedsvektoren er også en tangentvektor, så vinklen med vandret bestemmes ved at finde vinklen mellem hastighedsvektoren til tiden 0 og vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ med formlen

$$\cos(w) = \frac{\vec{v}(0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{|\vec{v}(0)| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}$$

$$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 11.2 \\ -9.82 \cdot 0 + 8.43 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.2 \\ 8.43 \end{pmatrix}$$

$with(Gym)$:

$$Cos(w) = \frac{dotP(\langle 11.2, 8.43 \rangle, \langle 1, 0 \rangle)}{len(\langle 11.2, 8.43 \rangle) \cdot len(\langle 1, 0 \rangle)} \xrightarrow{\text{solve}} \{w = 36.96799274\}$$

Dvs. vinklen med vandret er $\underline{\underline{w = 37.0°}}$

6.D2.12: $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}10\cdot\cos(t)+5\cdot\cos(-1{,}5\cdot t)\\10\cdot\sin(t)+5\cdot\sin(-1{,}5\cdot t)\end{pmatrix}\quad ;\ t\in[0,4\pi]$

$s(t) := \langle 10\cdot\cos(t)+5\cdot\cos(-1.5\cdot t),\ 10\cdot\sin(t)+5\cdot\sin(-1.5\cdot t)\rangle :$

a) Hastighedsfunktionen bestemmes ved at differentiere koordinatvis:

$$v(t) := s'(t) = t\rightarrow \left.\frac{d}{dx}\, s(x)\right|_{x=t}$$

$$|\vec{s}\,'(t)| = |\vec{v}(t)| = fart(t) := len(v(t)) = t\rightarrow Gym\text{:-}len(v(t))$$

$$fart(t) = \sqrt{(-10\sin(t)-7.5\sin(1.5\,t))^2+(10\cos(t)-7.5\cos(1.5\,t))^2}$$

$$\underline{\underline{|\vec{s}\,'(t)| = \sqrt{(-10\sin(t)-7.5\sin(1.5\,t))^2+(10\cos(t)-7.5\cos(1.5\,t))^2}}}$$

b) Først findes de steder, hvor den afledede funktion af farten er nul, da disse steder kan være lokalt maksimum, lokalt minimum eller steder med vandret vendetangent.
Da der indgår trigonometriske funktioner anvendes intervalsolve:

$$intervalsolve\left(\frac{d}{dt}\,fart(t)=0,\ t=0..\pi\right) = [0.,\ 1.256637061,\ 2.513274123]$$

Typen af sted afgøres ved at se på fortegnet for den anden afledede, der her kaldes g:

$$\frac{d^2}{dt^2}\,fart(t) \overset{\text{simplify}}{=}$$

$$\big(1875.\,(3.\cos(t)^2\cos(1.5\,t)^2-1.5\cos(1.5\,t)^2-3.\sin(t)\cos(1.5\,t)\sin(1.5\,t)\cos(t)-1.5\cos(t)^2-3.125\cos(t)\cos(1.5\,t)+3.125\sin(t)\sin(1.5\,t)+3.)\big)/\big((-12.5-12.\sin(t)\sin(1.5\,t)+12.\cos(t)\cos(1.5\,t))\sqrt{156.25+150.0\sin(t)\sin(1.5\,t)-150.0\cos(t)\cos(1.5\,t)}\big)$$

$$g(t) := \big(1875.\,(3.\cos(t)^2\cos(1.5\,t)^2-1.5\cos(1.5\,t)^2-3.\sin(t)\cos(1.5\,t)\sin(1.5\,t)\cos(t)-1.5\cos(t)^2-3.125\cos(t)\cos(1.5\,t)+3.125\sin(t)\sin(1.5\,t)+3.)\big)/\big((-12.5-12.\sin(t)\sin(1.5\,t)+12.\cos(t)\cos(1.5\,t))\sqrt{156.25+150.0\sin(t)\sin(1.5\,t)-150.0\cos(t)\cos(1.5\,t)}\big)$$

$$= t\rightarrow \big(1875.\,(3.\cos(t)^2\cos(1.5\,t)^2-1.5\cos(1.5\,t)^2-3.\sin(t)\cos(1.5\,t)\sin(1.5\,t)\cos(t)-1.5\cos(t)^2-3.125\cos(t)\cos(1.5\,t)+3.125\sin(t)\sin(1.5\,t)+3.)\big)/\big((-12.5-12.\sin(t)\sin(1.5\,t)+12.\cos(t)\cos(1.5\,t))\sqrt{156.25+150.0\sin(t)\sin(1.5\,t)-150.0\cos(t)\cos(1.5\,t)}\big)$$

$g(0) = 187.5000000 > 0$ dvs. lokalt minimumspunkt
$g(1.256637061) = -26.78571429 < 0$ dvs. lokalt maksimumspunkt
$g(2.513274123) = 187.5000022 > 0$ dvs. lokalt minimumspunkt.

Farten bestemmes disse steder:

$fart(0) = 2.500000000$
$fart(1.256637061) = 17.50000000$
$fart(2.513274123) = 2.500000000$

Desuden bestemmes farten i det højre intervalendepunkt:

$fart(\pi) = 12.50000000$

Farten i endepunktet er ikke større end farten i 1,2566, så sidstnævnte er stedet med størst fart i intervallet.
Så bestemmes koordinatsættene for punkterne:

$$s(0) = \begin{bmatrix}15.\\0.\end{bmatrix}$$

$$s(1.256637061) = \begin{bmatrix}1.545084977\\4.755282580\end{bmatrix}$$

$$s(2.513274123) = \begin{bmatrix}-12.13525492\\8.816778782\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{(15,0)\ mindst\quad (1.5451,\ 4.7553)\ størst\quad (-12.1353,\ 8.8168)\ mindst}}$$

c) Accelerationsvektoren er den anden afledede af vektorfunktionen:

$$\frac{d^2}{dt^2}s(t) = \begin{bmatrix} -10\cos(t) - 11.25\cos(1.5\,t) \\ -10\sin(t) + 11.25\sin(1.5\,t) \end{bmatrix}$$

$$a(t) := \begin{bmatrix} -10\cos(t) - 11.25\cos(1.5\,t) \\ -10\sin(t) + 11.25\sin(1.5\,t) \end{bmatrix}:$$

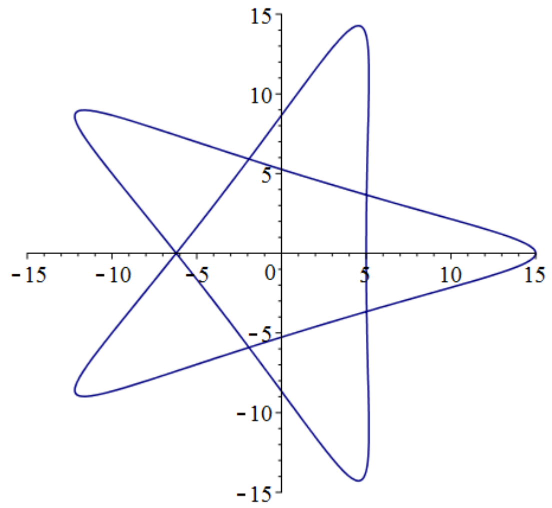
$$a(0) = \begin{bmatrix} -21.25 \\ 0. \end{bmatrix}$$

$$a(1.256637061) = \begin{bmatrix} 0.386271237 \\ 1.188820648 \end{bmatrix}$$

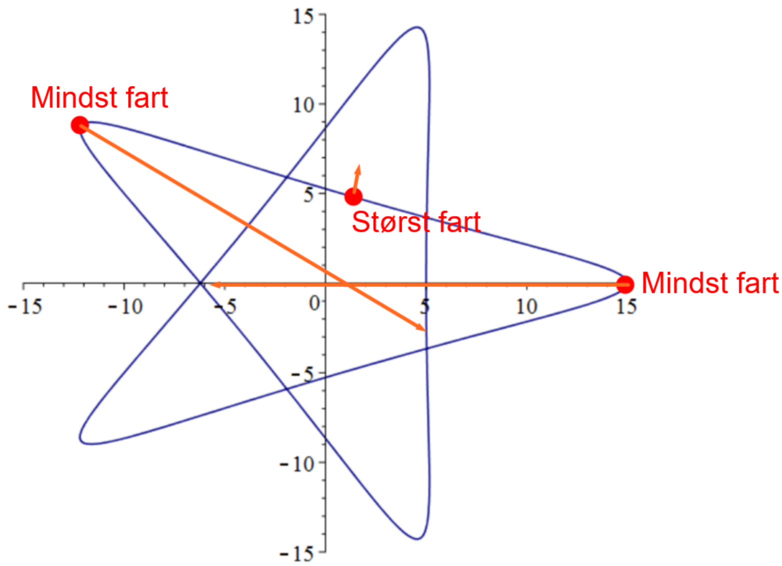
$$a(2.513274123) = \begin{bmatrix} 17.19161113 \\ -12.49043661 \end{bmatrix}$$

Banekurven for $\vec{s}$ tegnes:

vektorPlot([*s*(*t*), *t* = 0 ..4·π, *farve* = "Navy"], *view* = [−15 ..15, −15 ..15])



Indtegning af punkter og accelerationer:



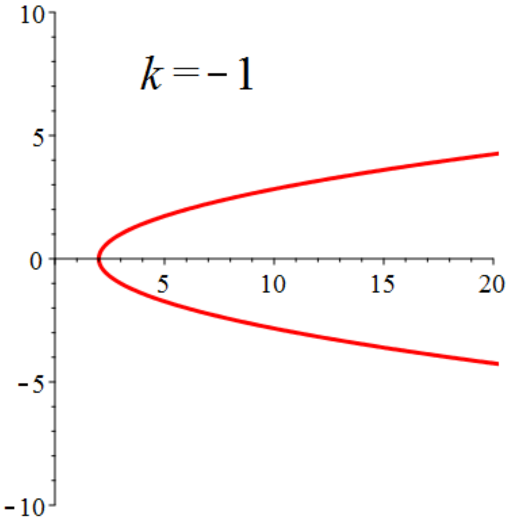
Stor acceleration ved mindst fart og lille acceleration ved størst fart.

