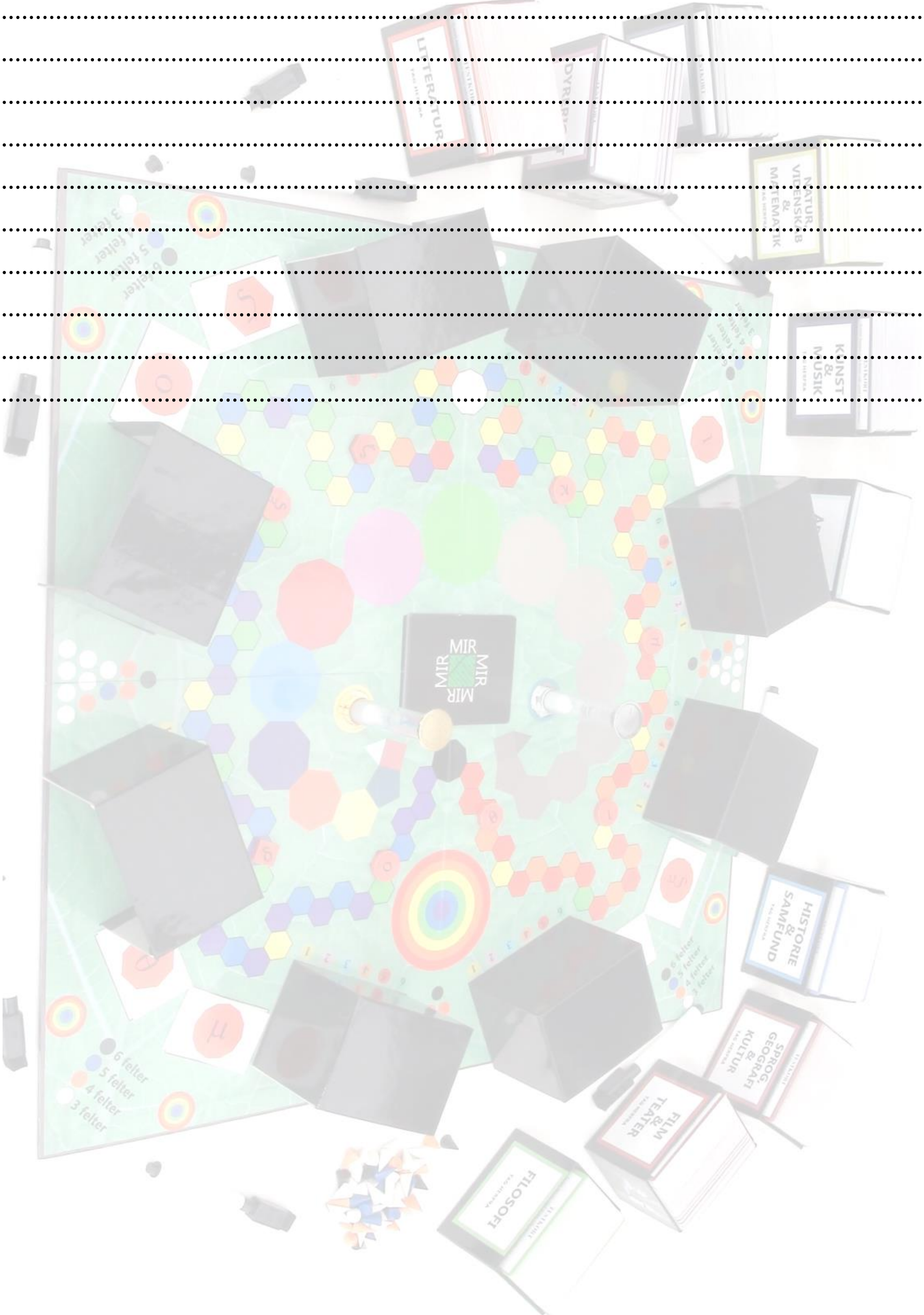
Løsninger til Vejledende Enkeltopgaver Matematik stx B-niveau 2019

Indholdsfortegnelse



1.D1

1.D1.1: a) Første led genkendes som tredje kvadratsætning:

$$\left(a-b\right)\cdot\left(a+b\right)-2a^2+b^2=a^2-b^2-2a^2+b^2=\underline{\underline{-a^2}}$$

1.D1.2: a) På første led anvendes første kvadratsætning, mens der ganges ind i parentes i andet led:

$$\left(p+q\right)^2+2p\cdot\left(p-q\right)=p^2+q^2+2pq+2p^2-2pq=\underline{\underline{3p^2+q^2}}$$

1.D1.3: a) På første led anvendes anden kvadratsætning:

$$\left(p-q\right)^2+2pq-q^2=p^2+q^2-2pq+2pq-q^2=\underline{\underline{p^2}}$$

1.D1.4: a) På tredje led anvendes første kvadratsætning:

$$a^2+2ab-\left(a+b\right)^2=a^2+2ab-\left(a^2+b^2+2ab\right)=a^2+2ab-a^2-b^2-2ab=\underline{\underline{-b^2}}$$

1.D1.5: a) $\dfrac{x^2+2x}{x}=\dfrac{x\cdot\left(x+2\right)}{x}=\underline{\underline{x+2}}$

1.D1.6: a) På første led anvendes første kvadratsætning, mens der ganges ind i parentes i andet led:

$$\left(a+b\right)^2+2\cdot\left(b^2-ab\right)=a^2+b^2+2ab+2b^2-2ab=\underline{\underline{a^2+3b^2}}$$

1.D1.7: a) $=\dfrac{3x\cdot\left(x+2\right)}{x+2}$: Tælleren faktoriseres.

$=3x$: Brøken forkortes.

1.D1.8: a) Tredje led genkendes som første kvadratsætning.

$$T^2-K^2+\left(T+K\right)^2-2KT=T^2-K^2+T^2+K^2+2KT-2KT=\underline{\underline{2T^2}}$$

1.D1.9: En kvadratsætning benyttes på første led:

$$\left(x+5\right)^2-25=x^2+10x+25-25=\underline{\underline{x^2+10x}}$$

1.D1.10: $\sqrt{2x+3}=5 \quad , \quad x\geq-\dfrac{3}{2}$ (Fordi udtrykket under kvadratroden ikke må være negativt)

$$\sqrt{2x+3}=5 \;\Leftrightarrow\; 2x+3=5^2 \;\Leftrightarrow\; 2x+3=25 \;\Leftrightarrow\; 2x=22 \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{x=11}}$$

1.D1.11: $\dfrac{p\cdot h}{4}=4M \;\Leftrightarrow\; p\cdot h=4\cdot4\cdot M \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{h=\dfrac{16M}{p}}}$

1.D1.12: $\dfrac{h}{2}-10=M \;\Leftrightarrow\; \dfrac{h}{2}=M+10 \;\Leftrightarrow\; h=2\cdot\left(M+10\right) \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{h=2M+20}}$

1.D1.13: $-15x+5y-45=0 \;\Leftrightarrow\; 5y=15x+45 \;\Leftrightarrow\; y=\dfrac{15x+45}{5} \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{y=3x+9}}$

1.D1.14: $\dfrac{4}{y}=2 \;\Leftrightarrow\; 4=y\cdot2 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{4}{2}=y \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{y=2}}$

1.D1.15: $x^2 - 7x + 10 = 0 \quad ; \quad G = \mathbb{R}$

$$d = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = \underline{\underline{9}} > 0$$

Da diskriminanten er positiv, er der to løsninger til ligningen.

1.D1.16: $2x^2 - 4x + k = 0 \; ; \quad G = \mathbb{R}$

Ligningen har netop én løsning netop hvis diskriminanten er 0:

$$d = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot k = 16 - 8k$$

$$d = 0 \Leftrightarrow 16 - 8k = 0 \Leftrightarrow 16 = 8k \Leftrightarrow \underline{\underline{k = 2}}$$

1.D1.17: $\begin{matrix} l: 2x - 3y = 1 \\ m: x + 6y = 8 \end{matrix}$

Skæringspunktet mellem linjerne findes ved at løse ligningssystemet.
Substitutionsmetoden anvendes, så i den nederste ligning isoleres *x*, hvorefter udtrykket indsættes på *x*'s plads den øverste ligning:

$$x = 8 - 6y$$

$$2 \cdot (8 - 6y) - 3y = 1 \Leftrightarrow 16 - 12y - 3y = 1 \Leftrightarrow 15 = 15y \Leftrightarrow y = 1$$

Værdien indsættes i ligningen for *m* for at finde den tilsvarende *x*-værdi:

$$x + 6 \cdot 1 = 8 \Leftrightarrow x = 2$$

Dvs. koordinatsættet til skæringspunktet er $\underline{\underline{(2,1)}}$

1.D1.18: $(x+3)^2 - 1 = 0 \quad ; \; G = \mathbb{R}$

Man kan godt gange parentesen ud og anvende diskriminantmetoden, men på denne form kan andengradsligningen også løses ved "almindelig" ligningsløsning:

$$(x+3)^2 = 1 \Leftrightarrow x + 3 = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = -3 + 1 \;\vee\; x = -3 - 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -2 \;\vee\; x = -4}}$$

1.D1.19: $2 \cdot (x+1)^2 - 8 = 0 \quad ; \; G = \mathbb{R}$

Man kan godt gange parentesen ud og anvende diskriminantmetoden, men på denne form kan andengradsligningen også løses ved "almindelig" ligningsløsning:

$$2(x+1)^2 = 8 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 4 \Leftrightarrow x + 1 = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = -1 + 2 \;\vee\; x = -1 - 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1 \;\vee\; x = -3}}$$

1.D1.20: $3x^2 - 18x + 15 = 0 \quad ; \; G = \mathbb{R}$

Andengradsligningen kan løses med diskriminantmetoden eller som her med faktorisering og anvendelse af nulreglen, men i begge tilfælde vil det dog gøre udregningerne nemmere, hvis man først forkorter ligningen med 3:

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot (x-5) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1 \;\vee\; x = 5}}$$

1.D1.21: $x^2 + b \cdot x + 36 = 0 \quad ; \; G = \mathbb{R}$

a) $b = 13$

Andengradsligningen kan løses ved diskriminantmetoden eller som her ved faktorisering og anvendelse af nulreglen:

$$x^2 + 13x + 36 = 0 \Leftrightarrow (x+9) \cdot (x+4) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -9 \;\vee\; x = -4}}$$

b) Ligningen har netop én løsning netop hvis diskriminanten er 0:

$$d = b^2 - 4ac = b^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = b^2 - 144$$

$$d = 0 \Leftrightarrow b^2 - 144 = 0 \Leftrightarrow b^2 = 144 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{144} \Leftrightarrow \underline{\underline{b = -12 \;\vee\; b = 12}}$$

1.D1.22: $2x^2 - 3x + k = 0$; $G = \mathbb{R}$

Ligningen har netop én løsning netop hvis diskriminanten er 0:

$$d = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot k = 9 - 8k$$

$$d = 0 \Leftrightarrow 9 - 8k = 0 \Leftrightarrow 9 = 8k \Leftrightarrow \underline{\underline{k = \frac{9}{8}}}$$

1.D1.23: $a \cdot x^2 - 40x + 10 = 0$; $G = \mathbb{R}$ $a \neq 0$ (da det ellers ikke er en andengradsligning)

Ligningen har netop én løsning netop hvis diskriminanten er 0:

$$d = b^2 - 4ac = (-40)^2 - 4 \cdot a \cdot 10 = 1600 - 40a$$

$$d = 0 \Leftrightarrow 1600 - 40a = 0 \Leftrightarrow 1600 = 40a \Leftrightarrow a = \frac{1600}{40} \Leftrightarrow \underline{\underline{a = 40}}$$

1.D1.24: $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$; $G = \mathbb{R}$

Det undersøges, om 3 er en løsning, ved at indsætte i ligningen og se, om man får et sandt udsagn:

$$3^3 - 9 \cdot 3^2 + 23 \cdot 3 - 15 = 0 \Leftrightarrow$$

$$27 - 81 + 69 - 15 = 0 \Leftrightarrow$$

$$0 = 0$$

Da dette er et sandt udsagn, **er 3 en løsning til ligningen.**

1.D1.25: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Hvis rumfanget skal være $\frac{32}{3} \cdot \pi$, har man:

$$\frac{32}{3} \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \Leftrightarrow 32 = 4 \cdot r^3 \Leftrightarrow r^3 = 8 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{8} = \underline{\underline{2}}$$

1.D1.26: Arealet af en cirkel er $A = \pi \cdot r^2$

Arealet af det skraverede område er arealet af den store cirkel fratrukket arealet af den lille cirkel, dvs. man har:

$$A_{skraveret} = A_{store} - A_{lille}$$

$$144\pi = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 \Leftrightarrow$$

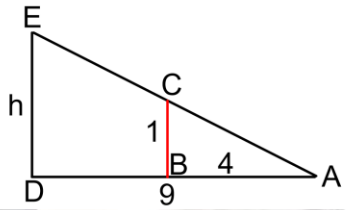
$$144 = 13^2 - r^2 \Leftrightarrow$$

$$r^2 = 169 - 144 \Leftrightarrow$$

$$r = 25 \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{r = 5}} \quad (\text{da } r > 0)$$

1.D1.27: Da man ikke kan finde på at lave en opgave, hvor en mand får en flagstang i hovedet, kan man med det samme svare nej, men en korrekt besvarelse kræver selvfølgelig nogle udregninger.
Til at begynde med ses bort fra flagstangens længde. Den har kun betydning, hvis man ved nedenstående beregninger kommer frem til, at manden bliver ramt, da man så skal sikre sig, at flagstangen er lang nok.
Når flagstangen hviler på muren, dannes der to ensvinklede trekanter *ABC* og *ADE*.



Da forholdene mellem korresponderende sider er ens, har man:

$$\frac{|DE|}{|BC|}=\frac{|AD|}{|AB|} \Leftrightarrow |DE|=\frac{|AD|}{|AB|}\cdot|BC|$$

$$|DE|=\frac{9\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{m}}\cdot 1\,\mathrm{m}=2,25\,\mathrm{m}>1,8\,\mathrm{m}$$

Da højden *h* er større end manden højde, **bliver han ikke ramt.**

1.D1.28: a) Da trekanten er retvinklet, og man kender længden af en katete og hypotenusen, kan man finde længden af den anden katete med Pythagoras' Læresætning:

$$x^2+6^2=10^2 \Leftrightarrow x=\sqrt{10^2-6^2}=\sqrt{100-36}=\sqrt{64}=\underline{\underline{8}}$$

(ved første biimplikation er det forudsat, at *x* er positiv, da det er en sidelængde)

b) Ved at flytte det gule og det store hvide stykke over på den anden side (anvendelse af alle tre isometrier: Spejling, rotation og parallelforskydning) af symmetriaksen, får man dannet en aflang (eller et rektangel) med sidelængderne 6 og 3*x*, så dragens areal er:

$$A_{drage}=l\cdot b=3x\cdot 6=18x=18\cdot 8=\underline{\underline{144}}$$

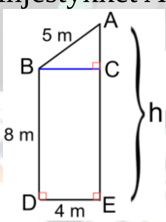
1.D1.29: Rumfanget af kassen inden udskæringen er: $V_{Hel\ kasse}=l\cdot h\cdot b$

Rumfanget af cylinderen er: $V_{Cylinder}=\pi\cdot r^2\cdot h=\pi\cdot 3^2\cdot h=9\pi h$

Dvs. rumfanget af træet i klodsen efter udskæringen er:

$$V_{Hullet\ kasse}=V_{Hel\ kasse}-V_{Cylinder}=l\cdot h\cdot b-9\pi\cdot h=\underline{\underline{h\cdot(l\cdot b-9\pi)}}$$

1.D1.30: a) Når man tegner det blå, vandrette hjælpelinjestykke *BC*, får man dannet en retvinklet trekant *ABC*, så man kan udregne længden af linjestykket *AC* med Pythagoras' Læresætning:



$$|AC|^2+|BC|^2=|AB|^2$$

$$|AC|=\sqrt{|AB|^2-|BC|^2}=\sqrt{(5\,\mathrm{m})^2-(4\,\mathrm{m})^2}=\sqrt{25\,\mathrm{m}^2-16\,\mathrm{m}^2}=\sqrt{9\,\mathrm{m}^2}=3\,\mathrm{m}$$

b) Gavlen består af en aflang *BCED* og en trekant *ABC*, så arealet er:

$$A_{gavl}=A_{aflang}+T_{ABC}=|DE|\cdot|BD|+\frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|AC|=4\,\mathrm{m}\cdot 8\,\mathrm{m}+\frac{1}{2}\cdot 4\,\mathrm{m}\cdot 3\,\mathrm{m}=32\,\mathrm{m}^2+6\,\mathrm{m}^2=\underline{\underline{38\,\mathrm{m}^2}}$$

1.D2

1.D2.1:

$w(t, v) := 13.3 + 0.62 \cdot t - 13.95 \cdot v^{0.16} + 0.486 \cdot t \cdot v^{0.16}$:

a) En aktuel temperatur på -5 °C svarer til $t = -5$, og en vindhastighed på 20 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ svarer til $v = 20$:

$w(-5, 20) = -16.25322932$

Dvs. windchill indexet er $\underline{\underline{-16\ °\mathrm{C}}}$

b) $t = -3$ og $w = -10$ giver en ligning, som Maple kan løse:

$\mathit{solve}(w(-3, v) = -10, v) = 7.883892525$

Dvs. vindhastigheden skal være $\underline{\underline{7.9 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$

1.D2.2:

a) Forholdet mellem indekstallene er lig forholdet mellem priserne p, så man har:

$$\frac{p_{2019}}{p_{2010}} = \frac{I_{2019}}{I_{2010}} \Leftrightarrow p_{2019} = \frac{I_{2019}}{I_{2010}} \cdot p_{2010}$$

$$p_{2019} = \frac{129.7}{91.1} \cdot 9\ \mathrm{kr} = 12.81339188\ kr$$

Dvs. **prisen i 2019 er 12,81 kr**

b) Med antagelsen om, at prisen vokser eksponentielt i perioden, har man med p for prisen målt i kr. og t for tiden målt i antal år efter 2010:

$p(t) = p_{2010} \cdot a^t$

$12.81339188 = 9 \cdot a^9 \xrightarrow{\text{solve}} 1.040032341$

Dvs. den gennemsnitlige årlige procentvise stigning (som faktisk bare er 'den årlige procentvise stigning', da man jo skulle antage, at prisen er vokset eksponentielt), er altså **4,0%**

c) Med nogle gentagelser fra spørgsmål b) har man:

p **er prisen målt i kr.**

t **er tiden målt i antal år efter 2010.**

Modellen er:

$\underline{\underline{p(t) = 9 \cdot 1.040^t}}$

1.D2.3:

a) $N(3) = 300 \quad N(14) = 4000$

Da grafen for modelfunktionen er en ret linje i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem, er modellen en eksponentiel udvikling, dvs. $N(t) = N_0 \cdot a^t$

Da man har fået to punkter oplyst, kan man opstille to ligninger med to ubekendte, så man kan finde begyndelsesværdi og fremskrivningsfaktor:

$$\left[4000. = N_0 \cdot a^{14},\ 300. = N_0 \cdot a^3\right] \xrightarrow{\text{solve}} \{N_0 = 148.0197891,\ a = 1.265514594\}$$

Dvs. $\underline{\underline{N(t) = 148 \cdot 1.2655^t}}$

b) Da man kender fremskrivningsfaktoren, kan fordoblingstiden bestemmes:

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2.)}{\ln(1.265514594)} = 2.943564700$$

Dvs. **fordoblingstiden er 2,9 år**

2.D1

2.D1.1: $f(x)=\begin{cases} 2^x & 0\le x<4 \\ 0{,}5x+14 & 4\le x \end{cases} \qquad P(3{,}8)$

a) Da punktet P's førstekoordinat er 3 (og altså mellem 0 og 4), skal man benytte det øverste udtryk i gaffelforskriften for at undersøge, om punktet ligger på grafen for f:

$8=2^3 \Leftrightarrow 8=8$

Da dette er sandt, **ligger *P* på grafen for *f***

2.D1.2: $f(x)=x+2 \qquad g(x)=\sqrt{x}$

a) Funktionsværdien for den sammensatte funktion findes ved først at indsætte i forskriften for f og derefter indsætte den fremkomne værdi i forskriften for g:

$g(f(2))=g(2+2)=g(4)=\sqrt{4}=\underline{\underline{2}}$

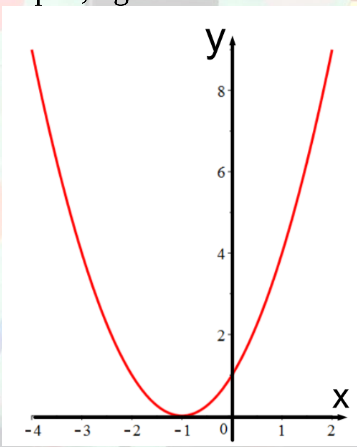
2.D1.3: a) Funktionsværdien for den sammensatte funktion findes ved først at indsætte i forskriften for f og derefter indsætte den fremkomne værdi i forskriften for g (funktionsværdierne aflæses i tabellerne):

$g(f(1))=g(0)=\underline{\underline{2}}$

2.D1.4: $f(x)=x^2 \qquad g(x)=x+1$

a) $f(g(x))=f(x+1)=(x+1)^2=x^2+2x+1$

Grafen er en parabel med grenene opad, og da -1 er en dobbeltrod, ligger toppunktet i punktet (-1,0):



2.D1.5: $h(x)=f(g(x)) \qquad h(x)=\ln(2x+4)\ ;\ x>-2$

a) Da g er den indre funktion og f den ydre, er en mulighed: $\underline{\underline{f(x)=\ln(x) \quad g(x)=2x+4}}$

Men man kunne også have $f(x)=\ln(x+4) \quad g(x)=2x$, eller $f(x)=\ln(x+3) \quad g(x)=2x+1$

eller $f(x)=\sqrt[3]{x} \quad g(x)=(\ln(2x+4))^3$ eller …

2.D1.6: $f(x)=3x-7$

a) På grafen aflæses $g(3)$: Man går lodret op fra 3 på førsteaksen til grafen og derefter vandret ind på andenaksen, hvor man aflæser, at $g(3)=2$.