6.D2.13: $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}(k\cdot t)^2+2\\ k\cdot t\end{pmatrix}$; $t\in\mathbb{R}$

a) $s(t) := \langle (k\cdot t)^2+2, k\cdot t\rangle$:

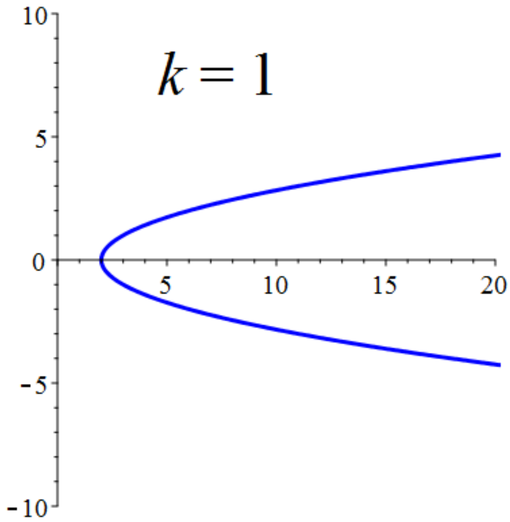
$k := -1$:

$plot\left(\left[s(t)_1, s(t)_2, t=-5..5\right], view=[0..20, -10..10], color=red, thickness=3\right)$



$k := 1$:

$plot\left(\left[s(t)_1, s(t)_2, t=-5..5\right], view=[0..20, -10..10], color=blue, thickness=3\right)$



b) $k := -1$:

$v_{k=-1}(t) = s'(t) = \begin{bmatrix}2t\\ -1\end{bmatrix}$

$k := 1$:

$v_{k=1}(t) = s'(t) = \begin{bmatrix}2t\\ 1\end{bmatrix}$

Man kan kigge på hastighedsvektoren svarende til $t=0$.

$k=-1$: Her er $v(0) = \begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$, dvs. parameterkurven gennemløbes oppefra og ned.

$k=1$: Her er $v(0) = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$, dvs. parameterkurven gennemløbes nedefra og op.

6.D2.14:

$s_1(t) := \langle -0.4 \cdot t + 3.5, -10 \cdot t \rangle : s_2(t) := \langle \cos(3 \cdot t) - 0.5 \cdot t + 2, -0.01 \cdot t^4 \rangle :$

a) Skiløberne er nede af bjerget, når deres anden koordinatfunktion giver -300 (det antages, at der måles i meter).

Skiløber 1: $-10 \cdot t = -300 \xrightarrow{\text{solve}} \{t = 30\}$

Skiløber 2: $-0.01 \cdot t^4 = -300 \xrightarrow{\text{solve}}$

$\{t = 13.16074013\}, \{t = 13.16074013\, I\}, \{t = -13.16074013\}, \{t = -13.16074013\, I\}$

De to komplekse løsninger og den negative forkastes, da tiden skal være positiv.

Da $13.1 < 30$, **kommer den anden skiløber først i mål**

b) De afledede funktioner bestemmes, da de skal bruges til at finde længden af ruten.

$$s1'(t) = \begin{bmatrix} -0.4 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$s2'(t) = \begin{bmatrix} -3\sin(3t) - 0.5 \\ -0.04\, t^3 \end{bmatrix}$$

Da man fra spørgsmål a) kender tiderne for de to skiløbere, kan man bestemme længderne.

Skiløber 1: $\int_0^{30} \sqrt{(-0.4)^2 + (-10)^2}\, dt = 300.2399040$

Skiløber 2: $\int_0^{13.16074013} \sqrt{(-3\sin(3t) - 0.5)^2 + (-0.04\, t^3)^2}\, dt = 307.9835532$

Dvs. **skiløber 1 løber 300,2 m og skiløber 2 løber 308,0 m**

6.D2.15: $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + r \cdot \cos(t) \\ y_0 + r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}, \ t \in [0, 2\pi]$

Dette er parameterfremstillingen for en cirkel med centrum i (x_0, y_0) med radius r, der gennemløbes netop én gang. Arealet af en cirkel kan altså bestemmes med den angivne formel (eller man kan kaste sig ud i en beregning i hånden, hvilket godt kan gennemføres):

$s(t) := \langle x_0 + r \cdot \cos(t), y_0 + r \cdot \sin(t) \rangle :$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \int_0^{2\cdot\pi} dotP\left(s'\left(t\right), hat\left(s\left(t\right)\right)\right) dt \right| = \pi\, |r|^2$$

Numerisktegnene er ikke nødvendige, da det er et kvadrat, så man kan se, at **arealet er $\pi \cdot r^2$**

6.D2.16: $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + a \cdot \cos(t) \\ y_0 + b \cdot \sin(t) \end{pmatrix}, \ t \in [0, 2\pi], a > 0, b > 0$

$with(Gym) :$

a) Dette er sådan set bare en indtastningsopgave. Funktionen defineres, de rigtige kommandoer indtastes og ud kommer svaret:

$s(t) := \langle x_0 + a \cdot \cos(t), y_0 + b \cdot \sin(t) \rangle :$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \int_0^{2\cdot\pi} dotP\left(s'\left(t\right), hat\left(s\left(t\right)\right)\right) dt \right| = \pi\, |a\, b|$$

Da a og b er positive, kan man fjerne numerisktegnet, og man har dermed vist, at $\underline{\underline{A = \pi \cdot a \cdot b}}$

6.D2.17: $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - t \\ t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

For at kunne finde tangentvektorerne bestemmes den afledede funktion: $\vec{v}(t) = \vec{s}\,'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 - 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Til tidspunktet $t = 0$, kan man så finde røringspunktets koordinater samt en retningsvektor (tangentvektoren):

$$\vec{s}(0) = \begin{pmatrix} 0^3 - 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0^2 - 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dette giver parameterfremstillingen for linjen m: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Til tidspunktet $t = 2$, kan man så finde røringspunktets koordinater samt en retningsvektor:

$$\vec{s}(2) = \begin{pmatrix} 2^3 - 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(2) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^2 - 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dette giver parameterfremstillingen for linjen n: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$

Skæringspunktet mellem tangenterne findes så ved at løse ligningssystemet med fire ligninger og fire ubekendte, der opstår, når man arbejder koordinatvis:

$$x = -u,\ y = u,\ x = 6 + 11 \cdot v,\ y = 2 + v \xrightarrow{\text{solve}} \left\{ u = \frac{4}{3},\ v = -\frac{2}{3},\ x = -\frac{4}{3},\ y = \frac{4}{3} \right\}$$

Dvs. $\underline{\underline{\left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right)}}$

6.D2.18: $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} -t^3 + 3t \\ t^2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

$s(t) := \langle -t^3 + 3 \cdot t, t^2 \rangle$:

a) Man kan finde værdier for stedet og hastigheden ved indsættelse:

$$s(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$s'(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dvs. $\underline{\underline{\vec{s}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{s}\,'(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}}}$

b) Der er fejl i opgaveformuleringen. Man mangler at få at vide, at k regnes som et positivt tal, hvilket fremgår af det den efterfølgende tekst, hvor man får opgivet intervallet $[-k, k]$.
Hvis man ved, at k er positiv, kan man finde omløbsretningen ved at kigge på hastighedsvektoren i $t = 0$. **Da den er $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ og altså peger mod højre, er omløbsretningen positiv, dvs. mod uret i sløjfen.**

c) $with(Gym)$:

Formlen for arealet er oplyst til $A = \frac{1}{2} \cdot \left| \int_{-k}^{k} \vec{s}\,'(t) \cdot \hat{\vec{s}}(t) \, dt \right|$.

Da arealet skal være 6, har man:

$$solve\left(6. = \frac{1}{2} \cdot \text{abs}\left(\int_{-k}^{k} dotP(s'(t), hat(s(t)))\, dt \right), k \right) = 1.586258613, -1.586258613$$

Da k skal være positiv, har man altså $\underline{\underline{k = 1.5863}}$

6.D2.19: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi[$

restart

with(Gym) :

a) $OP := \langle 3 + 2\cdot\cos(t), 4 + 2\cdot\sin(t) \rangle$:

Afstandsformlen mellem punkt (x_0, y_0) og linjen med ligningen $a\cdot x + b\cdot y + c = 0$ er

$dist(P, l) = \dfrac{|a\cdot x_0 + b\cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, dvs. afstanden som funktion af t bliver:

$$d(t) := \frac{|1\cdot(3 + 2\cdot\cos(t)) - 2\cdot(4 + 2\cdot\sin(t)) + 12|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = t \rightarrow \frac{|7 + 2\cos(t) - 4\sin(t)|}{\sqrt{5}}$$

Det bemærkes, at udtrykket inden i den numeriske værdi er positivt, da cosinus- og sinusværdierne ligger i intervallet [-1,1], så man kan undvære den numeriske værdi.

$$d(t) := \frac{7 + 2\cos(t) - 4\sin(t)}{\sqrt{5}} :$$

Man skal finde et ekstremumssted, så man finder de steder, hvor den første afledede er 0 samt fortegnet disse steder.

$fintervalsolve(d'(t) = 0., t = 0..2\cdot\pi) = [2.034443936, 5.176036589]$

$d''(2.034443936) = 0.8944271910\sqrt{5} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 2.0000$>0 dvs. lokalt minimumssted

$d''(5.176036589) = -0.8944271910\sqrt{5} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} -2.0000$<0 dvs. lokalt maksimumssted

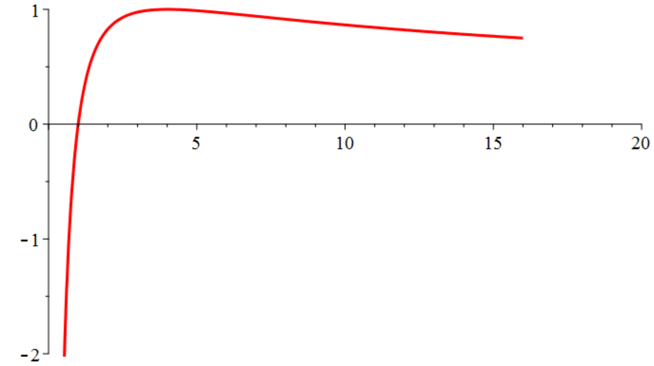
Dvs. $\underline{\underline{t = 2.0344}}$ giver den korteste afstand.