Dette kan indsættes i forskriften for f, så man får:

$f(g(3))=f(2)=3\cdot 2-7=6-7=\underline{\underline{-1}}$

2.D1.7: Man kan ikke se skalaerne på koordinatakserne, så man kan ikke sætte præcise tal på koefficienterne, men man kan sige følgende, hvis man vælger formen $p(x) = a \cdot x + b$:

- *g* og *h* skal have samme positive *b*-værdi, da de skærer samme sted på den positive del af andenaksen.
- *f* skal have en negativ *b*-værdi, da grafen skærer på den negative del af andenaksen.
- *f* og *g* skal have positive *a*-værdier (voksende funktioner), og *h* skal have en negativ værdi (aftagende funktion). Numerisk skal *a*-værdierne ordnes i rækkefølgen *g*, *h*, *f* (med *g* som den mindste).

Så et muligt svar er:

$$f(x) = 4 \cdot x - 2$$
$$g(x) = x + 2$$
$$h(x) = -3x + 2$$

2.D1.8: $f(x) = b \cdot a^x \qquad (5, 7 \cdot k) \quad (8, 56 \cdot k)$

a) Fremskrivningsfaktoren kan bestemmes ved at indsætte punkterne i forskriften og få to ligninger med to ubekendte:

$$\left.\begin{matrix} 7k = b \cdot a^5 \\ 56k = b \cdot a^8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{56k}{7k} = \frac{b \cdot a^8}{b \cdot a^5} \Leftrightarrow 8 = a^3 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = 2}}$$

Dette indsættes i den øverste ligning for at finde *b* udtrykt ved *k*:

$$7k = b \cdot 2^5 \Leftrightarrow 7 \cdot k = b \cdot 32 \Leftrightarrow \underline{\underline{b = \frac{7}{32} \cdot k}}$$

b) $C(0,14)$. Forskriften med de fundne størrelser bliver: $f(x) = \frac{7}{32} \cdot k \cdot 2^x$

Punktets koordinater indsættes i denne forskrift for at finde *k*-værdien:

$$14 = \frac{7}{32} \cdot k \cdot 2^0 \Leftrightarrow \frac{14}{7} \cdot 32 = k \cdot 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{k = 64}}$$

2.D1.9: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$a > 0$: Da parablens grene peger opad.
$b < 0$: Da hældningen for tangenten til grafen i skæringspunktet med *y*-aksen er negativ.
$c > 0$: Da parablen skærer andenaksen på den positive del.
$d < 0$: Da parablen ikke skærer førsteaksen.

2.D1.10: Forskriften for et andengradspolynomium med rødderne x_1 og x_2 er: $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Man kan altså vælge en hvilken som helst *a*-værdi bortset fra 0:

$$\underline{\underline{f(x) = 42 \cdot (x - 4) \cdot (x - 9)}}$$

2.D1.11: $p(x) = -5 \cdot (x + 1) \cdot (x - 11)$

Rødderne kan hurtigt bestemmes med nulreglen, da udtrykket er faktoriseret:

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow -5 \cdot (x+1) \cdot (x-11) = 0 \Leftrightarrow -5 = 0 \ \vee \ x + 1 = 0 \ \vee \ x - 11 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -1 \ \vee \ x = 11}}$$

2.D1.12: $q(x) = 7 \cdot (x^2 - x + 2) = 7x^2 - 7x + 14$

Når *q* skrives på formen $q(x) = ax^2 + bx + c$, har man:

$$\underline{\underline{a = 7 \ , \ b = -7 \ , \ c = 14}}$$

2.D1.13: $p(x)=3\cdot(x+5)\cdot(x+7)=3\cdot(x^2+7x+5x+35)=3x^2+36x+105$

Når p skrives på formen $p(x)=ax^2+bx+c$, har man:

$\underline{\underline{a=3\,,\ b=36\ ,\ c=105}}$

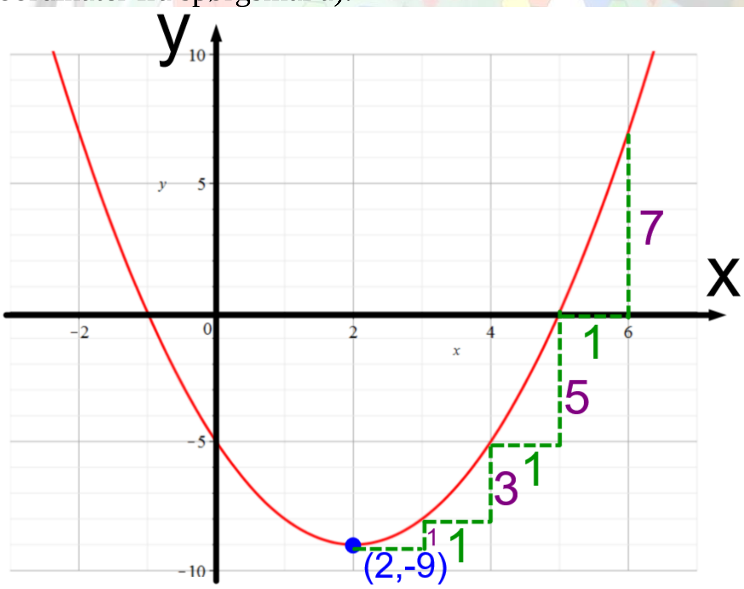
2.D1.14: $f(x)=x^2-4x-5$

a) Toppunktets koordinater bestemmes med $T\left(-\frac{b}{2a},-\frac{d}{4a}\right)$

$d=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot 1\cdot(-5)=16+20=36$

$T\left(-\frac{-4}{2\cdot 1},-\frac{36}{4\cdot 1}\right)=\underline{\underline{T(2,-9)}}$

b) Parablen er en parallelforskydning af parablen med ligningen $y=x^2$. Dvs. grenene vender opad, og for hvert trin fra toppunktet vokser y-koordinaten med 1, 3, 5, 7, 9, … Man har toppunktets koordinater fra spørgsmål a):



2.D1.15: $f(x)=a\cdot x^2-4x-10 \qquad T(-2,-6)$

a) Førstekoordinaten for parablens toppunkt er givet ved $-\frac{b}{2a}$, og da man i funktionsforskriften kan aflæse, at $b=-4$, har man:

$-2=-\frac{b}{2a} \Leftrightarrow -2=-\frac{-4}{2a} \Leftrightarrow a=\frac{-4}{2\cdot 2}=\underline{\underline{-1}}$

2.D1.16: $f(x)=2\cdot x^2-6\cdot x+c$

En parabel har toppunkt i $T\left(-\frac{b}{2a},-\frac{d}{4a}\right)=T\left(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

a) Så førstekoordinaten for parablens toppunkt er $-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2\cdot 2}=\frac{6}{4}=\underline{\underline{\frac{3}{2}}}$

b) Hvis andenkoordinaten skal være 5, har man:

$5=-\frac{b^2-4ac}{4a} \Leftrightarrow 5=-\frac{(-6)^2-4\cdot 2\cdot c}{4\cdot 2} \Leftrightarrow 5\cdot 8=-(36-8c) \Leftrightarrow 40+36=8c \Leftrightarrow c=\frac{76}{8}=\underline{\underline{\frac{19}{2}}}$

2.D1.17: $p(x) = x^2 + 10x$

a) Rødderne (eller nulpunkterner) er de *x*-værdier, hvor $p(x) = 0$, så man har:

$x^2 + 10x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x+10) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor x+10 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0 \lor x = -10}}$

2.D1.18: $y = 4x^2 + b \cdot x + 9$

a) Skæringen med andenaksen findes ved at sætte *x*-værdien til 0, således at de to første led i udtrykket på højresiden af lighedstegnet giver 0. Dvs. parablen skærer andenaksen i $(0,9)$.

b) Der er netop ét skæringspunkt (der så er et røringspunkt) med førsteaksen netop hvis diskriminanten er 0.

$d = b^2 - 4ac = b^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$

$b^2 - 144 = 0 \Leftrightarrow b^2 = 144 \Leftrightarrow \underline{\underline{b = -12 \lor b = 12}}$

2.D1.19: $y = 2x^2 - 8x + c$

a) Når $c = 6$, har man $y = 2x^2 - 8x + 6$. Skæringspunkterne med førsteaksen kan bestemmes ved at sætte *y*-værdien til nul:

$0 = 2x^2 - 8x + 6 \Leftrightarrow 0 = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow 0 = (x-1) \cdot (x-3) \Leftrightarrow x = 1 \lor x = 3$

Dvs. skæringspunkterne er $\underline{\underline{(1,0) \text{ og } (3,0)}}$

b) Andenkoordinaten for parablens toppunkt er givet ved $-\dfrac{d}{4a} = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = -\dfrac{b^2}{4a} + c$

Så med denne parabel har man: $T_y = -\dfrac{(-8)^2}{4 \cdot 2} + c = -\dfrac{64}{8} + c = \underline{\underline{-8 + c}}$

c) Da parablens ben peger opad, vil parablen og førsteaksen ikke have nogen fælles punkter, netop når toppunktet ligger over førsteaksen, dvs. når $T_y > 0$. Fra spørgsmål b) kan man se, at det gælder, netop når $\underline{\underline{c > 8}}$.

Man kan også løse det på generel vis ved at se på , at diskriminanten skal være negativ:

$d = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot c < 0$

$64 - 8c < 0 \Leftrightarrow 64 < 8c \Leftrightarrow \underline{\underline{c > 8}}$

2.D1.20: $p(x) = x^3 - 6x^2 + 4x + 8$

a) $p(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 8 = 8 - 24 + 8 + 8 = 0$

Da $p(2) = 0$, er 2 rod i polynomiet.

2.D1.21: a) Det generelle funktionsudtryk for en parabel er $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Parablen er lagt ind i koordinatsystemet, så den er symmetrisk omkring andenaksen, dvs. dens toppunkt ligger på andenaksen og har altså førstekoordinaten 0.

Førstekoordinaten for toppunktet er $-\dfrac{b}{2a}$, dvs. man har $-\dfrac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow b = 0$.

Da tunnelen er 3 meter høj, skærer parablen andenaksen i $(0,3)$, dvs. $c = 3$.

Skæringerne med førsteaksen er i $(-3,0)$ og $(3,0)$.

Punktet $(3,0)$ indsættes i funktionsudtrykket sammen med de fundne værdier for *b* og *c*:

$0 = a \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 3 \Leftrightarrow 0 = 9a + 3 \Leftrightarrow 9a = -3 \Leftrightarrow a = -\dfrac{3}{9} = -\dfrac{1}{3}$. **Altså er** $p(x) = -\dfrac{1}{3} \cdot x^2 + 3$

2.D1.22: a) Da middagen varer 2 timer, og alkoholpromillen under middagen vokser med 0,6 pr. time, vil manden lige efter middagen have en alkoholpromille på 1,2. Da alkoholpromillen efterfølgende aftager med 0,2 pr. time, vil der efterfølgende gå 6 timer, inden alkoholen er nede på 0. Dermed er der samlet gået **8 timer.**

b) Hældningerne henholdsvis under og efter middagen er $0,6$ og $-0,2$, når tiden *t* måles i timer. Hvis alkoholpromillen er *p*, har man:

$$\underline{\underline{p(t)=\begin{cases}0,6\cdot t & ;\ 0\le t<2\\ -0,2\cdot t+1,6 & ;\ 2\le t\le 8\end{cases}}}$$

"Begyndelsesværdien" er 1,6, da man på den måde sikrer, at promillen er 1,2, når $t=2$.

2.D1.23: a) Da man kan køre 300 km for 1200 kr., og de sidste 200 km koster 1,30 kr. pr. km, bliver den samlede pris *f*:

$$f=(1200+1,30\cdot 200)\,\text{kr.}=(1200+260)\,\text{kr.}=\underline{\underline{1460\,\text{kr.}}}$$

b) Hvis man kører mere end 300 km, skal man betale (*x* er antal kørte km og *f* måles i kr.):

$$f(x)=1200+(x-300)\cdot 1,3=1200+1,3x-390=810+1,3x\ .$$

Hermed bliver gaffelforskriften: $\underline{\underline{f(x)=\begin{cases}1200 & ;\ 0\le x\le 300\\ 1,3x+810 & ;\ 300<x\end{cases}}}$

2.D1.24: a) ***p*: Trykket målt i atm.**
***x*: Dykkets dybde målt i meter under havoverfladen**

Da trykket stiger med 1,0 atm for hver 10 m, vil det stige med 0,10 atm for hver 1 meter, dvs. hældningen er 0,1. Og da trykket er 1 atm ved havoverfladen ($x=0$), er begyndelsesværdien 1.

$$\underline{\underline{p(x)=0,1\cdot x+1}}$$

2.D1.25: $f(x)=2^x$, $g(x)=2^{-x}$, $h(x)=x^2+1$

a) $h(x)$ er et andengradspolynomium, dvs. grafen for *h* er en parabel. **Dermed svarer *h* til *B*.**

f er en eksponentialfunktion med grundtallet større end 1 (da $2>1$), dvs det er en voksende funktion, og **dermed må *f* svare til *C*.**

g er en eksponentialfunktion med grundtallet mindre end 1 (da $2^{-x}=\frac{1}{2^x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$), dvs. det er en aftagende funktion, og **dermed må *g* svare til *A*.**

2.D1.26: $f(x)=\ln(x)$, $g(x)=\frac{1}{x}$, $h(x)=2^x$, $k(x)=\frac{1}{x^2}$

a) *f* er en logaritmefunktion, og grafen for en logaritmefunktion ligger i 1. og 4. kvadrant, dvs. ***f* svarer til *C*.**
h er en eksponentialfunktion, og grafen for den ligger i 1. og 2. kvadrant, dvs. ***h* svarer til *B*.**
g og *k* er begge potensfunktioner, og begge er aftagende. Når *x*-værdierne er større end 1, vil $k(x)<g(x)$, da nævneren i *k* bliver større. Dermed har man ***g* svarer til *D*** og ***k* svarer til *A*.**

2.D1.27: $f(x)=\ln(x)+1$, $g(x)=x^2+1$, $h(x)=\mathrm{e}^x$

a) *f* er en logaritmefunktion, og grafen for en logaritmefunktion ligger i 1. og 4. kvadrant, dvs. ***f* svarer til *C*.**
h er en eksponentialfunktion, og grafen for den ligger i 1. og 2. kvadrant, dvs. ***h* svarer til *A*.**
$g(x)$ er et andengradspolynomium, dvs. grafen for *g* er en parabel. **Dermed svarer *g* til *B*.**

2.D1.28: $f(x)=0{,}5^x \quad , \quad g(x)=2^x \quad , \quad h(x)=0{,}5^x+2$

a) Graferne for *f* og *g* skal gå gennem punktet $(0{,}1)$, mens grafen for *h* skal gå gennem $(0{,}3)$.

Dermed er *B* grafen for *h*.
g er en eksponentialfunktion med grundtallet større end 1 (da $2>1$), dvs det er en voksende funktion, og **dermed er *A* grafen for *g*.**
f er en eksponentialfunktion med grundtallet mindre end 1, dvs. det er en aftagende funktion, og **dermed er *C* grafen for *f* .**

2.D1.29: $f(x)=3\cdot 1{,}2^x \quad , \quad g(x)=2\cdot f(x) \quad , \quad h(x)=f(x)+3$

a) Da $f(0)=3\cdot 1{,}2^0=3\cdot 1=3$, skal grafen for *f* gå gennem punktet $(0{,}3)$.

Da $g(0)=2\cdot f(0)=2\cdot 3=6$, skal grafen for *g* gå gennem punktet $(0{,}6)$.

Da $h(0)=f(0)+3=3+3=6$, skal grafen for *h* gå gennem punktet $(0{,}6)$.

Dermed er *C* grafen for *f*.
Grafen for *h* er en parallelforskydning af grafen for *f* med 3 lodret op, dvs. ***B* er grafen for *h*.**
Grafen for *g* fremkommer ved, at funktionsværdierne for *f* det pågældende sted fordobles, og **dermed er *A* grafen for *g*.**

2.D1.30: $f(x)=x^2-3x+3$

a) $d=b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 3=9-12=\underline{\underline{-3}}$

b) Da diskriminanten er negativ, må parablen ikke skære førsteaksen.
b-værdien er -3, og den angiver hældningen for tangenten til grafen i $x=0$, dvs. dette sted skal tangenthældningen være negativ. For graferne *A* og *C* gælder dette kun for *C*. Dvs. ***C* er graf for *f*.**

2.D1.31: $f(x)=ax^2+bx+c \qquad a=\frac{1}{2}$

a) *c* angiver skæringen med andenaksen, og den kan på grafen aflæses til -1,5, dvs. $\underline{\underline{c=-\frac{3}{2}}}$

Toppunktets førstekoordinat aflæses på grafen til 1, og da den er $-\frac{b}{2a}$, har man:

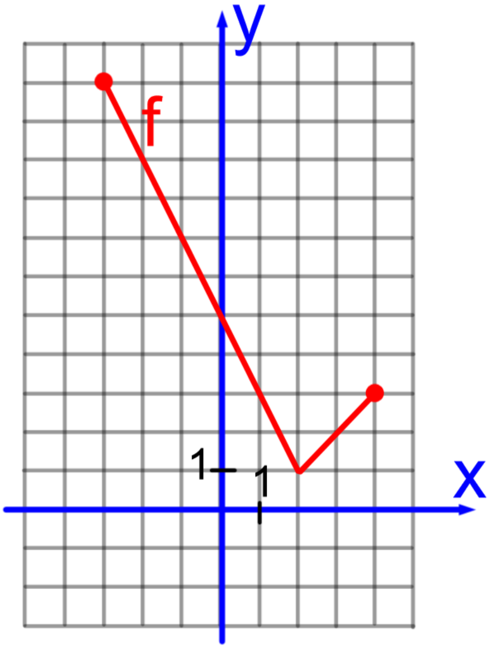
$$-\frac{b}{2\cdot\frac{1}{2}}=1 \iff -\frac{b}{1}=1 \iff \underline{\underline{b=-1}}$$

2.D1.32: $p(x)=ax^2+bx+c$

a) Jo større *a*-værdi, jo smallere er parablen, dvs. ***C* har størst *a*-værdi.**
b) *b* angiver hældningen af tangenten til grafen i $x=0$, og det ses, at denne hældning er mindst for grafen *A*, dvs. ***A* har den mindste *b*-værdi.**

2.D1.33: $f(x)=\begin{cases} -2x+5 & ; \ -3\le x\le 2 \\ x-1 & ; \ 2<x\le 4 \end{cases}$

a) Man kan aflæse intervallerne til højre i gaffelforskriften, og man kan se, at i begge delintervaller er det lineære funktioner. Den første med negativ hældning og den anden med positiv.



2.D1.34: $f(x)=\begin{cases} -(x-1)^2 & ; \ -4\le x\le 1 \\ x-1 & ; \ 1<x\le 5 \end{cases}$

a) Den første *x*-værdi i tabellen ligger i det øverste interval, mens den anden *x*-værdi ligger i det nederste:

$f(-2)=-(-2-1)^2=-(-3)^2=-9$

$f(2)=2-1=1$

Man kan ikke vide hvilket af de to udtryk, man skal bruge, så begge afprøves:

$-(x-1)^2=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ Inden for gyldighedsområdet

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ Uden for gyldighedsområdet

Man må ikke bruge en *x*-værdi, der ligger uden for gyldighedsområdet, men den samme *x*-værdi ligger inden for gyldighedsområdet for det øverste udtryk, hvor den altså godt kan anvendes.

Man har altså:

x	–2	2	**1**
$f(x)$	**-9**	**1**	0

2.D1.35: $f(x)=x^2 \qquad g(x)=\dfrac{16}{x} \qquad x>0$

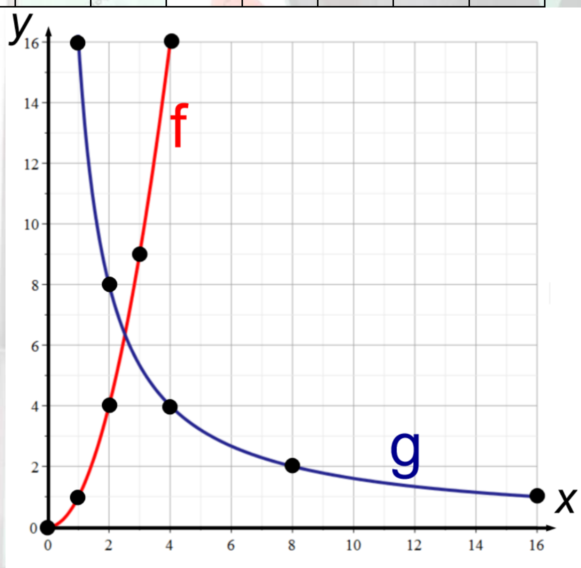
a) $f(2)=2^2=\underline{\underline{4}}$

$g(2)=\dfrac{16}{2}=\underline{\underline{8}}$

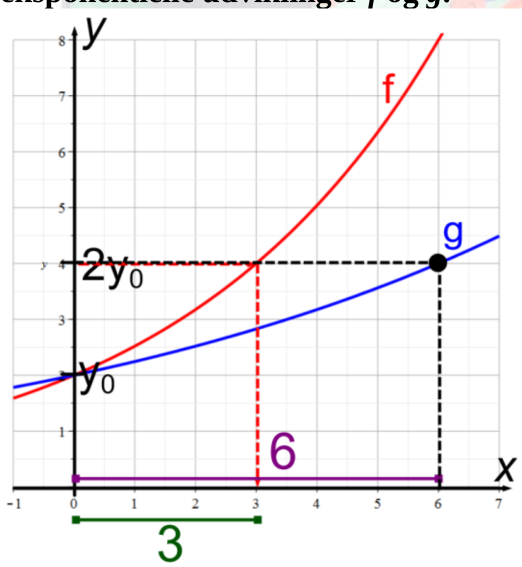
b) Grafen for *f* er en parabel med grenene opad og toppunkt i origo. Man skal kun tegne den ene gren, da det er i første kvadrant. Grafen for *g* er en hyperbel. Igen skal man kun tegne den ene gren. Man kan bruge følgende støttepunkter:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0	1	4	9	16	25	36