6.D2.20: $\overrightarrow{OP_t} = \begin{pmatrix} 4t^2 \\ \dfrac{2t-1}{t^2} \end{pmatrix}$; $t \in \left[\dfrac{1}{4}, 2\right]$

$OP(t) := \left\langle 4\,t^2, \dfrac{2\,t-1}{t^2} \right\rangle :$

a) For at få overblik over opgaven tegnes en graf:

$plot\left(\left[OP(t)_1, OP(t)_2, t = \frac{1}{4}..2\right], view = [0..20, -2..1], color = red, thickness = 3\right)$



Skæring med førsteaksen sker til de tidspunkter, hvor andenkoordinaten er 0:

$\dfrac{2\,t-1}{t^2} = 0 \Leftrightarrow 2\,t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$ Ligger inden for definitionsmængden.

Skæring med andenaksen sker til de tidspunkter, hvor førstekoordinaten er 0:

$4\,t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$ Ligger ikke inden for definitionsmængden.

Koordinatsættet til punktet svarende til $t = \dfrac{1}{2}$ bestemmes:

$OP\left(\dfrac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Dvs. **banekurven skærer førsteaksen i (1,0)**

b) Hastighedsvektorerne er retningsvektorer for tangenterne, så hastighedsfunktionen bestemmes:

$v(t) := \dfrac{d}{d\,t}\,OP(t) = t \rightarrow \dfrac{d}{dt}\,OP(t)$

$v(t) = \begin{bmatrix} 8\,t \\ \dfrac{2}{t^2} - \dfrac{2\,(2\,t-1)}{t^3} \end{bmatrix}$

Hvis tangenten skal være parallel med andenaksen, skal hastighedsvektorens førstekoordinat være 0:

$8\,t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ Ligger uden for definitionsmængden.

Parallel med førsteaksen (her skal hastighedsvektorens andenkoordinat være 0):

$\dfrac{2}{t^2} - \dfrac{2\,(2\,t-1)}{t^3} = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{t = 1\}$ Ligger inden for definitionsmængden.

$OP(1) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dvs. **i punktet (4,1) er tangenten parallel med førsteaksen (dvs. vandret tangent).**

c) Hastighedsvektoren til $t = \dfrac{1}{2}$ bestemmes:

$v(t) := \left\langle 8\cdot t, \dfrac{2}{t^2} - \dfrac{2\cdot(2\cdot t-1)}{t^3} \right\rangle :$

$v\left(\dfrac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$

Denne vektor svarer til en tangenthældning på 2 (4 ud og 8 op), og så kan vinklen bestemmes ved:

$w = arcTan(2) = 63.43494883$

Dvs. vinklen er $\underline{\underline{63.43°}}$

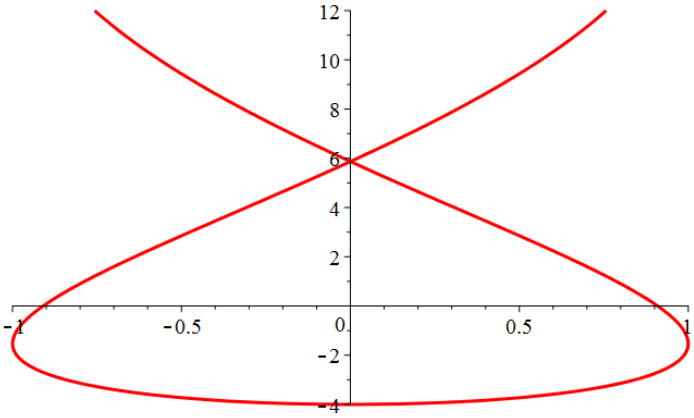
6.D2.21: $\overrightarrow{OP_t} = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ t^2 - 4 \end{pmatrix}$; $t \in [-4, 4]$

$with(Gym)$:

$OP(t) := \langle \sin(t), t^2 - 4 \rangle$:

a) Man kan se på funktionsudtrykket, at *x*-værdierne ligger i intervallet [-1,1], mens y-værdierne med den angivne definitionsmængde vil ligge i intervallet [-4,12].

$plot\left(\left[OP(t)_1, OP(t)_2, t = -4..4 \right], view = [-1..1, -4..12], color = red, thickness = 3 \right)$



b) Banekurven skærer andenaksen tre gange, nemlig de gange, hvor førstekoordinaten er 0, dvs. for $t = -\pi \ \vee t = 0 \ \vee \ t = \pi$ (da $\sin(-\pi) = \sin(0) = \sin(\pi) = 0$).

Og da $(-\pi)^2 - 4 = \pi^2 - 4$, svarer dobbeltpunktet altså til *t*-værdierne $-\pi$ og π.

Man kan tjekke med:

$$OP(-\pi) = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi^2 - 4 \end{bmatrix}$$

$$OP(\pi) = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi^2 - 4 \end{bmatrix}$$

Hastighedsvektorerne i dobbeltpunktet er:

$$v_1 := OP'(-\pi) = \begin{bmatrix} -1 \\ -2\pi \end{bmatrix}$$

$$v_2 := OP'(\pi) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2\pi \end{bmatrix}$$

Vinklen mellem hastighedsvektorerne bestemmes ved: $\cos(v) = \dfrac{\overrightarrow{OP'}(-\pi) \cdot \overrightarrow{OP'}(\pi)}{\left|\overrightarrow{OP'}(-\pi)\right| \cdot \left|\overrightarrow{OP'}(\pi)\right|}$

$$Cos(v) = \frac{dotP(v_1, v_2)}{len(v_1) \cdot len(v_2)} \xrightarrow{\text{solve for v}} [[v = 161.9138778]]$$

Dvs. vinklen mellem hastighedsvektorerne i dobbeltpunktet er **161.9°**

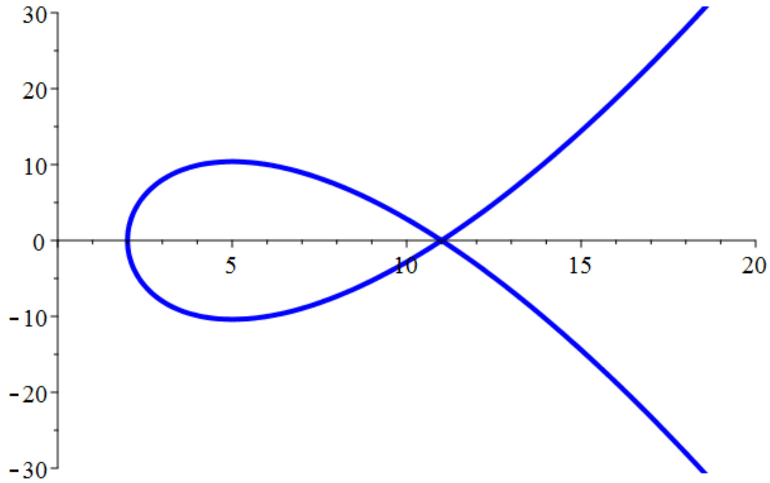
6.D2.22: $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2+2 \\ 9t-t^3 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

$with(Gym):$

$s(t) := \langle t^2 + 2, 9\,t - t^3 \rangle :$

a)

$plot\left(\left[s(t)_1, s(t)_2, t=-5..5\right], view = [0..20, -30..30], color = blue, thickness = 4\right)$



b) Først bestemmes parameterværdierne svarende til punktet (11,0).

Førstekoordinaten skal være 11, så man har:

$solve\left(s(t)_1 = 11, t\right) = 3, -3$

Hastighedsvektorerne fungerer som retningsvektorer for tangenterne, så de bestemmes disse to steder.

$s'(-3) = \begin{bmatrix} -6 \\ -18 \end{bmatrix}$

$s'(3) = \begin{bmatrix} 6 \\ -18 \end{bmatrix}$

Vinklen mellem disse to tangenter bestemmes med $\cos(v) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$:

$Cos(v) = \dfrac{dotP(\langle -6, -18 \rangle, \langle 6, -18 \rangle)}{len(\langle -6, -18 \rangle) \cdot len(\langle 6, -18 \rangle)} \xrightarrow{\text{solve for v}} [[v = 36.86989765]]$

Dvs. den spidse vinkel er $\underline{\underline{36,87°}}$

c) For at finde arealet af rektanglet skal man kende højden og bredden.

Højden svarer til afstanden mellem andenkoordinaterne for de to punkterne, hvor der er vandret tangent, så først bestemmes parameterværdierne for disse:

$s'(t) = \begin{bmatrix} 2\,t \\ -3\,t^2 + 9 \end{bmatrix}$

Vandrette tangenter svarer til, at andenkoordinaten i ovenstående hastighedsvektor er 0:

$-3\,t^2 + 9 = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{t = -\sqrt{3}\}, \{t = \sqrt{3}\}$

Forskellen i de tilsvarende punkters andenkoordinater udgør som nævnt højden i rektanglet:

$h := s(\sqrt{3})_2 - s(-\sqrt{3})_2 = 12\sqrt{3}$

Bredden er forskellen mellem 11 og førstekoordinaten til det punkt, hvor der er lodret tangent, dvs. der hvor hastighedsvektorens førstekoordinat er 0.

$2\,t = 0 \Leftrightarrow t = 0$

$b := 11 - s(0)_1 = 9$

$A := h \cdot b = 108\sqrt{3} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 187.0614873$

Dvs. $\underline{\underline{A_{rektangel} = 108 \cdot \sqrt{3}}}$

6.D2.23: $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} t^3-3t \\ t^2-4 \end{pmatrix}$; $-2,25\le t\le 2,25$

restart

with(*Gym*) :

$OP(t) := \langle t^3-3\,t, t^2-4\rangle$:

a) Skæring med førsteaksen er de punkter, hvor andenkoordinaten er 0:

$solve\left(OP(t)_2=0, t\right) = 2, -2$ De ligger begge inden for definitionsmængden.

Skæring med andenaksen er de punkter, hvor førstekoordinaten er 0:

$solve\left(OP(t)_1=0, t\right) = 0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$ Alle tre ligger inden for definitionsmængden.