x	0,5	1	2	4	8	16	32
$g(x)$	32	16	8	4	2	1	0,5



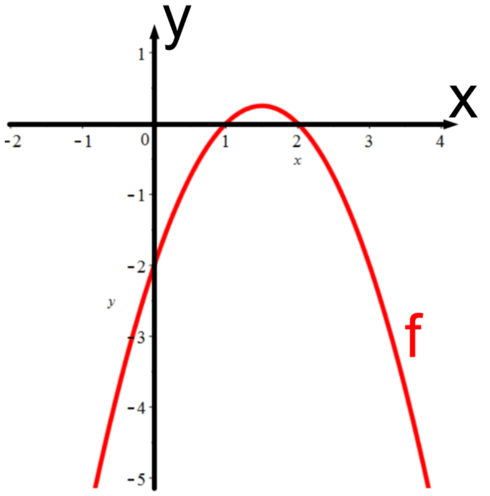
2.D1.36: Der er fejl i opgaveformuleringen. En eksponentialfunktion går gennem (0,1). Der menes **eksponentielle udviklinger *f* og *g*.**



Fordoblingskonstanten for *f* aflæses ved at fordoble start-*y*-værdien (dvs. 2 fordobles til 4), hvorefter man på førsteaksen kan aflæses fordoblingskonstanten for *f* til 3 (de røde stiplede linjer). Da *g*'s fordoblingskonstant skal være dobbelt så stor, skal den være 6. Da graferne for *f* og *g* begge går gennem (0,2), skal grafen for *g* gå gennem punktet (6,4), og det skal være en konveks kurve.

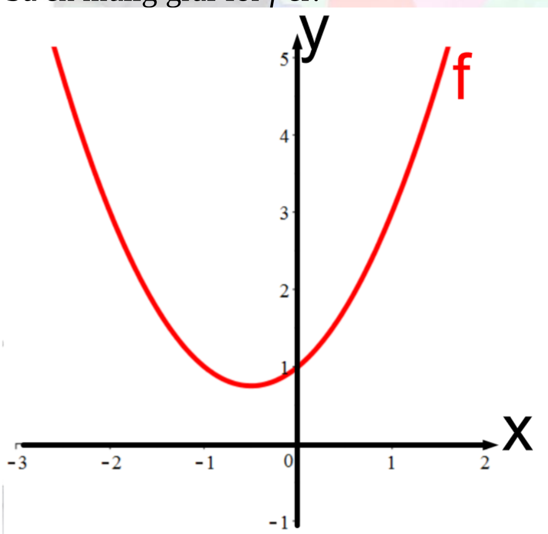
2.D1.37: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Da funktionsudtrykket er et andengradspolynomium, er grafen for *f* en parabel.
Da $a < 0$, skal grenene vende nedad. Da $c < 0$, skærer grafen andenaksen på den negative del. Da $d > 0$, skærer parablen førsteaksen to steder.
Så en mulig graf for *f* er:



2.D1.38: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Da $a > 0$, skal grenene vende opad. Da $c > 0$, skærer grafen andenaksen på den positive del. Da $d < 0$, skærer parablen ikke førsteaksen.
Så en mulig graf for *f* er:



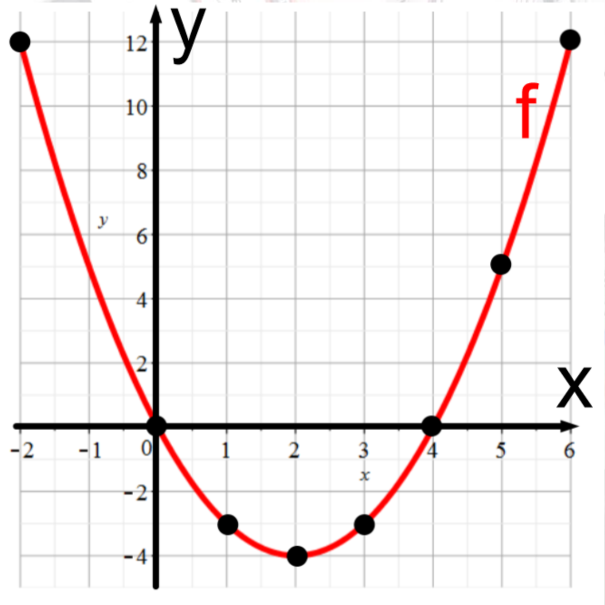
2.D1.39: $f(x) = x^2 - 4x$

a) Skæringer med førsteaksen er de steder, hvor funktionsværdien er 0, så man har:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 4 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0 \vee x = 4}}$

b) Parablen kan skitseres ud fra støttepunkter:

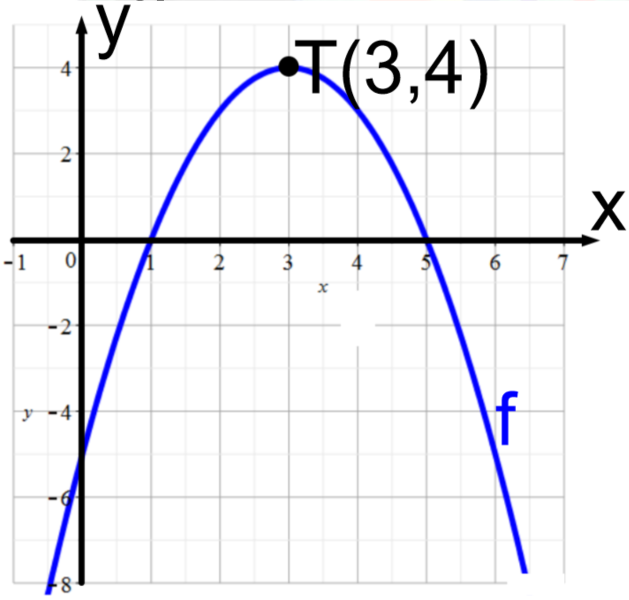
x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12



2.D1.40: $f(x) = ax^2 + bx + c$ $\quad c < 0 \quad T(3,4)$

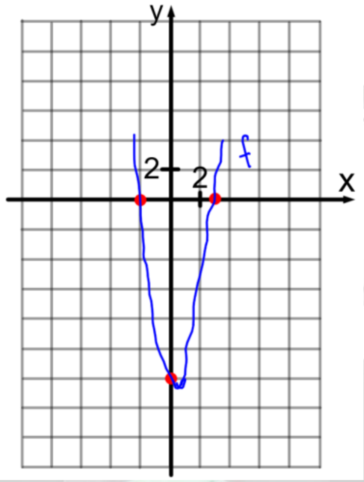
a) Da $c < 0$, skærer grafen for *f* (der er en parabel, da funktionsudtrykket er et andengradspolynomium) andenaksen på den negative del. Da toppunktet ligger over førsteaksen, må grenene derfor nødvendigvis pege nedad, så de kan komme under førsteaksen.

Så en mulig parabel er:



2.D1.41: $f(0)=-12$, $f(3)=0$, $f(-2)=0$

a) Da funktionen er et andengradspolynomium, er grafen en parabel, og en skitse kan så tegnes ud fra de tre angivne punkter $(-2,0),(0,-12)$ og $(3,0)$.



Man kender de to rødder -2 og 3, så forskriften for *f* er:

$f(x)=a\cdot(x-r_1)\cdot(x-r_2)=a\cdot(x-(-2))\cdot(x-3)=a\cdot(x+2)\cdot(x-3)$

Punktet $(0,-12)$ kan så anvendes til at bestemme *a*. Man indsætter koordinaterne i forskriften:

$-12=a\cdot(0+2)\cdot(0-3)\ \Leftrightarrow\ -12=a\cdot(-6)\ \Leftrightarrow\ a=2$

Dvs. forskriften for *f* er: $\underline{\underline{f(x)=2\cdot(x+2)\cdot(x-3)}}$

b) Linjen *l* har ligningen $y=-2x-4$. Skæringsstederne for de to grafer kan bestemmes ved at finde de steder, hvor graferne har ens *y*-koordinater:

$$f(x)=y$$
$$2\cdot(x+2)\cdot(x-3)=-2x-4\ \Leftrightarrow$$
$$2\cdot(x^2+2x-3x-6)=-2x-4\ \Leftrightarrow$$
$$2x^2-2x-12+2x+4=0\ \Leftrightarrow$$
$$2x^2-8=0\ \Leftrightarrow$$
$$x^2-4=0\ \Leftrightarrow$$
$$x^2=4\ \Leftrightarrow$$
$$x=-2\ \vee\ x=2$$

De tilsvarende *y*-værdier findes nemmest ved indsættelse i linjen ligning (og sværest ved indsættelse i parablens funktionsforskrift):

$x=-2:\ y=-2\cdot(-2)-4=4-4=0$

$x=2:\ \ y=-2\cdot2-4=-4-4=-8$

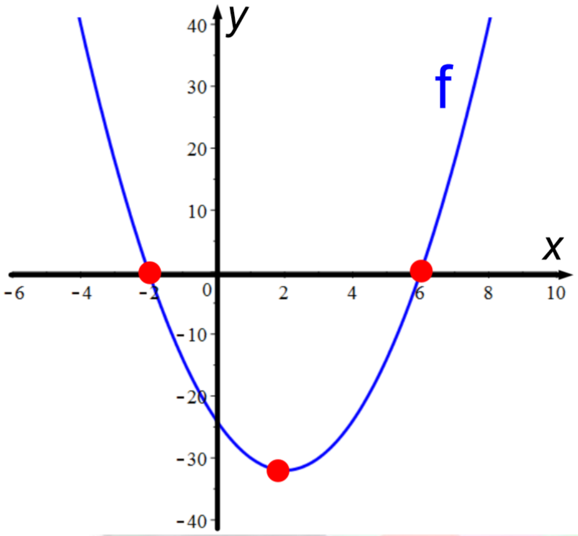
Dvs. koordinatsættene for de to skæringspunkter er $\underline{\underline{(-2,0)\text{ og }(2,-8)}}$

2.D1.42: $f(x)=2\cdot(x+2)\cdot(x-6)$

a) Funktionsudtrykket er et andengradspolynomium, så grafen er en parabel. Grenene peger opad, da *a*-værdien er positiv (2-tallet foran parenteserne). Rødderne er -2 og 6 (dvs. parablen skærer førsteaksen i $(-2,0)$ og $(6,0)$), og toppunktets førstekoordinat ligger midt mellem de to rødder, dvs den er $\frac{-2+6}{2}=2$. Toppunktets andenkoordinat kan bestemmes ved indsættelse i forskriften:

$f(2)=2\cdot(2+2)\cdot(2-6)=2\cdot4\cdot(-4)=-32$

Med de to skæringspunkter og toppunktet som hjælpepunkter kan parablen skitseres:



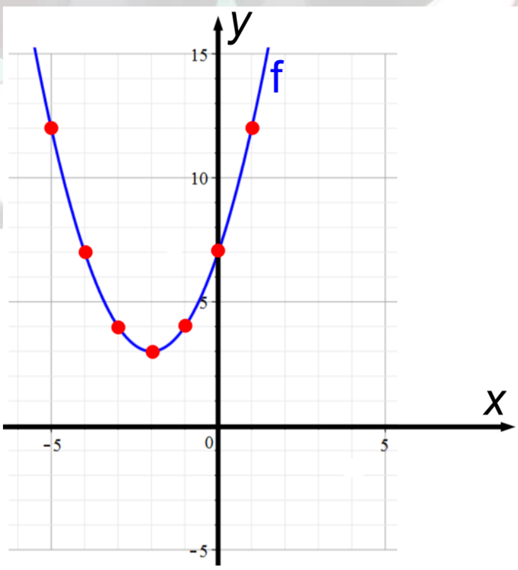
2.D1.43: $f(x)=(x+2)^2+3$

a) Parablen angivet ved funktionsforskriften $f(x)=a\cdot(x-h)^2+k$ har toppunkt i (h,k), så ud fra forskriften kan man aflæse, at toppunktet for grafen for *f* er:

$\underline{\underline{T(-2,3)}}$

Diskriminantens fortegn hænger sammen med antallet af andengradspolynomiets rødder.
Første led i funktionsudtrykket er et kvadrat, så det kan ikke blive negativt, og da man lægger 3 til kvadratet, vil $f(x)>0$ for alle *x*-værdier, dvs. grafen skærer ikke førsteaksen nogen steder (der er ingen rødder). Dermed er **diskriminanten negativ**.

b) Toppunktets koordinater kendes, og grafen er en parallelforskydning af parablen givet ved forskriften $f(x)=x^2$ (der har grenene pegende opad). Ud fra dette kan tegnes en skitse af grafen for *f*:



2.D1.44: a) Grafen består af to rette linjer, der mødes i $(2,1)$, så forskriften skal være en gaffelforskrift.

Linjen til venstre for $x = 2$ aflæses til at gå gennem punkterne $(-4,5)$ og $(2,1)$.

Linjen til højre for $x = 2$ aflæses til at gå gennem punkterne $(7,5)$ og $(2,1)$.

Ligningerne kan så bestemmes:

Venstre:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-1}{-4-2} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$$

$$b = y_2 - a \cdot x_2 = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 2 = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$$

Dvs. ligningen er $y = -\frac{2}{3} \cdot x + \frac{7}{3}$

Højre:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-1}{7-2} = \frac{4}{5}$$

$$b = y_2 - a \cdot x_2 = 1 - \frac{4}{5} \cdot 2 = 1 - \frac{8}{5} = -\frac{3}{5}$$

Dvs. ligningen er $y = \frac{4}{5} \cdot x - \frac{3}{5}$

Så bliver forskriften for *f* (det er ligegyldigt, om lighedstegnet knyttes det øverste eller nederste ulighedstegn):

$$\underline{\underline{f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3} \cdot x + \frac{7}{3} & , \ x < 2 \\ \frac{4}{5} \cdot x - \frac{3}{5} & , \ x \geq 2 \end{cases}}}$$

2.D1.45: $f(x) = x^2$

a) $g(x) = a \cdot (x-h)^2 + k$ er forskriften for parablen fremkommet ved parallelforskydning af parablen med forskriften $h(x) = a \cdot x^2$, så toppunktet flyttes til (h,k).

Da parallelforskydningen i dette tilfælde er 4 i lodret retning, er toppunktet for grafen for *g* $(0,4)$, og da *a*-værdien er 1, har man altså:

$\underline{\underline{g(x)}} = (x-0)^2 + 4 = \underline{\underline{x^2 + 4}}$

b) Da grafen for *h* fremkommer ved en parallelforskydning med 2 til højre, får den toppunktet $(2,0)$, og dermed bliver forskriften:

$\underline{\underline{h(x)}} = (x-2)^2 + 0 = \underline{\underline{(x-2)^2}}$

2.D1.46: a) Grafen for $g(x) = f(x-2) + 1$ svarer til grafen for *f* parallelforskudt med 2 mod højre og 1 op.

Dette ses på figuren at svare til graf *C*, dvs. **graf *C* er graf for funktionen *g***.

2.D1.47: $h(x) = f(x+1) - 2$

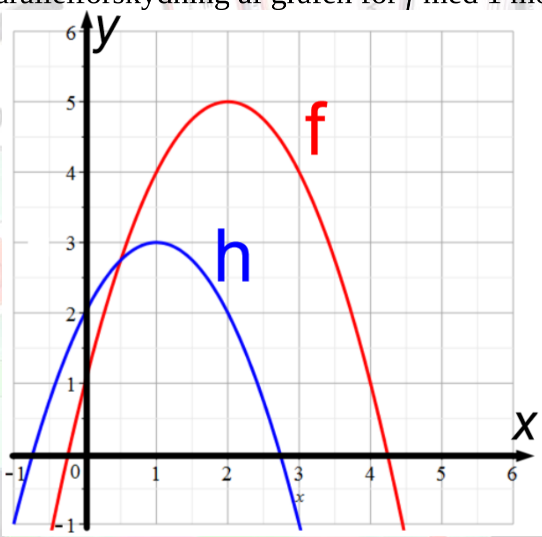
a) $h(2) = f(2+1) - 2 = f(3) - 2$. På figuren aflæses det, at $f(3) = 4$, så man har:

$h(2) = 4 - 2 = \underline{\underline{2}}$

$h(-1) = f(-1+1) - 2 = f(0) - 2$. På figuren aflæses det, at $f(0) = 1$, så man har:

$h(-1) = 1 - 2 = \underline{\underline{-1}}$

b) Grafen for *h* er en parallelforskydning af grafen for *f* med 1 mod venstre og 2 ned:



2.D1.48: $g(x) = f(x+1) \quad h(x) = f(x-1) + 2$

a) Da *x* er erstattet af $x+1$, når man går fra *f* til *g*, er grafen for *g* en parallelforskydning af grafen for *f* med 1 mod venstre. Så figuren viser, at ***C* hører til *g***, og ***B* hører til *f***.

Ud fra forskriften $h(x) = f(x-1) + 2$ ses det, at grafen for *h* er en parallelforskydning af grafen for *f* med 1 til højre og 2 op. Dermed ses det på figuren, at ***A* hører til *h***.

2.D1.49: $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x$

a) Den afledede funktion af *f* bestemmes ved ledvis differentiation:

$f'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 2x + 3 = \underline{\underline{6x^2 - 2x + 3}}$

2.D1.50: $f(x) = \ln(x) \cdot (5x^4 + 2)$

a) Først bestemmes den afledede funktion med produktreglen, hvorefter differentialkvotienten i 1 bestemmes ved indsættelse:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot (5x^4 + 2) + \ln(x) \cdot 20x^3$$

$$f'(1) = \frac{1}{1} \cdot (5 \cdot 1^4 + 2) + \ln(1) \cdot 20 \cdot 1^3 = 1 \cdot (5+2) + 0 \cdot 20 \cdot 1 = \underline{\underline{7}}$$

2.D1.51: $f(x) = 2 \cdot e^{4x+2}$

a) Det er en sammensat funktion, så kædereglen anvendes ved differentiationen:

$f'(x) = 2 \cdot 4 \cdot e^{4x+2} = \underline{\underline{8 \cdot e^{4x+2}}}$

2.D1.52: $f(x) = (3x+5)^{10}$

a) Det er en sammensat funktion, så kædereglen anvendes:

$f'(x) = 3 \cdot 10 \cdot (3x+5)^9 = \underline{\underline{30 \cdot (3x+5)^9}}$

2.D1.53: $f(x)=a\cdot x^3+5x^2+2x+1$

a) Den afledede bestemmes ved ledvis differentiation:

$f'(x)=a\cdot 3x^2+5\cdot 2x+2+0=\underline{\underline{3ax^2+10x+2}}$

b) $f'(1)=-3 \Leftrightarrow$

$3a\cdot(1)^2+10\cdot 1+2=-3 \Leftrightarrow$

$3a+12=-3 \Leftrightarrow 3a=-15 \Leftrightarrow \underline{\underline{a=-5}}$

2.D1.54: $f(x)=x^3+1{,}5\cdot x^2-6x$

a) Først findes de steder, hvor der er vandret tangent, ved at differentiere (ledvis differentiation) og sætte den afledede funktion til 0:

$f'(x)=3x^2+3x-6$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+3x-6=0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow (x+2)\cdot(x-1)=0 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=1$

Fortegnet for den anden afledede de to steder fortæller, hvilken type sted der er tale om:

$f''(x)=6x+3$

$f''(-2)=6\cdot(-2)+3=-9<0$, dvs. lokalt maksimumssted.

$f''(1)=6\cdot 1+3=9>0$, dvs. lokalt minimumssted.

Dvs. ***f* er voksende i intervallerne]-∞,-2] og [1,∞[og aftagende i intervallet [-2,1].**

2.D1.55: $f(2)=5 \quad f'(2)=-4$

a) Det første udsagn fortæller os, at tangenten i 2 rører i punktet (2,5), mens det andet udsagn fortæller, at hældningen for tangenten er -4. Dermed kan ligningen for tangenten til grafen for *f* i punktet $(2, f(2))$ bestemmes:

$y-y_0=a\cdot(x-x_0)$

$y-5=-4\cdot(x-2) \Leftrightarrow \underline{\underline{y=-4x+13}}$

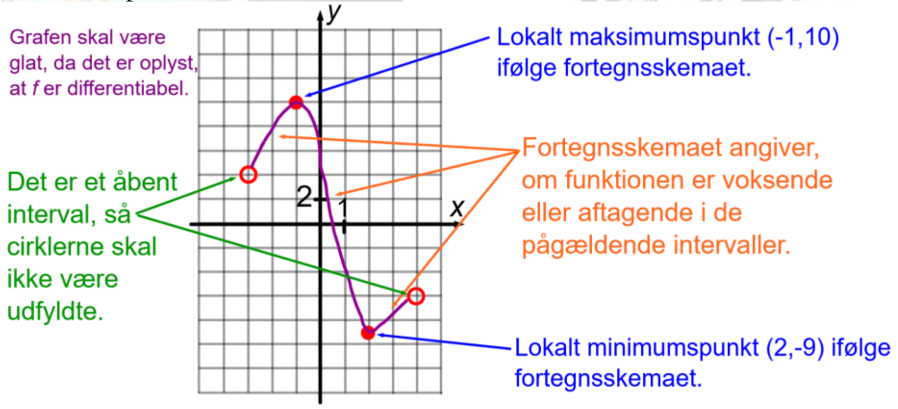
2.D1.56: $f(x)=e^x+7x$

For at kunne udtale sig om *f* 's monotoniegenskaber ses på den afledede funktion:

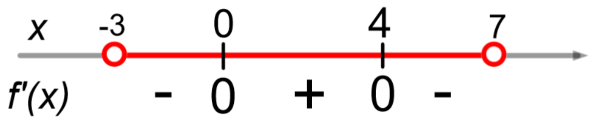
$f'(x)=e^x+7>0$, da eksponentialfunktionen kun giver positive værdier.