De tilsvarende punkter bestemmes:

$$OP(-2) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$OP(-\sqrt{3}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$OP(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$OP(\sqrt{3}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$OP(2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dvs. banekurven skærer koordinatakserne i følgende punkter

$\underline{\underline{(-2, 0)\ ,\ (2, 0)\ ,\ (0,-1)\ \textbf{\textit{dobbeltpunkt}}\ \textit{og}\ \ (0,-4)}}$

b) Hastighedsfunktionen er:

$$OP'(t) = \begin{bmatrix} 3\,t^2-3 \\ 2\,t \end{bmatrix}$$

Hastighedsvektoren er parallel med vektoren $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, når determinanten af vektorparret er 0:

$$\begin{vmatrix} 3\,t^2-3 & 5 \\ 2\,t & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3\,t^2-3)\cdot 4 - 2\,t\cdot 5 = 0 \Leftrightarrow 12\,t^2-12-10\,t=0 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{t=\frac{3}{2}\right\}, \left\{t=-\frac{2}{3}\right\}$$

Hastighedsvektorerne svarende til disse to tidspunkter bestemmes:

$$OP'\left(-\frac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$OP'\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{bmatrix} \frac{15}{4} \\ 3 \end{bmatrix}$$

Den første er modsatrettet $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, dvs. det er den anden, der er den søgte.

$\underline{\underline{t=\frac{3}{2}}}$

6.D2.24:

a) En opgave hvis eneste indhold er indtastninger:

$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot\cos^3(t)\\4\cdot\sin^3(t)\end{pmatrix}$$

$x(t) := 4\cdot(\cos(t))^3$:

$y(t) := 4\cdot(\sin(t))^3$:

$$l=\int_0^{2\cdot\pi}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t=24$$

Dvs. **kurvens længde er 24**

6.D2.25: $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}2+4\cdot\sin(t)\\1+2\cdot\cos(t)\end{pmatrix}$, $t\in[0,2\pi]$ $\quad x+2y-16=0$

with(*Gym*) :

a) $s(t) := \langle 2+4\cdot\sin(t),\ 1+2\cdot\cos(t)\rangle$:

Afstanden mellem punktet (x_0, y_0) og linjen med ligningen $a\cdot x+b\cdot y+c=0$ er givet ved

$$dist(P,l)=\frac{|a\cdot x_0+b\cdot y_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ (formel 72 i formelsamlingen).

Da punkterne skal ligge på banekurven for $\vec{s}$, anvendes koordinatfunktionerne som punktets koordinater.

$$fintervalsolve\left(6=\frac{|1\cdot(2+4\cdot\sin(t))+2\cdot(1+2\cdot\cos(t))-16|}{\sqrt{1^2+2^2}},\ t=0..2\cdot\pi\right)=[2.609275389,\ 5.244706245]$$

Koordinatsættene til punkterne svarende til disse værdier bestemmes:

$$s(2.609275389)=\begin{bmatrix}4.030125338\\-0.723266601\end{bmatrix}$$

$$s(5.244706245)=\begin{bmatrix}-1.446533202\\2.015062669\end{bmatrix}$$

Dvs. punkterne er $\underline{\underline{(4.03,-0.72)\ \text{og}\ (-1.45,2.02)}}$

b) Først findes det sted, hvor den afledede af afstandsfunktionen er 0:

$$dist(t) := \frac{|1\cdot(2+4\cdot\sin(t))+2\cdot(1+2\cdot\cos(t))-16|}{\sqrt{1^2+2^2}} :$$

$$fintervalsolve(dist'(t)=0,\ t=0..2\cdot\pi)=[0.7853981634,\ 3.926990817]$$

Med fortegnet for den anden afledede ses det, om det er maksimum eller minimum:

$dist''(0.7853981634)=1.131370850\sqrt{5}>0$, dvs. lokalt minimumssted

$dist''(3.926990817)=-1.131370850\sqrt{5}<0$ dvs. lokalt maksimumssted

Koordinatsættet for minimumsstedet bestemmes:

$$s(0.7853981634)=\begin{bmatrix}4.828427125\\2.414213562\end{bmatrix}$$

Dvs. $\underline{\underline{(4.83,\ 2.41)}}$ er punktet på banekurven med kortest afstand til linjen.

6.D2.26: $\overrightarrow{OP_t} = \begin{pmatrix} 4t^2 - 6t \\ -t^2 + 4t - 3 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

$with(Gym)$:

$OP(t) := \langle 4\,t^2 - 6\,t, -t^2 + 4\,t - 3 \rangle$:

a) Skæring med førsteaksen er de punkter, hvor andenkoordinaten er 0:

$-t^2 + 4\,t - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4\,t + 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)\cdot(t-3) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = 3$

Koordinatsættene for de tilsvarende punkter bestemmes:

$$OP(1) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$OP(3) = \begin{bmatrix} 18 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da punktet Q er det med størst førstekoordinat, er $\underline{\underline{P(-2,0) \text{ og } Q(18,0)}}$

b) Hastighedsvektorerne i punkterne kan bruges som retningsvektorer, og tværvektorer til hastighedsvektorerne kan derfor bruges som normalvektorer for tangenterne.

$$OP'(3) = \begin{bmatrix} 18 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Så tværvektoren til ovenstående er en normalvektor til linjen m, der er tangenten i Q:

$\overrightarrow{n_m} := \langle 2, 18 \rangle$:

Dvs. en ligning for m er:

$a\cdot\left(x - x_0\right) + b\cdot\left(y - y_0\right) = 0$

$2\cdot(x-18) + 18\cdot(y-0) = 0 \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = -\frac{x}{9} + 2$

Nu skal hastighedsvektoren i punktet $S(0,-3)$ bestemmes, så man har brug for at kende den parameterværdi, der svarer til punktet. Her udnyttes det, at man ved, hvad første- og andenkoordinaterne skal være:

$[4\,t^2 - 6\,t = 0, -t^2 + 4\,t - 3 = -3] \xrightarrow{\text{solve}} \{t = 0\}$

Så kan hastighedsvektoren bestemmes:

$$OP'(0) = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Dvs. en normalvektor er $\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$, eller man kan vælge $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ som normalvektor.

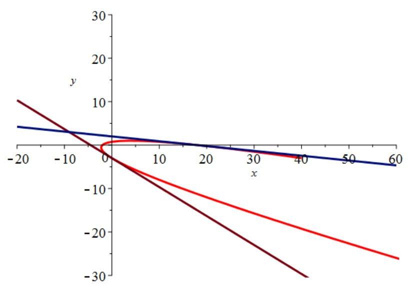
En ligning for denne tangent er altså:

$2\cdot(x-0) + 3\cdot(y-(-3)) = 0 \xrightarrow{\text{isolate for y}} y = -\frac{2\,x}{3} - 3$

For at finde skæringspunktet løses ligningssystemet bestående af disse to ligninger:

$y = -\frac{x}{9} + 2, y = -\frac{2\,x}{3} - 3 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = -9, y = 3\}$

Dvs. skæringspunktet mellem tangenterne er $\underline{\underline{(-9,3)}}$



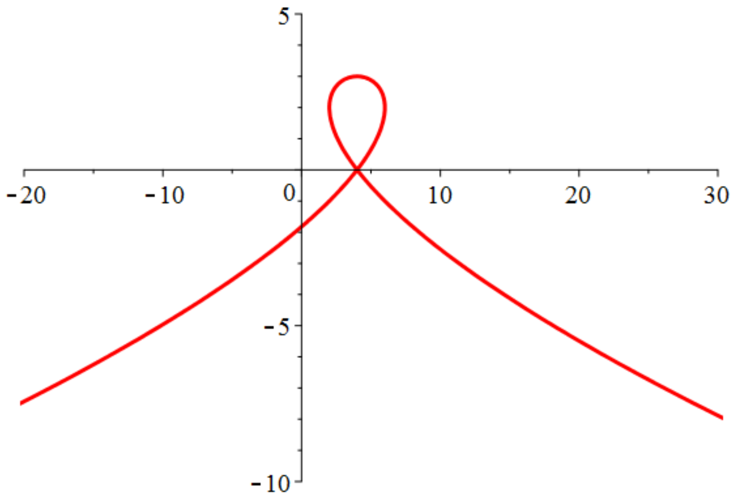
6.D2.27: $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 3t + 4 \\ t^2 + 3 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

$with(Gym)$:

$s(t) := \langle t^3 - 3\,t + 4, -t^2 + 3 \rangle$:

a)

$plot\left(\left[s(t)_1, s(t)_2, t = -5\,..5\right], view = [-20\,..30, -10\,..5], color = red, thickness = 3\right)$



$s(3) = \begin{bmatrix} 22 \\ -6 \end{bmatrix}$

Dvs. koordinatsættet svarende til $t = 3$ er $\underline{\underline{(22, -6)}}$

b) En lodret tangent findes, når hastighedsvektoren er lodret, dvs. når førstekoordinaten er 0:

$s'(t) = \begin{bmatrix} 3\,t^2 - 3 \\ -2\,t \end{bmatrix}$

$3\,t^2 - 3 = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{t = 1\}, \{t = -1\}$

Koordinatsættene svarende til disse parameterværdier bestemmes:

$s(-1) = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

$s(1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Dvs. der er lodrette tangenter i $\underline{\underline{(2, 2) \text{ og } (6, 2)}}$

6.D2.28: $\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$; $t\in\mathbb{R}$

a) Punktet $P(4,4)$ svarer til parameterværdien 2, hvilket hurtigt kan tjekkes ved indsættelse i forskriften.
Hastighedsvektoren i dette punkt bestemmes:

$$\vec{u}(t)=\begin{pmatrix} 2t \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\vec{u}(2)=\begin{pmatrix} 2\cdot 2 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, dvs. hældningen for tangenten er $\frac{1}{2}$ (4 ud og 2 op).

Vinklen mellem tangenten og linjen l svarer til vinklen med førsteaksen, dvs.:

$$v=arcTan\left(\frac{1}{2}\right)=26.56505117$$

Hældningen for brændstrålen er:

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-0}{4-1}=\frac{4}{3}$$

Så vinklen mellem tangenten brændstrålen er:

$$w=arcTan\left(\frac{4}{3}\right)-arcTan\left(\frac{1}{2}\right)=26.56505117$$

Dvs. her er $\underline{\underline{v=w=26.565°}}$

Man kan vise, at der generelt dannes lige store vinkler, hvis man kigger på retningsvektorer for tangent, linjen l og brændstrålen:

$$\overrightarrow{r_{tangent}}=\vec{s}\,'(t)=\begin{pmatrix} 2t \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r_l}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{r_{brændstråle}}=\begin{pmatrix} t^2-1 \\ 2t-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t^2-1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

Vinklen mellem to vektorer findes med formlen $\cos(v)=\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

Man kan vise, at vinklerne er lige store, ved at sammenligne højresiderne i ovenstående:

$$\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 2t \\ 2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix} 2t \\ 2 \end{pmatrix}\right|}=\frac{\begin{pmatrix} 2t \\ 2 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} t^2-1 \\ 2t \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2t \\ 2 \end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix} t^2-1 \\ 2t \end{pmatrix}\right|}\Leftrightarrow$$

$$\frac{2t}{1\cdot\sqrt{4t^2+4}}=\frac{2t^3-2t+4t}{\sqrt{4t^2+4}\cdot\sqrt{\left(t^2-1\right)^2+4t^2}}\Leftrightarrow$$

$$2t=\frac{t\cdot\left(2t^2+2\right)}{\sqrt{t^4+1-2t^2+4t^2}}\Leftrightarrow$$

$$2=\frac{\left(2t^2+2\right)}{\sqrt{t^4+1+2t^2}}\Leftrightarrow 1=\frac{t^2+1}{\sqrt{\left(t^2+1\right)^2}}\Leftrightarrow 1=\frac{t^2+1}{t^2+1}\Leftrightarrow 1=1$$

Da man får en identitet, er vinklerne lige store, uanset hvor på parablen *P* ligger.

6.D2.29: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 + 3t + 1 \\ t^2 + b \cdot t + 6 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$, $b > 0$

a) Skæringerne med førsteaksen er de punkter, hvor andenkoordinaten er 0, dvs:

$t^2 + b \cdot t + 6 = 0$

Diskriminantens fortegn er altså afgørende for antallet af skæringspunkter:

$d = b^2 - 4ac = b^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = b^2 - 24$

Da b er positiv, har man:

$d = 0 \Leftrightarrow b = \sqrt{24}$

Hvis b er mindre end dette, bliver andet led numerisk større end første, og dermed får man negativ diskriminant og altså ingen løsninger (svarende til skæringspunkter).

$0 < b < \sqrt{24}$ **: Ingen skæringspunkter med førsteaksen.**

$b = \sqrt{24}$ **: Ét skæringspunkt med førsteaksen.**

$b > \sqrt{24}$ **: To skæringspunkter med førsteaksen.**

b) Først anvendes punktet $P(5, 10)$:

Hvis førstekoordinaten skal være 5, har man:

$$2t^2 + 3t + 1 = 5 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{t = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{41}}{4}\right\}, \left\{t = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{41}}{4}\right\}$$

Hvis andenkoordinaten skal være 10, har man to mulige værdier for b:

$$\left(-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{41}}{4}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{41}}{4}\right) + 6 = 10 \xrightarrow{\text{solve for b}} \left[\left[b = \frac{7 + 3\sqrt{41}}{2\left(-3 + \sqrt{41}\right)}\right]\right] \xrightarrow{\text{at 5 digits}} [[b = 3.8508]]$$

$$\left(-\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{41}}{4}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{41}}{4}\right) + 6 = 10 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{b = \frac{-7 + 3\sqrt{41}}{2\left(\sqrt{41} + 3\right)}\right\} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} \{b = 0.64920\}$$

Så ses på punkter $Q(50, 15)$:

Hvis førstekoordinaten skal være 50, har man:

$$2t^2 + 3t + 1 = 50 \xrightarrow{\text{solve for t}} \left[\left[t = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{401}}{4}\right], \left[t = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{401}}{4}\right]\right]$$

Hvis andenkoordinaten skal være 15, har man to mulige værdier for b:

$$\left(-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{401}}{4}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{401}}{4}\right) + 6 = 15 \xrightarrow{\text{solve for b}} \left[\left[b = \frac{-133 + 3\sqrt{401}}{2\left(-3 + \sqrt{401}\right)}\right]\right] \xrightarrow{\text{at 5 digits}} [[b = -2.1417]]$$

$$\left(-\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{401}}{4}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{401}}{4}\right) + 6 = 15 \xrightarrow{\text{solve for b}} \left[\left[b = \frac{133 + 3\sqrt{401}}{2\left(\sqrt{401} + 3\right)}\right]\right] \xrightarrow{\text{at 5 digits}} [[b = 4.1928]]$$

Det giver 4 forskellige værdier, så der er **fejl i opgaven**, hvilket forklarer, hvorfor nedenstående ligningssystem ikke har nogen løsninger:

Der opstilles et ligningssystem med alle ligninger:

$$[2t^2 + 3t + 1 = 5, t^2 + b \cdot t + 6 = 10, 2 \cdot s^2 + 3 \cdot s + 1 = 50, s^2 + b \cdot s + 6 = 15] \xrightarrow{\text{solve}}$$

7.D1

7.D1.1: $X \sim N(10,2)$

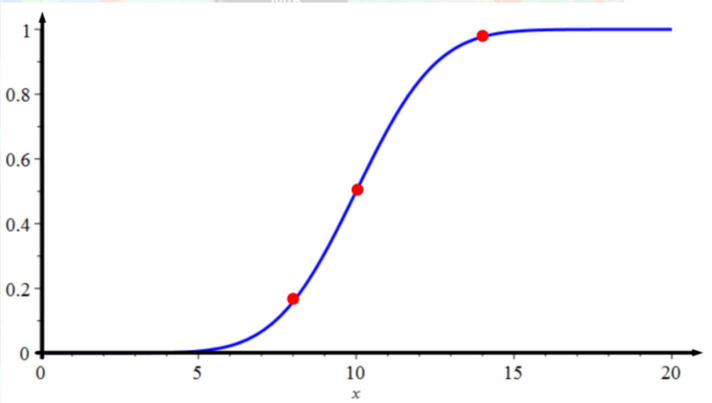
a) X er altså normalfordelt med middelværdien 10 og spredningen 2.
Punktet med førstekoordinaten 6 svarer altså til middelværdien fratrukket 2 spredninger, punktet med førstekoordinaten 10 svarer til middelværdien og det sidste punkt er middelværdien plus to spredninger.
Der er nogle helt faste tal for fordelingsfunktionens værdier disse steder. Enten kan man tallene i hovedet, eller også findes de indirekte i formelsamlingen på side 42, hvor man ud fra procentdelene på den nederste figur kan se, hvor mange procent der er op til og med den givne værdi.
(10,0.5) ligger på grafen for *F*, fordi 50% af arealet under tæthedsfunktionen ligger til venstre for middelværdien.
(14,0.977) ligger på grafen for *F*, fordi 4,55% af arealet under tæthedsfunktionen ligger mere end to spredninger fra middelværdien, og pga. symmetrien vil halvdelen af dette ligge på højre side af middelværdien, hvorfor delen op til og med to spredninger over middelværdien er:

$$F(14) = 1 - \frac{0{,}0455}{2} = 1 - 0{,}02275 = 0{,}97725$$

Det er straks sværere at argumentere for, at (6,0.159) ligger på grafen for *F*, for det gør det ikke. Opgavestilleren har højst sandsynligt tænkt på (8,0.159), for man har:

$$F(8) = \frac{0{,}3173}{2} = 0{,}15865$$

b) Det væsentlige, når man skitserer grafen er:
1) De tre angivne punkter er med.
2) Grafen får sin karakteristiske s-form.
3) $y = 0$ og $y = 1$ er vandrette asymptoter.



7.D1.2: $X \sim N(5,3)$

Dvs. den stokastiske variabel følger normalfordelingen med middelværdi 5 og spredning 3.

a) Exceptionelle udfald er udfald, der ligger mere end tre spredninger fra middelværdien, og da normalfordelingerne løber over hele $\mathbb{R}$, bliver intervallerne med exceptionelle udfald:
$]-\infty, 5-3\cdot 3[$ og $]5+3\cdot 3, \infty[$, dvs. $\underline{\underline{]-\infty,-4[\text{ og }]14,\infty[}}$
(Man må gerne anvende lukkede parenteser ved -4 og 14. Det gør ingen forskel her.)

b) Normale udfald er udfald, der ligger inden for 2 spredninger fra middelværdien, dvs. i $[5-2\cdot 3, 5+2\cdot 3] = \underline{\underline{[-1,11]}}$ (åbne parenteser kan også bruges).

c) $2 = 5 - 3$, dvs. 2 ligger 1 spredning til venstre for middelværdien. Ifølge formelsamlingen side 42 ligger 68,27% inden for 1 spredning fra middelværdien, dvs. 31,73% ligger uden for, og heraf ligger halvdelen til venstre for middelværdien, dvs.

$$P(X \le 2) = \frac{31{,}73\%}{2} = \underline{\underline{15{,}865\%}}$$

7.D1.3: $X \sim N(15,4)$

a) Forskriften for normalfordelingens tæthedsfunktion med middelværdi 15 og spredning 4 er:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot 4}\cdot e^{-\frac{(x-15)^2}{2\cdot 4^2}}$$

Så integralet, der bestemmer $P(X\le 23)$ er:

$$\underline{\underline{\int_{-\infty}^{23}\frac{1}{4\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-15)^2}{32}}\,dx}}$$

7.D1.4: X er en stokastisk variabel. $\mu=15$. $\sigma=4$.

23 ligger to spredninger over middelværdien, og fra formelsamlingen side 42 ved man, at 95,45% af observationerne i en normalfordeling ligger indenfor to spredninger fra middelværdien, dvs. 4,55% ligger uden for. Halvdelen af de 4,55%, dvs. 2,3%, ligger til højre for middelværdien.

Dermed er $P(X\le 23)=1-0{,}023=\underline{\underline{0{,}977}}$

7.D1.5: $\int_{10}^{20} f(x)\,dx$ angiver sandsynligheden for, at den stokastiske variabel X antager værdier i intervallet [10,20], dvs. $\underline{\underline{P(10\le X\le 20)}}$

7.D1.6: $X \sim N(10,2)$ $\qquad \int_{-\infty}^{14} f(x)\,dx$

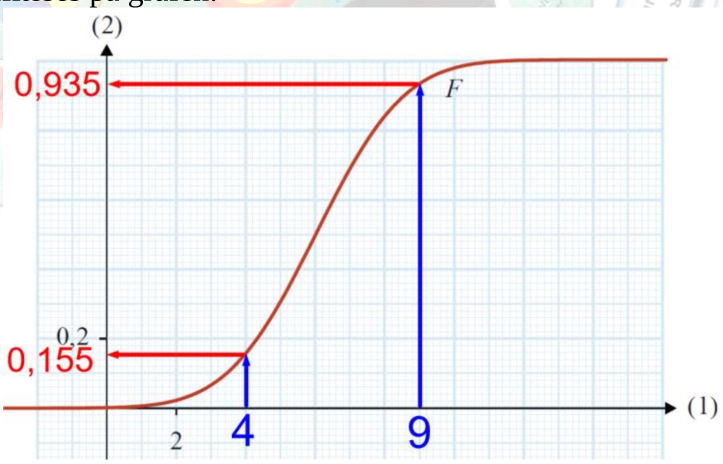
Da middelværdien er 10 for normalfordelingen, har man $\int_{-\infty}^{10} f(x)\,dx=0{,}5$.