Da den afledede funktion er positiv for alle *x*-værdier, er *f* en voksende funktion.

2.D1.57: Endepunkterne **behøver** ikke at ligge mellem de to lokale ekstremumsværdier som de gør på nedenstående eksempel.



2.D1.58: På figuren aflæses det, at der er lokalt minimum i 0 og lokalt maksimum i 4. Dermed bliver fortegnslinjen:



2.D1.59: a) Figuren viser grafen for **den afledede funktion**, dvs. ligningen $f'(x)=0$ løses ved at aflæse de steder, hvor grafen skærer førsteaksen:

a) $f'(x)=0 \quad \vee \quad \underline{\underline{x=-2 \quad \vee \quad x=3 \quad \vee \quad x=5}}$

b) $f'(3)$ er funktionsværdien i 3 for den afledede funktion, og den aflæses som funktionsværdien på figuren (det er det midterste af de punkter, der blev aflæst ovenfor):

$\underline{\underline{f'(3)=0}}$

c) Fortegnet for den afledede funktion fortæller, om funktionen er voksende eller aftagende. Når den afledede funktion er negativ (grafen ligger under førsteaksen), er funktionen aftagende, og når den afledede funktion er positiv (grafen ligger over førsteaksen), er funktionen voksende.
Dvs. ***f* er aftagende i intervallet [-3,-2], voksende i intervallet[-2,3], aftagende i intervallet [3,5] og voksende i intervallet [5,6].**

2.D1.60: ***

2.D2

3.D1

3.D1.1:

3.D2

3.D2.1:

3.D2.2:

3.D2.3:

3.D2.4:

3.D2.5:

3.D2.6:

3.D2.7:

3.D2.8:

3.D2.9:

3.D2.10:

3.D2.11:

3.D2.12:

3.D2.13:

3.D2.14:

3.D2.15:

3.D2.16:

3.D2.17:

$C(1,-2)$ $\quad P(4, 2)$

a) Cirklens ligning er $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

Man kan bestemme radius ved at udnytte, at centrum C har koordinaterne (a, b), mens punktet P på cirklen har koordinaterne (x, y):

$$r=\sqrt{(4-1)^2+(2-(-2))^2}=5$$

Da man nu kender både radius og centrums koordinater, kan cirklens ligning opskrives:

$$\underline{\underline{(x-1)^2+(y+2)^2=25}}$$

b) For at kunne bestemme en ligning for tangenten skal man kende røringspunktet P's koordinater (hvilket man allerede gør) samt tangentens hældning.

Hældningen bestemmes ved at udnytte, at tangenten står vinkelret på radius. Så først bestemmes hældningen for den linje, der går gennem punkterne C og P:

$$a_r=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-(-2)}{4-1}=\frac{4}{3}$$

Da tangenten og radius er ortogonale, er produktet af deres hældninger -1:

$$a_r \cdot a_t=-1 \Leftrightarrow a_t=-\frac{1}{a_r}=-\frac{3}{4}$$

Tangentens hældning og røringspunktets koordinater indsættes i ligningen for en ret linje:

$$y-y_0=a\cdot(x-x_0)$$

$$y-2=-\frac{3}{4}\cdot(x-4) \Leftrightarrow \underline{\underline{y=-\frac{3}{4}x+5}}$$

c) Man kan vise, at en linje er en tangent til en cirkel, ved at vise, at der netop er ét fælles punkt for de to geometriske steder, så Maple sættes til at løse ligningssystemet:

$$\left[4x+3y+27=0,\ (x-1)^2+(y+2)^2=25\right] \xrightarrow{\text{solve}} \{x=-3, y=-5\}$$

Der er netop ét fælles punkt (røringspunkt), så linjen er en tangent til cirklen.

3.D2.18:

Cirkel: $x^2+2x+y^2-6y=15$ $\quad$ Linje: $x-2y+2=0$

a) Skæringspunkterne mellem de to geometriske steder bestemmes ved at lade Maple løse to ligninger med to ubekendte:

$$\left[x^2+2x+y^2-6y=15,\ x-2y+2=0\right] \xrightarrow{\text{solve}} \{x=-4, y=-1\}, \{x=4, y=3\}$$

Dvs. skæringspunkterne er $\underline{\underline{(-4,-1)}}$ og $\underline{\underline{(4, 3)}}$

b) Da Q er punktet med den mindste førstekoordinat, er $Q(-4,-1)$.

For at kunne bestemme en ligning for tangenten skal man kende røringspunktet Q's koordinater (se ovenfor) samt tangentens hældning.

Hældningen bestemmes ved at udnytte, at tangenten står vinkelret på radius. Man skal derfor først finde koordinatsættet for cirklens centrum C, så man kan finde hældningen for linjen gennem C og Q:

Cirklens ligning omskrives ved kvadratkomplettering for at kunne aflæse centrums koordinater:

$$(x+1)^2+(y-3)^2=15+1^1+3^2=25$$

Dvs. centrum koordinater er $(-1, 3)$.

Hældningen for linjen gennem $C(-1, 3)$ og $Q(-4,-1)$ er:

$$a_r=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-1-3}{-4-(-1)}=\frac{4}{3}$$

Da tangenten står vinkelret på denne linje, har man $a_r \cdot a_t = -1$:

$$a_t = \frac{-1}{a_r} = -\frac{3}{4}$$

Tangentens hældning og røringspunktets koordinater indsættes i ligningen for en ret linje:

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

$$y - (-1) = -\frac{3}{4} \cdot (x - (-4)) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = -\frac{3}{4}x - 4}}$$

3.D2.19:

Cirkel: $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 25$ Linje: $4x - 3y + k = 0$

a) Skæringspunkterne mellem linjen og cirklen bestemmes ved at lade Maple løse ligningssystemet bestående af to ligninger med to ubekendte:

$$\left[(x+2)^2 + (y-5)^2 = 25,\ 4x - 3y + 23 = 0\right] \xrightarrow{\text{solve}} \{x = -5, y = 1\}, \{x = 1, y = 9\}$$

Dvs. skæringspunkterne er $\underline{\underline{(-5, 1) \text{ og } (1, 9)}}$

b) Hvis linjen skal være tangent til cirklen, skal afstanden fra centrum til linjen svare til radius:

$$5 = \frac{|4 \cdot (-2) - 3 \cdot 5 + k|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \xrightarrow{\text{solve}} \{k = 48\}, \{k = -2\}$$

Dvs. $\underline{\underline{k = -2 \vee k = 48}}$

3.D2.20:

3.D2.21:

Cirkel: $x^2 - 6x + y^2 + 2y + 1 = 0$

a) Cirklens radius og koordinatsættet til cirklens centrum kan bestemmes, når man med kvadratkomplettering har omskrevet cirklens ligning til formen

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = -1 + 3^2 + 1^2 = 9$$

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 3^2$$

Man kan herudfra aflæse, at $\underline{\underline{C(3, -1)}}$ og $\underline{\underline{r = 3}}$

b) Linje: $3x - 4y + 3 = 0$

Man kan undersøge, om en ret linje er en tangent til en cirkel, ved at tjekke, at de har netop ét punkt fælles (et røringspunkt). Dette gøres ved at lade Maple løse ligningssystemet med to ligninger med to ubekendte:

$$\left[x^2 - 6x + y^2 + 2y + 1 = 0,\ 3x - 4y + 3 = 0\right] \xrightarrow{\text{solve}}$$

$$\left\{x = \frac{27}{25} + \frac{4\,\mathrm{I}\sqrt{31}}{25}, y = \frac{39}{25} + \frac{3\,\mathrm{I}\sqrt{31}}{25}\right\}, \left\{x = \frac{27}{25} - \frac{4\,\mathrm{I}\sqrt{31}}{25}, y = \frac{39}{25} - \frac{3\,\mathrm{I}\sqrt{31}}{25}\right\}$$

Man får to komplekse løsninger (dvs. ingen reelle), så **linjen er ikke tangent til cirklen.**

3.D2.22:

$C(5, 4) \quad P(9, 3)$

a)

a) Cirklens ligning er $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

Man kan bestemme radius ved at udnytte, at centrum C har koordinaterne (a, b), mens punktet P på cirklen har koordinaterne (x, y):

$r^2 = (9-5)^2 + (3-4)^2 = 17$

Da man nu kender både (kvadratet på) radius og centrums koordinater, kan cirklens ligning opskrives:

$\underline{\underline{(x-5)^2 + (y-4)^2 = 17}}$

b) For at kunne bestemme en ligning for tangenten t skal man kende røringspunktet P's koordinater (hvilket man allerede gør) samt tangentens hældning.

Hældningen bestemmes ved at udnytte, at tangenten står vinkelret på radius. Så først bestemmes hældningen for den linje, der går gennem punkterne C og P:

$$a_r = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-4}{9-5} = -\frac{1}{4}$$

Da tangenten og radius er ortogonale, er produktet af deres hældninger -1:

$$a_r \cdot a_t = -1 \Leftrightarrow a_t = -\frac{1}{a_r} = 4$$

Tangentens hældning og røringspunktets koordinater indsættes i ligningen for en ret linje:

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

$$y - 3 = 4 \cdot (x-9) \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 4x - 33}}$$

c) Den anden tangent, der er parallel med den fundne tangent, ligger diametralt modsat den første tangent (se figuren), dvs. man skal finde det andet skæringspunkt mellem cirklen og linjen gennem C og P. Man kender allerede hældningen $a_r = -\frac{1}{4}$ for denne linje (fundet ovenfor), og da den går gennem C får man (P kan også bruges):

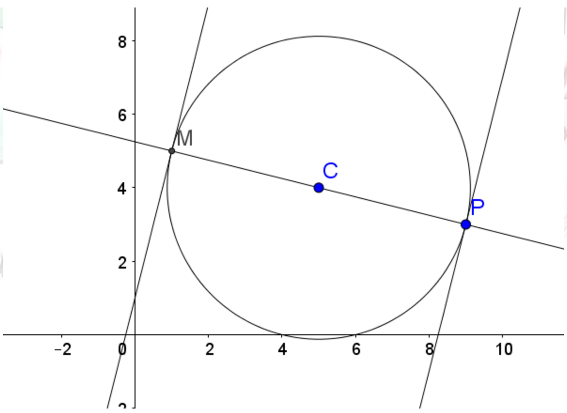
$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

$$y - 4 = -\frac{1}{4} \cdot (x-5)$$

Skæringspunkterne mellem denne linje og cirklen findes ved at lade Maple løse ligningssystemet med to ligninger med to ubekendte:

$$\left[y - 4 = -\frac{1}{4} \cdot (x-5),\ (x-5)^2 + (y-4)^2 = 17\right] \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 9, y = 3\}, \{x = 1, y = 5\}$$

Man kender allerede det første punkt, og den anden tangents røringspunkt er altså $\underline{\underline{(1, 5)}}$



3.D2.23:

3.D2.24:

3.D2.25:

Linjen $l: y = 3x + 10$ Linjen $m: x = 4$

a) Først bestemmes den vinkel, som linjen l danner med førsteaksen:

$with(Gym):$

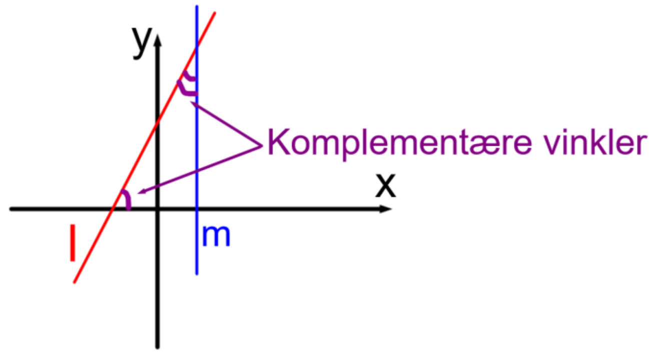
Da man kender hældningen, kan vinklen bestemmes ud fra: $w = \tan^{-1}(|a|)$

$w = arcTan(3) = 71.56505115$

Denne vinkel og den søgte vinkel er komplementære vinkler (se figuren), så man har:

$v = 90° - 71.56505115° = \underline{\underline{18.435°}}$

(Der er selvfølgelig også en stump vinkel, men det er nok at angive den spidse)



3.D2.26:

3.D2.27:

3.D2.28:

3.D2.29:

3.D2.30:

Parabel: $y = 2x^2 - 12x + 19$

a) Toppunktet bestemmes ved hjælp af toppunktsformlen $T\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}\right)$

$$T\left(-\frac{(-12)}{2\cdot 2}, -\frac{(12^2 - 4\cdot 2\cdot 19)}{4\cdot 2}\right) = T(3, 1)$$

Dvs. toppunktet er $\underline{\underline{T(3, 1)}}$

b) Der er oplyst et udtryk for brændpunktet: $B\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-d}{4a}\right)$

$$B\left(-\frac{(-12)}{2\cdot 2}, \frac{1-(12^2 - 4\cdot 2\cdot 19)}{4\cdot 2}\right) = B\left(3, \frac{9}{8}\right)$$

Dvs. brændpunktet er $\underline{\underline{B\left(3, \frac{9}{8}\right)}}$

c) De to punkter har ens førstekoordinat, så afstanden mellem dem er forskellen mellem deres andenkoordinater: $\frac{9}{8} - 1 = \frac{9}{8} - \frac{8}{8} = \frac{1}{8}$

Dvs. afstanden mellem T og B er $\underline{\underline{\frac{1}{8}}}$

3.D2.31:

3.D2.32:

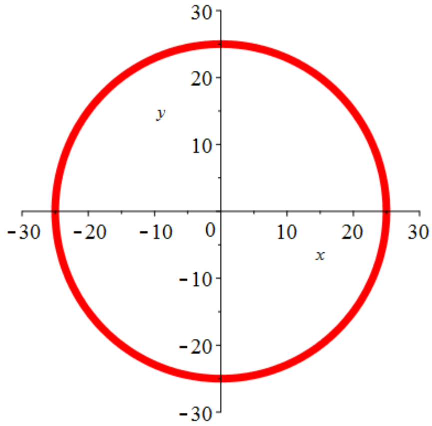
3.D2.33:

3.D2.34:

3.D2.35:

a) Da cirklens radius er 25 (målt i cm), og dens centrum skal være i origo, får den ligningen:

$x^2 + y^2 = 25^2 \rightarrow$



b) Som nævnt er cirklens ligning $\underline{\underline{x^2 + y^2 = 25}}$

c) Hvis punktet D er skæringen mellem andenaksen og den vandrette linje gennem A og B, dannes der en retvinklet trekant BCD med hypotenuselængden 25 og den ene katetelængde 12. Se figuren nedenfor.

Den anden katetelængde kan bestemmes med Pythagoras' Læresætning:

$12^2 + CD^2 = 25^2 \xrightarrow{\text{solve}} \{CD = \sqrt{481}\}, \{CD = -\sqrt{481}\}$

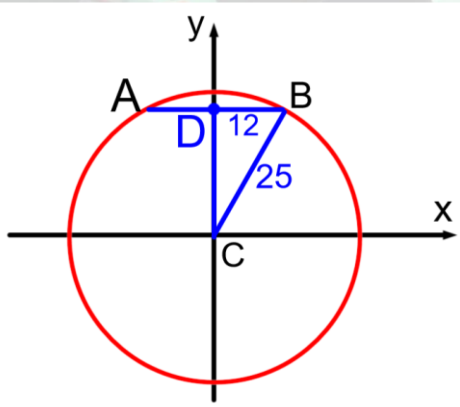
Den negative løsning forkastes, da det er en sidelængde.

Dvs. B's koordinater bliver $\underline{\underline{B(12, \sqrt{481})}}$

Da radius er 25, har man:

$x = 25 - \sqrt{481.} = 3.06828780$

Dvs. højden af det fraskårne træstykke er $\underline{\underline{3.1 \text{ cm}}}$



3.D2.36:

3.D2.37:

a) Da de tre trekanter ACD, BCD og ABD er kongruente, er vinklerne $\angle ADB, \angle ADC$ og $\angle BDC$ kongruente, og da de tilsammen spænder over hele cirklen, bliver:

$$\angle ADB = \frac{360°}{3} = \underline{\underline{120°}}$$

b) Koordinatsættet til punktet A kan bestemmes ved at opskalere det tilsvarende punkt på enhedscirklen med en faktor 50:

$A(50 \cdot Cos(120), 50 \cdot Sin(120)) = A(-25.00000000, 43.30127020)$

Dvs. $\underline{\underline{A(-25, 43.3)}}$

c) Først bestemmes længden af AB med en cosinusrelation:

$$\cos(\angle ADB) = \frac{|AD|^2 + |BD|^2 - |AB|^2}{2 \cdot |AD| \cdot |BD|}$$

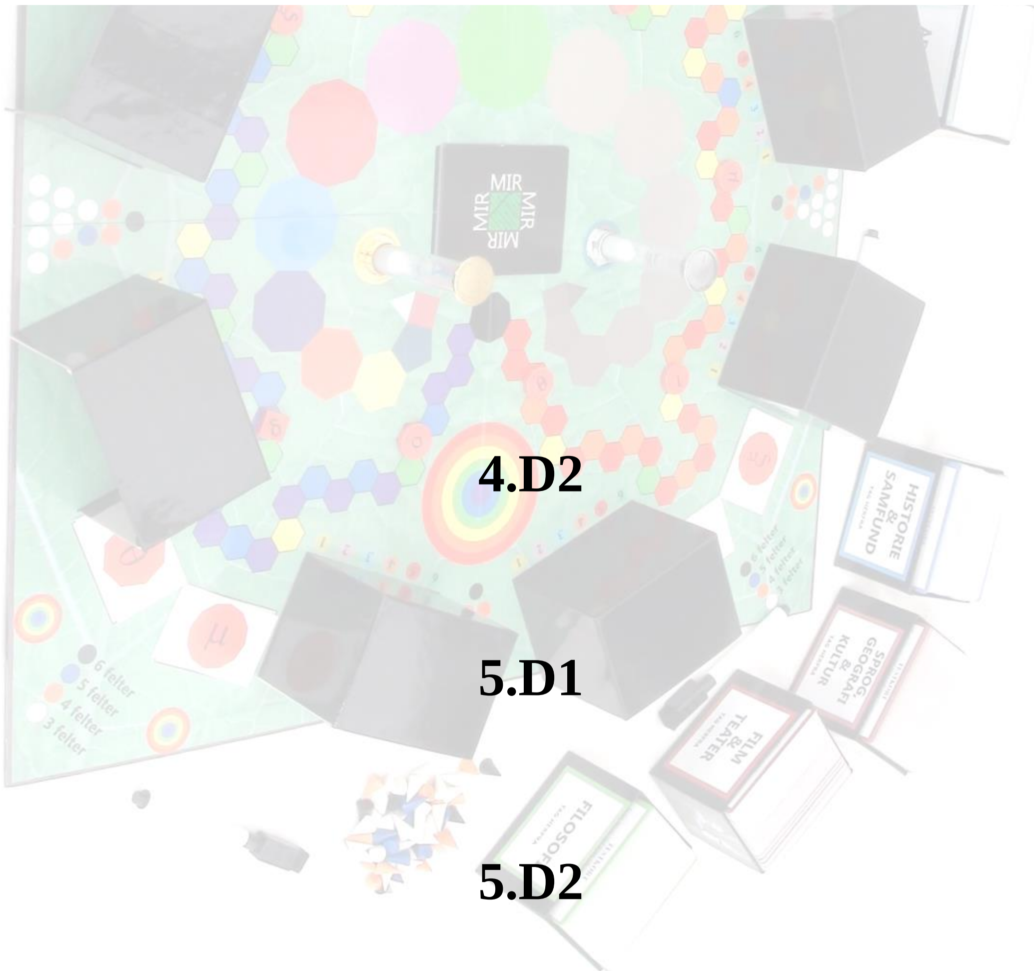
$$solve\left(Cos(120) = \frac{50^2 + 50^2 - AB^2}{2 \cdot 50 \cdot 50}, AB \right) = 86.60254038, -86.60254038$$

Den negative løsning forkastes, da det er en sidelængde, der søges.

Trekant ABC består af tre sider med denne længde:

$O = 3 \cdot 86.60254038 = 259.8076211$

Dvs. at $\underline{\underline{O_{ABC} = 259.8 \text{ cm}}}$



3.D2.38:

3.D2.39:

3.D2.40:

3.D2.41:

4.D2

4.D2.1:

5.D1

5.D1.1:

5.D2

5.D2.1:

6.D1

6.D1.1:

LITTERATUR
NATUR-VIDENSKAB & MATEMATIK
KUNST & MUSIK
HISTORIE & SAMFUND
SPROG, GEOGRAFI & KULTUR
FILM & TEATER
FILOSOFI
MIR
MIR
MIR
6 felter
5 felter
4 felter
3 felter

6.D2

6.D2.1:

LITTERATUR
NATUR, VIDENSKAB & MATEMATIK
KUNST & MUSIK
MIR
HISTORIE & SAMFUND
SPROG, GEOGRAFI & KULTUR
FILM & TEATER
FILOSOFI
6 felter
5 felter
4 felter
3 felter