Dvs.

$$P(10\le X\le 14)=P(X\le 14)-P(X<10)=\int_{-\infty}^{14} f(x)\,dx-\int_{-\infty}^{10} f(x)\,dx=0{,}977-0{,}5=\underline{\underline{0{,}477}}$$

7.D1.7: Da F er en fordelingsfunktion, har man: $P(4\le x\le 9)=F(9)-F(4)$

Funktionsværdierne aflæses på grafen:



Dvs. $P(4\le x\le 9)=0{,}935-0{,}155=\underline{\underline{0{,}78}}$

7.D1.8: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{32 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{32} \cdot (x-5)^2}$

a) Det generelle udtryk for normalfordelingens tæthedsfunktion er $f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$

Så man kan aflæse, at $\underline{\underline{\mu = 5}}$

Desuden aflæses, at $\sqrt{32} = \sigma \cdot \sqrt{2} \Leftrightarrow \sigma = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{32}{2}} = \sqrt{16} = \underline{\underline{4}}$

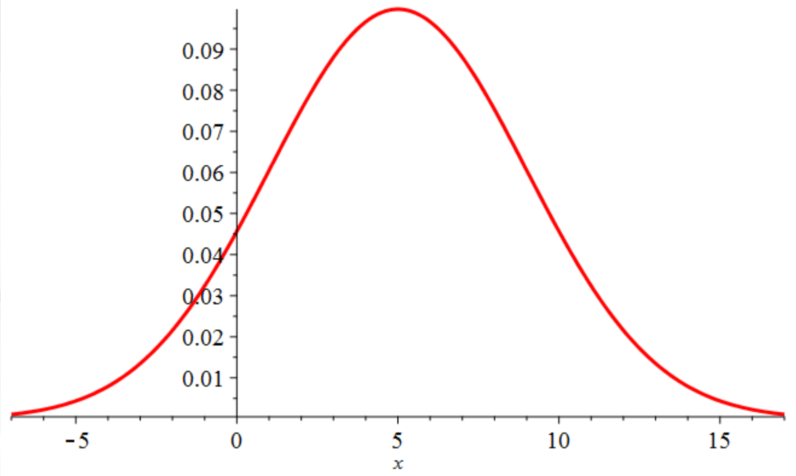
b) Denne opgave indeholder både noget eksakt beregning og noget overslagsregning:

$$f(5) = \frac{1}{\sqrt{32 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{32} \cdot (5-5)^2} = \frac{1}{\sqrt{32 \cdot \pi}} \cdot e^0 = \frac{1}{\sqrt{32 \cdot \pi}} \approx \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10} = \underline{\underline{0{,}1}}$$

(den rigtige værdi er 0,09973557)

c) En skitse af grafen kræver:

1) Det skal være den karakteristiske klokkeform for normalfordelingens tæthedsfunktion.
2) Den skal være symmetrisk omkring linjen $x = 5$.
3) Den skal have et maksimum på 0,1 (beregnet ovenfor)
4) Man skal tage højde for spredningen 4, så man ca. har 95% af arealet placeret mellem -3 og 13.



7.D1.9: Der er fejl i opgaveformuleringen. Der spørges efter **estimerede** værdier.

a) Estimeret middelværdi: $\bar{x} = \frac{4+6+3+7+10}{5} = \frac{30}{5} = \underline{\underline{6}}$

Estimeret spredning: $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5} (x_i - \bar{x})^2}{5-1}} = \sqrt{\frac{(4-6)^2 + (6-6)^2 + (3-6)^2 + (7-6)^2 + (10-6)^2}{4}} =$

$$\sqrt{\frac{4+0+9+1+16}{4}} = \sqrt{\frac{30}{4}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{15}{2}}}}$$

7.D1.10: a) Da konfidensintervallet for hældningen ligger med betydelige dele på hver side af 0, og man derfor ikke kan vurdere, om en evt. lineær sammenhæng skulle have positiv eller negativ hældning, kan der ikke med god tilnærmelse være tale om en lineær sammenhæng.

7.D2

7.D2.1:

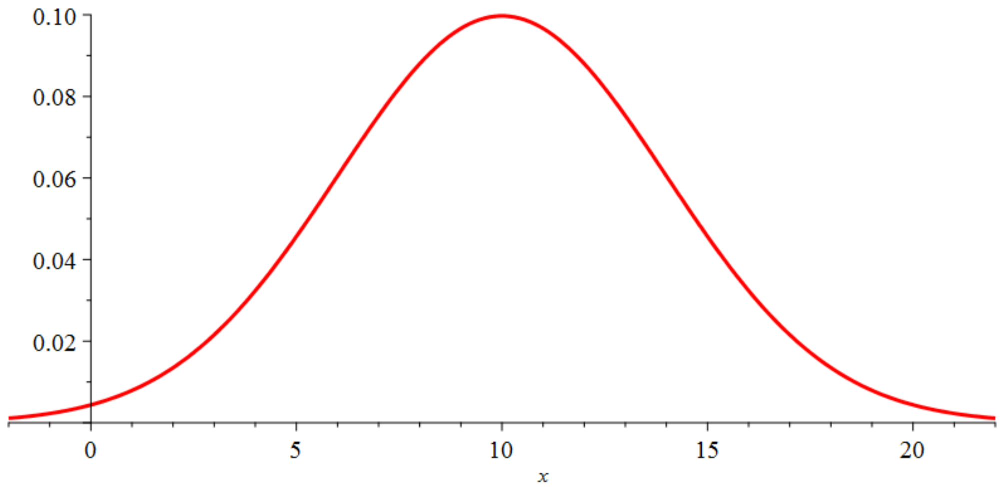
restart
with(*Gym*) :

Den generelle forskrift for tæthedsfunktionen for en normalfordeling er $f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$

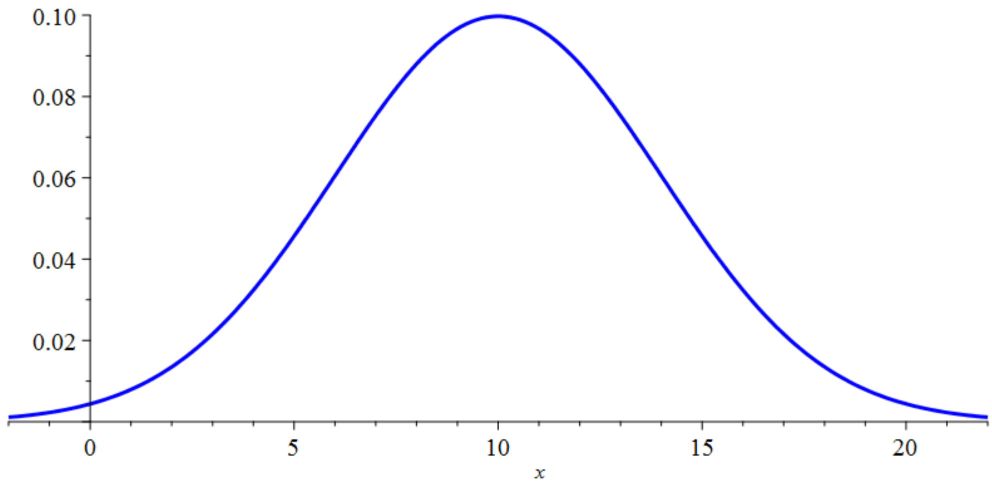
Så normalfordelingen med middelværdi 10 og spredningen 4 - $N(10, 4)$ - har forskriften:

$f(x) := \frac{1}{4 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-10)^2}{16}}$:

a) Så kan tæthedsfunktionen tegnes i Maple:
$plot(f(x), x = -2..22, y = 0..0.1, color = red, thickness = 3)$



Man kan også anvende Gym-pakkens kommando *normalpdf* , der indeholder den generelle forskrift:
$plot(normalpdf(10, 4, x), x = -2..22, y = 0..0.1, color = blue, thickness = 3)$



b) Værdierne for fordelingsfunktionen F kan bestemmes med et integral:

$F(7) = \int_{-\infty}^{7.} f(x)\, dx = 0.2266273524$

Dvs. **sandsynligheden for, at den stokastiske variabel X højst antager værdien 7, er 22,7%**

Man kan også bruge Gym-pakkens *normalcdf* til at udregne værdien:
$normalcdf(10, 4, 7) = 0.2266273524$

7.D2.2:

Den generelle forskrift for tæthedsfunktionen for en normalfordeling er $f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$

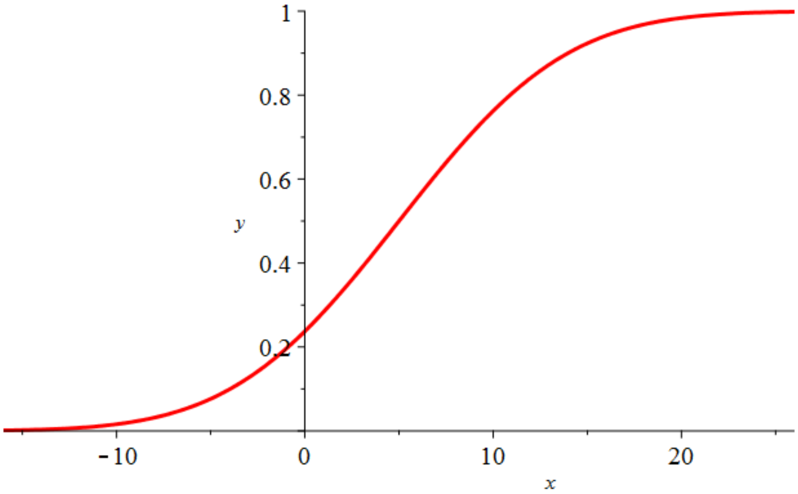
Så normalfordelingen med middelværdi 5 og spredningen 7 - $N(5, 7)$ - har forskriften:

$$f(x) := \frac{1}{7 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-5)^2}{49}} :$$

a) Fordelingsfunktionen F er givet ved $F(x) := \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$:

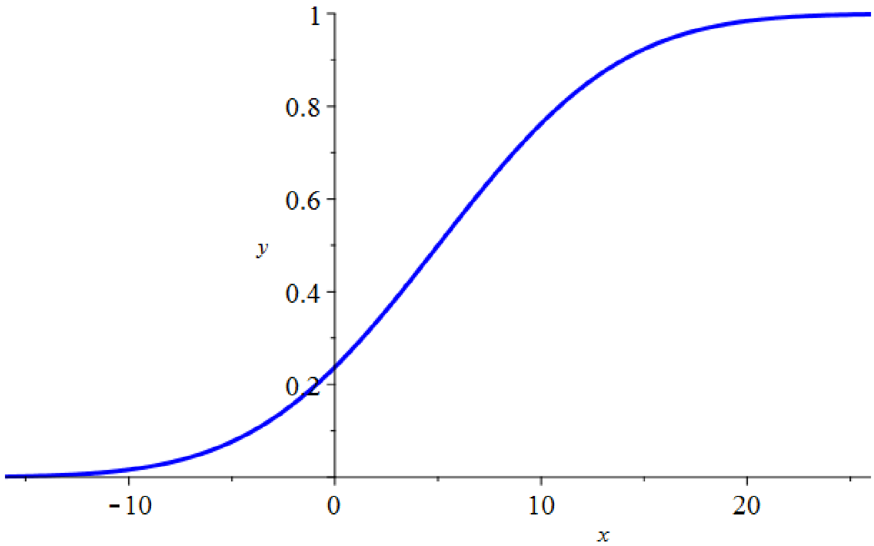
Grafen kan tegnes med Maple:

$plot(F(x), x = -16..26, y = 0..1, color = red, thickness = 3)$



Man kan også bruge Gym-pakkens *normalcdf*:

$plot(normalcdf(5, 7, x), x = -16..26, y = 0..1, color = blue, thickness = 3)$



b) Da fordelingsfunktionen er defineret i Maple, kan ligningen løses ved:

$fsolve(F(x) = 0.8, x) = 10.89134864$

Dvs. $\underline{\underline{x = 10.89}}$

Man kan også bruge *normalcdf*:

$fsolve(normalcdf(5, 7, x) = 0.8, x) = 10.89134864$

7.D2.3:

Den generelle forskrift for tæthedsfunktionen for en normalfordeling er $f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$

Så normalfordelingen med middelværdi k og spredningen 3 har forskriften:

$f(x) := \frac{1}{3 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-k)^2}{9}}$:

$solve(f(1) = 0.05, k) = -3.196101301, 5.196101301$

Dvs. $\underline{\underline{k = -3.196 \vee k = 5.196}}$

Pga. symmetrien er der to muligheder for middelværdien, der ligger lige langt fra 1.

7.D2.4: a) Tæthedsfunktionen for en normalfordeling med middelværdi 15 og spredning k er:

$$f(x) = \frac{1}{k \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(x-15)^2}{2 \cdot k^2}}$$

Det kan godt volde problemer at arbejde med denne funktion, når den skal integreres, så her arbejdes med Gym-pakkens *normalcdf*, der svarer til **fordelings**funktionen, dvs. man løser ligningen $F(6) = 0,1$ ved :

$with(Gym)$:

$fsolve(normalcdf(15, k, 6) = 0.1, k) = 7.022737313$

7.D2.5: Tæthedsfunktionerne for normalfordelinger er symmetriske omkring middelværdien, så da $P(X \le 10) = 0,25$ og $P(X \le 20) = 0,75$, dvs. 25% af arealet under grafen ligger til venstre for 10 og 25% til højre for 20, må middelværdien ligge midt mellem 10 og 20, dvs. $\underline{\underline{\mu = 15}}$.

$P(X \le 10) = 0,25$ giver os ligningen $F(10) = 0,25$ for fordelingsfunktionen *F*:. Den løses med Gym-pakkens *normalcdf*.

$with(Gym)$:

$fsolve(normalcdf(15, k, 10) = 0.25, k) = 7.413011091$

7.D2.6: $X \sim b(60, 0.7)$

a) Først bestemmes middelværdien og spredningen for binomialfordelingen:

$\mu = n \cdot p = 60 \cdot 0.7 = 42$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{60 \cdot 0.7 \cdot (1-0.7)} = 3.549647870$

$\mu - \sigma = 42 - 3.549647870 = 38.45035213$

$\mu + \sigma = 42 + 3.549647870 = 45.54964787$

Da binomialfordelingen er diskret, har man altså:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(39 \le X \le 45) = P(X \le 45) - P(X \le 38) =$

$bincdf(60, 0.7, 45) - bincdf(60, 0.7, 38) = 0.6760739360$

Dvs. $\underline{\underline{P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 67.6\ \%}}$

b) Da middelværdien er 42, ligger den søgte k-værdi i området lige under denne værdi, da $P(X \le 42) \approx 0.5$. Så man skal se på værdierne i dette område og finde den k-værdi, hvor man første gang kommer over 0,4:

$bincdf(60, 0.7, 40) = 0.3308408761$

$bincdf(60, 0.7, 41) = 0.4367600985$

Dvs. $\underline{\underline{k = 41}}$, da $P(X \le 41) = 0.437$ og $P(X \le 40) = 0.331$

7.D2.7: $X \sim b(40, 0.2)$

a) Først bestemmes middelværdi og spredning for binomialfordelingen:

$\mu = n \cdot p = 40 \cdot 0,2 = 8$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{40 \cdot 0.2 \cdot 0.8} = 2.529822128$

Så bestemmes middelværdi plus-minus to spredninger:

$\mu - 2 \cdot \sigma = 8 - 2 \cdot 2.529822128 = 2.940355744$

$\mu + 2 \cdot \sigma = 8 + 2 \cdot 2.529822128 = 13.05964426$

Da binomialfordelingen er en diskret fordeling, hvor den stokastiske variabel kun kan antage heltallige (ikke-negative) værdier, har man altså:

$P(\mu - 2\,\sigma < X < \mu + 2\,\sigma) = P(3 \leq X \leq 13) = P(X \leq 13) - P(X \leq 2) =$
$bincdf(40, 0.2, 13) - bincdf(40, 0.2, 2) = 0.9726504938$

b) Der skulle nok stå **heltallige** værdi i opgaveformuleringen.
Da sandsynligheden 0,4 er mindre end 50%, skal man over middelværdien på 8, så der udregnes en række værdier i området lige omkring 8 (7 tages med for at illustrere pointen med sekvensen):

$seq([x, 1 - bincdf(40, 0.2, x)], x = 7..11)$

$[7, 0.5628541020], [8, 0.4068728698], [9, 0.2682228856], [10, 0.1607691479], [11, 0.0875052358]$

Det ses, at 8 er det største tal, hvor sandsynligheden er over 40%, så $\underline{\underline{k = 8}}$

7.D2.8: Det er oplyst, at $\mu = 505\,\text{ml}$ $\quad \sigma = 3\,\text{ml}$

a) Det udnyttes, at $P(X \geq 500) = 1 - P(X \leq 500)$, hvor udtrykket på højresiden kan udregnes med Gym-pakkens *normalcdf*, der svarer til normalfordelingens fordelingsfunktion:

$1 - normalcdf(505, 3, 500) = 0.9522096478$

Dvs. sandsynligheden for, at en flaske indeholder mindst 500 mL er 95,2%

b) Man kan godt anvende binomialfordelingen med 30 delforsøg og successandsynligheden 95,2% til at regne opgaven, men da det er **alle** flaskerne, der skal indeholde mindst 500 mL, kan det også udregnes hurtigere ved at udnytte, at det er både-og-hændelser, dvs. multiplikationsprincippet:

$p_{alleover30} = 0.9522096478^{30} = 0.2301321650$

Dvs. sandsynligheden er 23%

7.D2.9:

$with(Gym):$

a) Dataene hentes ind i Maple med Tools-Assistans-Import Data (dataceller B2:C19):

$$M := \begin{bmatrix} 4.0 & 3.4 \\ 4.7 & 2.8 \\ 5.8 & 1.6 \\ 6.0 & 2.3 \\ 5.5 & 2.7 \\ 5.1 & 3.4 \\ 4.6 & 3.2 \\ 4.6 & 2.8 \\ 5.8 & 3.8 \\ 9.3 & -0.4 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

18 × 2 Matrix

Da modellen er oplyst som $f(x) = a \cdot x + b$ vælges lineær regression:

$f(x) := LinReg(M, x) = x \rightarrow LinReg(M, x)$

$f(x) = -0.251237778240067\, x + 3.71035573122530$

Dvs. $\underline{\underline{a = -0.25}}$ og $\underline{\underline{b = 3.7}}$

b) Konfidensintervallet for hældningen kan beregnes med Gym-pakkens *testLin*:

$testLin(M)$

	a	b
Koefficient	-0.251238	3.710356
Standardfejl	0.147549	0.938404
t-stat	-1.702741	3.953901
p-værdi	0.107961	0.001137
Nedre 95.00%	-0.564028	1.721029
Øvre 95.00%	0.061552	5.699683
Frihedsgrader	16	

Dvs. 95%-konfidensintervallet for hældningen er $\underline{\underline{[-0.56, 0.06]}}$

Da konfidensintervallet indeholder positive værdier, er det ikke usandsynligt, at hældningen er positiv, så man **kan ikke konkludere, at sammenhængen er aftagende.**

7.D2.10:

$restart$

$with(Gym):$

a) Det er oplyst, at bredden af konfidensintervallet er givet ved $4 \cdot \sqrt{\hat{p} \cdot \frac{(1-\hat{p})}{n}}$, så da bredden skal være 0,07, og den estimerede successandsynlighed er 0,15, har man:

$$0.07 = 4 \cdot \sqrt{\frac{0.15 \cdot 0.85}{n}} \xrightarrow{\text{solve for n}} [[n = 416.3265308]]$$

Dvs. $\underline{\underline{n = 416}}$ (det er et antal personer, dvs. det skal være et heltal).

b) Hvis man spørger 10 gange så mange personer, dvs. 4160, bliver bredden:

$$4 \cdot \sqrt{\frac{0.15 \cdot 0.85}{4160}} = 0.02214462949$$

Det er uklart, hvad der menes med "hvor meget". Er det absolut ændring eller relativ ændring?

Man kan svare, at bredden falder fra 7% til 2,2%, dvs. **knap 5 procentpoint.**

Man kan også udregne procentvis afvigelse:

$$\frac{(0.02214462949 - 0.07)}{0.07} = -0.6836481501$$, dvs. **bredden mindskes med 68%.**

7.D2.11:

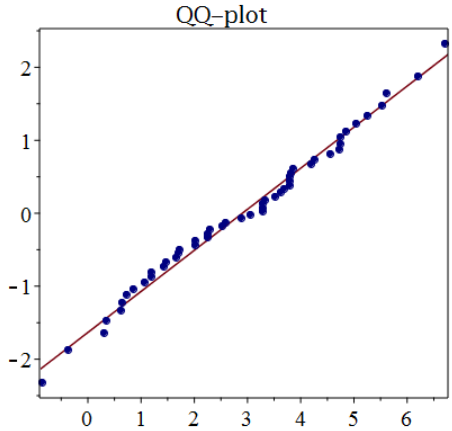
a) Data hentes ind i Maple med Tools-Assistans-Import Data

$$M := \begin{bmatrix} 5.244662540634469 \\ 1.6627894351543264 \\ 0.6280613251755418 \\ 1.6953167522802457 \\ 2.891442769455329 \\ 2.584341987514997 \\ 1.4680142751386376 \\ 2.015094584527836 \\ 5.042529745754834 \\ 4.191424211461578 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

50 × 1 Matrix

Med et QQ-plot undersøges, om data i tabellen er normalfordelte:

QQplot(*M*)



Da punkterne med god tilnærmelse danner en ret linje, er **data med god tilnærmelse normalfordelte**

7.D2.12:

a) Den generelle forskrift for en normalfordelings tæthedsfunktion er $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}$, så med en middelværdi på 23,7 og en spredning på 3,7 (regnet i kg pr. kvadratmeter) har man:

$$\boldsymbol{f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot 3.7}\cdot e^{-\frac{(x-23.7)^2}{2\cdot 3.7^2}}} :$$

b) Arealet under grafen for *f* i intervallet [25,28] angiver den søgte sandsynlighed:

$$\int_{25}^{28} f(x)\, dx = 0.2400775867$$

Dvs. der er **24%** chance for, at et tilfældigt udvalgt individ har et BMI mellem 25 og 28.

c) Exceptionelle udfald ligger mere end tre spredninger fra middelværdien, dvs. grænserne er:

$23.7 - 3\cdot 3.7 = 12.6$

$23.7 + 3\cdot 3.7 = 34.8$

Dvs. de exceptionelle BMI-værdier er **dem under 12,6 og dem over 34,8.**

7.D2.13:

with(*Gym*) :

a) Data hentes ind i Maple med Tools-Assistans-Import Data:

$$M := \begin{bmatrix} 63.0 & 233.0 \\ 37.0 & 250.0 \\ 41.0 & 204.0 \\ 56.0 & 236.0 \\ 57.0 & 354.0 \\ 57.0 & 192.0 \\ 56.0 & 294.0 \\ 44.0 & 263.0 \\ 52.0 & 199.0 \\ 57.0 & 168.0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

100 × 2 Matrix

Da modellen er $f(x) = a \cdot x + b$ anvendes lineær regression for at finde a og b.

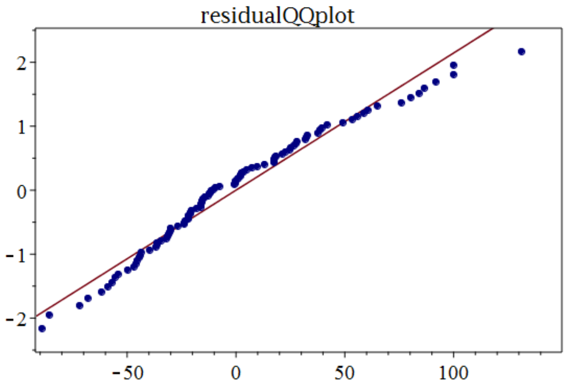
$f(x) := LinReg(M, x)$:

$f(x) = 1.81094532191186\, x + 150.525420368735$

Dvs. $\underline{\underline{a = 1.81 \text{ og } b = 150.5}}$

b) Med et QQ-plot af residualerne undersøges det, om de er normalfordelte:

residualQQplot(*M*, *f*)

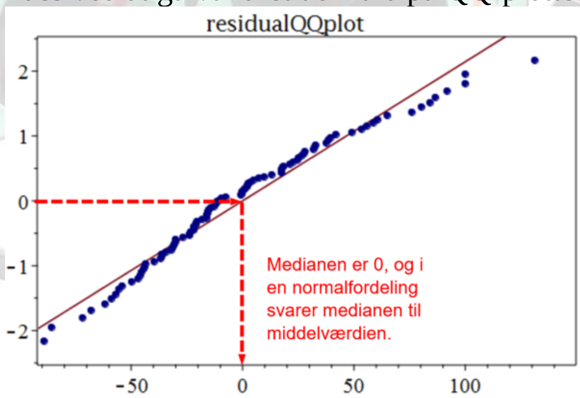


Hmmm, det er meningen, at man skal komme frem til, at residualerne med god tilnærmelse er normalfordelte, så konklusionen efter at have kigget på grafen må være, at **da punkterne med god tilnærmelse danner en ret linje, er residualerne med god tilnærmelse normalfordelte.**
(Afvigelsen på sidste punkt er ikke så slem, da afvigelser i et QQ-plots yderpunkter bl.a. skyldes konstruktionen)

c) Residualspredningen udregnes med Gym-pakkens kommando:

$residualspredning(M, f) = 46.8545615721308$

På grafen aflæses middelværdien ved at udnytte, at medianen i en normalfordeling svarer til middelværdien (medianen findes ved at gå vandret ud fra 0 på QQ-plottet).



$$\underline{\underline{middelværdi = 0 \text{ og } residualspredning = 46.9}}$$

d) Afvigelsen kan gå begge veje og fordelingen er symmetrisk, så der regnes med mere end 50 under modellen, og dette tal fordobles så for også at tage hensyn til dem, der er mere end 50 over modellen:

$2 \cdot normalcdf(0, 46.8545615721308, -50) = 0.2859122532$

Dvs. **sandsynligheden er 28,6%**

7.D2.14:

restart

with(*Gym*) :

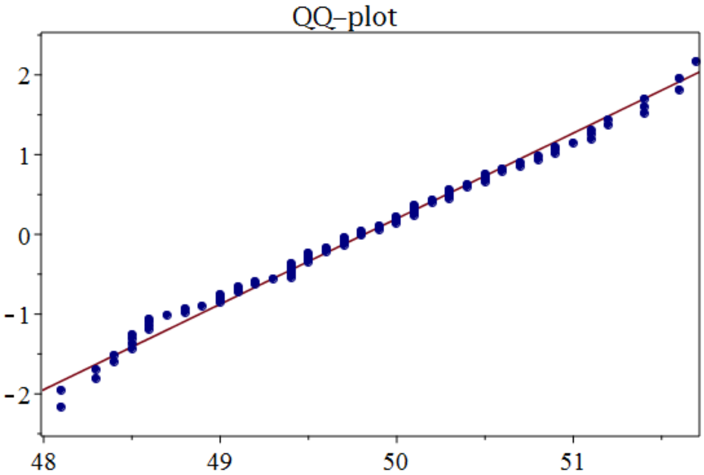
a) Data hentes ind i Maple med Tools-Assistans-Import Data:

$$M := \begin{bmatrix} 50.1 \\ 51.6 \\ 49.900000000000006 \\ 49.5 \\ 51.2 \\ 49.400000000000006 \\ 50.1 \\ 50.0 \\ 48.800000000000004 \\ 49.0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

100 × 1 Matrix

Med et QQ-plot undersøges det, om vægten er normalfordelt:

QQplot(*M*)



Da punkterne med god tilnærmelse danner en ret linje, **kan vægten med god tilnærmelse beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel *X*.**

b) Da det er en stikprøve, skal man anvende stikprøvespredning, dvs. den estimerede spredning:

middel(*M*) = 49.81600000

stikprøvespredning(*M*) = 0.932111754590683

Dvs. $\overline{x} = 49.8$ og $s = 0.932$

c) Da man kender middelværdi og spredning og ved, at der er tale om en normalfordeling, kan man anvende gym-pakkens *normalcdf*, der svarer til normalfordelingens fordelingsfunktion.

$P(X \geq 51) = 1 - P(X \leq 51) = 1 - normalcdf(49.816,\ 0.932111754590683,\ 51) = 0.1020006532$

Dvs. sandsynligheden er **10,2%**

7.D2.15:

$with(Gym)$:

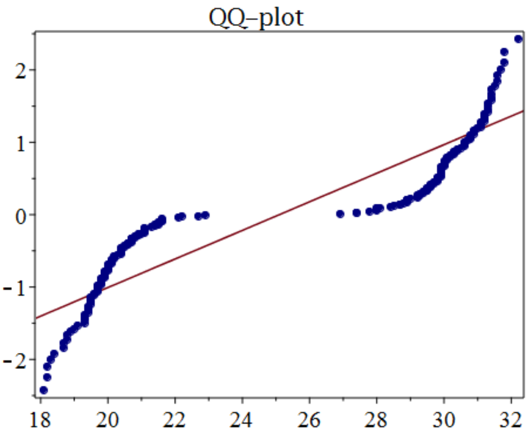
a) Data hentes ind i Maple med Tools-Assistans-Import Data:

$$M := \begin{bmatrix} 31.400000000000002 \\ 18.400000000000002 \\ 30.400000000000002 \\ 29.0 \\ 19.5 \\ 30.200000000000003 \\ 19.400000000000002 \\ 19.6 \\ 31.3 \\ 29.6 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

200 × 1 Matrix

Med et QQ-plot undersøges det, om skolængderne er normalfordelte:

$QQplot(M)$



Da punkterne på ingen måde danner en ret linje, **kan skolængderne ikke beskrives med en normalfordeling**

Datasættet ser meget underligt ud. Man må have taget skolængder for både kvinder og mænd.